Algorítmica

Tema 2. Algoritmos «divide y vencerás»

Francisco Javier Cabrerizo Lorite

Curso académico 2023-2024

ETS de Ingenierías Informática y de Telecomunicación. Universidad de Granada

Índice

Objetivos

- Ser capaz de proponer diferentes soluciones para un determinado problema y evaluar la calidad de estas.
- Ser consciente de la importancia del análisis de la eficiencia de un algoritmo como paso previo a su implementación.
- Entender la técnica de resolución de un problema por división en problemas de menor tamaño.
- Conocer y saber aplicar los esquemas básicos de la técnica divide y vencerás.
- Conocer los criterios de aplicación de cada una de las diferentes técnicas de diseño de algoritmos.

La técnica «divide y vencerás»

La técnica «divide y vencerás»

Características de los problemas

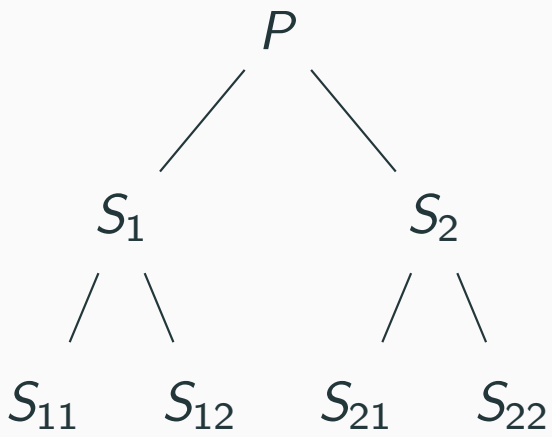
- La instancia del problema se puede descomponer en subinstancias más pequeñas del mismo problema.
- Las subinstancias se pueden resolver independientemente unas de otras (casi siempre).
- Las subinstancias son disjuntas, sin solapamiento.
- La solución de la instancia original se obtienen mediante una combinación de las subsoluciones.

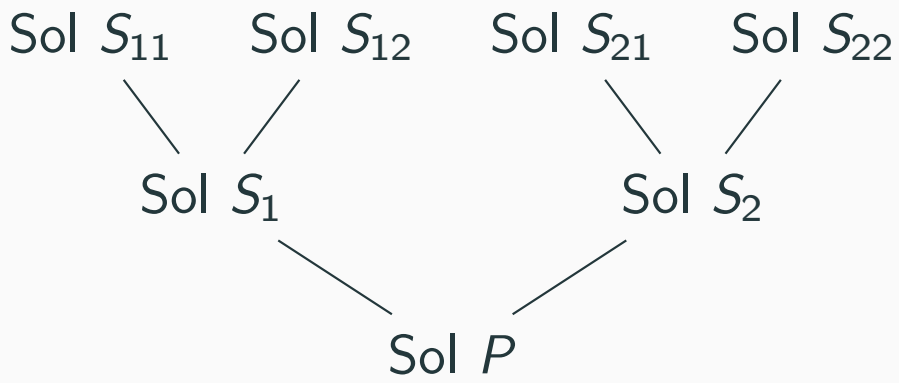
La técnica «divide y vencerás»

Pasos

- Descomponer (dividir) la instancia del problema de tamaño n en k subinstancias ($1 \leq k \leq n$) del mismo tipo y menor tamaño (cada una con una entrada de tamaño n_k, donde $0 < n_k < n$).
- Resolver (vencer) sucesiva e independientemente las subinstancias, bien directamente si son elementales (casos «base») o bien de forma recursiva.
- Combinar las subsoluciones obtenidas para construir la solución de la instancia original.

La técnica «divide y vencerás»





- Si las subinstancias son todavía relativamente grandes se aplicará de nuevo esta técnica hasta alcanzar subinstancias lo suficientemente pequeñas para ser resueltas directamente.
- Esto sugiere el uso de la recursividad en las implementaciones de estos algoritmos (soluciones eficientes).
- Las ecuaciones recurrentes son naturales en esta técnica.

La técnica «divide y vencerás»

Esquema general

function DyV(P, n)
  if P es suficientemente pequeño **then**
    $Solucion \leftarrow adhoc(P, n)$
  else
    Dividir P en k subinstancias más pequeñas $S_1, S_2, \ldots, S_k$ con tamaños $n_1, n_2, \ldots, n_k$.
    for all i = 1,. . . ,k **do**
      $Subsolucion_i \leftarrow DyV(S_i, n_i)$
    end for
    $Solucion \leftarrow Combinar(Subsolucion_1, \ldots, Subsolucion_k)$
  end if
  return *Solucion*
end function

La técnica «divide y vencerás»

Algunas consideraciones

- El número de subinstancias, k, suele ser pequeño e independiente de la instancia concreta que se vaya a resolver.
- Si $k = 1$, hablamos de reducción o simplificación.
- $adhoc(P, n)$ es un algoritmo básico capaz de resolver el problema:
  - Debe ser eficiente en instancias pequeñas.
  - Su rendimiento en instancias grandes nos da igual.

La técnica «divide y vencerás»

Ejemplo: elevar un número real a un entero

- Sean r y n un número real y un número entero, respectivamente.
- Se requiere un algoritmo que realice la operación r^n.
- Existe un método básico que resuelve el problema (basta con multiplicar r un total de n veces:

$$r^n = r \cdot r \cdots r \quad (n \text{ veces})$$

Algoritmo

```
1 double Elevar_basico(double r, int n) {
2   double resultado = 1.0;
3   for (int i = 0; i < n; i++) {
4     resultado *= r;
5   }
6   return resultado;
7 }
```

La técnica «divide y vencerás»

Ejemplo: elevar un número real a un entero

- ¿Se puede dividir el problema?
  - Sí: $r^n = r \cdot r^{n-1}$
  - Esta división no es muy interesante.
- ¿Alguna otra división?
  - $r^n = r^{n/2} \cdot r^{n/2}$
  - Esta división es más eficiente.
- Expresión:

$$r^n = \begin{cases} r^{n/2} \cdot r^{n/2} & n \text{ par} \\ r \cdot r^{n/2} \cdot r^{n/2} & n \text{ impar} \end{cases}$$

La técnica «divide y vencerás»

Ejemplo: elevar un número real a un entero

- Expresión:

$$r^n = \begin{cases} r^{n/2} \cdot r^{n/2} & n \text{ par} \\ r \cdot r^{n/2} \cdot r^{n/2} & n \text{ impar} \end{cases}$$

- «Divide y vencerás»: la instancia del problema se tiene que poder dividir en una o más subinstancias equivalentes de menor tamaño, independientes entre sí, que se puedan resolver por separado:
  - Se puede dividir en dos subinstancias de menor tamaño ($n/2$), independientes y que se pueden resolver por separado (sacando partido de las propiedades de las potencias).

La técnica «divide y vencerás»

Ejemplo: elevar un número real a un entero

- Expresión:

$$r^n = \begin{cases} r^{n/2} \cdot r^{n/2} & n \text{ par} \\ r \cdot r^{n/2} \cdot r^{n/2} & n \text{ impar} \end{cases}$$

- «Divide y vencerás»: las soluciones de las subinstancias de menor tamaño se deben poder combinar entre sí para obtener la solución de la instancia inicial:
  - La combinación es la multiplicación de la subsolución de calcular $r^{n/2}$ por la subsolución de calcular $r^{n/2}$.

La técnica «divide y vencerás»

Ejemplo: elevar un número real a un entero

- Expresión:

$$r^n = \begin{cases} r^{n/2} \cdot r^{n/2} & n \text{ par} \\ r \cdot r^{n/2} \cdot r^{n/2} & n \text{ impar} \end{cases}$$

- «Divide y vencerás»: debe existir un método básico que resuelva el problema o un caso base indivisible donde el problema esté resuelto:
  - Existe el método básico mostrado anteriormente y los casos base $r^0 = 1$ y $r^1 = r$:

$$r^n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ r & n = 1 \\ r^{n/2} \cdot r^{n/2} & n > 1 \text{ y } n \text{ par} \\ r \cdot r^{n/2} \cdot r^{n/2} & n > 1 \text{ y } n \text{ impar} \end{cases}$$

Ejemplo: elevar un número real a un entero

- Diseño del algoritmo:
  - Caso base: Si $n \leq 1 \Rightarrow r^n$.
  - División: la instancia original del problema r^n se divide en subinstancias de tamaño $n/2$ (en realidad, en una).
  - Combinación: sea S_1 la subsolución de la subinstancia, la solución S de la instancia original se calcula como:

$$S = \begin{cases} S_1 \cdot S_1 & n \text{ es par} \\ r \cdot S_1 \cdot S_1 & n \text{ es impar} \end{cases}$$

La técnica «divide y vencerás»

Ejemplo: elevar un número real a un entero

```
function DyV(r, n)
    if n = 0 then
        Solucion ← 1
    else if n = 1 then
        Solucion ← r
    else
        parcial ← DyV(r, floor(n/2))
        if n es par then
            Solucion ← parcial · parcial
        else
            Solucion ← r · parcial · parcial
        end if
    end if
    return Solucion
end function
```

La técnica «divide y vencerás»

Ejemplo: elevar un número real a un entero

```
1  double Elevar_DyV(double r, int n) {
2    if (n == 0)
3      return 1;
4    else if (n == 1)
5      return r;
6    else {
7      double subsolucion = Elevar_DyV(r, n/2);
8      if (n % 2 == 0)
9        return subsolucion * subsolucion;
10     else
11       return r * subsolucion * subsolucion;
12   }
13 }
```

Ecuación de recurrencias $T(n) = T(n/2) + 1$

Eficiencia del algoritmo $O(\log_2(n))$

El problema del umbral

El problema del umbral

Cuestiones clave de la técnica «divide y vencerás»

- ¿Cómo descomponer la instancia del problema en subinstancias?
- ¿Cómo resolver las subinstancias?
- ¿Cómo combinar las soluciones?
- ¿Merece la pena hacer esto?

El problema del umbral

- Supongamos una instancia de un problema P, de tamaño n, que sabemos puede resolverse con un algoritmo (básico) A:

$$T_A(n) \leq c \cdot n^2$$

- Dividimos P en 3 subinstancias de tamaños $n/2$, siendo cada una de ellas del mismo tipo que P, y consumiendo un tiempo lineal la combinación de sus soluciones: $T_{\text{com}}(n) \leq d \cdot n$.
- Tenemos un nuevo algoritmo B, «divide y vencerás», que consumirá un tiempo:

$$T_B(n) = 3T_A(n/2) + T_{\text{com}}(n) \leq 3T_A(n/2) + d \cdot n \leq \frac{3}{4} \cdot c \cdot n^2 + d \cdot n$$

- B tiene un tiempo de ejecución mejor que el algoritmo A, ya que disminuye la constante oculta.

El problema del umbral

- Pero si cada subproblema se resuelve de nuevo con «divide y vencerás», podemos hacer un tercer algoritmo C, recursivo, que tendría un tiempo:

$$T_C(n) = \begin{cases} T_A(n) & n \leq n_0 \\ 3T_C(n/2) + T_{\text{com}}(n) & n > n_0 \end{cases}$$

- C es mejor en eficiencia que los algoritmos A y B:

$$T_C(n) \leq b \cdot n^{1.58}$$

- Al valor n_0 se le denomina umbral y es fundamental para que funcione bien la técnica.

El problema del umbral

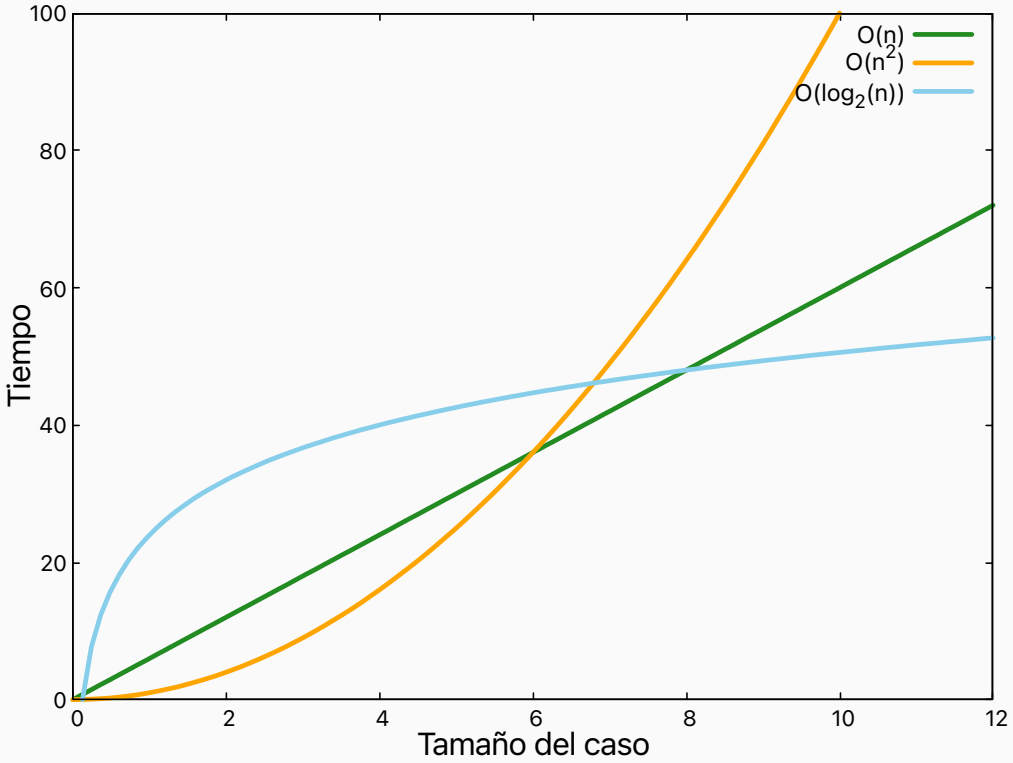
Tamaño del caso muy pequeño

- Muchas llamadas recursivas.
- Muy costoso de tantas llamadas.

Alternativa

- ¿Se posee un método menos costoso?
- Ejecutarlo cuando *P es suficientemente pequeño*.
- ¿Cuándo es *suficientemente pequeño*? Comparando los tiempos de ejecución del algoritmo «divide y vencerás» diseñado y el algoritmo básico.

El problema del umbral



$$\text{Mejor} = \begin{cases} O(n^2) & n \leq 6 \\ O(n) & 6 < n \leq 8 \\ O(\log_2(n)) & n > 8 \end{cases}$$

El problema del umbral

Mergesort y algoritmo base inserción

- El algoritmo base para el problema de ordenación será el algoritmo de ordenación por inserción ($O(n^2)$).
- Para determinar cuando el tamaño es suficientemente pequeño como para dejar de aplicar «divide y vencerás» calculamos empíricamente el tiempo de ejecución de los dos algoritmos:
  - Se mide el tiempo de ejecución de ambos algoritmos para distintos tamaños del problema.
  - Se calcula la constante oculta: $T_{\text{inserción}}(n) \leq c_1 \cdot n^2$
  - Se calcula la constante oculta: $T_{\text{mergesort}}(n) \leq c_2 \cdot n \cdot \log_2(n)$
  - Se calcula n de la igualdad: $c_1 \cdot n^2 = c_2 \cdot n \cdot \log_2(n)$

La técnica «divide y vencerás»

Inserción

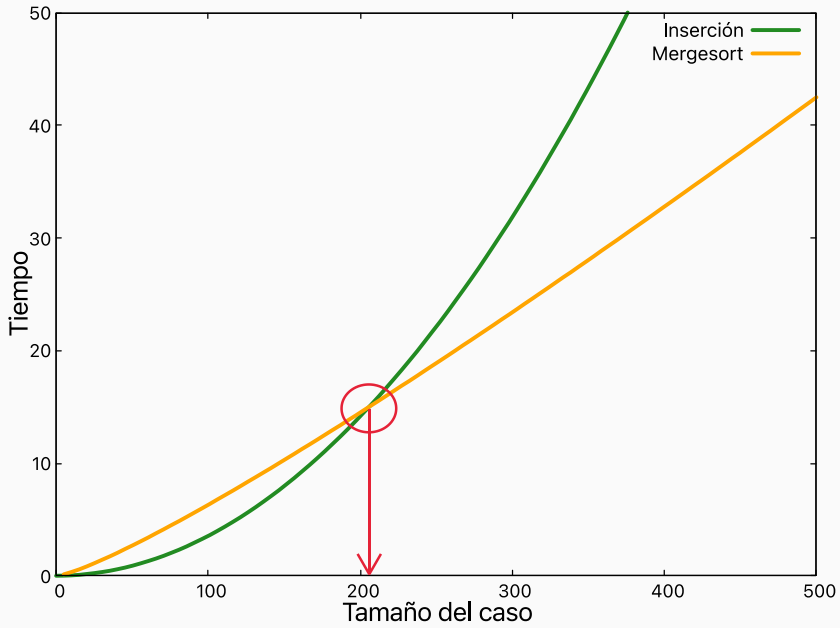
n	$T(n)$
10000	45425
20000	140155
30000	303081
40000	542304
50000	856232
60000	1228797
70000	1673289
80000	2198850
90000	2787441
100000	3449736

$c_1 = 3.54 \cdot 10^{-4}$

Mergesort

n	$T(n)$
10000	2267
20000	2599
30000	3992
40000	5461
50000	6968
60000	8413
70000	9932
80000	11629
90000	11835
100000	12038

$c_2 = 9.48 \cdot 10^{-3}$



¿En qué punto comienza a ser mergesort mejor que inserción?

$$c_1 \cdot n^2 = c_2 \cdot n \cdot log_2(n)$$

n se puede calcular gráficamente o de forma aproximada si no se dispone de métodos matemáticos para ello

El problema del umbral

Mergesort y algoritmo base inserción

- Implementación del algoritmo MergeSort tras resolver el problema del umbral:

```
1  void MergeSort(int *v, int ini, int fin) {
2    if (fin - ini <= 208) {
3      Insercion(v, ini, fin);
4    } else {
5      int med = (ini + fin) / 2;
6      MergeSort(v, ini, med);
7      MergeSort(v, med + 1, fin);
8      Combina(v, ini, med, fin);
9    }
10 }
```

El problema del umbral

Condiciones para que «divide y vencerás» sea ventajoso

- Selección cuidadosa de cuándo usar el algoritmo *ad hoc* (calcular el umbral de recursividad).
- Poder descomponer la instancia del problema en subinstancias y combinar de forma eficiente a partir de las soluciones parciales.
- El número k de subinstancias debe ser razonablemente pequeño.
- Las subinstancias deben tener aproximadamente el mismo tamaño.
- Las subinstancias deben ser del menor tamaño posible.

Análisis de algoritmos «divide y vencerás»

Análisis de algoritmos «divide y vencerás»

- Cuando un algoritmo contiene una llamada recursiva a sí mismo, generalmente su tiempo de ejecución puede describirse por una recurrencia que da el tiempo de ejecución para un caso de tamaño n en función de entradas de menor tamaño.
- En «divide y vencerás» tenemos recurrencias del tipo:

$$T(n) = \begin{cases} d(n) & n \leq n_0 \\ k \cdot T(n/b) + g(n) & n > n_0 \end{cases}$$

- k representa el número de subinstancias, n/b el tamaño de estas, $g(n)$ el coste de descomponer la instancia del problema inicial en las k subinstancias y el de combinar las soluciones para obtener la solución de la instancia original, y $d(n)$ el coste de resolver un problema elemental.

Análisis de algoritmos «divide y vencerás»

Fórmula maestra

$$T(n) = k \cdot T(n/b) + g(n)$$

- Si $g(n) \in \Theta(n^a)$, $a \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, el orden de complejidad de la solución a esta ecuación es:
  - $\Theta(n^a)$ si $k < b^a$
  - $\Theta(n^a \cdot \log(n))$ si $k = b^a$
  - $\Theta(n^{\log_b(k)})$ si $k > b^a$
- El orden de eficiencia depende de la relación entre el número de subinstancias (k), el tamaño de estas (b) y la dificultad de dividir y combinar (a).

La importancia de las condiciones

- El número de subinstancias tiene importancia:

$$T(n) = 2T(n/2) + c \longrightarrow T(n) \in O(n^{\log_2(2)}) = O(n)$$
$$T(n) = 4T(n/2) + c \longrightarrow T(n) \in O(n^{\log_2(4)}) = O(n^2)$$
$$T(n) = 8T(n/2) + c \longrightarrow T(n) \in O(n^{\log_2(8)}) = O(n^3)$$

- La eficiencia de la combinación de subsoluciones tiene importancia:

$$T(n) = 2T(n/2) + c \longrightarrow T(n) \in O(n^{\log_2(2)}) = O(n)$$
$$T(n) = 2T(n/2) + n \longrightarrow T(n) \in O(n \cdot \log_2(n))$$
$$T(n) = 2T(n/2) + n^2 \longrightarrow T(n) \in O(n^2)$$

La importancia de las condiciones

- Que las subinstancias sean aproximadamente del mismo tamaño tiene importancia:

$$T(n) = 2T(n/2) + n \longrightarrow T(n) \in \mathrm{O}(n \cdot \log n)$$
$$T(n) = T(1) + T(n-1) + n \longrightarrow T(n) \in \mathrm{O}(n^2)$$

- El tamaño de las subinstancias tiene importancia:

$$T(n) = 2T(n/4) + c \longrightarrow T(n) \in \mathrm{O}(n^{\log_4(2)}) = \mathrm{O}(n^{0.5}) = \mathrm{O}(\sqrt{n})$$
$$T(n) = 2T(n/2) + c \longrightarrow T(n) \in \mathrm{O}(n^{\log_2(2)}) = \mathrm{O}(n)$$
$$T(n) = 2T(n-1) + c \longrightarrow T(n) \in \mathrm{O}(2^n)$$

Búsqueda binaria

Búsqueda binaria

Enunciado

- Sea $V[1 \ldots n]$ un vector ordenado en orden no decreciente, $V[i] \leq V[j]$ para $1 \leq i \leq j \leq n$, y sea x un elemento a buscar.
- Formalmente, se quiere encontrar el índice i tal que $1 \leq i \leq n+1$ y $V[i-1] < x \leq V[i]$.

1	2	3	4	5
3	7	25	41	53

Si $x = 25$, entonces $i = 3$
Si $x = 15$, entonces $i = 3$
Si $x = 67$, entonces $i = 6$
Si $x = 2$, entonces $i = 1$.

Búsqueda binaria

Búsqueda secuencial

- La forma simple de resolver el problema es buscar hasta que llegar al final o encontrar un elemento que no sea menor que x.

```
1 int Busqueda ( int *v, int n, int x) {
2     int i = 0;
3     while (i < n && x > v[i]){
4         i++;
5     }
6     return i;
7 }
```

- El orden de eficiencia es $O(n)$.

Búsqueda binaria

Fundamento

- Para acelerar la búsqueda, podemos buscar x bien en la primera mitad del vector o bien en la segunda.
- Para averiguar cuál de esas búsquedas es la correcta comparamos x con un elemento del vector, $k = n/2$.
- Si $x \leq V[k]$ podemos restringir la búsqueda a $V[1 \ldots k]$. En otro caso, buscamos en $V[k+1 \ldots n]$.
- Realmente es un caso de reducción o simplificación: la solución de toda instancia se reduce a una única instancia más pequeña (concretamente de tamaño mitad).

Búsqueda binaria

Algoritmo

```
1  int Binaria_recursiva (int *v, int ini, int fin, int x){
2      int centro = (ini + fin) / 2;
3      if (ini == fin) return ini;
4      if (x <= v[centro])
5          return Binaria_recursiva (v, ini , centro, x);
6      return Binaria_recursiva (v, centro+1, fin, x);
7  }
8  int Busqueda_binaria (int *v, int n, int x) {
9    if (x > v[n-1]) return n;
10   else {
11     return Binaria_recursiva(v, 0, n-1, x);
12   }
13 }
```

Eficiencia

- $T(n) = T(n/2) + c$
- Como $k = 1, b^a = 2^0$, entonces $T(n) = O(\log(n))$.

Ordenación rápida

Ordenación rápida

Quicksort

- Sea $V[1 \ldots n]$ un vector de n elementos. La idea es ordenarlo en orden ascendente, es decir, $V[i] \leq V[j]$ para $1 \leq i \leq j \leq n$.
- Propuesto por C.A.R. Hoare en 1962.
- Es el algoritmo «divide y vencerás» de ordenación general más eficiente (en caso promedio).

Idea básica

- Determinar un elemento, denominado pivote, que divida al vector en dos partes: una que contenga los elementos menores que él y otra que contiene los mayores o iguales.
- Ordenar los dos subvectores obtenidos.
- Combinar los dos subvectores ordenados para obtener el vector inicial ordenado.

Ordenación rápida

División

- Se divide el vector $V[1 \ldots n]$ en dos subvectores (mejor si son tamaño parecido), independientes, y que se pueden ordenar por separado.
- Para dividir el vector, seleccionaremos un elemento, denominado pivote, de modo que los elementos menores que este queden a la izquierda del vector, y los mayores o iguales a la derecha.

Casos

- Mejor caso: el pivote divide al vector en dos mitades iguales.
- Peor caso: el pivote deja un subvector con 1 elemento y el otro con $n - 1$ elementos.

Ordenación rápida

Resolución

- Al llegar al caso base de 1 elemento, el vector estará ordenado.
- La penúltima llamada recursiva (vector de 2 elementos) también hará que el vector resultante esté ordenado, ya que se ha pivotado y el elemento mayor estará en la segunda posición, mientras que el elemento menor estará en la primera.
- En las llamadas recursivas anteriores, pasará lo mismo debido a que se va pivotando cada vez que se ejecuta la función.

Combinación

- No se requiere combinación adicional ya que al usar el pivote y gracias a las llamadas recursivas no es necesario.

Ordenación rápida

Algoritmo

```
1 void quicksort(int *v, int ini, int fin) {
2   if (ini < fin) {
3     int pos_pivote = pivotar(v, ini, fin);
4     quicksort(v, ini, pos_pivote - 1);
5     quicksort(v, pos_pivote + 1, fin);
6   }
7 }
```

Elección del pivote

- Cualquiera puede diseñar su algoritmo quicksort: la elección del pivote condiciona el tiempo de ejecución.
- El pivote puede ser cualquier elemento en el dominio (no es necesario que esté en el vector):
  - Podría ser la media de los elementos seleccionados del vector.
  - Podría elegirse aleatoriamente.
- Pivotes usuales:
  - La mediana de un mínimo de tres elementos del vector.
  - El elemento medio del vector.

Elección del pivote

- El empleo de la mediana de tres elementos no tiene justificación teórica.
- Si queremos usar el concepto de mediana, deberíamos escoger como pivote la mediana del vector porque lo divide en dos subvectores de igual tamaño:
  - Mediana: $(n/2)$º mayor elemento.
  - Elegir tres elementos al azar y coger su mediana. Esto suele reducir el tiempo de ejecución en un 5%.
- Una elección más rápida es escoger el mayor de los dos primeros elementos del vector.

Ordenación rápida

5	89	35	14	24	15	37	13	20	7	70

5	89	35	14	24	15	37	13	20	7	70

7	14	5	13	15	35	37	89	20	24	70

¿Cómo conseguir realizar eficientemente la partición, es decir colocar todos los menores que el pivote a su izquierda y todos los mayores o iguales a su derecha?

Ordenación rápida

Partición

- Es fácil crear un algoritmo de partición con tiempo lineal.
- Es importante que la constante oculta sea lo más pequeña posible para que quicksort sea competitivo.
- Se puede recorrer el vector una sola vez, pero empezando por los dos extremos.

Ordenación rápida

Partición

- Sea $V[k \ldots l]$ el vector.
- Sea $p = V[k]$ el pivote (el primer elemento).
- Los punteros i y j se inician en k y l, respectivamente.
- El puntero i se incrementa hasta que $V[i] \geq p$ y el puntero j se disminuye hasta que $V[j] < p$.
- Entonces, se intercambian $V[i]$ y $V[j]$. Este proceso se repite mientras $i < j$.
- Finalmente, $V[k]$ y $V[j]$ se intercambian para poner el pivote en su posición correcta.

Ordenación rápida

Algoritmo

```
1  int pivotar(int *v, int ini, int fin) {
2    int pivote = v[ini], i = ini + 1, j = fin;
3
4    while (i <= j) {
5      while (i <= j && v[i] < pivote) {
6        i++;
7      }
8      while (i <= j && v[j] >= pivote) {
9        j--;
10     }
11     if (i < j) {
12       intercambiar(v[i], v[j]);
13     }
14   }
15   if (ini < j) {
16     intercambiar(v[ini], v[j]);
17   }
18   return j;
19 }
```

Ordenación rápida

Eficiencia en el peor caso

- El pivote es el primer elemento del vector.
- $T(n) = T(1) + T(n-1) + n$
- $O(n^2)$.
- En el peor caso es tan malo como el peor caso del método de inserción (selección).

Eficiencia en el mejor caso

- El pivote es la mediana.
- $T(n) = 2T(n/2) + n$
- $\Omega(n \cdot \log_2(n))$.

Ordenación rápida

Eficiencia en el caso promedio

- La probabilidad del peor caso es muy baja.
- Se ha demostrado que es $O(n \cdot \log_2(n))$.
- En promedio se comporta mejor que los demás algoritmos de ordenación.

Problema de selección

Problema de selección

Enunciado

- Sea $V[1 \ldots n]$ un vector de n elementos. Se desea conocer qué elemento se situaría en la i-ésima posición del vector en caso de que este estuviese ordenado.

Ejemplo de uso

- Cálculo de la mediana.

Algoritmo básico

- Ordenar el vector y devolver el elemento que hubiese en la i-ésima posición.
- Complejidad: $O(n \cdot \log(n))$. La ordenación tiene esa eficiencia y es la operación más costosa que se realiza.

Problema de selección

Idea general

- No es necesario que el vector esté totalmente ordenado.
- Lo único necesario es que el elemento i-ésimo esté ordenado.

¿Podemos usar algo ya conocido?

- La función pivotar de quicksort.
- Al terminar su ejecución, en la j-ésima posición del vector se encuentra el pivote y todos los elementos a su izquierda son menores que él, por lo que se encuentra ordenado en su posición.

Problema de selección

División

- Para encontrar el elemento en la i-ésima posición del vector, se colocan los elementos menores que un pivote a la izquierda del vector, y los mayores o iguales en la parte derecha. La posición del pivote, *posPivote*, estará por tanto ordenada.
- Si la posición i que buscamos es la posición del pivote, *posPivote*, hemos terminado.
- Si la posición i que buscamos es inferior a *posPivote*, dividimos la instancia del problema en 1 subinstancia (vector V desde la primera posición hasta $posPivote - 1$).
- Si la posición i que buscamos es superior a *posPivote*, dividimos la instancia del problema en 1 subinstancia (vector V desde $posPivote + 1$ hasta el último elemento).

Problema de selección

Resolución

- Se vuelve a calcular el pivote para el subvector generado, aplicando recursivamente este proceso hasta que se encuentre la i-ésima posición.

Combinación

- Como la función de pivotar deja en *posPivote* el elemento que estamos buscando, y solo dividimos la instancia del problema en 1 subinstancia, no es necesario realizar combinación ni operaciones adicionales.

Problema de selección

Pseudocódigo

```
function Seleccion(v, ini, fin, i)
    if ini = fin then
        return v[ini]
    else
        posPivote, v ← pivotar(v, ini, fin)
        if posPivote = i then
            return v[posPivote]
        else if posPivote > i then
            return Seleccion(v, ini, posPivote - 1, i)
        else if PosPivote < i then
            return Seleccion(v, posPivote + 1, fin, i)
        end if
    end if
end function
```

Problema de selección

Algoritmo

```
1  int seleccion(int *v, int ini, int fin, int posicion) {
2    if (ini == fin) {
3      return v[ini];
4    }
5    else {
6      int p = pivotar(v, ini, fin);
7
8      if (p == posicion) {
9        return v[p];
10     }
11     else if (posicion < p) {
12       return seleccion(v, ini, p-1,  posicion);
13     }
14     else {
15       return seleccion(v, p+1, fin, posicion);
16     }
17   }
18 }
```

Problema de selección

Eficiencia en el peor caso

- Divide al vector en dos partes de tamaño 1 y $n-1$, respectivamente.
- $T(n) = T(n-1) + n$
- $O(n^2)$.

Eficiencia en el mejor caso

- Divide al vector en dos partes de igual tamaño $(n/2)$.
- $T(n) = T(n/2) + n$
- $\Omega(n)$.

Eficiencia en el caso promedio

- Es muy improbable que se dé el peor caso.
- En promedio, se comporta como $\Omega(n)$.

Multiplicación de enteros grandes

Multiplicación de enteros grandes

Enunciado

- Sean dos números enteros positivos A y B con n dígitos cada uno. Se desea calcular la multiplicación $C = A \cdot B$.

Multiplicación clásica

$$
\begin{array}{rr}
 & 1\,2\,3\,4 \\
\times & 5\,6\,7\,8 \\
\hline
 & 9\,8\,7\,2 \\
 & 8\,6\,3\,8 \\
 & 7\,4\,0\,4 \\
 & 6\,1\,7\,0 \\
\hline
 & 7\,0\,0\,6\,6\,5\,2
\end{array}
$$

Eficiencia $O(n^2)$.

Multiplicación de enteros grandes

«Divide y vencerás»

- Debemos poder obtener la solución de la instancia original del problema en base a subinstancias de menor tamaño.

Idea

- $1234 = 12 \cdot 100 + 34$
- $5678 = 56 \cdot 100 + 78$

$$
\begin{aligned}
(12 \cdot 100 + 34) \cdot (56 \cdot 100 + 78) = & \\
&= 12 \cdot 56 \cdot 10000 + \\
&+ (12 \cdot 78 + 34 \cdot 56) \cdot 100 + \\
&+ (34 \cdot 78)
\end{aligned}
$$

- Se reduce la multiplicación de cuatro cifras a 4 multiplicaciones de 2 cifras, más 3 sumas y varios desplazamientos.

Multiplicación de enteros grandes

Dividir

- $A = 12345678$:
  - $A_i = 1234$
  - $A_d = 5678$
  - $A = A_i \cdot 10^4 + A_d$
- $B = 24680135$:
  - $B_i = 2468$
  - $B_d = 0135$
  - $B = B_i \cdot 10^4 + B_d$

Combinar

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (A_i \cdot 10^4 + A_d) \cdot (B_i \cdot 10^4 + B_d) \\ &= A_i \cdot B_i \cdot 10^8 + (A_i \cdot B_d + A_d \cdot B_i) \cdot 10^4 + A_d \cdot B_d \end{aligned}$$

Multiplicación de enteros grandes

Procedimiento general

$$A = A_i \cdot 10^{n/2} + A_d$$
$$B = B_i \cdot 10^{n/2} + B_d$$
$$A \cdot B = (A_i \cdot B_i) \cdot 10^n + (A_i \cdot B_d + A_d \cdot B_i) \cdot 10^{n/2} + A_d \cdot B_d$$

Multiplicación de enteros grandes

Pseudocódigo

```
function DVbasico(A, B, n)
    if n es pequeño then
        return A · B
    else
        Obtener ai, ad, bi, bd
        c1 ← DVbasico(ai, bi, n/2)
        c2 ← DVbasico(ai, bd, n/2)
        c3 ← DVbasico(ad, bi, n/2)
        c4 ← DVbasico(ad, bd, n/2)
        aux ← Sumar(c2, c3)
        c1 ← DesplazarDerecha(c1, n)
        aux ← DesplazarDerecha(aux, n/2)
        C ← Sumar(c1, aux, c4)
        return C
    end if
end function
```

Multiplicación de enteros grandes

Eficiencia

- $T(n) = 4 \cdot T(n/2) + c \cdot n$
- $k = 4$, $b = 2$, $a = 1$. Entonces, $4 > 2^1$.
- $T(n)$ es del orden de $O(n^{\log_2(4)}) = O(n^2)$.

Razón

- El cuello de botella está en el número de multiplicaciones (cuatro) que se realizan de tamaño $n/2$.
- Para mejorar la eficiencia es necesario reducir el número de multiplicaciones.

Multiplicación de enteros grandes

Algoritmo «divide y vencerás» mejorado

- Sean:
  - $R = (A_i + A_d) \cdot (B_i + B_d) = (A_i \cdot B_i) + (A_i \cdot B_d + A_d \cdot B_i) + A_d \cdot B_d$
  - $P = A_i \cdot B_i$
  - $Q = A_d \cdot B_d$
  - Por tanto $A_i \cdot B_d + A_d \cdot B_i = R - P - Q$
- Ahora se puede calcular:

$$A \cdot B = P \cdot 10^n + (R - P - Q) \cdot 10^{n/2} + Q$$

- 1 multiplicación de tamaño $n \Longrightarrow$ 3 multiplicaciones de tamaño $n/2$.

Multiplicación de enteros grandes

Pseudocódigo

```
function DVmejorado(A, B, n)
    if n es pequeño then
        return A · B
    else
        Obtener ai, ad, bi, bd
        s1 ← Sumar(ai, ad)
        s2 ← Sumar(bi, bd)
        P ← DVmejorado(ai, bi, n/2)
        Q ← DVmejorado(ad, bd, n/2)
        R ← DVmejorado(s1, s2, n/2)
        aux ← Sumar(R, -P, -Q)
        P ← DesplazarDcha(P, n)
        aux ← DesplazarDcha(aux, n/2)
        C ← Sumar(P, aux, Q)
        return C
    end if
end function
```

Multiplicación de enteros grandes

Eficiencia

- Obtener A_i, A_d, B_i, B_d es $O(1)$.
- Se crean tres subinstancias de tamaño $n/2$ para resolver el problema.
- Las sumas se asume que son $O(n)$.
- $T(n) = 3 \cdot T(n/2) + O(n)$
- $T(n) \in O(n^{\log_2 3}) = O(n^{1.585})$

Multiplicación de matrices

Multiplicación de matrices

Enunciado

- Sean dos matrices cuadradas A y B de n filas y n columnas $(n \cdot n)$.
- Se desea calcular la multiplicación $C = A \cdot B$.

Método básico

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Multiplicación de matrices

Algoritmo básico

```
1  void Mult_Matrices (int **a, int **b, int **c, int n) {
2    for(int i = 0; i < n; i++) {
3      for(int j = 0; j < n; j++) {
4        c[i][j] = 0;
5        for(int k = 0; k < n; k++) {
6          c[i][j] += a[i][k]*b[k][j];
7        }
8      }
9    }
10 }
```

Eficiencia del algoritmo $O(n^3)$

Multiplicación de matrices

Idea

- Descomponer cada matriz en submatrices que se puedan multiplicar entre sí.
- Se reduce el tamaño de cada matriz.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

Multiplicación de matrices

Descomposición

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

Submatrices

$$C_{11} = A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21}$$
$$C_{12} = A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22}$$
$$C_{21} = A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21}$$
$$C_{22} = A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22}$$

Eficiencia

- 8 multiplicaciones de tamaño $n/2$.
- 4 sumas de eficiencia $O((n/2)^2) = O(n^2)$
- $T(n) = 8 \cdot T(n/2) + 4 \cdot n^2 \Rightarrow O(n^3)$

Multiplicación de matrices

Descomposición de Strassen

- Strassen descubrió en 1969 una forma de dividir que reducía el número de multiplicaciones totales (muchas sumas y restas).

División del problema en 7 subproblemas

$$
\begin{aligned}
M &= (A_{11} + A_{22}) \cdot (B_{11} + B_{22}) \\
N &= (A_{21} + A_{22}) \cdot B_{11} \\
O &= A_{11} \cdot (B_{12} - B_{22}) \\
P &= A_{22} \cdot (B_{21} - B_{11}) \\
Q &= (A_{11} + A_{12}) \cdot B_{22} \\
R &= (A_{21} - A_{11}) \cdot (B_{11} + B_{12}) \\
S &= (A_{12} - A_{22}) \cdot (B_{21} + B_{22})
\end{aligned}
$$

Multiplicación de matrices

Descomposición de Strassen

- Dividimos cada matriz en cuatro submatrices.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

División del problema en 7 subproblemas

$$\begin{aligned} M &= (A_{11} + A_{22}) \cdot (B_{11} + B_{22}) \\ N &= (A_{21} + A_{22}) \cdot B_{11} \\ O &= A_{11} \cdot (B_{12} - B_{22}) \\ P &= A_{22} \cdot (B_{21} - B_{11}) \\ Q &= (A_{11} + A_{12}) \cdot B_{22} \\ R &= (A_{21} - A_{11}) \cdot (B_{11} + B_{12}) \\ S &= (A_{12} - A_{22}) \cdot (B_{21} + B_{22}) \end{aligned}$$

Multiplicación de matrices

Descomposición

- Los 7 subproblemas M, N, O, P, Q, R, y S, son independientes y se resuelven por separado.

Combinación

- Se combinan para formar la solución C:

$$C_{11} = M + P - Q + S$$
$$C_{12} = O + Q$$
$$C_{21} = N + P$$
$$C_{21} = M + O - N + R$$

Multiplicación de matrices

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

$$M = (A_{11} + A_{22}) \cdot (B_{11} + B_{22}) = (1 + 4) \cdot (5 + 8) = 65$$
$$N = (A_{21} + A_{22}) \cdot B_{11} = (3 + 4) \cdot 5 = 35$$
$$O = A_{11} \cdot (B_{12} - B_{22}) = 1 \cdot (6 - 8) = -2$$
$$P = A_{22} \cdot (B_{21} - B_{11}) = 4 \cdot (7 - 5) = 8$$
$$Q = (A_{11} + A_{12}) \cdot B_{22} = (1 + 2) \cdot 8 = 24$$
$$R = (A_{21} - A_{11}) \cdot (B_{11} + B_{12}) = (3 - 1) \cdot (5 + 6) = 22$$
$$S = (A_{12} - A_{22}) \cdot (B_{21} + B_{22}) = (2 - 4) \cdot (7 + 8) = -30$$

$$C_{11} = M + P - Q + S = 65 + 8 - 24 + (-30) = 19$$
$$C_{12} = O + Q = (-2) + 24 = 22$$
$$C_{21} = N + P = 35 + 8 = 43$$
$$C_{22} = M + O - N + R = 64 + (-2) - 35 + 22 = 50$$

$$C = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Multiplicación de matrices

Algoritmo

function MultiplicaMat(A,B,n)

if n=1 **then**

$C \leftarrow A \cdot B$

else

Obtener $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ y $B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}$

$M \leftarrow MultiplicaMat(A_{11} + A_{22}, B_{11} + B_{22}, n/2)$

$N \leftarrow MultiplicaMat(A_{21} + A_{22}, B_{11}, n/2)$

$O \leftarrow MultiplicaMat(A_{11}, B_{12} - B_{22}, n/2)$

$P \leftarrow MultiplicaMat(A_{22}, B_{21} - B_{11}, n/2)$

$Q \leftarrow MultiplicaMat(A_{11} + A_{12}, B_{22}, n/2)$

$R \leftarrow MultiplicaMat(A_{21} - A_{12}, B_{11} + B_{22}, n/2)$

$S \leftarrow MultiplicaMat(A_{12} - A_{22}, B_{21} + B_{22}, n/2)$

$C_{11} \leftarrow M + P - Q + S$

$C_{12} \leftarrow O + Q$

$C_{21} \leftarrow N + P$

$C_{22} \leftarrow M + O - N + R$

$C \leftarrow Combinar(C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22})$

end if

return C

end function

Multiplicación de matrices

Eficiencia

- 7 Multiplicaciones y k sumas y restas.
- Ecuación de recurrencias:

$$T(n) = 7 \cdot T(n/2) + k \cdot n^2$$

- $T(n) \in O(n^{log_2(7)}) = O(n^{2.807})$

Requisitos

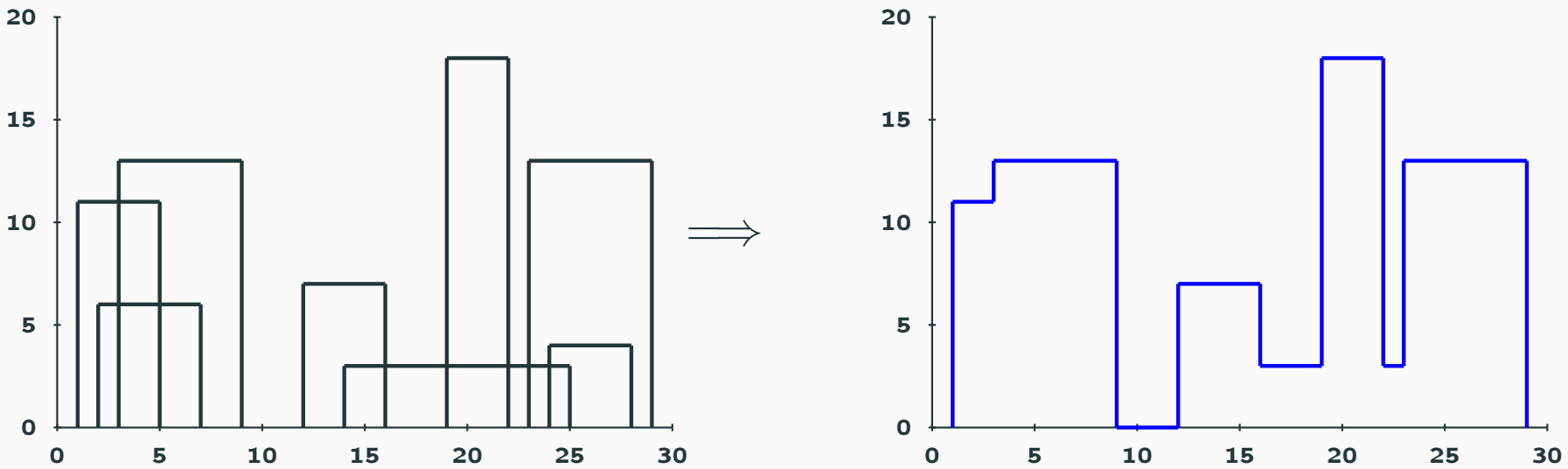
- Las matrices A y B deben ser cuadradas y su tamaño tiene que ser potencia de 2.
- Si no se cumple, se añaden y rellenan filas y columnas con el valor 0 hasta que la matriz tenga el tamaño requerido.

La línea del horizonte

La línea del horizonte

Enunciado

- Se dispone de un conjunto de n edificios.
- Cada edificio E_i, $i \leq n$, se representa como una tripleta (l_i, h_i, r_i) en la que l_i y r_i representan la coordenada x izquierda y derecha del edificio y h_i su altura.
- Se desea obtener la línea del horizonte (lista de coordenadas x y alturas conectando los edificios de izquierda a derecha).

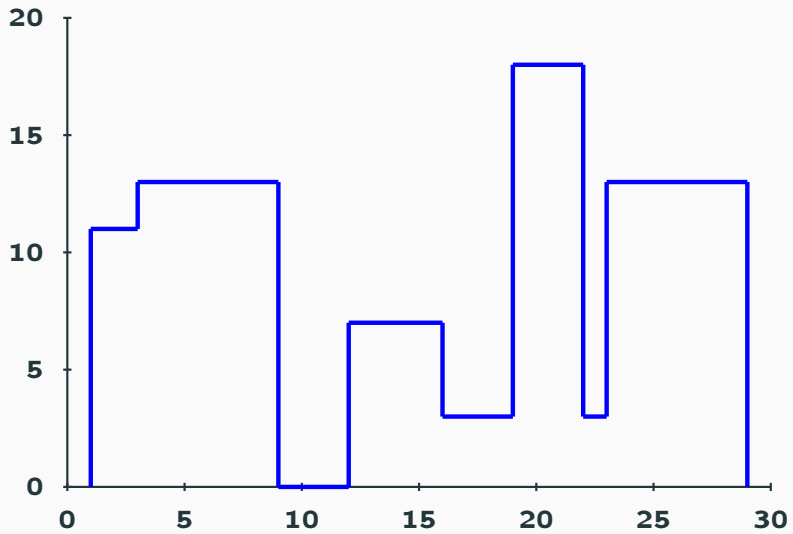


La línea del horizonte

Ejemplo

Entrada {(3, 13, 9), (1, 11, 5), (12, 7, 16), (14, 3, 25), (19, 18, 22), (2, 6, 7), (23, 13, 29), (24, 4, 28)}

Salida {(1,11), (3,13), (9,0), (12,7), (16,3), (19,18), (22,3), (23,13), (29,0)}



La línea del horizonte

División

- Dividir en dos subinstancias de tamaño lo más parecido posible ($n/2$), conteniendo los edificios de la parte izquierda y la parte derecha, respectivamente.
- La división se puede conseguir en tiempo lineal si se asume que los edificios están ordenados por componente l.

Caso base

- Cuando el conjunto de edificios contenga un único edificio.

La línea del horizonte

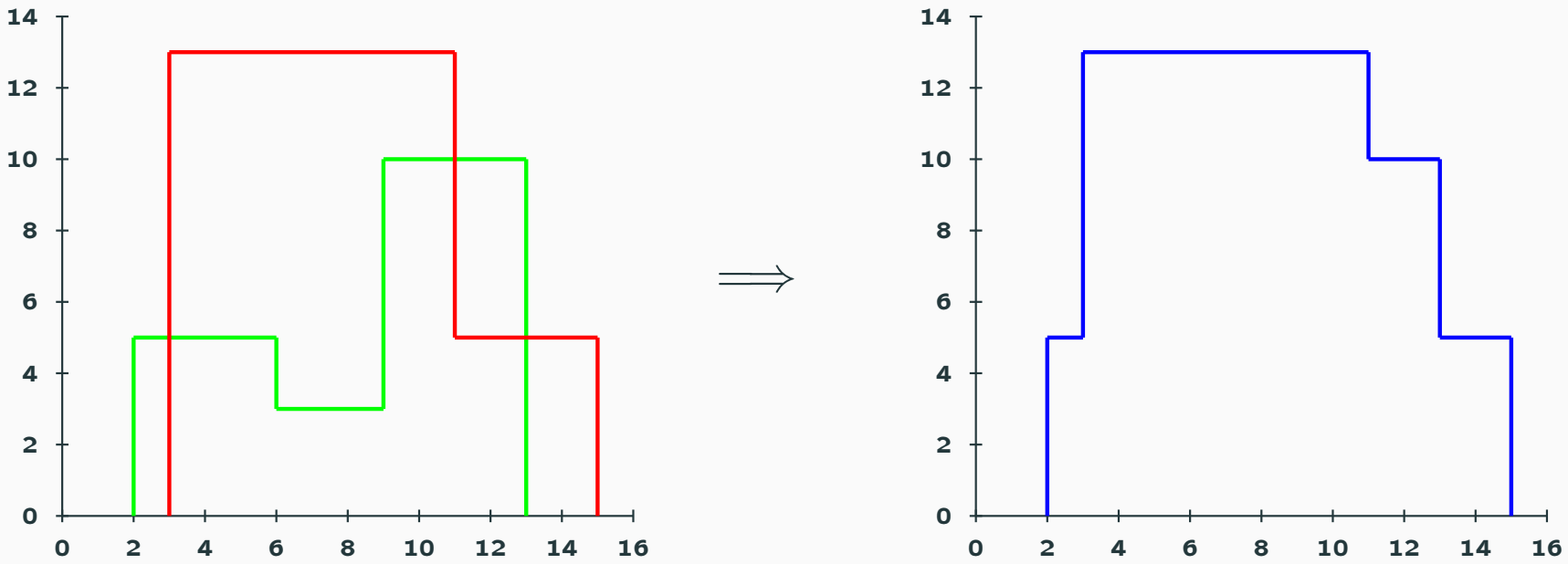
Combinación

- Comparar los puntos de ambos conjuntos empezando por el extremo izquierdo.
- La división se puede conseguir en tiempo lineal si se asume que los edificios están ordenados por componente l.
- Elegir el que tenga la coordenada menor.
- Si la altura del punto elegido es menor que la altura del último punto visto del otro conjunto, se actualiza la altura a esta última.
- Escoger el siguiente punto y repetir el proceso anterior.
- Una vez que se han escogido todos los puntos de uno de los conjuntos, se añade el resto de la otra lista sin necesidad de realizar ningún cálculo adicional.
- Para evitar añadir dos puntos consecutivos con igual altura, se compara con la altura de último punto añadido y, en caso de ser igual, no se añade.

La línea del horizonte

Ejemplo

- $\{(2,5),(6,3),(9,10),(13,0)\}$
- $\{(3,13),(11,5),(15,0)\}$
- Combinación: $\{(2,5),(3,13),(11,10),(13,5),(15,0)\}$



La línea del horizonte

Algoritmo

function Skyline(E,n)

if n = 1 **then**

return $\{(l_1, h_1), (r_1, 0)\}$

else

Dividir E en dos subconjuntos E1 y E2, con los edificios de E1 teniendo su componente *l* menor que la de los edificios de E2

S1 $\leftarrow$ Skyline(E1,n/2)

S2 $\leftarrow$ Skyline(E2,n/2)

S $\leftarrow$ Combinar(S1, S2)

end if

return S

end function

Eficiencia

- Ecuación de recurrencias: $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n \Rightarrow O(n \cdot \log_2(n))$

Bibliografía

Bibliografía

Aclaración

- El contenido de las diapositivas es esquemático y representa un apoyo para las clases teóricas.
- Se recomienda completar los contenidos del tema 1 con apuntes propios tomados en clase y con la bibliografía principal de la asignatura.

Por ejemplo


G. Brassard and P. Bratley.
***Fundamentals of Algorithmics*.**
Prentice Hall, Englewwod Cliffs, New Jersey, 1996.


J. L. Verdegay.
***Lecciones de Algorítmica*.**
Editorial Técnica AVICAM, 2017.