$\boldsymbol{AR(\infty) = MA(1)}$

Vamos a demostrar que el modelo de medias móviles simple, de orden uno, es equivalente a un modelo autorregresivo de infinitos retrasos con ciertas restricciones.

El modelo autorregresivo de infinitos retrasos $AR(\infty)$ toma infinitos retrasos del valor de nuestra serie, pero esto sólo sería un concepto teórico, en la práctica es imposible trabajar con infinitos retrasos porque nuestro dataset es **finito**, incluso aunque estemos trabajando con *big data*.

Sin embargo, podemos representar de manera teórica cómo sería un modelo $AR(\infty)$:

$$x_t = c + \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2} + \cdots + \epsilon_t$$

Donde x_t es el valor de interés, del período actual, de nuestra serie de tiempo, c es la constante, φ_1 y φ_2 son los coeficientes que debemos estimar, ϵ_t es el residuo en el período actual, y $x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots$ son los valores de períodos pasados.

Tener absoluta libertad para infinitos coeficientes no es muy razonable, porque no tendríamos idea de cómo se comportan los datos, entonces intentaremos hacer el modelo más práctico y vamos a asumir que todos los φ cumplen ciertas restricciones. Un caso especial sería cuando todos los coeficientes son negativos y progresan de manera geométrica, en otras palabras, el modelo sería:

$$x_t = c - \theta x_{t-1} - \theta^2 x_{t-2} - \theta^3 x_{t-3} - \cdots + \epsilon_t$$

Aquí los coeficientes son esencialmente $\varphi_i = -\theta^i$.

Como todos los modelos incluyen una constante y un residuo, incluso aunque terminen siendo no significativos, podemos reescribir la ecuación anterior, mover las partes del modelo autorregresivo a la derecha y quedaría:

$$x_t + \theta x_{t-1} + \theta^2 x_{t-2} + \theta^3 x_{t-3} + \cdots = c + \epsilon_t$$

Si hacemos lo mismo para x_{t-1} nos quedaría:

$$x_{t-1} + \theta x_{t-2} + \theta^2 x_{t-3} + \theta^3 x_{t-4} + \cdots = c + \epsilon_{t-1}$$

Recordemos que al contrario que en el modelo autorregresivo, el modelo de medias móviles no incluye valores pasados, sino que solo incluye residuos pasados. Entonces tenemos que deshacernos de todos los componentes x_{t-i}.

Para lograr eso, vamos a multiplicar la ecuación anterior por θ a ambos lados:

$$\theta x_{t-1} + \theta^2 x_{t-2} + \theta^3 x_{t-3} + \theta^4 x_{t-4} + \cdots = \theta c + \theta \epsilon_{t-1}$$

Ahora, observemos juntas las dos ecuaciones que tenemos para x_t y para x_{t-1}:

$$x_t + \theta x_{t-1} + \theta^2 x_{t-2} + \theta^3 x_{t-3} + \cdots = c + \epsilon_t$$

$$\theta x_{t-1} + \theta^2 x_{t-2} + \theta^3 x_{t-3} + \theta^4 x_{t-4} + \cdots = \theta c + \theta \epsilon_{t-1}$$

Si observamos detenidamente, los componentes autorregresivos en ambos modelos son idénticos, todos son de la forma $\theta^i x_{t-i}$ y se van repitiendo en ambas ecuaciones. Entonces podríamos restar ambas ecuaciones, y esos elementos repetidos se van a simplificar. Con esto, quedaría:

$$x_t = c + \epsilon_t - \theta c - \theta \epsilon_{t-1}$$

Si reordenamos los términos y sacamos factor común:

$$x_t = c(1 - \theta) - \theta \epsilon_{t-1} + \epsilon_t$$

Notemos que la primera parte de la ecuación no depende del tiempo, es invariante porque no depende de t, entonces este valor es una constante que podemos llamar c_{MA}:

$$x_t = c_{MA} - \theta \epsilon_{t-1} + \epsilon_t$$

Donde los elementos de este modelo que hemos obtenido son x_t, el valor de interés, del período actual, de nuestra serie de tiempo, c_{MA} es la constante, ϵ_t es el residuo en el período actual, ϵ_{t-1} es el residuo pasado y θ es el coeficiente que le acompaña.

Como podemos ver, ese modelo predice los valores actuales basándose solamente en los errores de nuestras predicciones en un período anterior, por lo que esto tiene un aspecto de medias móviles de un retraso, pero con ciertas restricciones que impusimos.