Problemas resueltos en clase
Independencia Lineal

Ángel Guale
Álgebra Lineal Par. 3-5

Problemas del 2017

Problema 1.

Determine el valor de k para que el conjunto S sea linealmente dependiente, donde

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2k & 1 \\ -3 & k \end{pmatrix} \right\}$$

Problema 2.

Demuestre:
Sea $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un subconjunto linealmente independiente de vectores del espacio vectorial V y sea x un vector de V que no puede ser expresado como una combinación lineal de los vectores de S, entonces $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, x\}$ también es linealmente independiente.

Problema 3.

Sea $p(x) = x^2 + 2x - 3$, $q(x) = 2x^2 - 3x + 4$, y $r(x) = ax^2 - 1$. El conjunto $\{p, q, r\}$ es linealmente dependiente si $a =$ _?_.

Problema 4.

Sean $f1(x) = senx$, $f2(x) = cos(x + \pi/6)$, and $f3(x) = sen(x - \pi/4)$ para $0 \leq x \leq 2\pi$. Muestre que $\{f1, f2, f3\}$ es linealmente dependiente.

Problema 5.

Sean a, b, c números reales distintos. Pruebe que los vectores $(1, 1, 1), (a, b, c), (a^2, b^2, c^2)$ forman un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^3$.

Problema 6.

Califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas, justifique su repuesta.

a. Si V es un espacio vectorial con operaciones cualesquiera, entonces: $(v')' = v$ para todo vector perteneciente a V. (v' = inverso aditivo de v)

b. Sean W y H dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial V. Si $dimW = dimH$, entonces $W = H$.

c. Si A es una matriz de tamaño 3×5, entonces $dimNu(A) \geq 2$.

Problema 7.

Sea la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & c & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Halle los posibles valores de c para que: $dimIm(A)$ sea: 1, 2, 3 y 4. Justifique cada una de sus respuestas.

Problema 8.

Sea $V = \mathbb{R}^3$. Sean los conjuntos

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/(x, y, z) = (0, 0, 1) + (0, 1, 2)\, t;\ t \in \mathbb{R}\}$$

$$U = \{(u \in \mathbb{R}^2)/u = f(w);\ w \in W\}$$

Y sea la función f

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y, z) = (4x - 2y, y + z)$$

Determine:

a. Si f es una transformación lineal

b. La representación gráfica de W

c. La representación gráfica de U

Problema 9.

Sea $V = \mathcal{P}_2$. Sea el subconjunto H definido como

$$H = \{p(x) \in \mathcal{P}_2/p'(0) + p''(0) = 0\}$$

Determine si H es un subespacio vectorial, si lo es halle una base y dimensión de H.

Problema 10.

Considere el espacio vectorial real $V = \mathcal{P}_1$ con las operaciones

$$(a_1 + b_1x) \oplus (a_2 + b_2x) = (a_1 + a_2 + 4) + (b_1 + b_2 - 9)x$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \alpha \odot (a + bx) = (\alpha a - 4 + 4\alpha) + (\alpha b + 9 - 9\alpha)x$$

a. Encuentre el vector nulo n_V de V y el vector inverso aditivo del vector $u = 2 + 3x$

b. ¿Los vectores $u = 2 + 3x$ y $v = 4 + 6x$ constituyen una base para $V = \mathcal{P}_1$? Justifique su respuesta

Problema 11.

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Encuentre una base y determine la dimensión de la Imagen de A.

b. Usando la base del literal anterior, complete una base para el espacio $\mathbb{R}^3$.

c. Encuentre una base y determine la dimensión del Núcleo de A.

Problema 12.

Sean $B_1 = \{-5 + 9x,\ 6 - 6x + 5x^2,\ 2 - 7x - 4x^2\}$ y $B_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$ bases del espacio vectorial $V = \mathcal{P}_2$. Sea la matriz de transición de la base B_1 a la base B_2

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Encuentre los vectores de la base B_2

b. Encuentre la matriz de cambio de base de B_2 a B_1

c. Sea $v \in \mathcal{P}_2$ tal que $[v]_{B_2} = (3, -1, 2)$. Encuentre v y $[v]_{B_1}$

Problema 13.

Sea el espacio vectorial $V = \mathcal{M}_{2x2}$. Sean los subespacios de V

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2x2} / c = b - a,\ d = a + 2b - c \right\}$$

$$W = gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

a. Encuentre una base y determine la dimensión del subespacio $H + W$

b. ¿Es directa la suma $H + W$? Justifique su respuesta

c. ¿Es $H \cup W$ un subespacio de V? Justifique su respuesta

Problema 14.

Sea $V = C^1(I)$ el espacio vectorial de las funciones continuas en un intervalo I tal que tienen derivadas que son también continuas en dicho intervalo. Sean $f, g \in V$. Se define el Wronskiano de f y g para toda $x \in I$ como

$$W(f,g)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

a. Demuestre que si f y g son linealmente dependientes en I entonces el Wronskiano de f y g se anula en todo punto del intervalo I.

b. Suponga que $f(x) = x^2$ y que $g(x) = x|x|$. Calcule el Wronskiano de estas funciones.

c. ¿Son f y g linealmente dependientes o linealmente independientes en $I = (-1, 1)$?¿Qué ocurre si $I = (0, 1)$? Justifique sus respuestas.

Problema 15.

Defina “Transformación lineal” y demuestre que la función $T : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}^3$ con regla de correspondencia

$$T(a+bx) = \begin{pmatrix} 5a+b \\ b-3a \\ 2b \end{pmatrix}$$

Es una transformación lineal de $\mathcal{P}_1$en $\mathbb{R}^3$.

Problema 16.

Sea $V = C^1(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de todas las funciones continuas en el conjunto de los reales $\mathbb{R}$, que poseen la primera derivada que es también continua en $\mathbb{R}$. Se definen los subconjuntos de V:

$$W = \{y(x) \in V / y'(x) + 2y(x) = 0\}$$

$$H = \{y(x) \in V / y'(x) + 2y(x) = x\}$$

a. Determine si W y H son subespacios de V.

b. Suponga que ϕ_1, $\phi_2 \in H$ ¿Se puede afirmar que $\phi_1 - \phi_2 \in W$?

Problema 17.

Los conjuntos se pueden hacer de esta manera:

$$H = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) \middle| 3x + y = 0 \right\}$$

$$W = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) \middle| \begin{array}{r} 2x + y = 0 \\ x + y + 4z = 0 \end{array} \right\}$$