CURSO DE NIVELACIÓN

Apunte teórico - práctico

Módulo 5: Trigonometría

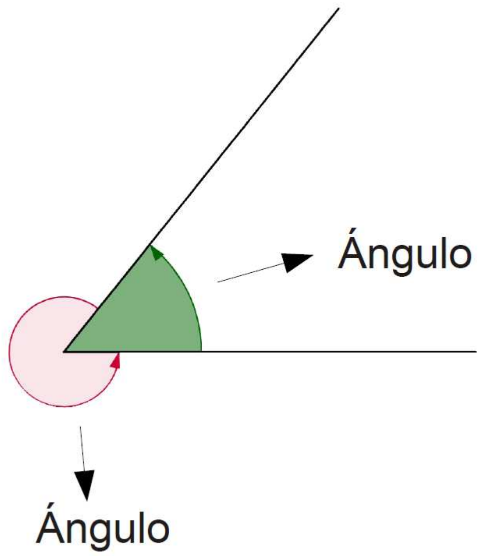
Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

TRIGONOMETRÍA

En este capítulo trabajaremos con las funciones trigonométricas, que son funciones no algebraicas. Pero para poder entender cómo se definen, primero debemos introducir la idea de ángulo y sus sistemas de medición.

Ángulos y sistemas de medición

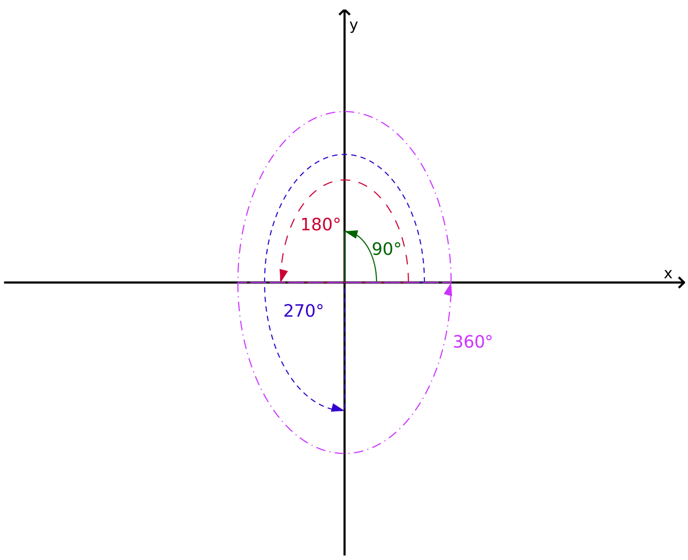
Se denomina ángulo a la sección del plano que queda comprendida entre dos semirrectas que se que se originan en un mismo punto, y están colocadas en distintas direcciones. El punto en que se inician las semirrectas se denomina vértice del ángulo; en tanto que cada una de las semirrectas que lo delimitan, se denominan lados del ángulo.



Se define que **un ángulo es positivo cuando se mide en el sentido contrario a las agujas del reloj** (también llamado sentido antihorario, sentido levógiro o sentido directo), y por lo tanto **es negativo si se mide en sentido contrario, es decir, en el mismo sentido que las agujas del reloj** (sentido horario, sentido dextrógiro o indirecto). **En un sistema de ejes cartesianos, se toma por convención que, los ángulos se miden desde el eje positivo de las abscisas en sentido contrario a las agujas del reloj.** En general los ángulos se denotan con letras griegas.

Existen distintos sistemas de medición de ángulos (de manera análoga a la que existen distintos sistemas para medir, por ejemplo, distancias: millas, kilómetros, leguas, etc.). Los sistemas que veremos en este curso serán el sistema sexagesimal, el sistema horario y el sistema circular.

Sistema sexagesimal En este sistema una vuelta completa equivale a 360 grados. Esto se denota: $360°$. Luego, $\frac{3}{4}$ de vuelta equivale a $270°$, $\frac{1}{2}$ de vuelta equivale a $180°$ y $\frac{1}{4}$ de vuelta equivale a $90°$.



Las fracciones de grado son los minutos y los segundos, esto quiere decir que: un grado equivale a 60 minutos, $1^\circ \equiv 60'$, y 1 minuto equivale a 60 segundos, $1' \equiv 60''$. De este modo podemos escribir un ángulo de dos formas equivalentes: como fracción de grado o lo podemos expresar en grados, minutos y segundos.

Ejemplo: *Supongamos que queremos escribir el ángulo* $\alpha = 42^\circ\, 30'\, 15''$ *como fracción de grado. Para hacer esto tenemos que ver a cuántos grados equivalen* $30'\, 15''$. *Entonces, utilizando las equivalencias dadas anteriormente tenemos que:*

$$\begin{aligned} 60'' &\equiv 1' \\ 15'' &\equiv x \Longrightarrow x = \frac{15''\,.\,1'}{60''} = 0.'25 \end{aligned}$$

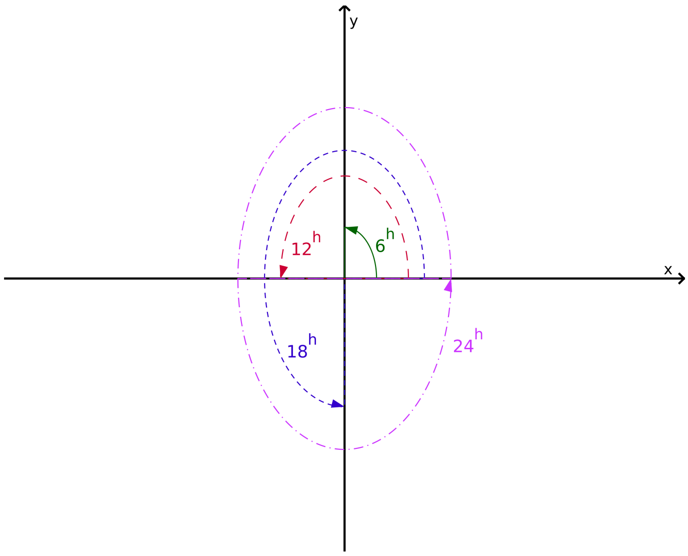
Así encontramos que $15'' \equiv 0.'25$. *Ahora tenemos que* $\alpha = 42^\circ\, 30.'25$. *Finalmente, para pasar de minutos a fracción de grado hacemos el mismo procedimiento que realizamos recién:*

$$\begin{aligned} 60' &\equiv 1^\circ \\ 30.'25 &\equiv x \Longrightarrow x = \frac{30.'25\,.\,1^\circ}{60'} = 0.^\circ 5041\hat{6} \end{aligned}$$

De este modo encontramos que $\alpha = 42^\circ\, 30'\, 15'' = 42.^\circ 5041\hat{6}$.

Es importante recordar que cuando estemos trabajando en estas unidades la calculadora debe estar en la función deg (degree, que quiere decir grado en inglés).

Sistema horario En este sistema una vuelta completa equivale a 24 horas. Esto se denota: 24^{h}. Luego, $\frac{3}{4}$ de vuelta equivale a 18^{h}, $\frac{1}{2}$ de vuelta equivale a 12^{h} y $\frac{1}{4}$ de vuelta equivale a 6^{h}.

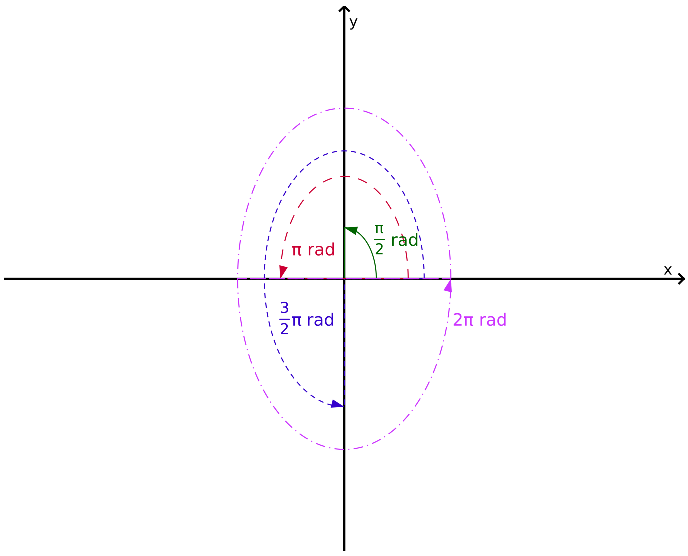


Las fracciones de hora también son los minutos y los segundos, esto quiere decir que: una hora equivale a 60 minutos, $1^{\mathrm{h}} \equiv 60^{\mathrm{m}}$, y 1 minuto equivale a 60 segundos, $1^{\mathrm{m}} \equiv 60^{\mathrm{s}}$. De este modo podemos escribir un ángulo de dos formas equivalentes: como fracción de hora o lo podemos expresar en horas, minutos y segundos.

Ejemplo: *Supongamos que queremos escribir el ángulo* $\alpha = 42^{\mathrm{h}}\,30^{\mathrm{m}}\,15^{\mathrm{s}}$ *como fracción de hora. Utilizando el mismo procedimiento que en el ejemplo del sistema sexagesimal obtenemos que* $\alpha = 42^{\mathrm{h}}\,30^{\mathrm{m}}\,15^{\mathrm{s}} = 42.^{\mathrm{h}}5041\hat{6}$.

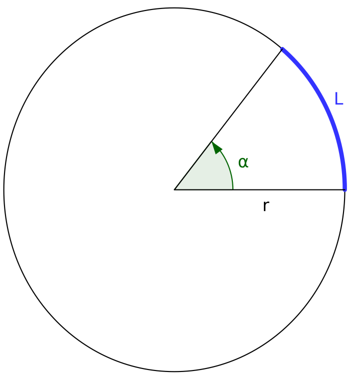
Para este caso las calculadoras no tienen una función específica, pero como las fracciones de hora y de grado son equivalentes, ***para trabajar en este sistema la calculadora debe estar en la función deg****. La diferencia estará en que si estamos trabajando en el sistema horario un ángulo de* 25^{h} *equivale a un día y una hora,* $25^{\mathrm{h}} \equiv 1^{\mathrm{d}}\,1^{\mathrm{h}}$*, mientras que en el sistema sexagesimal un ángulo de* $361°$ *equivale a una vuelta y un grado (pero el ángulo se sigue escribiendo como* $361°$*).*

Sistema circular En este sistema una vuelta completa equivale a 2π radianes. Esto se denota: 2π ó 2π rad. En general en este sistema no se escribe la unidad, es decir que un ángulo de 2π radianes se expresa como 2π. Los radianes se escriben como un número real, las fracciones de radianes no tienen una notación particular.



Es importante recordar que cuando estemos trabajando en estas unidades la calculadora debe estar en la función rad (radianes).

Para definir cuánto mide un radián primero debemos definir la longitud de arco. Se define **la longitud de arco, *L*, como un tramo de la longitud total de la circunferencia.**[1]



[1]La historia del número pi y su significado lo pueden ver aquí. (http://www.youtube.com/watch?v=zbRP2OJ99Ek)

Para calcular esta longitud hacemos el siguiente razonamiento: si una vuelta completa, es decir un ángulo de 2π radianes equivale a la longitud total de la circunferencia, $2\pi r$, entonces un ángulo α equivale a una longitud L. Por lo tanto:

$$\frac{2\,\pi}{\alpha} = \frac{2\,\pi\,r}{L}$$

Despejando L obtenemos que:

$$\boxed{L = \alpha\,r} \tag{1}$$

De aquí podemos definir cuánto mide un radián. **Un radián se define como el ángulo para el cual la longitud de arco, L, es igual al radio, r, de la circunferencia.**

Conversión entre sistemas

Para pasar de un sistema de medición a otro se utilizan las equivalencias entre los valores para un mismo ángulo en los distintos sistemas. De las tres figuras anteriores se puede ver que:

$$\begin{aligned} 90^\circ &\equiv 6^h \equiv \frac{\pi}{2} \\ 180^\circ &\equiv 12^h \equiv \pi \\ 270^\circ &\equiv 18^h \equiv \frac{3}{2}\,\pi \\ 360^\circ &\equiv 24^h \equiv 2\,\pi \end{aligned}$$