Álgebra Lineal

Jorge Vielma, Angel Guale

19 de marzo de 2018

Índice general

Capítulo 1

Nociones Preliminares

1.1. Campo Escalar

Sea **K** un conjunto no vacío en el cual se definen dos operaciones binarias. La terna $(K, *, \triangle)$ es un campo escalar si cumple:

Operación suma escalar	
$\forall a, b \in \mathbb{K}(a * b) \in \mathbb{K}$	[Cerradura de la suma]
$\forall a, b \in K a * b = b * a$	[Conmutatividad]
$\forall a, b, c \in K(a * b) * c = a * (b * c)$	[Asociativa]
$\exists n_* \in K \forall a \in K a * n_* = a$	[elemento neutro]
$\forall a \in K \exists a' \in K a * a' = n_*$	[elemento inverso]
Operación producto escalar	
$\forall a, b \in K(a \triangle b) \in K$	[Cerradura de producto]
$\forall a, b \in K a \triangle b = b \triangle a$	[Conmutativa]
$\forall a, b, c \in K(a \triangle b) \triangle c = a \triangle (b \triangle c)$	[Asociativa]
$\exists n' \in K \forall a \in K a * n_\triangle = a$	[Elemento neutro]
$\forall a \in K a \neq n_* \exists a'' \in K a * a'' = n_\triangle$	[Elemento inverso]
$\exists n' \in K \forall a \in K a * n_\triangle = a$	[Elemento neutro]
$\forall a, b, c \in K a \triangle (b * c) = (a \triangle b) * (a \triangle c)$	

Cuadro 1.1: Axiomas de un campo escalar.

Ejemplos:

$(\mathbb{N}, +, \cdot)$ El conjunto de los Naturales con la suma y multiplicación usuales NO es un campo escalar. Basta el hecho de no cumplir uno de los axiomas para dejar de ser un campo. En este caso, por ejemplo; no existe un elemento neutro para la adicion (recuerde que el 0 no forma parte del conjunto de los naturales).

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ El conjunto de los Enteros con la suma y multiplicación usuales NO es un campo escalar. Está claro que en este conjunto con las operaciones usuales, el neutro multiplicativo es el 1. Por tanto ningún elemento de este conjunto tiene inverso multiplicativo.

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ El conjunto de los Racionales con la suma y multiplicación usuales ES un CAMPO ESCALAR.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ El conjunto de los Reales con la suma y multiplicación usuales ES un CAMPO ESCALAR.

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ El conjunto de los Complejos con la suma y multiplicación usuales ES un CAMPO ESCALAR.

1.2. Sistema de ecuaciones lineales

Una ecuación lineal es una ecuación de la forma

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = \beta_1$$

donde las variables $x_1, x_2, .., x_n$ son las incógnitas del sistema y los α_i, β_i son elementos del campo real o complejo.

Una solución de una ecuación lineal es una colección de n elementos del campo $(c_1, c_2, ..., c_n)$ de tal manera que al ser sustituídos en la ecuación se obtiene una igualdad.

Ejemplo 1.1. La ecuación 2x+3y=1 es una ecuación lineal en las variables x, y. Una solución del sistema sería la colección de números reales (8, -5) ya que al sustituírlos en la ecuación se obtiene una igualdad

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 2(8) + 3(-5) &= 1 \\ 16 - 15 &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales que deben satifacerse simultáneamente.

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + ... + \alpha_{2n}x_n &= \beta_2 \\ \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + ... + \alpha_{3n}x_n &= \beta_3 \\ &\vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + ... + \alpha_{mn}x_n &= \beta_m \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2. Considere las incógnitas x, y, z. Entonces el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x - 5y - z &= 2 \\ 4x + y + 3z &= 6 \\ 7x - 4y + 2z &= 8 \end{aligned}$$

es un sistema de ecuaciones lineales. La terna (2, 1, -1) forma una solución de este sistema de ecuaciones lineales, ya que satisface todas las ecuaciones lineales del mismo.

$$\begin{aligned} 3(2) - 5(1) - (-1) &= 2 \\ 4(2) + (1) + 3(-1) &= 6 \\ 7(2) - 4(1) + 2(-1) &= 8 \end{aligned}$$

1.3. Representación Matricial de un S.E.L

Un sistema de ecuaciones lineales puede representarse por medio de la ecuación matricial AX=B, donde A es la matriz de coeficientes, X es el conjunto de incógnitas y B el conjunto de términos independientes. De esta forma el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + ... + \alpha_{2n}x_n &= \beta_2 \\ \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + ... + \alpha_{3n}x_n &= \beta_3 \\ &\vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + ... + \alpha_{mn}x_n &= \beta_m \end{aligned}$$

se puede representar matricialmente como

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & ... & \alpha_{3n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & ... & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

1.3.1. Matriz aumentada

La representación matricial mostrada en líneas anteriores tiene una forma abreviada llamada representación mediante matriz aumentada. El mismo sistema puede representarse como:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & ... & \alpha_{3n} & \beta_3 \\ \vdots & & & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & ... & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array}\right)$$

1.4. Tipo de solución de un S.E.L

Un sistema de ecuaciones lineales pertenece a sólo uno de los siguientes casos:

- Es inconsistente. (No tiene solución)
- Es consistente con solución única. (Solo una n-tupla satisface las ecuaciones)
- Es consistente con infinitas soluciones. (Existen infinitas n-tuplas que satisfacen todas las ecuaciones)

1.4.1. S.E.L inconsistente

Un sistema de ecuaciones lineales se dice inconsistente si no existe n-tupla que pueda satisfacer todas las ecuaciones a la vez.

Ejemplo 1.3. El sistema

$$\begin{aligned} 2x - y &= 2 \\ 4x - 2y &= 1 \end{aligned}$$

Es un sistema de ecuaciones lineales inconsistente

Podemos comprobar que el sistema es inconsistente utilizando el método de Gauss, al representar al sistema por medio de una matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

La última ecuación del sistema reducido nos indica una ecuación $0x + 0y = -3$, es decir, sin importar el valor de x e y, la ecuación resulta ser $0 = -3$ lo cual es una inconsistencia. De esto se concluye que el sistema no posee solución.

De manera general se puede afirmar que si al reducir completamente el sistema por Gauss se obtiene una fila de la matriz de coeficientes llena de ceros y su correspondiente valor independiente distinto de cero, entonces el sistema es inconsistente.

Ejemplo 1.4. Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 2 \\ x + 2y + z &= 3 \\ x - 3y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

La representación en matriz aumentada del sistema anterior es

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Y al reducir tendremos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

En donde la última fila del sistema reducido muestra ceros en todos los coeficientes de la matriz del sistema y un número distinto de cero (en este caso -4) como término independiente, esto nos indica que el sistema de ecuaciones lineales es inconsistente.

1.4.2. S.E.L Consistentes con solución única

Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es consistente si tiene al menos una solución. Cuando un sistema consistente tiene exactamente una n-tupla que satisface las ecuaciones, se dice que tiene solución única.

Ejemplo 1.5. Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 9 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones posee exactamente una solución, la dupla (3, -1). Podemos obtener este resultado empleando el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 9 \\ 0 & -5 & 5 \end{array}\right)$$

De la última ecuación se puede obtener $y = -1$ y reemplazando en la primera $2x - 3(-1) = 9$ se deduce que $x = 3$, y el conjunto solución estaría conformado sólo por la dupla (3, -1).

En términos generales podemos afirmar que un sistema consistente tiene solución única si en el sistema reducido por filas, el número de *filas válidas* - filas que no están completamente llenas de ceros - es igual al número de incógnitas del sistema.

Ejemplo 1.6. El sisguiente sistema de ecuaciones lineales también posee solución única

$$\begin{aligned} 4x - y &= 7 \\ x + y &= 3 \\ 2x - 3y &= 1 \end{aligned}$$

Por el método de Gauss tenemos:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 7 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 7 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De la última ecuación se puede obtener que $y = 1$, y reemplazando en la primera ecuación: $4x - (1) = 7$, se tiene que $x = 2$. Y la única solución del sistema sería $(2, 1)$.

1.4.3. S.E.L Consistentes con infinitas soluciones

Cuando un sistema consistente tiene más de una n-tupla que satisface las ecuaciones, se dice que tiene infinitas soluciones.

Ejemplo 1.7. El sistema de ecuaciones conformado por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x-4y+z&=1\\ x-y+2z&=4\\ 2x-3y-z&=-3 \end{aligned}$$

Si resolvemos este sistema por Gauss tendremos

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -4 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 4\\ 2 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -4 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -5 & -11\\ 0 & 1 & 5 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -4 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -5 & -11\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

De la última ecuación del sistema reducido podemos despejar

$$y = -5z + 11$$

Y de la primera ecuación se obtiene que

$$\begin{aligned} 3x &= 4y - z + 1\\ 3x &= 4(-5z+11) - z + 1\\ 3x &= -21z + 45\\ x &= -7z + 15 \end{aligned}$$

Aquí no es posible definir un valor único para x, y, z. En estos casos se conviene dejar expresado la solución en función un parámetro, al cual le llamaremos variable libre, en esta ocasión, la variable z. Las demás incógnitas del sistema: x e y quedan condicionadas de acuerdo al valor que tome z, por lo que se denominarán variables condicionadas. El conjunto solución del sistema sería:

$$Sol(x,y,z) = \left\{ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{r} x=-7z+15\\ y=-5z+11\\ z\in\mathbb{R} \end{array} \right\}$$

De forma similar que en los casos anteriores se puede establecer una relación entre el sistema reducido y el tipo de solución. Un sistema de ecuaciones lineales tiene infinitas soluciones si el número de incógnitas es mayor que el número de fílas válidas en el sistema reducido.

1.5. Problemas propuestos

1. Demostrar que el conjunto $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ representa un campo con la suma módulo 2.

2. Demostrar que el conjunto $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ representa un campo con la suma módulo 3.

3. Determinar el tipo de solución de los siguientes sistemas

   a) $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x - y + 3z = 0 \\ -x + 2y - 8z = 1 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x - y + 3z = 0 \\ -x + 2y - 8z = 1 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} 3x - y + 6z = 0 \\ 5x + y - 6z = 1 \\ 7x - 4y + z = 2 \end{cases}$

4. Demostrar que el conjunto $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ representa un campo escalar con la suma módulo 5.

5. Construya de ser posible un sistema de ecuaciones son 4 incógnitas, 4 ecuaciones, con solución única.

6. Construya de ser posible un sistema de ecuaciones son 3 incógnitas, 4 ecuaciones, con solución única.

7. Construya de ser posible un sistema de ecuaciones son 2 incógnitas, 4 ecuaciones, con solución única.

Capítulo 2

Espacios Vectoriales

2.1. Espacios Vectoriales reales

Previo al estudio de álgebra lineal, conocemos los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, lo cual es una primera idea al hablar de vectores, los cuales son duplas o ternas de números reales. En estos espacios se pueden identificar dos principales operaciones, la suma entre dos vectores, y el producto de un número real por un vector. En $\mathbb{R}^3$, tales operaciones son:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$c \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ ca_3 \end{pmatrix}$$

Estas operaciones hacen que $\mathbb{R}^3$ sea un espacio vectorial.

Definición 2.1 (Espacio vectorial real)**.** Un espacio vectorial real es una cuarteta $(V, \mathbb{R}, +, \odot)$ donde V es un conjunto no vacío , $\mathbb{R}$ es el campo de los números reales, $+$ es una operación en V llamada suma o adición y $\odot$ es una operación en V llamada multiplicación por un escalar. Los escalares son los elementos de $\mathbb{R}$ y que cumplen con los diferentes axiomas.

Axiomas para la suma

1. Si u y v son elementos de V, $u + v$ es un elemento de V.

2. Si u, v, y w son elementos de V, entonces $u + v = v + u$. Es decir, la suma es una operación conmutativa.

3. Si u, v, y w son elementos de V, entonces $(u + v) + w = u + (v + w)$. Es decir, la operación es asociativa.

4. Existe un elemento de V, llamado elemento nulo y denotado por $\mathbf{0}_v$, tal que para todo u en V, $u + \mathbf{0}_v = \mathbf{0}_v + u = u$.

5. Para cada u en V existe un único elemento en V, llamado u', tal que $u + u' = \mathbf{0}_v$.

Axiomas para la multiplicación por escalares

1. Si α es un número real y u es un elemento de V, entonces αu es un elemento de V.
2. Si α es un número real y u y v son elementos de V, entonces $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$. Es decir la multiplicación por un escalar es distributiva con respecto a la suma de vectores.
3. Si α y β son números reales y u es un elemento de V, entonces $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$. Es decir la multiplicación por un escalar es distributiva con respecto a la suma de escalares.
4. Si α y β son números reales y u es un elemento de V, entonces $(\alpha\beta)u = \beta(\alpha u)$.
5. Si u es un elemento de V, entonces $1 \odot u = u$.

Trabajo autónomo 2.1

Sea $(E, +, \odot)$ un espacio vectorial real. Pruebe que

1. El elemento neutro $\mathbf{0}_E$ es único.
2. Para cada e en E, el elemento e' es único.
3. Para cada e en E, $\mathbf{0}_E \odot e = 0$.
4. Para cada e en E, $(-1)e = e'$.
5. Para cada λ en $\mathbb{R}$, $\lambda \odot \mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E$.
6. Si $\alpha v = \mathbf{0}_E$, entonces $\alpha = 0$ o $v = \mathbf{0}_E$.

Ejemplo 2.1. El espacio $\mathbb{R}^2$ con las operaciones $(x,y)+(w,z) = (x+w, y+z)$ y la multiplicación por un escalar λ, $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$.

Ejemplo 2.2. El espacio de todos los polinomios de grado menor o igual que n, para un número natural n fijo, con la operación normal de suma de polinomios y la multiplicación usual de un polinomio por un número real.

Ejemplo 2.3. El espacio de todas las matrices $n \times m$ con la operación usual de suma de matrices y multiplicación de una matriz por un número real.(Aquí n y m son números naturales fijos y distintos de cero).

2.2. Espacio Vectorial

Definición 2.2. Sea V un conjunto no vacío, en el cual se definen dos operaciones binarias, una binaria interna llamada suma $\oplus$ y otra binaria externa, sobre un campo $\mathbb{K}$, llamada producto por escalar $\odot$. Se dice que $(V, \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$ si cumple:

Operación suma	
$\forall v_1, v_2 \in V: \ (v_1 \oplus v_2) \in V$	[Cerradura de la suma]
$\forall v_1, v_2 \in V: v_1 \oplus v_2 = v_2 \oplus v_1$	[Conmutatividad]
$\forall v_1, v_2, v_3 \in V: (v_1 \oplus v_2) \oplus v_3 = v_1 \oplus (v_2 \oplus v_3)$	[Asociativa]
$\exists n_V \in V \ \forall v \in V: v \oplus n_V = v$	[Elemento neutro]
$\forall v \in V \ \exists v' \in V: v \oplus v' = n_V$	[Elemento inverso]
Operación producto escalar	
$\forall v \in V \forall \alpha \in \mathbb{K}: \ (\alpha \odot v) \in V$	[Cerradura de producto]
$\forall \alpha \in \mathbb{K} \ \forall v_1, v_2 \in V: \alpha \odot (v_1 \oplus v_2) = (\alpha \odot v_1) \oplus (\alpha \odot v_2)$	[Distributiva]
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ \forall v \in V: (\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$	[Distributiva]
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ \forall v \in V: (\alpha\beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$	[Distributiva]
$\forall v \in V: n_K \odot v = v$	[Neutro multiplicativo]

Cuadro 2.1: Axiomas de un espacio vectorial.

Veamos algunos ejemplos de espacios vectoriales conocidos:
Consideremos $V = \mathbb{R}^n$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, con la suma y producto por escalar usuales V es un espacio vectorial sobre los Reales.
$V = \mathcal{P}_n$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a n, con las operaciones usuales de suma y producto por escalar.

$V = \mathcal{M}_{mxn}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Las matrices m por n con entradas reales con las operaciones usuales de suma y producto por escalar forman un espacio vectorial sobre los reales

$V = \mathbb{C}^n$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Las n-tuplas con entradas complejas con la suma y el producto por escalar usuales en los complejos forman un espacio vectorial sobre el campo de los Complejos.

$V = \mathbb{B}^n$ y $\mathbb{K} = \mathbb{B}$ Las n-tuplas con entradas binarias con la suma y el producto por escalar binarios forman un espacio vectorial sobre el campo binario. Éste es un ejemplo de espacio vectorial discreto ya que la cardinalidad del conjunto es

$V = \mathcal{C}[a, b]$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Las funciones continuas en un intervalo [a, b] con las operaciones usuales de suma y producto por escalar de funciones forman un Espacio Vectorial sobre los Reales

2.2.1. Algunos teoremas elementales sobre espacios vectoriales

Teorema 2.1. *Sea* $(V, \oplus, \odot)$ *un espacio vectorial sobre el campo* K*. Entonces* $n_+ \odot v = n_v$

Demostración:

Se conoce que $n_+ + n_+ = n_+$. Entonces

$$(n_+ + n_+) \odot v = n_+ \odot v$$

$$(n_+ \odot v) \oplus (n_+ \odot v) = n_+ \odot v$$

No olvidemos que$(n_+ \odot v)$ es un vector, y por lo tanto tiene un inverso aditivo $(n_+ \odot v)'$ Sumando a ambos lados de la ecuación anterior este inverso aditivo tenemos.

$$((n_+ \odot v) \oplus (n_+ \odot v)) \oplus (n_+ \odot v)' = (n_+ \odot v) \oplus (n_+ \odot v)'$$

$$(n_+ \odot v) \oplus ((n_+ \odot v) \oplus (n_+ \odot v)') = (n_+ \odot v) \oplus (n_+ \odot v)'$$

$$(n_+ \odot v) \oplus n_v = n_v$$

$$(n_+ \odot v) = n_v$$

Si la dificultad de la notación en la demostración anterior influyó negativamente para su comprensión, recuerde que n_v es el vector neutro de V, y que n_+ es el escalar neutro. Para facilidad de comprensión relacione n_+ con el 0 de los números reales. Es decir la tesis de este teorema en el campo Real es $0 \odot v = n_v$.

Teorema 2.2. *Sea* $(V, \oplus, \odot)$ *un espacio vectorial sobre el campo K. Entonces* $\forall \alpha \in K, \alpha \odot n_v = n_v$

Por el axioma (iv) de espacios vectoriales tenemos que $n_v \oplus n_v = n_v$. Por lo tanto

$$\alpha \odot (n_v \oplus n_v) = \alpha \odot n_v$$

$$(\alpha \odot n_v) \oplus (\alpha \odot n_v) = \alpha \odot n_v$$

Sea $(\alpha \odot n_v)'$ el inverso aditivo de $(\alpha \odot n_v)$. Sumando este vector a ambos lados

$$((\alpha \odot n_v) \oplus (\alpha \odot n_v)) \oplus (\alpha \odot n_v)' = (\alpha \odot n_v) \oplus (\alpha \odot n_v)'$$

$$(\alpha \odot n_v) \oplus ((\alpha \odot n_v) \oplus (\alpha \odot n_v)') = (\alpha \odot n_v) \oplus (\alpha \odot n_v)'$$

$$(\alpha \odot n_v) \oplus n_v = n_v(\alpha \odot n_v) = n_v$$

Teorema 2.3. *Sea $(V, \oplus, \odot)$ un espacio vectorial sobre el campo R, sea v un vector de V y v su inverso aditivo. Entonces $(-1) \odot v = v'$*

$$(1 + (-1)) \odot v = 0 \odot v$$

$$(1 \odot v) \oplus ((-1) \odot v) = n_v$$

Sumando $(1 \odot v)'$ el inverso aditivo de $(1 \odot v)$ y agrupando

$$((1 \odot v)' \oplus (1 \odot v)) \oplus ((-1) \odot v) = (1 \odot v)' \oplus n_v$$

$$n_v \oplus ((-1) \odot v) = (1 \odot v)'$$

$$(-1) \odot v = v'$$

Teorema 2.4. *Sea $(V, \oplus, \odot)$ un espacio vectorial sobre el campoR. Sea n_v el vector neutro de V.*

$$\alpha \odot v = n_v \rightarrow (\alpha = 0 \vee v = n_v)$$

Demostración:

Recordemos que la expresión $p \rightarrow (q \vee r)$ es lógicamente equivalente a la expresión $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$

$$p \rightarrow (q \vee r) \equiv \neg p \vee (q \vee r)$$

$$\equiv (\neg p \vee q) \vee r$$

$$\equiv \neg(\neg p \vee q) \rightarrow r$$

$$\equiv (p \wedge \neg q) \rightarrow r$$

Por lo que el teorema es lógicamente equivalente a

$$\alpha \odot v = n_v \wedge \alpha \neq 0 \rightarrow v = n_v$$

Luego tenemos que:

$$\alpha \odot v = n_v$$

Como $\alpha \neq 0$ entonces existe $1/\alpha$, el inverso multiplicativo de α . Multiplicando por $1/\alpha$ a ambos lados

$$1/\alpha \odot (\alpha \odot v) = 1/\alpha \odot n_v$$

$$\left(\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha\right) \odot v = n_v$$

$$1 \odot v = n_v$$

$$v = n_v$$

Teorema 2.5 (El teorema de la unicidad del neutro)**.** *Sea* $(V, \oplus, \odot)$ *un espacio vectorial sobre el campo* K*. Sea* n_v *vector neutro de* V*. Entonces* n_v *es único en* V*.*

Demostración:

Por contradicción. Supongamos que existen dos vectores neutros en V; n_v y $\widetilde{n_v}$ tales que son diferentes $n_v \neq \widetilde{n_v}$ Por el axioma (iv)

$$n_v = n_v \oplus \widetilde{n_v}$$

Por conmutatividad

$$= \widetilde{n_v} \oplus n_v$$

Por el axioma (iv)

$$= \widetilde{n_v}$$

Lo cual es una contradicción, de donde se concluye que el neutro es único.

2.3. Subespacios Vectoriales

Definición 2.3. Sea $(E, +, \odot)$ un espacio vectorial real y S un subconjunto no vacío de E. Entonces se dice que S es un subespacio vectorial de E, si con las operaciones heredadas de E, $(S, +, \odot)$ es también un espacio vectorial.

Ejemplo 2.4. Sea $E = \mathbb{R}^3$ y $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, 5x + 2y + z = 0 \right\}$ entonces S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 2.5. Sea E el espacio $\mathcal{M}_{2\times 2}$ de todas las matrices cuadradas 2×2 con las operaciones usuales de suma de matrices y de multiplicación por un escalar y S el conjunto de las matrices diagonales, es decir las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, entonces S es un subespacio de E.

Ejemplo 2.6. Sea E el espacio $\mathcal{P}_3$ de todos los polinomios de grado menor o igual a 3, con la suma y multiplicación por un escalar usuales. Sea S el conjunto de los polinomios $\mathcal{P}_2$ de grado menor o igual a 2, entonces S es un subespacio de E.

Ejemplo 2.7. Sea E un espacio vectorial real, V y W dos subespacios vectoriales de E, entonces $V + W = \{ a + b | \, a \in V \, , \, b \in W \}$ y $V \cap W = \{ a | \, a \in V \cap W \}$ son también subespacios vectoriales reales.

2.3.1. Subespacio trivial

Si tenemos un espacio Vectorial V, elijamos el subconjunto que sólo contiene al neutro $W = \{n_v\}$:

- W es un subconjunto no vacío de V.
- Como mostramos en la sección anterior, W es siempre un espacio Vectorial (Denominado espacio trivial).

Por lo tanto W, el conjunto que sólo contiene al vector neutro de un espacio vectorial V es siempre un Subespacio Vectorial de V.

Todo espacio es subespacio de si mismo

Ahora, del espacio vectorial V, consideremos al conjunto V (No, no es error de escritura)

- V siempre es un subconjunto no vacío de V. (Recuerde que todo conjunto A es subconjunto de sí mismo).
- V es un espacio vectorial.

Por lo tanto cualquier espacio vectorial es subespacio vectorial de símismo.

Todo espacio vectorial V SIEMPRE tiene, por lo menos, dos subespacios vectoriales V y $\{n_v\}$. Aquellos subespacios diferentes a los anteriores reciben el nombre de Subespacios Propios.

2.3.2. Subespacios elementales

Subespacios de $\mathbb{R}^2$

En $\mathbb{R}^2$, el espacio vectorial *bidimensional* sobre el campo real; se distinguen, aparte de los subespacios propios, otros subespacios vectoriales:

- Toda recta que pasa por el origen es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$

Subespacios de $\mathbb{R}^3$

Y en $\mathbb{R}^3$, el espacio vectorial tridimensional sobre el campo real; se distinguen, aparte de los subespacios propios, otros subespacios vectoriales:

- Toda recta que pasa por el origen es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$
- Todo plano que contiene al origen es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

En principio para probar esto se necesitaría probar los 10 axiomas de la definición de espacio vectorial, sin embargo existe un teorema que nos ahorra bastante trabajo.

2.3.3. El teorema de caracterización del subespacio

Teorema 2.6 (Caracterización de subespacio)**.** *Sea* $(V, \oplus, \odot)$ *un espacio vectorial sobre el campo. Sea* W *un subconjunto de* V*.* W *es un subespacio vectorial de* V *si y solo si:*

- W *no es vacío*
- $\forall w_1, w_2 \in W : w_1 \oplus w_2 \in W$
- $\forall \alpha \in \mathbb{K} \forall w \in W : \alpha \odot w \in W$

La prueba de este teorema se la dejamos al lector, indicándoles que deben probar que los restantes 8 axiomas de espacios vectoriales se satisfacen a partir de estos axiomas de cerradura y de la hipótesis que W es un subconjunto de V, con las mismas operaciones de V

Con este teorema demostraremos las afirmaciones sobre los subespacios de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Teorema 2.7. *Toda recta que pasa por el origen es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^2$

Demostración. El enunciado algebraicamente se traduce en que

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \; y = mx \right\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

(i) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ ya que $0 = m \cdot 0$, por lo tanto $W \neq \phi$

(ii) $\forall w_1, w_2 \in W : w_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$w_1 + w_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

para que el *vector suma* pertenezca a W debe cumplir la condición de W: Por hipótesis $w_1 \in W$ por lo que $y_1 = mx_1$. Asimismo $w_2 \in W$ implica que $y_2 = mx_2$

$$y_1 + y_2 = mx_1 + mx_2$$
$$y_1 + y_2 = m\,(x_1 + x_2)$$

Por lo que el vector suma pertenece a W

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall w \in W : w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\alpha \cdot w = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$

Por hipótesis $w \in W$ por lo que $y = mx$

$$\alpha y = \alpha\left(mx\right)$$
$$\alpha y = m\left(\alpha x\right)$$

Por lo que el *vector producto* $\alpha w = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$ pertenece a W.

Ya que hemos probado (i) (ii), (iii), que son las condiciones en el teorema de caraterización de subespacio, por el mismo teorema concluimos que W es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. Lo cual prueba que toda recta que pasa por el origen es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

□

Teorema 2.8. *En $\mathbb{R}^3$ toda recta que pasa por el origen es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.*

Demostración. Esto es equivalente a decir que el subconjunto

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; x = at, y = bt, z = ct; t \in \mathbb{R} \right\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(i) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ (cumple las tres condiciones) por tanto W no es vacío.

(ii) $\forall w_1, w_2 \in W$ $w_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$$w_1 + w_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

Tanto w_1, w_2, w_3 son elementos de W, por lo que

$$x_1 = at_1,\ y_1 = bt_1,\ z_1 = ct_1$$

$$x_2 = at_2,\ y_2 = bt_2,\ z_2 = ct_2$$

De esto se obtiene que:

$$\begin{array}{lll} x_1 + x_2 = at_1 + at_2 & y_1 + y_2 = bt_1 + bt_2 & z_1 + z_2 = ct_1 + ct_2 \\ x_1 + x_2 = a\left(t_1 + t_2\right) & y_1 + y_2 = b\left(t_1 + t_2\right) & z_1 + z_2 = c\left(t_1 + t_2\right) \end{array}$$

Por tanto el vector $w_1 + w_2$ pertenece a W.

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall w \in W : w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\alpha w = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$$

Por hipótesis, $x = at, y = bt, z = ct$:

$$\begin{array}{lll} \alpha x = \alpha\,(at) & \alpha y = \alpha\,(bt) & \alpha z = \alpha\,(ct) \\ \alpha x = a\,(\alpha t) & \alpha y = b\,(\alpha t) & \alpha z = c\,(\alpha t) \end{array}$$

Por el teorema del subespacio, concluimos que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

□

Teorema 2.9 (Intersección de subespacios vectoriales)**.** *Sean V_1 y V_2 dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial E, entonces $V_1 \cap V_2$ es un subespacio vectorial*

Demostración.

I. El cero vector de E pertenece a ambos subespacios, por lo tanto también peertenece a la intersección.

II. Si v_1 y v_2 pertenecen a $V_1 \cap V_2$ entonces ambos pertenecen a V_1 y V_2. Debido a que V_1 es un subespacio vectorial, entonces $v_1 + v_2$ pertenece a V_1. Por el mismo argumento para V_2, se tiene que $v_1 + v_2$ pertenece a V_2. Por lo tanto $v_1 + v_2$ pertenece a $V_1 \cap V_2$.

III. Si v pertenece a $V_1 \cap V_2$, entonces pertenece a V_1 y a V_2. Considere $\alpha \in \mathbb{R}$, debido a que $V_1 y V_2$ son subespacios vectoriales entonces αv pertenece a V_1 y αv pertenece a V_2, es decir αv pertenece a $V_1 \cap V_2$.

□

2.4. Problemas

2.4.1. Espacio vectorial

1. Sea $G = \{g\}$ un conjunto de un elemento en el cual se definen las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{ll} \forall g \in G & g + g = g \\ \forall \alpha \in \mathbb{R} & \alpha g = g \end{array}$$

   Determine si G, con las operaciones definidas anteriormente es un espacio vectorial.

2. Muestre que el conjunto de funciones continuas períodicas, con periodo múltiplo entero de π, forman un espacio vectorial sobre el campo real son la suma y producto por escalar convencionales de las funciones.

3. **Problema (1ra Evaluacion Septiembre 2013)**: (10 puntos) Considere el espacio vectorial real:

$$V = \{\, a + bx \in P_1 |\, a + b = 5\}$$

Con las operaciones:

$$(a_1 + b_1x) \oplus (a_2 + b_2x) = (a_1 + a_2 + 4) + (b_1 + b_2 - 9)x$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \odot (a + bx) = (\alpha a - 4 + 4\alpha) + (\alpha b + 9 - 9\alpha)x$$

a)Demuestre que la operación suma es cerrada en V
b)Encuentre el vector nulo 0_v de V y el vector inverso aditivo del vector $u = 2 + 3x$

4. **Problema** : Sea V=$\mathbb{R}^+$, el conjunto de lo reales positivos. Pruebe que V es un espacio vectorial con la suma y el producto por escalar definidos como:

$$\forall u, v \in V : u \oplus v = uv$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall v \in V : \alpha \odot v = v^\alpha$$

5. **Problema** : Considere V=$\{ A \in M_{2x2} | \, A \; es \; invertible\}$, determinar si V es un espacio vectorial con las operaciones:

$$\forall A, B \in V : A \oplus B = B^T A^T$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall A \in V : \alpha \odot A = A$$

6. **Problema** : Considere V el espacio vectorial de las matrices 3x3. Determine si el subconjunto $H = \{ A \in M_{3x3} | \, tr(A) = 0\}$ es un subespacio vectorial de V.

7. **Problema** : Considere V el espacio vectorial de las matrices 3x3. Determine si el subconjunto $H = \{ A \in M_{3x3} | \, tr(A) \neq 0\}$ es un subespacio vectorial de V.

8. **Problema** : Considere V el espacio vectorial $\mathcal{P}_2$. Determine si el subconjunto $H = \{ p(x) \in \mathcal{P}_2 | \, p(1) = p(-2)\}$ es un subespacio vectorial de V.

.