Álgebra Lineal

Jorge Vielma, Angel Guale

20 de septiembre de 2017

Índice general

Capítulo 1

Nociones Preliminares

1.1. Campo Escalar

Sea **K** un conjunto no vacío en el cual se definen dos operaciones binarias. La terna $(K, *, \triangle)$ es un campo escalar si cumple:

Operación suma escalar	
$\forall a, b \in \mathbb{K}(a * b) \in \mathbb{K}$	[Cerradura de la suma]
$\forall a, b \in K a * b = b * a$	[Conmutatividad]
$\forall a, b, c \in K(a * b) * c = a * (b * c)$	[Asociativa]
$\exists n_* \in K \forall a \in K a * n_* = a$	[elemento neutro]
$\forall a \in K \exists a' \in K a * a' = n_*$	[elemento inverso]
Operación producto escalar	
$\forall a, b \in K(a \triangle b) \in K$	[Cerradura de producto]
$\forall a, b \in K a \triangle b = b \triangle a$	[Conmutativa]
$\forall a, b, c \in K(a \triangle b) \triangle c = a \triangle (b \triangle c)$	[Asociativa]
$\exists n' \in K \forall a \in K a * n_\triangle = a$	[Elemento neutro]
$\forall a \in K a \neq n_* \exists a'' \in K a * a'' = n_\triangle$	[Elemento inverso]
$\exists n' \in K \forall a \in K a * n_\triangle = a$	[Elemento neutro]
$\forall a, b, c \in K a \triangle (b * c) = (a \triangle b) * (a \triangle c)$	

Cuadro 1.1: Axiomas de un campo escalar.

Ejemplos:

$(\mathbb{N}, +, \cdot)$ El conjunto de los Naturales con la suma y multiplicación usuales NO es un campo escalar. Basta el hecho de no cumplir uno de los axiomas para dejar de ser un campo. En este caso, por ejemplo; no existe un elemento neutro para la adicion (recuerde que el 0 no forma parte del conjunto de los naturales).

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ El conjunto de los Enteros con la suma y multiplicación usuales NO es un campo escalar. Está claro que en este conjunto con las operaciones usuales, el neutro multiplicativo es el 1. Por tanto ningún elemento de este conjunto tiene inverso multiplicativo.

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ El conjunto de los Racionales con la suma y multiplicación usuales ES un CAMPO ESCALAR.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ El conjunto de los Reales con la suma y multiplicación usuales ES un CAMPO ESCALAR.

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ El conjunto de los Complejos con la suma y multiplicación usuales ES un CAMPO ESCALAR.

1.2. Sistema de ecuaciones lineales

Una ecuación lineal es una ecuación de la forma

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = \beta_1$$

donde las variables $x_1, x_2, .., x_n$ son las incógnitas del sistema y los α_i, β_i son elementos del campo real o complejo.

Una solución de una ecuación lineal es una colección de n elementos del campo $(c_1, c_2, ..., c_n)$ de tal manera que al ser sustituídos en la ecuación se obtiene una igualdad.

Ejemplo 1.1. La ecuación 2x+3y=1 es una ecuación lineal en las variables x, y. Una solución del sistema sería la colección de números reales (8, -5) ya que al sustituírlos en la ecuación se obtiene una igualdad

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 2(8) + 3(-5) &= 1 \\ 16 - 15 &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales que deben satifacerse simultáneamente.

$$\begin{aligned} \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + ... + \alpha_{1n} x_n &= \beta_1 \\ \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + ... + \alpha_{2n} x_n &= \beta_2 \\ \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + ... + \alpha_{3n} x_n &= \beta_3 \\ &\vdots \\ \alpha_{m1} x_1 + \alpha_{m2} x_2 + ... + \alpha_{mn} x_n &= \beta_m \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2. Considere las incógnitas x, y, z. Entonces el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x - 5y - z &= 2 \\ 4x + y + 3z &= 6 \\ 7x - 4y + 2z &= 8 \end{aligned}$$

es un sistema de ecuaciones lineales. La terna (2, 1, -1) forma una solución de este sistema de ecuaciones lineales, ya que satisface todas las ecuaciones lineales del mismo.

$$\begin{aligned} 3(2) - 5(1) - (-1) &= 2 \\ 4(2) + (1) + 3(-1) &= 6 \\ 7(2) - 4(1) + 2(-1) &= 8 \end{aligned}$$

1.3. Representación Matricial de un S.E.L

Un sistema de ecuaciones lineales puede representarse por medio de la ecuación matricial AX=B, donde A es la matriz de coeficientes, X es el conjunto de incógnitas y B el conjunto de términos independientes. De esta forma el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + ... + \alpha_{2n}x_n &= \beta_2 \\ \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + ... + \alpha_{3n}x_n &= \beta_3 \\ &\vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + ... + \alpha_{mn}x_n &= \beta_m \end{aligned}$$

se puede representar matricialmente como

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & ... & \alpha_{3n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & ... & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

1.3.1. Matriz aumentada

La representación matricial mostrada en líneas anteriores tiene una forma abreviada llamada representación mediante matriz aumentada. El mismo sistema puede representarse como:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & ... & \alpha_{3n} & \beta_3 \\ \vdots & & & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & ... & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array}\right)$$

1.4. Tipo de solución de un S.E.L

Un sistema de ecuaciones lineales pertenece a sólo uno de los siguientes casos:

- Es inconsistente. (No tiene solución)
- Es consistente con solución única. (Solo una n-tupla satisface las ecuaciones)
- Es consistente con infinitas soluciones. (Existen infinitas n-tuplas que satisfacen todas las ecuaciones)

1.4.1. S.E.L inconsistente

Un sistema de ecuaciones lineales se dice inconsistente si no existe n-tupla que pueda satisfacer todas las ecuaciones a la vez.

Ejemplo 1.3. El sistema

$$\begin{aligned} 2x - y &= 2 \\ 4x - 2y &= 1 \end{aligned}$$

Es un sistema de ecuaciones lineales inconsistente

Podemos comprobar que el sistema es inconsistente utilizando el método de Gauss, al representar al sistema por medio de una matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

La última ecuación del sistema reducido nos indica una ecuación $0x + 0y = -3$, es decir, sin importar el valor de x e y, la ecuación resulta ser $0 = -3$ lo cual es una inconsistencia. De esto se concluye que el sistema no posee solución.

De manera general se puede afirmar que si al reducir completamente el sistema por Gauss se obtiene una fila de la matriz de coeficientes llena de ceros y su correspondiente valor independiente distinto de cero, entonces el sistema es inconsistente.

Ejemplo 1.4. Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 2 \\ x + 2y + z &= 3 \\ x - 3y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

La representación en matriz aumentada del sistema anterior es

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Y al reducir tendremos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

En donde la última fila del sistema reducido muestra ceros en todos los coeficientes de la matriz del sistema y un número distinto de cero (en este caso -4) como término independiente, esto nos indica que el sistema de ecuaciones lineales es inconsistente.

1.4.2. S.E.L Consistentes con solución única

Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es consistente si tiene al menos una solución. Cuando un sistema consistente tiene exactamente una n-tupla que satisface las ecuaciones, se dice que tiene solución única.

Ejemplo 1.5. Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 9 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones posee exactamente una solución, la dupla (3, -1). Podemos obtener este resultado empleando el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 9 \\ 0 & -5 & 5 \end{array}\right)$$

De la última ecuación se puede obtener $y = -1$ y reemplazando en la primera $2x - 3(-1) = 9$ se deduce que $x = 3$, y el conjunto solución estaría conformado sólo por la dupla (3, -1).

En términos generales podemos afirmar que un sistema consistente tiene solución única si en el sistema reducido por filas, el número de *filas válidas* - filas que no están completamente llenas de ceros - es igual al número de incógnitas del sistema.

Ejemplo 1.6. El sisguiente sistema de ecuaciones lineales también posee solución única

$$\begin{aligned} 4x - y &= 7 \\ x + y &= 3 \\ 2x - 3y &= 1 \end{aligned}$$

Por el método de Gauss tenemos:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 7 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 7 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De la última ecuación se puede obtener que $y = 1$, y reemplazando en la primera ecuación: $4x - (1) = 7$, se tiene que $x = 2$. Y la única solución del sistema sería $(2, 1)$.

1.4.3. S.E.L Consistentes con infinitas soluciones

Cuando un sistema consistente tiene más de una n-tupla que satisface las ecuaciones, se dice que tiene infinitas soluciones.

Ejemplo 1.7. El sistema de ecuaciones conformado por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x-4y+z&=1\\ x-y+2z&=4\\ 2x-3y-z&=-3 \end{aligned}$$

Si resolvemos este sistema por Gauss tendremos

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -4 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 4\\ 2 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -4 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -5 & -11\\ 0 & 1 & 5 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -4 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -5 & -11\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

De la última ecuación del sistema reducido podemos despejar

$$y=-\,5z+11$$

Y de la primera ecuación se obtiene que

$$\begin{aligned} 3x=&4y-z+1\\ 3x=&4(-5z+11)-z+1\\ 3x=&-\,21z+45\\ x=&-\,7z+15 \end{aligned}$$

Aquí no es posible definir un valor único para x, y, z. En estos casos se conviene dejar expresado la solución en función un parámetro, al cual le llamaremos variable libre, en esta ocasión, la variable z. Las demás incógnitas del sistema: x e y quedan condicionadas de acuerdo al valor que tome z, por lo que se denominarán variables condicionadas. El conjunto solución del sistema sería:

$$Sol(x,y,z)=\left\{ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \left| \begin{array}{r} x=-7z+15\\ y=-5z+11\\ z\in\mathbb{R} \end{array} \right. \right\}$$

De forma similar que en los casos anteriores se puede establecer una relación entre el sistema reducido y el tipo de solución. Un sistema de ecuaciones lineales tiene infinitas soluciones si el número de incógnitas es mayor que el número de fílas válidas en el sistema reducido.

1.5. Problemas propuestos

1. Demostrar que el conjunto $\mathbb{Z}_2$ representa un campo con la suma módulo 2.

2. Demostrar que el conjunto $\mathbb{Z}_3$ representa un campo con la suma módulo 3.

3. Determinar el tipo de solución de los siguientes sistemas

   $$a)\ \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x - y + 3z = 0 \\ -x + 2y - 8z = 1 \end{cases}$$

   $$b)\ \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x - y + 3z = 0 \\ -x + 2y - 8z = 1 \end{cases}$$

   $$c)\ \begin{cases} 3x - y + 6z = 0 \\ 5x + y - 6z = 1 \\ 7x - 4y + z = 2 \end{cases}$$

4. Demostrar que el conjunto $\mathbb{Z}_5$ representa un campo escalar con la suma módulo 5.

5. Construya de ser posible un sistema de ecuaciones son 4 incógnitas, 4 ecuaciones, con solución única.

6. Construya de ser posible un sistema de ecuaciones son 3 incógnitas, 4 ecuaciones, con solución única.

7. Construya de ser posible un sistema de ecuaciones son 2 incógnitas, 4 ecuaciones, con solución única.

Capítulo 2

Espacios Vectoriales

2.1. Espacio Vectorial

Definición 2.1. Sea V un conjunto no vacío, en el cual se definen dos operaciones binarias, una binaria interna llamada suma $\oplus$ y otra binaria externa, sobre un campo $\mathbb{K}$, llamada producto por escalar $\odot$. Se dice que $(V, \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$ si cumple:

Operación suma	
$\forall v_1, v_2 \in V : \ (v_1 \oplus v_2) \in V$	[Cerradura de la suma]
$\forall v_1, v_2 \in V : v_1 \oplus v_2 = v_2 \oplus v_1$	[Conmutatividad]
$\forall v_1, v_2, v_3 \in V : (v_1 \oplus v_2) \oplus v_3 = v_1 \oplus (v_2 \oplus v_3)$	[Asociativa]
$\exists n_V \in V \ \forall v \in V : v \oplus n_V = v$	[elemento neutro]
$\forall v \in V \ \exists v' \in V : v \oplus v' = n_V$	[elemento inverso]
Operación producto escalar	
$\forall v \in V \forall \alpha \in \mathbb{K} : \ (\alpha \odot v) \in V$	[Cerradura de producto]
$\forall \alpha \in \mathbb{K} \ \forall v_1, v_2 \in V : \alpha \odot (v_1 \oplus v_2) = (\alpha \odot v_1) \oplus (\alpha \odot v_2)$	[Distributiva]
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ \forall v \in V : (\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$	[Distributiva]
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ \forall v \in V : (\alpha\beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$	[Distributiva]
$\forall v \in V : n_K \odot v = v$	[Neutro multiplicativo]

Cuadro 2.1: Axiomas de un espacio vectorial.

Veamos algunos ejemplos de espacios vectoriales conocidos:
Consideremos $V = \mathbb{R}^n$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, con la suma y producto por escalar usuales V es un espacio vectorial sobre los Reales.
$V = \mathcal{P}_n$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a n, con las operaciones usuales de suma y producto por escalar.

$V = \mathcal{M}_{mxn}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Las matrices m por n con entradas reales con las operaciones usuales de suma y producto por escalar forman un espacio vectorial sobre los reales

$V = \mathbb{C}^n$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Las n-tuplas con entradas complejas con la suma y el producto por escalar usuales en los complejos forman un espacio vectorial sobre el campo de los Complejos.

$V = \mathbb{B}^n$ y $\mathbb{K} = \mathbb{B}$ Las n-tuplas con entradas binarias con la suma y el producto por escalar binarios forman un espacio vectorial sobre el campo binario. Éste es un ejemplo de espacio vectorial discreto ya que la cardinalidad del conjunto es

$V = \mathcal{C}[a, b]$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Las funciones continuas en un intervalo [a, b] con las operaciones usuales de suma y producto por escalar de funciones forman un Espacio Vectorial sobre los Reales

2.2. Espacios Vectoriales reales

Definición 2.2 (Espacio vectorial real)**.** Un espacio vectorial real es una cuarteta $(V, \mathbb{R}, +, \odot)$ donde V es un conjunto no vacío , $\mathbb{R}$ es el campo de los números reales, $+$ es una operación en V llamada suma o adición y $\odot$ es una operación en V llamada multiplicación por un escalar. Los escalares son los elementos de $\mathbb{R}$ y que cumplen con los diferentes axiomas.

Axiomas para la suma

1. Si u y v son elementos de V, $u + v$ es un elemento de V.
2. Si u, v, y w son elementos de V, entonces $u + v = v + u$. Es decir, la suma es una operación conmutativa.
3. Si u, v, y w son elementos de V, entonces $(u + v) + w = u + (v + w)$. Es decir, la operación es asociativa.
4. Existe un elemento de V, llamado elemento nulo y denotado por $\mathbf{0}_v$, tal que para todo u en V, $u + \mathbf{0}_v = \mathbf{0}_v + u = u$.
5. Para cada u en V existe un único elemento en V, llamado $-u$, tal que $u + (-u) = \mathbf{0}_v$.

Axiomas para la multiplicación por escalares

1. Si α es un número real y u es un elemento de V, entonces αu es un elemento de V.
2. Si α es un número real y u y v son elementos de V, entonces $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$. Es decir la multiplicación por un escalar es distributiva con respecto a la suma de vectores.
3. Si α y β son números reales y u es un elemento de V, entonces $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$. Es decir la multiplicación por un escalar es distributiva con respecto a la suma de escalares.
4. Si α y β son números reales y u es un elemento de V, entonces $(\alpha\beta)u = \beta(\alpha u)$.
5. Si u es un elemento de V, entonces $1 \odot u = u$.

Trabajo autónomo 2.1

Sea $(E, +, \odot)$ un espacio vectorial real. Pruebe que

1. El elemento neutro $\mathbf{0}_E$ es único.
2. Para cada e en E, el elemento $-e$ es único.
3. Para cada e en E, $\mathbf{0}_E \odot e = 0$.
4. Para cada e en E, $(-1)e = -e$.
5. Para cada λ en $\mathbb{R}$, $\lambda \odot \mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E$.
6. Si $\alpha v = \mathbf{0}_E$, entonces $\alpha = 0$ o $v = \mathbf{0}_E$.

Ejemplo 2.1. El espacio $\mathbb{R}^2$ con las operaciones $(x, y) + (w, z) = (x + w, y + z)$ y la multiplicación por un escalar λ, $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.

Ejemplo 2.2. El espacio de todos los polinomios de grado menor o igual que n, para un número natural n fijo, con la operación normal de suma de polinomios y la multiplicación usual de un polinomio por un número real.

Ejemplo 2.3. El espacio de todas las matrices $n \times m$ con la operación usual de suma de matrices y multiplicación de una matriz por un número real.(Aquí n y m son números naturales fijos y distintos de cero).

2.3. Subespacios Vectoriales

Definición 2.3. Sea $(E, +, \odot)$ un espacio vectorial real y S un subconjunto no vacío de E. Entonces se dice que S es un subespacio vectorial de E, si con las operaciones heredadas de E, $(S, +, \odot)$ es también un espacio vectorial.

Ejemplo 2.4. Sea $E = \mathbb{R}^3$ y $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, 5x + 2y + z = 0 \right\}$ entonces S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 2.5. Sea E el espacio $\mathcal{M}_{2\times 2}$ de todas las matrices cuadradas 2×2 con las operaciones usuales de suma de matrices y de multiplicación por un escalar y S el conjunto de las matrices diagonales, es decir las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, entonces S es un subespacio de E.

Ejemplo 2.6. Sea E el espacio $\mathcal{P}_3$ de todos los polinomios de grado menor o igual a 3, con la suma y multiplicación por un escalar usuales. Sea S el conjunto de los polinomios $\mathcal{P}_2$ de grado menor o igual a 2, entonces S es un subespacio de E.

Ejemplo 2.7. Sea E un espacio vectorial real, V y W dos subespacios vectoriales de E, entonces $V + W = \{ a + b | \, a \in V \, , \, b \in W \}$ y $V \cap W = \{ a | \, a \in V \cap W \}$ son también subespacios vectoriales reales.

2.3.1. Subespacio trivial

Si tenemos un espacio Vectorial V, elijamos el subconjunto que sólo contiene al neutro $W = \{n_v\}$:

- W es un subconjunto no vacío de V.
- Como mostramos en la sección anterior, W es siempre un espacio Vectorial (Denominado espacio trivial).

Por lo tanto W, el conjunto que sólo contiene al vector neutro de un espacio vectorial V es siempre un Subespacio Vectorial de V.

Todo espacio es subespacio de si mismo

Ahora, del espacio vectorial V, consideremos al conjunto V (No, no es error de escritura)

- V siempre es un subconjunto no vacío de V. (Recuerde que todo conjunto A es subconjunto de sí mismo).
- V es un espacio vectorial.

Por lo tanto cualquier espacio vectorial es subespacio vectorial de sḿismo.

Todo espacio vectorial V SIEMPRE tiene, por lo menos, dos subespacios vectoriales V y $\{n_v\}$. Aquellos subespacios diferentes a los anteriores reciben el nombre de Subespacios Propios.

2.3.2. Subespacios elementales

Subespacios de $\mathbb{R}^2$

En $\mathbb{R}^2$, el espacio vectorial *bidimensional* sobre el campo real; se distinguen, aparte de los subespacios propios, otros subespacios vectoriales:

- Toda recta que pasa por el origen es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$

Subespacios de $\mathbb{R}^3$

Y en $\mathbb{R}^3$, el espacio vectorial tridimensional sobre el campo real; se distinguen, aparte de los subespacios propios, otros subespacios vectoriales:

- Toda recta que pasa por el origen es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$
- Todo plano que contiene al origen es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

En principio para probar esto se necesitaría probar los 10 axiomas de la definición de espacio vectorial, sin embargo existe un teorema que nos ahorra bastante trabajo.

2.3.3. El teorema del subespacio

Teorema 2.1 (Caracterización de subespacio)**.** *Sea* $(V, \oplus, \odot)$ *un espacio vectorial sobre el campo. Sea* W *un subconjunto de* V*.* W *es un subespacio vectorial de* V *si y solo si:*

- W *no es vacío*
- $\forall w_1, w_2 \in W : w_1 \oplus w_2 \in W$
- $\forall \alpha \in \mathbb{K} \forall w \in W : \alpha \odot w \in W$

La prueba de este teorema se la dejamos al lector, indicándoles que deben probar que los restantes 8 axiomas de espacios vectoriales se satisfacen a partir de estos axiomas de cerradura y de la hipótesis que W es un subconjunto de V, con las mismas operaciones de V

Con este teorema demostraremos las afirmaciones sobre los subespacios de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Teorema 2.2. *Toda recta que pasa por el origen es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^2$

Prueba

El enunciado algebraicamente se traduce en que $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, y = mx \right\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

(i) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ ya que $0 = m \cdot 0$, por lo tanto $W \neq \phi$

(ii) $\forall w_1, w_2 \in W : w_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$w_1 + w_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

para que el *vector suma* pertenezca a W debe cumplir la condición de W: Por hipótesis $w_1 \in W$ por lo que $y_1 = mx_1$. Asimismo $w_2 \in W$ implica que $y_2 = mx_2$

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= mx_1 + mx_2 \\ y_1 + y_2 &= m\,(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

Por lo que el vector suma pertenece a W

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall w \in W : w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\alpha \cdot w = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$

Por hipótesis $w \in W$ por lo que $y = mx$

$$\begin{aligned} \alpha y &= \alpha\,(mx) \\ \alpha y &= m\,(\alpha x) \end{aligned}$$

Por lo que el *vector producto* $\alpha w = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$ pertenece a W.

Ya que hemos probado (i) (ii) , (iii) , que son las condiciones en el teorema de caraterización de subespacio, por el mismo teorema concluimos que W es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. Lo cual prueba que toda recta que pasa por el origen es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Teorema 2.3. *En $\mathbb{R}^3$ toda recta que pasa por el origen es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.*

Esto es equivalente a decir que el subconjunto

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; x = at, y = bt, z = ct; t \in \mathbb{R} \right\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(i) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ (cumple las tres condiciones) por tanto W no es vacío.

(ii) $\forall w_1, w_2 \in W \;\; w_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$$w_1 + w_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

Tanto w_1, w_2, w_3 son elementos de W, por lo que

$$x_1 = at_1, \; y_1 = bt_1, \; z_1 = ct_1$$

$$x_2 = at_2, \; y_2 = bt_2, \; z_2 = ct_2$$

De esto se obtiene que:

$$\begin{array}{ccc} x_1 + x_2 = at_1 + at_2 & y_1 + y_2 = bt_1 + bt_2 & z_1 + z_2 = ct_1 + ct_2 \\ x_1 + x_2 = a\,(t_1 + t_2) & y_1 + y_2 = b\,(t_1 + t_2) & z_1 + z_2 = c\,(t_1 + t_2) \end{array}$$

Por tanto el vector $w_1 + w_2$ pertenece a W.

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall w \in W : w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\alpha w = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$$

Por hipótesis, $x = at, y = bt, z = ct$:

$$\begin{array}{ccc} \alpha x = \alpha\,(at) & \alpha y = \alpha\,(bt) & \alpha z = \alpha\,(ct) \\ \alpha x = a\,(\alpha t) & \alpha y = b\,(\alpha t) & \alpha z = c\,(\alpha t) \end{array}$$

Por el teorema del subespacio, concluimos que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Teorema 2.4 (Intersección de subespacios vectoriales)**.** *Sean V_1 y V_2 dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial E, entonces $V_1 \cap V_2$ es un subespacio vectorial*

Demostración.

I. El cero vector de E pertenece a ambos subespacios, por lo tanto también peertenece a la intersección.

II. Si v_1 y v_2 pertenecen a $V_1 \cap V_2$ entonces ambos pertenecen a V_1 y V_2. Debido a que V_1 es un subespacio vectorial, entonces $v_1 + v_2$ pertenece a V_1. Por el mismo argumento para V_2, se tiene que $v_1 + v_2$ pertenece a V_2. Por lo tanto $v_1 + v_2$ pertenece a $V_1 \cap V_2$.

III. Si v pertenece a $V_1 \cap V_2$, entonces pertenece a V_1 y a V_2. Considere $\alpha \in \mathbb{R}$, debido a que $V_1 y V_2$ son subespacios vectoriales entonces αv pertenece a V_1 y αv pertenece a V_2, es decir αv pertenece a $V_1 \cap V_2$.

□

2.4. Problemas

2.4.1. Espacio vectorial

1.

Capítulo 3

Combinaciones lineales

3.1. Combinación lineal

Definición 3.1 (Combinación Lineal)**.** Sea $v \in V$, sean $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ vectores de un espacio vectorial V sobre el campo $\mathbb{K}$, se dice que v es una combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ si y solo si existen los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$tal que

$$v = (\alpha_1 \odot v_1) \oplus (\alpha_2 \odot v_2) \oplus (\alpha_3 \odot v_3) \oplus \ldots (\alpha_n \odot v_n)$$

Nótese que la palabra clave de la definición anterior es EXISTEN, para ilustrar esto considere los dos siguientes ejemplos:

Ejemplo 3.1. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$; ¿ es el vector $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$?

Para resolver este problema debemos verificar si EXISTEN escalares α, β tales que hagan posible la combinación lineal:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Esto nos llevará a un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = 6 \\ 2\alpha - \beta = -1 \end{cases}$$

Si el sistema es consistente, entonces los escalares si existen y por lo tanto, dicho vector es combinación lineal de los otros dos, pero; si el sistema es inconsistente, los escalares no existen por lo que el vector no sería combinación lineal de los otros dos.

Al resolver este sistema llegamos a la solución: $\alpha = 1$ y $\beta = 3$.

Los escalares α y β existen, el sistema es consistente con solución única, luego el vector $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ver figura 3.1

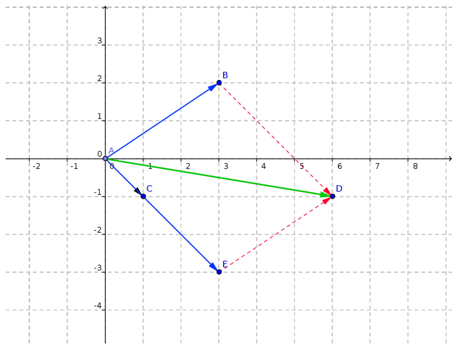

Figura 3.1: Combinación lineal de vectores en $\mathbb{R}^2$. Método del paralelogramo

Ejemplo 3.2. ¿El vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$?

Para que sea combinación lineal deben existir los escalares α y β tales que:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema por el metodo de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{rr|r} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{array} \right)$$

La última fila indica un absurdo matemático, lo cual implica que el sistema es inconsistente, no tiene solución. Como los escalares no existen, el vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ NO es combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

3.1.1. Más ejemplos de combinación lineal

De ahora en adelante trabajaremos sobre espacios vectoriales sobre campo Real y con operaciones usuales, por lo que obviaremos $\oplus$ y $\odot$ por los usuales $+$ y $\cdot$

Ejemplo 3.3. Considere el espacio vectorial $\mathcal{P}_2$ sobre el campo real, determinar si el vector x^2+x-1 es combinación lineal de los vectores $x+2, x^2-3, x^2+2x+1$.

Solución

Veamos si existen los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tales que

$$x^2 + x - 1 = \alpha_1 (x + 2) + \alpha_2 \left(x^2 - 3\right) + \alpha_3 \left(x^2 + 2x + 1\right)$$

Dos polinomios son iguales si y solos si cada uno de sus coeficientes lo son, por tanto:

$$x^2 + x - 1 = (\alpha_2 + \alpha_3) x^2 + (\alpha_1 + 2\alpha_3) x + (2\alpha_2 - 3\alpha_2 + \alpha_3)$$

Al igualar coeficientes, se origina el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_2 + \alpha_3 &= 1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 &= 1 \\ 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 &= -1 \end{aligned}$$

Resolviéndolo por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De la última fila del sistema inferimos que el sistema tiene infinitas soluciones, es decir; es consistente, que es lo que nos interesa. Como es consistente entonces EXISTEN escalares (en este caso infinitos) que hacen posible la combinación lineal.

Ejemplo 3.4. En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}$, determinar si $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Dos matrices son iguales si y solo si cada uno de sus coeficientes lo son, por lo que resolver la ecuación anterior es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 =& 2 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 =& 1 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_3 =& -1 \\ \alpha_2 - \alpha_3 =& 0 \end{aligned}$$

Por el método de Gauss obtenemos un sistema equivalente por filas

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

En las dos últimas filas se obtiene una inconsistencia matemática, ya que en la tercera tenemos que $\alpha_3 = \frac{3}{5}$ pero en la cuarta fila $\alpha_3 = \frac{1}{3}$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto el sistema es inconsistente, no existen escalares que satisfagan dicho sistema. Por tanto $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ NO es combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3.1. Determinar de ser posible los valores de k para los cuales el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ es una combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ -k \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>Solución</u>:
Analicémoslo de la misma manera y planteemos la combinación lineal

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} k \\ -k \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para que la combinación lineal exista el sistema debe ser consistente. Realizando operaciones elementales tenemos:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & k & 1 \\ 2 & -k & 1 \\ k & 1 & k \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & k & 1 \\ 0 & -3k & -1 \\ 0 & 1-k^2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & k & 1 \\ 0 & -3k & -1 \\ 0 & 0 & k^2-1 \end{array}\right)$$

Atención a las dos últimas filas, para que el sistema sea consistente el valor de $k^2 - 1$ debe ser igual a cero (si es diferente de cero: $k^2 - 1 = m, m \neq 0$ el sistema es inconsistente ya que quedaría una ecuación $0\alpha_1 + 0\alpha_2 = m$ lo cual es un absurdo), es decir es consistente cuando:

$$k^2 - 1 = 0 \longrightarrow k = -1 \vee k = 1$$

Debemos tener en cuenta también que $k \neq 0$ ya que con eso el sistema es inconsistente en la segunda fila, pero esto no afecta los valores obtenidos ya que ninguno de ellos es cero.

Por lo tanto para que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ sea combinación lineal de $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} k \\ -k \\ 1 \end{pmatrix}$; $k = -1 \vee k = 1$.

3.2. Cápsula Lineal

Definición 3.2 (Cápsula Lineal)**.** Sean $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ k vectores de un espacio vectorial V, se denomina Cápsula Lineal de $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ al conjunto de todas las combinaciones lineales posibles de los vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$

$$\mathcal{L}\left(v_1, v_2, \ldots, v_k\right) = \{v | v = \alpha_1\left(v_1\right) + \alpha_2\left(v_2\right) + \ldots + \alpha_k\left(v_k\right)\}$$

Teorema 3.1. *Sean $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ vectores de un espacio vectorial V, entonces la cápsula lineal de $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es un subespacio vectorial de V*

Demostración.

1. Puesto que $0_V = 0v_1 + 0v_2 + .,0v_n$ se tiene que 0_V es un elemento de la cápsula lineal de $\{v_1, v_2, .., v_n\}$
2. Sean w_1, w_2 dos elementos de la cápsula lineal de $\{v_1, v_2, .., v_n\}$, entonces exiten escalares $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ tales que

$$w_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ..\alpha_n v_n$$
$$w_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ..\beta_n v_n$$

   Ahora como

$$w_1 + w_2 = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + (\alpha_2 + \beta_2)v_2 + ..(\alpha_n + \beta_n)v_n$$

   Concluimos que w_1+w_2 es un elemento de la cápsula lineal de $\{v_1, v_2, .., v_n\}$.
3. Sean $c \in \mathbb{R}$ y w un elemento de la cápsula lineal de $\{v_1, v_2, .., v_n\}$. Entonces

$$cw = c(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ..\alpha_n v_n)$$
$$cw = (c\alpha_1)v_1 + (c\alpha_2)v_2 + ..(c\alpha_n)v_n$$

   Y así, cw es un elemento de la cápsula lineal de $\{v_1, v_2, .., v_n\}$.

Por lo tanto la cápsula lineal es un subespacio de V. □

Por esto a la cápsula lineal se le denomina espacio generado.

3.3. Conjunto Generador y Espacio Generado

(¿Qué? ¿ no es lo mismo?)

Definición 3.3. Sea $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ un subconjunto de un espacio vectorial V, de denomina Espacio Generado por S al conjunto de todas las combinaciones posibles de los vectores de S. Dado esto, el conjunto S se demonida Conjunto Generador. Se denota:

$$gen(S) = \{v \in V | v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k\}$$

al espacio generado por S.

Ejemplo 3.5. Halle el espacio generado por el subconjuto S de $\mathcal{P}_2$; $S = \{x + 1, x^2 - 1, 2x^2 + x - 1\}$. Luego, determine si

(a) $x^2 - 2x + 5 \in gen(S)$

(b) $3x^2 + 4x + 1 \in gen(S)$

Solución
Por definición $gen(S) = \{v \in V | v = \beta_1 v_2 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_k v_k\}$

Elegimos ahora un vector típico de $\mathcal{P}_2$, que es el espacio referencial

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$\forall p(x) \in gen(S): \; a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \beta_1 (x+1) + \beta_2 \left(x^2 - 1\right) + \beta_3 \left(2x^2 + x - 1\right)$$

Igualando coeficientes llegamos al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 &= a_0 \\ \beta_1 + \beta_3 &= a_1 \\ \beta_2 + 2\beta_3 &= a_2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & a_0 \\ 1 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & 2 & a_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & a_0 \\ 0 & 1 & 2 & a_1 - a_0 \\ 0 & 1 & 2 & a_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & a_0 \\ 0 & 1 & 2 & a_1 - a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 - a_0 - a_2 \end{array}\right)$$

Observación: Atención aquí, las incógnitas de este sistema por naturaleza serían $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; sin embargo cuando vamos a determinar el espacio generado no nos interesa quienes sean los escalares, sólo nos interesa que existan, lo que si nos interesa son las condiciones que recaen sobre a_0, a_1, a_2 para que el sistema sea consistente (en otras palabras, para que los escalares existan).

En la última fila tenemos una fila de llena de ceros pero al final tenemos el factor $a_1 - a_0 - a_2$ analicémosla, si $a_1 - a_0 - a_2 \neq 0$,entonces el sistema no tendría solución (¿Por qué?), lo cual va en contra de la definición de combinación lineal, que es esencial en la definición de espacio generado, por lo que esto es lo que debe ser evitado. Para que el sistema sea consistente debe cumplirse que $a_1 - a_0 - a_2 = 0$, y ésta será la condición de todos los vectores que estén en el espacio generado por S.

$$gen(S) = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 | a_1 - a_0 - a_2 = 0\}$$

(a) El vector $x^2 - 2x + 5$ no pertenece a $gen(S)$ ya que $(-2) - 1 - 5 = -8 \neq 0$

(b) El vector $3x^2 + 4x + 1 \in gen(S)$, ya que $4 - 3 - 1 = 0$

Ejemplo 3.6. Determine el espacio generado por los vectores $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Solución:

Sea $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}; a, b, c, \in \mathbb{R}$

$$\forall v \in gen(S): \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & a \\ 2 & 0 & 2 & b \\ 1 & 2 & 0 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 3 & 3 & a \\ 0 & -6 & -4 & -2a+b \\ 0 & 1 & 3 & a-c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 3 & 3 & a \\ 0 & -6 & -4 & -2a+b \\ 0 & 0 & 14 & 4a+b-6c \end{array}\right)$$

Este sistema siempre será consistente para cualesquiera que sean los valores de a, b, c por lo tanto se dice que no hay condiciones sobre ellos, en otras palabras $a, b, c \in \mathbb{R}$; puede ser cualquier real.

$$gen(S) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^3$$

Se dice que S genera a $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 3.2. Determine el valor de k para que el vector $C = \begin{pmatrix} 2k & 1 \\ -3 & k \end{pmatrix}$ pertenezca al espacio generado por $S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Hallemos el espacio generado por dichos vectores. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in gen(S)$.

$$\forall A \in gen(S): \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|c} -1 & 3 & -2 & a \\ 2 & -1 & 0 & b \\ 1 & -2 & 3 & c \\ 2 & 0 & 1 & d \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & -2 & a \\ 0 & 5 & -4 & 2a+b \\ 0 & 0 & -9 & -3a+b-5c \\ 0 & 0 & 0 & -5a-5b-5c+5d \end{array}\right)$$

Para que el sistema sea consistente debe cumplirse que $-5a - 5b - 5c + 5d = 0$. Por lo que el espacio generado por S es:

$$gen(S) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| d = a + b + c \right\}$$

Para que C pertenezca a $gen(S)$, debe cumplirse que

$$k = 2k + 1 - 3 \rightarrow k = 2$$

Capítulo 4

Conjuntos linealmente independientes

4.1. Dependencia e Independencia Lineal

Definición 4.1 (Independencia Lineal)**.** Sean $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vectores de un espacio vectorial V. El conjunto $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es linealmente independiente si y sólo si la ÚNICA manera de obtener al vector neutro de V como combinación lineal de los vectores de S es que todos los escalares de la combinación lineal sean cero.

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k = n_v \Rightarrow \ \forall i \leq k \ \alpha_i = 0$$

Definición 4.2 (Dependencia Lineal)**.** Sean $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vectores de un espacio vectorial V. El conjunto $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es linealmente dependiente si y sólo si se puede obtener al vector neutro de V como combinación lineal de los vectores de S, y existe un escalar de la combinación lineal diferente de cero.

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k = n_v \wedge \ \exists i \leq k \ \alpha_i \neq 0$$

En otras palabras, un conjunto es linealmente dependiente si y solo si NO es linealmente independiente.

Esta es, quizás, una de las definiciones más confusas o menos inteligibles(pero a la vez una de las más importantes), así que confiamos aclararla en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 4.1. Determine si el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$ es linealmente independiente $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Para determinar si son linealmente independientes analicemos los escalares al hacer la combinación lineal igualada al neutro de $\mathbb{R}^2$

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto deriva en un sistema de ecuaciones

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

La solución de este sistema es única $c_1 = 0,\ c_2 = 0$. El conjunto $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right\}$ es linealmente independiente.

Ejemplo 4.2. Determine si el siguiente conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ es linealmente independiente $\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}\right\}$

Para determinar si el conjunto es linealmente independiente analicemos los escalares al hacer la combinación lineal igualada al neutro de $\mathbb{R}^3$.

$$a_1 \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Lo que deriva en un sistema homogéneo (Un sistema homogéneo es un sistema que está igualado todo a cero).

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Observación: Este es el "Talón de Aquiles"de muchos; es claro que el sistema tiene infinitas soluciones ya que la última fila se eliminó y nos quedó un sistema con menos ecuaciones que incógnitas, esto indica claramente que existen infinitas maneras de obtener al vectores neutro como combinación lineal de esos tres vectores, analice lo sigiuente:

Razonamiento Incorrecto: Como tiene infinitas soluciones con $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$ se obtiene al vector neutro, por lo tanto el conjunto de vectores es linealmente independiente

Lo anterior es erróneo en el sentido de afirmar que los vectores son linealmente independientes, vayamos a la definición de independencia lineal para notar que lo esencial de la definición está en que DEBE SER LA ÚNICA FORMA DE OBTENER AL NEUTRO CUANDO TODOS LOS ESCALARES SEAN IGUALES A CERO.

En el ejemplo anterior no es la única de obtenerlo, hay infinitas, por ejemplo con $a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = 1$

$$-1 \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

No es la única manera cuando todos los escalares son ceros. Luego, el conjunto NO es linealmente independiente, es decir es linealmente dependiente.

4.2. ¿No hay una manera más sencilla?: Reducción por filas

Es posible determinar si un conjunto es linealmente independiente colocándolos como filas de una matriz y reduciendo la matriz por el método de reducción por filas de Gauss.

Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 4.3. Determine si el subconjunto de $\mathbb{R}^3$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente independiente.

Empleamos el método de reducción por filas de Gauss:
Colocamos los vectores como filas de una matriz las cuales vamos a reducir por el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -13 \\ 0 & 10 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Debido a que una de las filas, al emplear la reducción, resultó llena de ceros, entonces el vector correspondiente a esa fila $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de los vectores anteriores. El conjunto es linealmente dependiente.

Ejemplo 4.4. Determine la independencia lineal del siguiente conjunto de $\mathcal{P}_3$, $T = \left\{2 + x^3, x^2 + 4x^3, 1 + 3x + x^2\right\}$

De nuevo, debemos colocarlos a cada vector como una fila de una matriz, respetando el orden de los coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -6 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ya con la matriz totalmente reducida, vemos que ninguna fila se anuló, por lo tanto el conjunto T es linealmente independiente

4.3. El criterio del determinante

Aún se puede mejorar el método de reducción por filas de Gauss, si en la matriz al colocar los vectores como filas(en realidad, aquí funciona inclusive si los coloca como columnas), resulta una matriz cuadrada, entonces es posible determinar la independecia lineal del conjunto por medio del determinante de la matriz

El criterio del determinante

Teorema 4.1. *Sea A la matriz que se forma al colocar los vectores de un conjunto S como filas(o columnas), si A es cuadrada entonces se cumple que*

- *S es linealmente independiente si y solo si $det(A) \neq 0$*
- *S es linealmente dependiente si y solo si $det(A) = 0$*

Ejemplo 4.5. Determine si el conjunto de vectores S de $\mathcal{P}_2$, $S = \{1 - x, 1 + x, x^2 + 2x - 1\}$ es linealmente independiente.

Al colocar los vectores como filas, se forma la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ya que la matriz es CUADRADA entonces es posible aplicar el criterio del determinate, asi podemos determinar la independencia lineal:

$$det(A) = 1(1 - 0) - (-1)(1 - 0) = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

Debido a que el determinante de la matriz es diferente de cero entonces el conjunto S es linealmente independiente.

4.4. Problemas

1. Determine el valor de k para que el conjunto S sea linealmente dependiente, donde
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2k & 1 \\ -3 & k \end{pmatrix} \right\}$$
2. Demuestre:
Sea $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un subconjunto linealmente independiente de vectores del espacio vectorial V y sea x un vector de V que no puede ser expresado como una combinación lineal de los vectores de S, entonces $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, x\}$ también es linealmente independiente.
3. Sea $p(x) = x^2 + 2x - 3$, $q(x) = 2x^2 - 3x + 4$, y $r(x) = ax^2 - 1$. El conjunto $\{p, q, r\}$ es linealmente dependiente si $a =$ _?_.
4. Sean $f1(x) = senx$, $f2(x) = cos(x + \pi/6)$, and $f3(x) = sen(x - \pi/4)$ para $0 \leq x \leq 2\pi$. Muestre que $\{f1, f2, f3\}$ es linealmente dependiente.
5. Sean a, b, c números reales distintos. Pruebe que los vectores $(1, 1, 1)$, (a, b, c), (a^2, b^2, c^2) forman un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^3$.

Capítulo 5

Base y Dimensión

5.1. Base

Definición 5.1 (Base)**.** Un conjunto $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una *base* de un espacio vectorial V si y sólo si satisface lo siguiente:

- ♠ B genera a V
- ♠ B es linealmente independiente

Ejemplo 5.1. Determine si el conjunto $B = \left\{1 + x, 3x + x^2, x^2 + 1\right\}$ es una base de $\mathcal{P}_2$

SOLUCIÓN:
Para determinar si B genera a V debemos comprobar que existen escalares tales:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = \beta_1(1 + x) + \beta_2(3x + x^2) + \beta_3(x^2 + 1)$$

Lo cual provoca el siguiente sistema de ecuaciones, el cual tendría que ser consistente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 1 & 3 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 3 & -1 & a_1 - a_0 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 3 & -1 & a_1 - a_0 \\ 0 & 0 & -4 & a_1 - a_0 - 3a_2 \end{array}\right)$$

Este sistema tiene solución siempre, por lo que no hay condiciones sobre a_0, a_1, a_2

$$gen(B) = \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 \middle| \, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{P}_2$$

Ahora veamos la independencia lineal, debe haber soluci0́n única para

$$\beta_1(1 + x) + \beta_2(3x + x^2) + \beta_3(x^2 + 1) = 0 + 0x + 0x^2$$

Esto nos conduce a un sistema similar al anterior

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Como vemos, tiene solución única para los escalares, la solución trivial $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0, \beta_3 = 0$. El conjunto es linealmente independiente.

Por tanto como B genera a V y es linealmente independiente, B es una Base de V.

Teorema 5.1. *Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base del espacio vectorial V, entonces cualquier conjunto de más de n vectores es linealmente dependiente*

Demostración. Por contradicción
Sea $S = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ un conjunto de vectores de V con $m > n$, supongamos que S es linealmente independiente. Como B es una base entonces cualquier elemento se puede escribir como combinación lineal de los elementos de B

$$\begin{aligned}
w_1 &= a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \ldots + a_{1n}v_n \\
w_2 &= a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{2n}v_n \\
&\vdots \\
w_m &= a_{m1}v_1 + a_{n2}v_2 + \ldots + a_{mn}v_n
\end{aligned}$$

Si S es linealmente independiente, entonces al tener una combinación lineal igualada al vector cero implicaría que todos esos escalares son iguales a cero

$$\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \ldots + \beta_m w_m = 0_v$$

Al combinar estas ecuaciones tenemos

$$\begin{aligned}
\beta_1(a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \ldots + a_{1n}v_n) + \beta_2(a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{2n}v_n) + \ldots \\
+\beta_m(a_{m1}v_1 + a_{n2}v_2 + \ldots + a_{mn}v_n) = 0_v
\end{aligned}$$

Reordenando esta ecuación tendríamos

$$\begin{aligned}
(\beta_1 a_{11} + \beta_2 a_{21} + \ldots + \beta_m a_{m1})v1 + (\beta_1 a_{12} + \beta_2 a_{22} + \ldots + \beta_m a_{m2})v_2 + \ldots \\
+(\beta_1 a_{1n} + \beta_2 a_{2n} + \ldots + \beta_m a_{mn})v_n = 0_v
\end{aligned}$$

Pero B es una base, por tanto es linealmente independiente, de esta manera, los escalares de esta combinación lineal deben ser igual a cero

$$\begin{aligned}
\beta_1 a_{11} + \beta_2 a_{21} + \ldots + \beta_m a_{m1} &= 0 \\
\beta_1 a_{12} + \beta_2 a_{22} + \ldots + \beta_m a_{m2} &= 0 \\
&\vdots \\
\beta_1 a_{1n} + \beta_2 a_{2n} + \ldots + \beta_m a_{mn} &= 0
\end{aligned}$$

Este es un sistema homogéneo (un sistema igualado a todo cero), si m¿n habrían más incógnitas que ecuaciones y por tanto el sistema tendría infinitas soluciones para β_i, lo cual contradice la suposición de que S es un conjunto linealmente independiente. Contradicción. Luego, S es dependiente.

□

Teorema 5.2. *Sea V un espacio vectorial, entonces cualquier base B de V tiene el mismo número de elementos*

Demostración. Sean $B_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $B_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ dos bases de V, demostraremos que estos conjuntos tienen igual cantidad de elementos, es decir $m = n$. Si $m > n$ entonces por el teorema 5.1, ya que B_1 es base de V, B_2 sería linealmente dependiente, lo cual es una contradicción a la hipótesis de que B_2 es una base de V.

Si $n > m$ entonces por el mismo teorema 5.1, debido a que B_2 es base de V, entonces B_1 sería linealmente dependiente, lo cual es una contradicción.

Luego, la única posibilidad es que $m = n$. ■ □

Este resultado anterior nos indica que todas las bases de un mismo espacio vectorial tienen el mismo número de vectores, esto permite dar una característica propia del espacio vectorial, que a continuación será definido como dimensión.

5.2. Dimensión de un espacio vectorial

Definición 5.2 (Dimensión)**.** Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, y B una base de V, con un número finito de vectores. Se define como dimensión de V al número de elementos de B y se denota por $dimV$.

Si la base de un espacio vectorial V posee infinitos vectores, entonces se dice que V es de *dimensión infinita*

Por ejemplo, los espacios clásicos que hemos trabajado tienen dimensiones bien conocidas. El subespacio $\mathbb{R}^2$ posee dimensión 2 ya que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ y posee dos vectores. Además esto nos asegura que cualquier otra base de $\mathbb{R}^2$ tendrá exactamente 2 vectores.

Las dimensiones del resto de espacios conocidos la mostramos a continuación:

- $\mathbb{R}^3$ posee dimensión 3
- $\mathbb{R}^n$ posee dimensión n
- $\mathcal{P}_1$ posee dimensión 2
- $\mathcal{P}_2$ posee dimensión 3
- $\mathcal{P}_n$ posee dimensión $n+1$
- $\mathcal{M}_{2\times 2}$ posee dimensión 4
- $\mathcal{M}_{m\times n}$ posee dimensión $m \times n$
- S_{nxn} posee dimensión $\frac{n(n+1)}{2}$

Ejemplo 5.2. Calcule la dimensión del subespacio $H = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{r} a+b-c=0 \\ b=2c \end{array} \right\}$

<u>SOLUCIÓN</u>:
Si obtenemos una base del subespacio H tendríamos:

$$b = 2c$$

$$a = c - b = c - 2c = -c$$

$$B_H = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Como solo hay un vector en la base, la dimensión de H es igual a 1.

$\star$ **Observación importante**: *En cualquier espacio vectorial, el vector nulo* $\mathbf{0}_v$ *es combinación lineal de cualquier familia finita de elementos de* V $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *por* $\mathbf{0}_v = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n$.

Definición 5.3. Un subconjunto S de un espacio vectorial $(V, +, \odot)$ se dice que es un subconjunto linealmente independiente maximal de V si

1. S es linealmente independiente.

2. Para cualquier $w \in V$ y $w \notin S$ el subconjunto S' de V formado por S unido con $\{w\}$ es linealmente independiente.

Teorema 5.3. *Sea A un subconjunto de un espacio vectorial V. Si A es linealmente independiente maximal, entonces A es una base para V. Recíprocamente si A es una base entonces es un conjunto linealmente independiente maximal.*

Demostración. Veamos que A genera a V. Sea w $\in V \setminus A$, entonces $\{w\} \cup A$ es un conjunto linealmente dependiente. Así la combinación lineal $\alpha_0 w + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ..\alpha_n v_n = 0_V$ donde $A = \{v_1, v_2, .., v_n\}$ tiene solución no trivial. Si $\alpha_0 = 0$, entonces algún $\alpha_i;\ i = 1, 2.., n$, debe ser diferente de cero. Esto último implica que A no es un conjunto linealmente independiente, por tanto $\alpha_0 \neq 0$ y así obtendríamos que $w = \frac{-\alpha_1}{\alpha_0} v_1 + \frac{-\alpha_2}{\alpha_0} v_2 + ..\frac{-\alpha_n}{\alpha_0} v_n$, por lo que A es un conjunto generador de V. □

Definición 5.4. Un subconjunto de M de un espacio vectorial se dice que es un subconjunto generador minimal de V si

1. M genera a V.

2. Si a M se le quita un elemento v_0 entonces $M \setminus \{w\}$ no es un conjunto generador.

Teorema 5.4. *Si el espacio vectorial $(V, +, \odot)$ tiene un subconjunto generador minimal B, entonces B es una base para V.*

5.3. Propiedades de las bases

Teorema 5.5. *Sea A=$\{v_1, v_2, .., v_n\}$ un subconjunto linealmente independiente de un espacio vectorial V. Sea $w \in V$ y $A' = A \cup \{w\}$. Entonces A' es linealmente independiente si y solo si w es un elemento de $E \setminus gen(A)$*

Demostración. Si w es un elemento de gen(A), entonces existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..\alpha_n$ tales que $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + .. + \alpha_n v_n$. Así $(-1)w + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + .. + \alpha_n v_n = 0_V$ y esto implica que A' es linealmente dependiente.
Supongamos ahora que A' es linealmente dependiente entonces existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..\alpha_n$ no todos iguales a cero tales que $\alpha_0 w + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + .. + \alpha_n v_n = 0_V$. Si $\alpha_0 = 0$ entonces $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + .. + \alpha_n v_n = 0_V$ esto implicaría que $\alpha_1 = \alpha_2 = .. = \alpha_n = 0$ ya que A es linealmente independiente, pero esto es imposible ya que A' es linealmente dependiente; por lo tanto $\alpha_0 \neq 0$ y así w es una combinación lineal de A, por lo tanto $w \in gen(A)$. □

Teorema 5.6. *Si A=$\{v_1, v_2, .., v_n\}$ es un conjunto generador de un espacio vectorial V y la cardinalidad de E es mayor o igual a 2, entonces existe un conjunto linealmente independiente contenido en A que también genera a V.*

Demostración. Si A es linealmente independiente no hay nada que demostrar. Supongamos que A no es linealmente independiente. Sea w_r el primer elemento no cero de A. Así $gen\{w_r\}$ es un subespacio de V y $\{w_r\}$ es un conjunto linealmente independiente. Si $gen\{w_r\} = V$ se termina la prueba. Supongamos que $gen\{w_r\} \neq V$, entonces existe un elemento $w_q \subset A$ que no pertenece a $gen\{w_r\}$ □