



## Problemas resueltos en clase Independencia Lineal

Ángel Guale  
Álgebra Lineal Par. 3-5  
Problemas del 2017

### Problema 1.

Determine el valor de  $k$  para que el conjunto  $S$  sea linealmente dependiente, donde

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2k & 1 \\ -3 & k \end{pmatrix} \right\}$$

### Problema 2.

Demuestre:

Sea  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  un subconjunto linealmente independiente de vectores del espacio vectorial  $V$  y sea  $x$  un vector de  $V$  que no puede ser expresado como una combinación lineal de los vectores de  $S$ , entonces  $\{v_1, v_2, \dots, v_n, x\}$  también es linealmente independiente.

### Problema 3.

Sea  $p(x) = x^2 + 2x - 3$ ,  $q(x) = 2x^2 - 3x + 4$ , y  $r(x) = ax^2 - 1$ . El conjunto  $\{p, q, r\}$  es linealmente dependiente si  $a = ?$ .

### Problema 4.

Sean  $f_1(x) = \sin x$ ,  $f_2(x) = \cos(x + \pi/6)$ , and  $f_3(x) = \sin(x - \pi/4)$  para  $0 \leq x \leq 2\pi$ . Muestre que  $\{f_1, f_2, f_3\}$  es linealmente dependiente.

### Problema 5.

Sean  $a, b, c$  números reales distintos. Pruebe que los vectores  $(1, 1, 1)$ ,  $(a, b, c)$ ,  $(a^2, b^2, c^2)$  forman un conjunto linealmente independiente en  $\mathbb{R}^3$ .

### Problema 6.

Califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas, justifique su respuesta.

- Si  $V$  es un espacio vectorial con operaciones cualesquiera, entonces:  $(v')' = v$  para todo vector perteneciente a  $V$ . ( $v'$  = inverso aditivo de  $v$ )
- Sean  $W$  y  $H$  dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial  $V$ . Si  $\dim W = \dim H$ , entonces  $W = H$ .
- Si  $A$  es una matriz de tamaño  $3 \times 5$ , entonces  $\dim \text{Nu}(A) \geq 2$ .

### Problema 7.

Sea la matriz  $A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & c & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Halle los posibles valores de  $c$  para que:  $\dim \text{Im}(A)$  sea: 1, 2, 3 y 4. Justifique cada una de sus respuestas.

### Problema 8.

Sea  $V = \mathbb{R}^3$ . Sean los conjuntos

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = (0, 0, 1) + (0, 1, 2)t; t \in \mathbb{R}\}$$

$$U = \{(u \in \mathbb{R}^2) / u = f(w); w \in W\}$$

Y sea la función  $f$

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y, z) = (4x - 2y, y + z)$$

Determine:

- Si  $f$  es una transformación lineal
- La representación gráfica de  $W$
- La representación gráfica de  $U$

### Problema 9.

Sea  $V = \mathcal{P}_2$ . Sea el subconjunto  $H$  definido como

$$H = \{p(x) \in \mathcal{P}_2 / p'(0) + p''(0) = 0\}$$

Determine si  $H$  es un subespacio vectorial, si lo es halle una base y dimensión de  $H$ .

### Problema 10.

Considere el espacio vectorial real  $V = \mathcal{P}_1$  con las operaciones

$$(a_1 + b_1x) \oplus (a_2 + b_2x) = (a_1 + a_2 + 4) + (b_1 + b_2 - 9)x$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \odot (a + bx) = (\alpha a - 4 + 4\alpha) + (\alpha b + 9 - 9\alpha)x$$

- Encuentre el vector nulo  $n_V$  de  $V$  y el vector inverso aditivo del vector  $u = 2 + 3x$
- ¿Los vectores  $u = 2 + 3x$  y  $v = 4 + 6x$  constituyen una base para  $V = \mathcal{P}_1$ ? Justifique su respuesta

### Problema 11.

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

- Encuentre una base y determine la dimensión de la Imagen de  $A$ .
- Usando la base del literal anterior, complete una base para el espacio  $\mathbb{R}^3$ .
- Encuentre una base y determine la dimensión del Núcleo de  $A$ .

### Problema 12.

Sean  $B_1 = \{-5 + 9x, 6 - 6x + 5x^2, 2 - 7x - 4x^2\}$  y  $B_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$  bases del espacio vectorial  $V = \mathcal{P}_2$ . Sea la matriz de transición de la base  $B_1$  a la base  $B_2$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Encuentre los vectores de la base  $B_2$
- Encuentre la matriz de cambio de base de  $B_2$  a  $B_1$
- Sea  $v \in \mathcal{P}_2$  tal que  $[v]_{B_2} = (3, -1, 2)$ . Encuentre  $v$  y  $[v]_{B_1}$

### Problema 13.

Sea el espacio vectorial  $V = \mathcal{M}_{2 \times 2}$ . Sean los subespacios de  $V$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2} / c = b - a, d = a + 2b - c \right\}$$

$$W = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

- Encuentre una base y determine la dimensión del subespacio  $H + W$
- ¿Es directa la suma  $H + W$ ? Justifique su respuesta
- ¿Es  $H \cup W$  un subespacio de  $V$ ? Justifique su respuesta

### Problema 14.

Sea  $V = C^1(I)$  el espacio vectorial de las funciones continuas en un intervalo  $I$  tal que tienen derivadas que son también continuas en dicho intervalo. Sean  $f, g \in V$ . Se define el Wronskiano de  $f$  y  $g$  para toda  $x \in I$  como

$$W(f, g)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

- Demuestre que si  $f$  y  $g$  son linealmente dependientes en  $I$  entonces el Wronskiano de  $f$  y  $g$  se anula en todo punto del intervalo  $I$ .
- Suponga que  $f(x) = x^2$  y que  $g(x) = x|x|$ . Calcule el Wronskiano de estas funciones.
- ¿Son  $f$  y  $g$  linealmente dependientes o linealmente independientes en  $I = (-1, 1)$ ? ¿Qué ocurre si  $I = (0, 1)$ ? Justifique sus respuestas.

**Problema 15.**

Defina “Transformación lineal” y demuestre que la función  $T : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con regla de correspondencia

$$T(a + bx) = \begin{pmatrix} 5a + b \\ b - 3a \\ 2b \end{pmatrix}$$

Es una transformación lineal de  $\mathcal{P}_1$  en  $\mathbb{R}^3$ .

**Problema 16.**

Sea  $V = C^1(\mathbb{R})$  el espacio vectorial de todas las funciones continuas en el conjunto de los reales  $\mathbb{R}$ , que poseen la primera derivada que es también continua en  $\mathbb{R}$ . Se definen los subconjuntos de  $V$ :

$$W = \{y(x) \in V / y'(x) + 2y(x) = 0\}$$

$$H = \{y(x) \in V / y'(x) + 2y(x) = x\}$$

- Determine si  $W$  y  $H$  son subespacios de  $V$ .
- Suponga que  $\phi_1, \phi_2 \in H$  ¿Se puede afirmar que  $\phi_1 - \phi_2 \in W$ ?

**Problema 17.**

Los conjuntos se pueden hacer de esta manera:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| 3x + y = 0 \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ x + y + 4z = 0 \end{array} \right\}$$

$$AG = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x - y = 0 \right\}$$

$$EY = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x \text{ loves } y \\ y \text{ loves } x \end{array} \right\}$$

$$T : \heartsuit \rightarrow \heartsuit$$