Problemas de Combinatoria

Primer entrenamiento

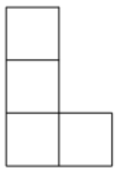
1 Problemas de coloraciones

Problema 1 *A un tablero de ajedrez se le quitan dos esquinas opuestas,¿puede ser llenado el resto con fichas de dominó?*

Problema 2 *Demuestra que un tablero de $a \times b$ puede ser cubierto con fichas de $n \times 1$ si y sólo si alguno de a o b es múltiplo de n.*

Problema 3 *¿ Es posible cubrir un tablero de 6×7 con fichas como las que se muestra an continuación de tal manera que cada casilla queda cubierta con el mismo número de capas?*

Problema 4 *¿Es posible cubrir un tablero de 10×10 con piezas del siguiente estilo sin que se traslapen ni se salgan del tablero?*



Problema 5 *En un tablero de 9×9 se colocan 65 insectos cada uno en el centro de una casilla. Los insectos empiezan a moverse al mismo tiempo y a la misma velocidad a una casilla que comparte lado con la casilla en la que están. Al llegar a siguiente casilla dan un giro de 90 grados y siguen con su camino (sin salirse del tablero). Demuestra que en algún momento hay dos insectos en la misma casilla.*
Nota: Los giros pueden ser a la derecha o a la izquierda

Problema 6 *En un tablero de $m \times n$ un camino es una sucesión de casillas de tal manera que dos casillas consecutivas comparten un lado. Demuestra que en un tablero de $m \times n$ hay un camino que empieza y termina en la misma casilla y pasa por todas las otras casillas exactamente una vez si y solo si alguno de m o n es par.*

Problema 7 *A un tablero de 100×100 se le quita una esquina de 2×2. Demuestra que lo que queda no puede ser cubierto por fichas de 3×1.*

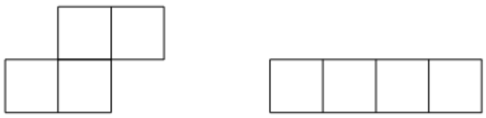
Problema 8 *En un tablero de 8×8 hay un foco en cada casilla. Inicialmente todos los focos están apagados. Un movimiento consiste en elegir un foco y una dirección (puede ser la dirección vertical o la dirección horizontal) y cambiar el estado de ese foco y todos sus vecinos en esa dirección. Después de cierta cantidad de movidas, queda exactamente un foco prendido. Encuentra todas las posibles posiciones de ese foco.*

Problema 9 (OIM 2004) *Se tiene un tablero de 1001×1001. Se quieren colorear algunas casillas de tal manera que se cumplan las siguientes dos condiciones:*

- *Si dos casillas comparten un lado, entonces al menos una de las dos está coloreada*
- *Si 6 casillas son consecutivas (horizontal o verticalmente) entonces entre ellas hay al menos dos casillas consecutivas coloreadas.*

Encuentra el mínimo número de casillas que se deben colorear para satisfacer estas dos condiciones.

Problema 10 *¿Es posible cubrir un tablero de 10×10 con 21 figuras del primer tipo y 4 figuras del segundo?*



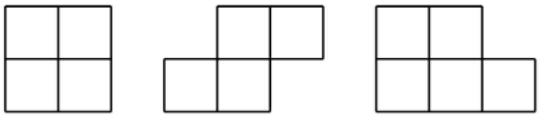
Problema 11 *En un tablero de 5×5 hay un foco en cada una de sus casillas. Inicialmente están todos apagados. En una movida se pueden agarrar las casillas de cualquier tablero de 2×2 o de 3×3 y cambiar de estado.*

- *Demuestra que no puede cambiarse el estado de todos los focos.*
- *Si queda solo un foco apagado, encuentra sus posibles posiciones.*

Problema 12 *Sean $m < n$ enteros positivos. En un tablero de $n \times n$ se colocan todos los números de 1 a n^2. En cada columna se colorean de rojo los m números escritos más grandes y en cada fila se colorean de azul lo m números escritos más grandes. Encuentra el mínimo número de números pintados de ambos colores.*

Problema 13 (APMO 2007) *En cada casilla de un tablero de 5×5 hay un foco. Al tocar un foco se cambian de estado ese foco y todos los focos en casillas vecinas. Después de cierta cantidad de movidas queda exactamente un foco prendido. Encuentra todas las casillas en las que puede estar dicho foco.*
Nota: dos casillas son vecinas si y sólo si comparten un lado.

Problema 14 (Vietnam 1993) *Con fichas de los siguientes tipos se forma un tablero de 1993×2000. Sea s el número de fichas que se usaron de los primeros dos tipos. Encuentra el mayor valor posible de s.*

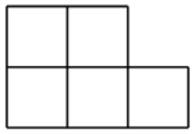


Problema 15 (Argentina 2009) *Se considera un tablero de $a \times b$, con a y b enteros mayores o iguales que 2. Inicialmente sus casillas están coloreadas de blanco y de negro como un tablero de ajedrez. La operación permitida consiste en elegir dos casillas con un lado común y recolorearlas de la siguente manera: una casilla blanca pasa a negra; una casilla negra pasa a verde; una casilla verde pasa a blanca.*
Determina para qué valores de a y b es posible, mediante una sucesión de operaciones permitidas, lograr que todas las casillas que inicialmente eran blancas finalicen negras y todas las casillas que inicialmente eran negras finalicen blancas.
Nota: Inicialmente no hay casillas verdes, pero estas aparecen luego de la primera operación.

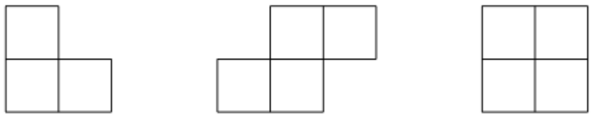
Problema 16 *Se tiene un tablero de 5×5 coloreado como ajedrez con las esquinas negras. En cada casilla negra hay una ficha negra y en cada casilla blanca hay una ficha blanca. Las fichas se pueden mover a casillas vecinas (con las que compartan un lado). A y B van a jugar alternadamente de la siguiente manera. Primero A elige una ficha negra y la quita del tablero. Depués, A mueve una ficha blanca al espacio vacío. Después B mueve alguna ficha negra al espacio vacío. El juego continúa de esta manera hasta que alguno no puede hacer una movida, el cual pierde en ese momento. ¿Quién tiene estrategia gandora?*

Problema 17 (OMM 1999) *Decimos que un polígono es ortogonal si todos sus ángulos son de 90 grados (los ángulos pueden ser hacia adentro o hacia afuera). Demuestra que un polígono ortogonal cuyos lados son todos enteros positivos impares no puede ser cubierto con fichas de dominó de tamaño 2×1.*

Problema 18 (Lista corta 1999) *Demuestra que si un tablero de $5 \times n$ se puede cubrir con fichas como en la figura entonces n es par. Demuestra que el número de maneras de cubrir un tablero de $5 \times 2k$ con esas fichas es al menos $2 \cdot 3^{k-1}$.*



Problema 19 (Lista Corta 2002) *Un tablero de* $(2n-1)\times(2n-1)$ *se quiere cubrir con fichas del siguiente estilo sin que se traslapen ni se salgan del tablero*



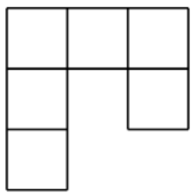
Fichas para ejemplo 3

Demuestra que se usan al menos $4n-1$ *fichas del primer tipo.*

Problema 20 (IMO 1993) *En un tablero infinito de ajedrez, se juega comesolo de la siguiente manera: Al principio hay* n^2 *fichas ocupando un cuadrado de lado* n*. Una movida consistee en saltar un cuadrado ocupado hacia uno desocupado, y la ficha que ha sido saltada se quita del tablero. ¿Para cuáles* n *es posible que el juego acabe con una sola ficha?*

Problema 21 *Un rectángulo* R *está dividido en una cantidad finita de rectángulos menores. Cada uno de los rectángulos menores tiene al menos un lado entero. Demuestra que* R *tiene al menos un lado entero.*

Problema 22 (IMO 2004) *Encuentra todas las parejas* (m,n) *tales que un tablero de* $m\times n$ *se pueda cubrir con fichas como la de la figura*



Nota: Las fichas se pueden mover, girar y voltear.

2 Problemas de invarianza

Problema 23 *Se tienen 3 montones con* n *fichas cada uno. En cada paso se permite elegir dos montones, quitar una ficha de cada uno de ellos y agregar una ficha al montón restante. ¿Es posible terminar con estos pasos teniendo sólo una ficha?*

Problema 24 *Sea* n *un entero positivo. Consideremos la lista* $(1,2,3,\ldots,n)$*. En cada paso se permite tomar dos números distintos de esa lista y cambiarlos de lugar. ¿Es posible que después de exactamente* 2009 *pasos quede la lista en su orden original?*

Problema 25 *Un reloj se divide en* 6 *regiones y se colocan en ellas los números* $1, 0, 1, 0, 0, 0$ *en el orden las manecillas del reloj. En cada paso se permite aumentar dos números consecutivos en* 1 *o reducirlos en* 1*. ¿Es posible llegar a que todos los números sean iguales?*

Problema 26 *Se tienen* n *números* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *tales que cada uno es* 1 *ó* -1*. Se sabe que*

$$a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \ldots + a_na_1a_2a_3 = 0$$

Demuestra que n *es múltiplo de* 4*.*

Problema 27 *A cada número de* 1 *a* 10^6 *lo cambiamos por la suma de sus dígitos hasta que llegamos a un número de un sólo dígito. Al terminar, en la lista que nos queda, ¿hay más números* 1 *o más números* 2*?*

Problema 28 *Se tienen los números* $1, 2, \ldots, 2n$ *y se acomodan en algún orden en cajas númeradas* $1, 2, \ldots, 2n$*. Después a cada número se le suma el número de la caja en la que está. Demuestra que hay al menos dos de estas sumas que son congruentes módulo* $2n$*.*

Problema 29 23 *amigos quieren jugar futbol. Para ello eligen un árbitro y los demás se dividen en* 2 *equipos de* 11 *personas. Quieren hacer esto de tal manera que el peso total de los integrantes de cada equipo sea el mismo. Si se sabe que todos tienen pesos enteros y que sin importar quién sea el árbitro es posible hacer dos equipos con las condiciones deseadas, demuestra que todos tienen el mismo peso.*

Problema 30 *Se tiene un arreglo rectangular de* $m \times n$ *números. En cada paso se permite cambiar el signo de todos los números en una fila o todos los números en una columna. Demuestra que se puede llegar a que cada fila y cada columna tengan suma no negativa.*

Problema 31 *Se tienen* 9 *puntos en el plano de tal manera que no hay* 3 *colineales. Sea* P *alguno de ellos. Demuestra que* P *está contenido en una cantidad par de triángulos con vértices en los otros* 8 *puntos.*

Problema 32 (USAMO 1994) *Se tiene un* 99*-ágono regular cuyos lados están pintados de rojo, azul o amarillo. Inicialmente se pinta cada lado del polígono de la siguiente manera: rojo, azul, rojo, azul, ..., rojo, azul, amarillo. En un paso se permite cambiar el color de un lado a azul, rojo o amarillo mientras no se generen dos lados consecutivos del mismo color. ¿Es posible llegar a una coloración rojo, azul, rojo, azul, ..., rojo, amarillo, azul después de una cantidad finita de pasos?*
Nota: las dos coloraciones están dadas en el mismo sentido.

Problema 33 *Se tienen palabras en un alfabeto con dos letras* A *y* B*. Podemos modificar a una palabra* X *de dos maneras. Si tenemos cualquier otra palabra* Y*, podemos agregar* YYY *entre cualesquiera dos letras de* X *o en sus extremos. La otra modificación consiste en hacer el inverso de esto. Es posible pasar de la palabra* AB *a* BA*.*

Problema 34 (IMO 1986) *A cada vértice de un pentágono regular se le asigna un entero, de tal manera que la suma de todos es positiva. Si* 3 *vértices consecutivos tienen asignados números* x, y, z *respectivamente tal que* $y < 0$*, se permite cambiar la terna* (x, y, z) *por* $(x+y, -y, z+y)$*. Esta operación se repite mientras al menos uno de los números sea negativo. Decide si después de cierta cantidad de pasos este proceso necesariamente termina.*