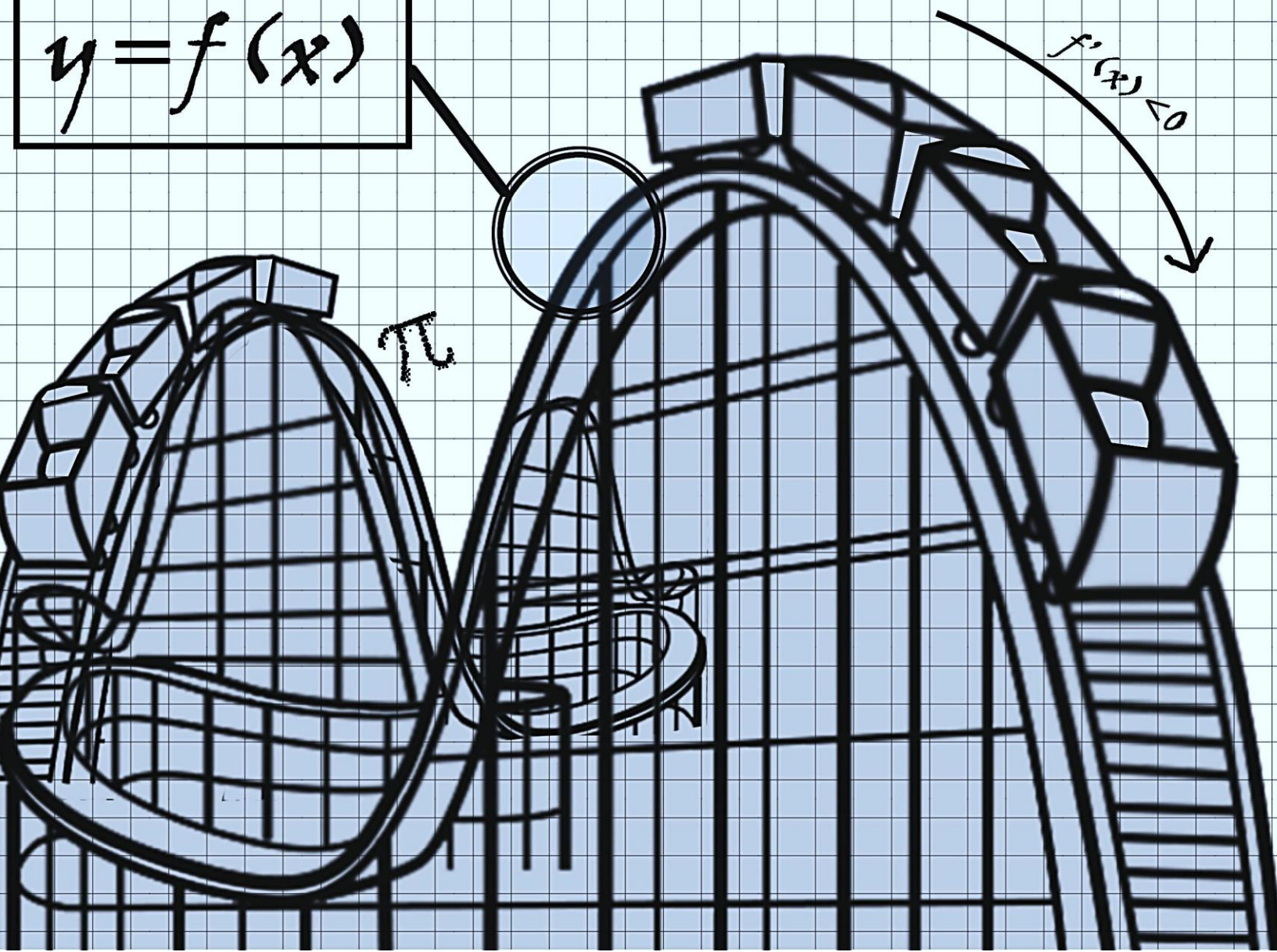


# Cálculo Diferencial

wilton oltmanns

$$y = f(x)$$



## PROLOGO

Este es un folleto de Calculo Diferencial. Material didáctico que sirve de soporte de estudio a estudiantes, profesores y seguidores de las matemáticas. Este está confeccionado bajo técnicas pedagógicas para que los interesados en las matemáticas pueda estudiarlo solo.

Contiene cinco unidades entre las cuales se encuentran la unidad 1: Introducción a la geometría analítica la cual servirá de base para que el lector adquiriera los conocimientos previos que les servirán de base para entrar en el mundo del cálculo diferencial. La unidad 2 trata sobre las relaciones y funciones, en las cuales se verán los tipos y clasificación. La unidad 3 se refiere a límites, continuidad y asíntotas, ya en la unidad 4 es donde se entra a trabajar con derivadas y en la unidad 5 vienen sus aplicaciones.

Se espera que este manual sea de mucha ayuda y que cada persona después de estudiar las teorías se sienta en capacidad de realizar las prácticas que están contenidas en este.

Wilton Oltmanns

# Módulo 1: Introducción a La Geometría Analítica

## Geometría Analítica

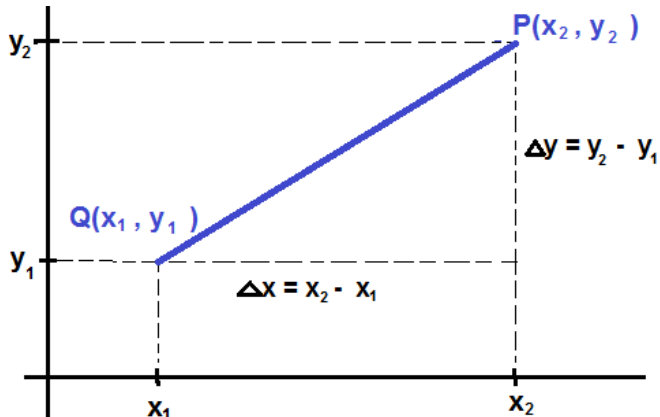
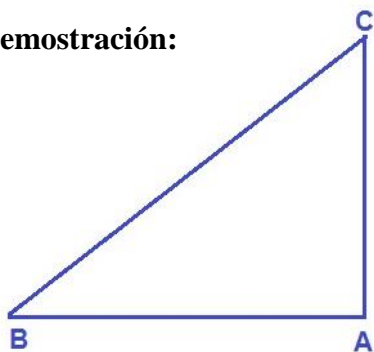
[https://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa\\_anal%C3%ADtica](https://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa_anal%C3%ADtica) plantea que la **geometría analítica** estudia las figuras geométricas mediante técnicas básicas del análisis matemático y del álgebra en un determinado sistema de coordenadas.

Esta ciencia es la base del cálculo diferencial. Fue creada por Pierret Fermat y Rene Descartes. Cuando se tiene dominio de esta rama de las matemáticas, el cálculo diferencial resulta ser más sencillo, por la razón de que en una se tiene un enfoque desde un punto de vista geométrico y en la otra el enfoque se ve mediante un proceso de límite y derivadas.

### Distancia entre dos puntos

Fue Euclides, matemático de la antigüedad y aún vigente por sus grandes aportes, quien dio una solución para hallar la distancia entre dos puntos. Con ayuda del teorema de Pitágoras definió la distancia entre dos puntos la cual viene dada.

**Demostración:**



Teorema de Pitágoras  $(\overline{BC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2$

Como el Teorema de Pitágoras dice que en un triángulo rectángulo la suma del cuadrado de los catetos es igual a la hipotenusa al cuadrado. es decir que en el triángulo anterior  $(\overline{BC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2$  por lo que sustituyendo por los valores tenemos que  $(d)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \rightarrow$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

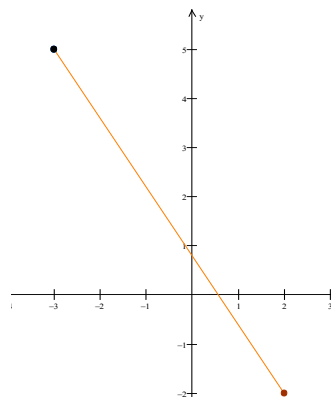
*Ejemplo 1: Calcular la distancia entre los puntos A (-3, 5); B (2,-2) y haga la grafica.*

$$\overline{AB} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(2+3)^2 + (-2-5)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(5)^2 + (-7)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74} = 8.6 \text{ Unidades}$$



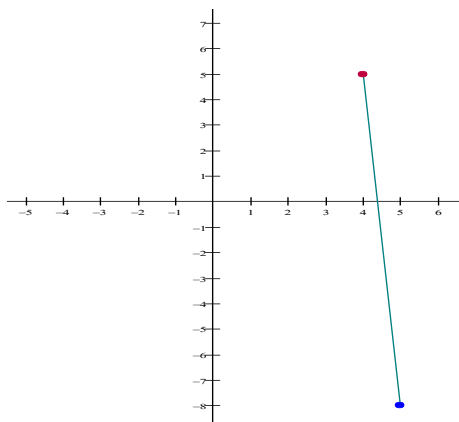
*Ejemplo 2: Calcular la distancia entre los puntos A (4, 5) y B (5,8) . Haga la gráfica.*

$$\overline{AB} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(5-4)^2 + (-8-5)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{1 + 169} = \sqrt{170}$$

$$\overline{AB} = 13.03 \text{ Unidades}$$



*Ejemplo 3: Calcula el perímetro del triángulo con vértices P(3,-2); Q(4,5); R(-3,4).*

$$d|\overline{PQ}| = \sqrt{(3-4)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ unid}$$

$$d|\overline{QR}| = \sqrt{(-3-4)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ unid}$$

$$d|\overline{PR}| = \sqrt{(3+3)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{81+36} = \sqrt{117} \text{ unid}$$

Este triángulo es Isósceles y su perímetro es  $P = p = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + \sqrt{117} \approx 24.96 \text{ unid}$

### Punto medio de un segmento.

Para calcular el punto medio de un segmento de recta utilizamos la siguiente formula.

$$PM = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Ejemplo 1: Calcular el punto medio del segmento de recta  $P_1(-2,-2)$ ,  $P_2(4,3)$ ;

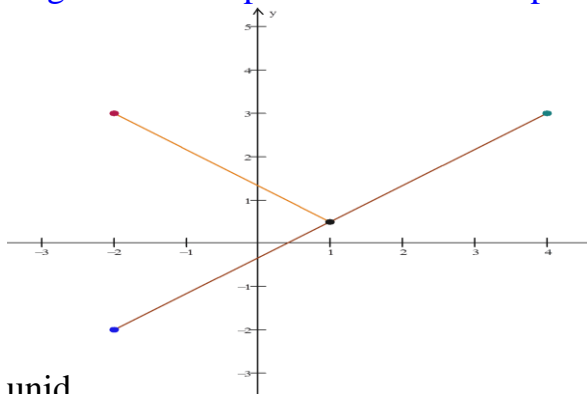
luego busca la distancia de  $\overline{P_1PM}$  y haz la gráfica correspondiente a todo lo pedido.

$$PM = \left( \frac{-2+4}{2}, \frac{-2+3}{2} \right) = \left( 1, \frac{1}{2} \right)$$

Ahora se busca la distancia de  $\overline{P_1PM}$ .

$$\overline{P_1PM} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(1+2)^2 + \left(\frac{1}{2}+2\right)^2} = \sqrt{9+2.5} \approx 3.4 \text{ unid}$$



### Parámetros de la recta

**Pendiente (m):** Es la inclinación que tiene una recta. Esta inclinación es con respecto al eje x (abscisa).

**Interceptos:** Son los puntos (0,b) y (a,0) donde la recta corta tanto al eje X como al eje Y.

**Ecuación de la recta:** Es la forma de expresar matemáticamente una recta. La primera es la ecuación canónica o llamada también analítica y la ecuación general.

**.Ecuación canónica:**  $y = m x + b$

**.Ecuación general:**  $a x + b y + c = 0$

Hay diferentes tipos de rectas:

- **Rectas verticales** ( $x = x_0$ ) : Estas rectas son paralelas al eje de las x.
- **Rectas horizontales** ( $y = y_0$ ) : Estas rectas son paralelas al eje de las Y
- **Rectas oblicuas:** Es cualquier recta que no sea ni vertical ni horizontal.

## Pendiente de la recta

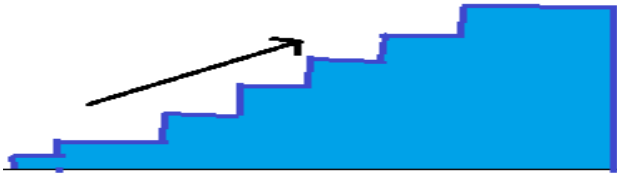
En matemática y ciencias aplicadas se denomina **pendiente** a la inclinación de una recta con respecto al eje horizontal.



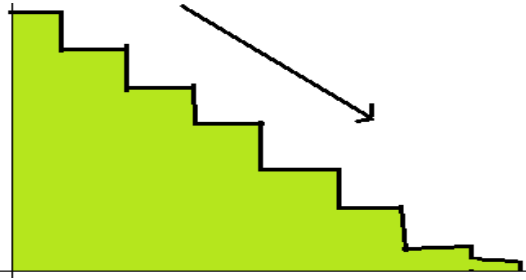
La teoría Euclidiana dice que para graficar o determinar una recta, basta sólo con dos puntos. Tomando en cuenta la distancia entre dos puntos debemos tomar en cuenta que la pendiente  $m = \tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  viene dada también por punto final menos punto inicial, por lo que la pendiente se determina via la tangente del ángulo de inclinación, obteniendo como resultado

Puede ser de cuatro formas:

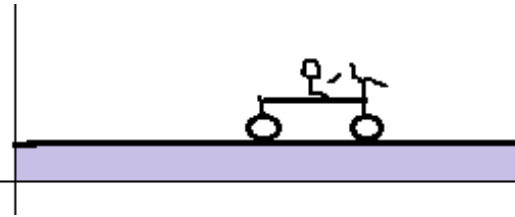
a)  $m > 0$ : la recta presenta inclinación hacia la derecha; es decir, el ángulo es agudo.



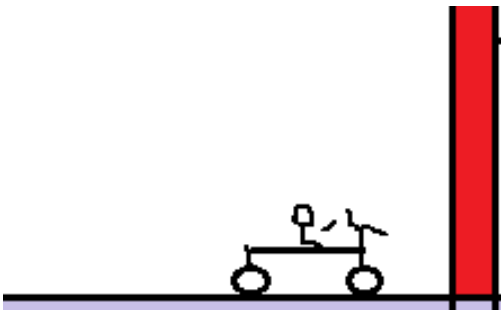
b)  $m < 0$ : la recta presenta inclinación hacia la izquierda, es decir, el ángulo es obtuso.



c)  $m = 0$ : la recta es horizontal, luego el ángulo  $\alpha = 0$



d) Si  $m = \text{indeterminado}$ , la recta es vertical, luego el ángulo  $\alpha = 90$ .





Como se observa en las figuras anteriores la pendiente es muy importante debido a que se utiliza en nuestra vida cotidiana. En el techo de la casa es muy usual dejar cierta pendiente para que el agua corra y no estanque ya que por este motivo empiezan las filtraciones o en la bolsa de valores también es utilizada para indicar cuanto esta al alza o a la baja, en la venta del petróleo, entre otros.

*Ejemplo 1: Obtener la inclinación de la recta que pasa por los puntos (5,2) y (6,3)*

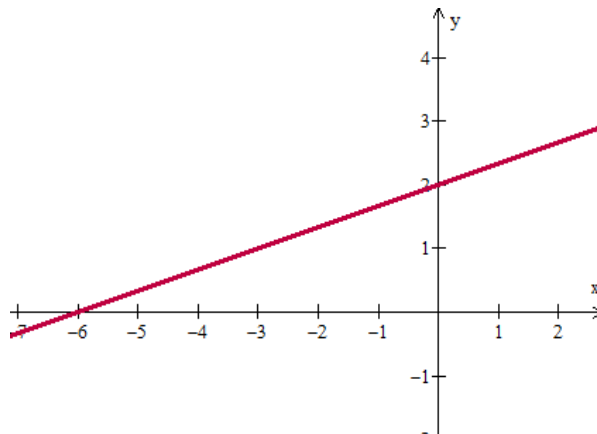
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 2}{6 - 5} = \frac{1}{1} = 1, \text{ Se ve que } m > 0$$

## Intercepto

Son los puntos donde la recta corta al eje  $x$  y al eje  $y$ , es decir, a la abscisa y a la ordenada. En la ecuación canónica, el intercepto corresponde al valor de  $b$ . En la ecuación general se debe despejar  $y$ , para identificar el intercepto. Aunque es bueno hacer notar que  $(0,b)$  el intercepto esta en el eje de la ordenada y cuando hagamos  $(a,0)$  el intercepto estará en el eje de las  $x$ .

Retomando las ecuaciones canónica y general de la recta; se resalta que se puede transformar de una en la otra. A partir de la ecuación canónica se llega a la general, llevando toda la ecuación a cero. A partir de la general, se obtiene la canónica; despejando  $y$ .

*Ejemplo: Dada la ecuación  $2x - 6y + 9 = -3$  obtener las coordenadas al origen o interceptas y construir la recta.*



$$2x - 6y + 9 = -3$$

$$2x - 6y + 9 + 3 = 0$$

$$2x - 6y + 12 = 0$$

$$2x = 6y - 12$$

$$x = \frac{6y - 12}{2}$$

$$x = 3y - 6$$

$$\therefore a = -6$$

$$2x - 6y + 12 = 0$$

$$6y = 2x + 12$$

$$y = \frac{2x + 12}{6}$$

$$y = \frac{1}{3}x + 2$$

$$\therefore b = 2$$

## Ecuación punto-pendiente

La ecuación de la recta dados un punto y su pendiente se obtiene mediante la expresión

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

*Ejemplo 1:* Calcular la ecuación de la recta cuya pendiente  $m = 2$  y pasa por el punto  $P(-4, 6)$ .

$$y - 6 = 2(x + 4) \rightarrow y - 6 = 2x + 8, \therefore y - 2x - 14 = 0$$

## Ecuación de la pendiente dados dos puntos

Dados dos puntos  $P(x_1, y_1); P_2(x_2, y_2)$

$$y = \left[ \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1) \right] + y_1$$

*Ejemplos 2:* Buscar la ecuación de la recta dados los siguientes puntos.

1: Datos A(2,4) y B(4,-6)

$$y = \left[ \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1) \right] + y_1$$

$$y = \left( \frac{-6-4}{4-2} \right) (x-2) + 4 \rightarrow y = \frac{-10}{2} (x-2) + 4$$

$$= -5x + 10 + 4 = -5x + 14 \rightarrow \boxed{5x + y - 14 = 0}$$

2) Datos A(-4,-6) y B(8,4)

$$y = \left( \frac{4+6}{8+4} \right) (x+4) - 6 = \frac{10}{12} (x+4) - 6$$

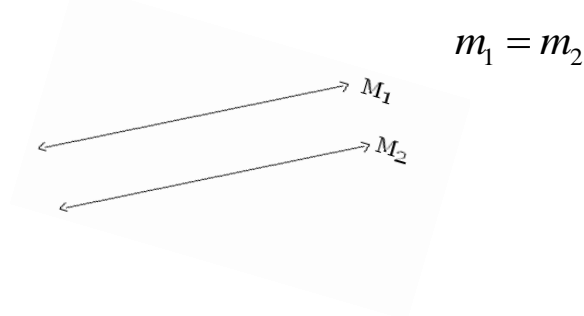
$$= \frac{10}{12} x + \frac{40}{12} - 6 = \frac{10}{12} x - \frac{32}{12} = \frac{5}{6} x - \frac{16}{6}$$

$$\rightarrow \boxed{5x - 6y - 16 = 0}$$

## Rectas paralelas y perpendiculares

### A) Rectas paralelas:

Dos rectas no verticales son paralelas, si y solo si, sus pendientes son iguales, es decir



*Ejemplo: hallar la forma general de las ecuaciones de la recta que pasa por el punto A(2,-1) y es paralela a la recta  $2x - 3y = 5$ .*

El punto dado es A(2,-1) y la ecuación dada es  $2x - 3y = 5$   
cuya pendiente  $m = 2/3$ .

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y + 1 = \frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$$

$$3y = 2x - 7 \quad \therefore \quad \boxed{3y - 2x + 7 = 0} \text{ es la recta paralela buscada.}$$

Ejemplo: Dado la recta  $4x - 6y = 8$  y el punto  $A(4, -1)$   
 buscar una ecuación que sea paralela.

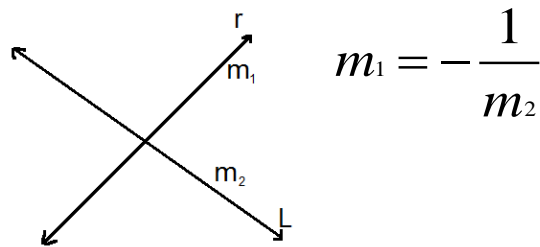
$$y - y_1 = m(x - x_1), \quad m = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$y + 1 = -\frac{2}{3}(x - 4) \rightarrow y + 1 = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3} - 1$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \rightarrow 3y = -2x + 5 \rightarrow \boxed{2x + 3y - 5 = 0}$$

## Rectas Perpendiculares

Dos rectas no verticales son perpendiculares si y solo si sus pendientes son una opuesta e inversa de si misma.



*B) Perpendicular a la recta  $2x - 3y = 5$*

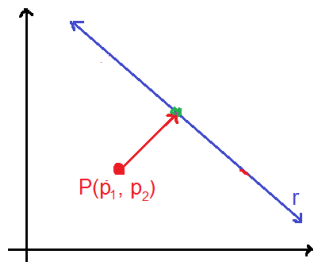
El punto dado es  $A(2, -1)$  y pendiente  $m = 2/3$ .

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \rightarrow m_2 = -\frac{3}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y + 1 = -\frac{3}{2}(x - 2) \rightarrow y + 1 = -\frac{3}{2}x + 3$$

$2y + 3x - 4 = 0$  es la recta perpendicular buscada.

## Distancia de un punto a una recta



La distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento perpendicular a la recta. Esta expresión se usa pues como sabemos una recta tiene la forma  $ax + by + c = 0$  y están dando el punto  $P(p_1, p_2)$  por lo tanto multiplicando los coeficientes de la ecuación con la respectiva coordenada

del punto y será a través de la expresión:

$$d(p, r) = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Ejemplo 1:** Calcular la distancia del punto  $P(2, -1)$  a la recta de ecuación

$$3x + 4y - 5 = 0.$$

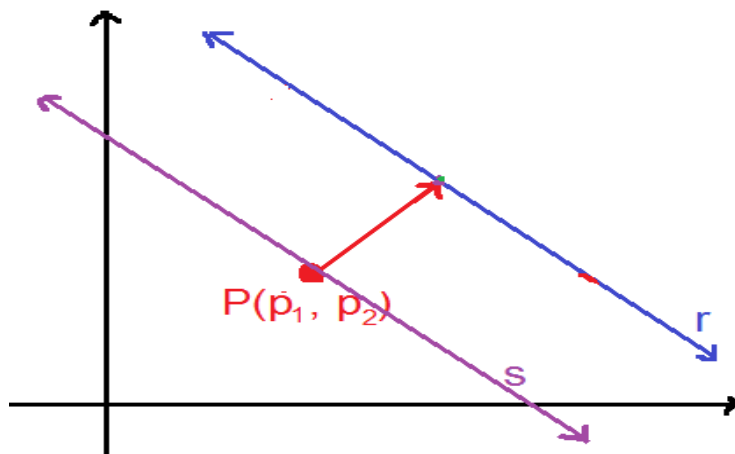
$$d(p, r) = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3(2) + 4(-1) - 5|}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{3}{5} \text{ Unid}$$

**Ejemplo 2:** Hallar la distancia desde el origen a la recta  $r = 4x - 2y - 30 = 0$

$$d(o, r) = \frac{|-30|}{\sqrt{(4)^2 + (-2)^2}} = \frac{30}{20} = \frac{5}{2} \text{ Unid}$$

## Distancia entre dos rectas paralelas

Para hallar la distancia entre dos rectas paralelas, se toma un punto cualquiera P de una de ellas y se calcula la distancia a la otra.



Ejemplo : Hallar la distancia entre las rectas  $r \equiv 2x - 5y + 10 = 0$  y  $s \equiv 4x - 10y + 9 = 0$

a) Hay que verificar que las dos rectas son paralelas.

$$m_1 = -\frac{x}{y} = -\left(\frac{2}{-5}\right) = \frac{2}{5} \quad y \quad m_2 = -\frac{x}{y} = -\left(\frac{4}{-10}\right) = \frac{2}{5}$$

$\therefore m_1 = m_2$  las rectas son paralelas

b) Coger un intercepto de cualesquiera de las rectas.

$$r \equiv 2x - 5y + 10 = 0 \rightarrow p(0, 2) \in r$$

c) Buscar la distancia desde el intercepto encontrado hasta la otra recta, es decir desde p hasta s.

$$d(p, r) = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4(0) - 10(2) + 9|}{\sqrt{4^2 + (-10)^2}} = \frac{|11|}{\sqrt{116}} \approx 1.02 \text{ unidades}$$

## Cálculo Diferencial

Apellidos:..... Matriculas:.....

Grupo: .....Fecha: .....Profesor(a): .....Práctica:.....

Busca la distancia entre los puntos dados.

- 1)  $p_1(3,5); p_2(-2,-9)$
- 2)  $A_1(-1,2); A_2(0,-3)$
- 3)  $Q_1\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{7}\right); Q_2(4,-9)$
- 4)  $e_1\left(-\frac{2}{07}\frac{1}{2}\right); e_2\left(\frac{1}{3},7\right)$
- 5)  $o_1(-0.25,5); o_2(-5.33,2)$
- 6)  $p_1\left(-\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right); p_2\left(\frac{3}{4}9\right)$

Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

- 7)  $(4,7)$  y  $(-2,-3)$
- 8)  $(-4,3)$  y  $(3,-2)$
- 9)  $(-2,3)$  y  $(4,3)$
- 10)  $(5,4)$  y  $(5,4)$

Hallar la ecuación de la recta que cumple con las condiciones de:

- 11) pendiente 4 e intercepto  $\frac{1}{3}$
- 12) pasa por el punto  $(-4,-2)$  y pendiente -6
- 13) pasa por los puntos  $(8,1)$  y  $(-3,1)$
- 14) Intercepta en  $x=5$  y en  $y=-2$

Hallar la ecuación de la recta:

- 15)  $p_1(3,5); p_2(5,0)$
- 16)  $p_1(0,3); p_2(-6,1)$
- 17)  $p_1(0,7); p_2(-1,-1)$
- 18)  $p_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right); p_2(4,8)$
- 19)  $p_1(3,0); m=2$
- 20)  $p_2(-1,-1); m=3$
- 21)  $p_3(4,-3); m=20$
- 22)  $p_1(-2,0); m=-1$
- 23)  $2x+3y+4=0; p_1(-3,7)$
- 24)  $4x-2y=0; p_1(3,7)$
- 25)  $y=4x-2; p_2\left(\frac{1}{5}, -4\right)$
- 26)  $5y-7x-12; p_3(1,0)$
- 27)  $-2x+\frac{1}{3}y-9=0; (0,0)$

Busca los interceptos de:

- 28)  $2x-8y=0$
- 29)  $3x-7y-1=0$
- 30)  $x+y=-6$
- 31)  $x-3y+2=0$
- 32)  $6x-5=0$
- 33)  $4y-2=0$
- 34)  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{1}{2}$
- 35)  $0.2x + \frac{24}{10} = 0.4$
- 36)  $-5x = 10y - 15$
- 37)  $-\frac{x}{2} - 3y = 6$

En las ecuaciones dadas hallar los parametros:

- 38)  $2x+5y-8=0$
- 39)  $\frac{3x}{4} - \frac{4}{2} = 2$
- 40)  $\frac{2}{3}x + 4y = \frac{1}{3}$

De cada par de rectas determinar si son paralelas,perpendiculares oblicuas.

- 41)  $3y-2x-8=0$       ^       $-4x+6y-10=0$       .....
- 42)  $\frac{1}{2}x + y - 5 = 0$       ^       $4x-2y=8$       .....
- 43)  $3x+4y-9=0$       ^       $3x-4x-10=0$       .....
- 44)  $2x+3y=1$       ^       $x-2y=9$       .....



Resolver los problemas propuestos:

45) Hallar la ecuación de la recta que pasa por  $(-2, 4)$  y es paralela a  $6x - 2y - 5 = 0$

46) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto  $(-5, 4)$  y es perpendicular a la recta que pasa por  $(1, 1)$  y  $(3, 7)$ .

47)Cuál es la ecuación general de la recta que pasa por  $Q(3, 4)$  y su pendiente es el doble de la pendiente de la recta  $4x - 6y - 12 = 0$ ?

48) Una recta corta al eje  $x$  en 5 y es paralela a la recta  $2x + y - 5 = 0$

49) Una recta cuya ecuación es  $5y - 4x - 20 = 0$  limita un triángulo rectángulo con los ejes coordenados. ¿Cuál es el área de dicho triángulo?

50) los vectores de un cuadrilátero son:  $p_1(-3, 2)$ ;  $p_2(3, 1)$ ;  $p_3(-4, -3)$ ;  $p_4(2, -3)$

a) Graficar la figura b) Buscar la pendiente c) Buscar la ecuación.

d) Buscar distancia y punto medio de cada segmento.

51) Hallar la forma general de la ecuación de la recta que pasa por el punto  $(-3, -5)$  y son:

a) Paralela a  $3x - 2y = 7$

c) Perpendicular a  $4x - 6y - 9 = 0$

b) Paralela a  $6x - 8y + 4 = 0$

d) Perpendicular  $5x - 3y - 7 = 0$

52) Dados los puntos  $A'(3, 2)$ ;  $B(3, 7)$  calcular la distancia de cada una de ellas a la recta  $2x - y - 1 = 0$

53) Calcular la distancia que hay entre las rectas. 
$$\begin{cases} 4x - 2y + 8 = 0 \\ 2x - y + 6 = 0 \end{cases}$$

54) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto  $p(4, 2)$  y es paralela a la ecuación  $8x + 2y - 12 = 0$

55) Hallar la ecuación conónica de una circunsferencia

de: a)  $r=5$ ;  $c(2, -8)$  b)  $r=10$ ;  $(0, -2)$  c)  $r=4$ ;  $c(-3, -2)$

# Módulo 2: Relaciones y Funciones

## Cálculo Diferencial

[http://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%A1lculo\\_diferencial](http://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%A1lculo_diferencial) dice que el **cálculo diferencial** consiste en el estudio del cambio de las variables dependientes cuando cambian las variables independientes de las funciones. El principal objetivo de estudio del cálculo diferencial son las derivadas, las cuales son la medida de la rapidez con la que varía el valor de dicha función según cambia el valor de su variable independiente. Se interesa en el cambio y el movimiento; trata cantidades que se aproximan a otras cantidades.

Tiene mucha importancia dentro de diferentes ramas del saber, como en el caso de la física pues se aplica en la velocidad instantánea sobre la razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo. En la química le interesa la velocidad instantánea para obtener la rapidez de cómo cambian las reacciones químicas. En biología se observa cómo crece una población en un determinado tiempo y en economía tiene mucha importancia en la minimización y maximización para diferentes productos. También se usa para predecir ciertos modelos matemáticos en diferentes áreas de la ciencia.

<http://www.slideshare.net/silvyharoo/clculo-diferencial> plantea que las razones del cambio se representan en todas las ciencias. Un geólogo se interesa en conocer la rapidez a la cual una masa incrustada de roca fundida se enfría por conducción del calor hacia las rocas que la rodean. Un ingeniero desea conocer la proporción a la cual el agua fluye hacia adentro o hacia afuera de un depósito. Un geógrafo urbano se interesa en la razón de cambio de la densidad de población de una ciudad, al aumentar la distancia al centro de la propia ciudad. Un meteorólogo siente interés por la razón de cambio de la presión atmosférica con respecto a la altura, En psicología, quienes se interesan en la teoría del aprendizaje estudia la curva del aprendizaje, la cual presenta en forma de gráfica del rendimiento  $P(t)$  de alguien que aprende una habilidad, como función del tiempo de capacitación  $t$ . es decir en el rendimiento a medida que pasa el tiempo; es decir,  $d^*/dt$ . En sociología, el cálculo diferencial se aplica en el análisis del esparcimiento de rumores (o de innovaciones, novedades o modas). Si  $p(t)$  denota la proporción de una población que se conoce un momento  $t$ , por lo tanto la derivada  $dp/dt$  denota la rapidez de esparcimiento de ese rumor.

Como el cálculo diferencial estudia el cambio en las funciones por esa razón la unidad que sigue a continuación se le llama relaciones y funciones.

## Relaciones y Funciones

Desde niveles académicos muy bajos se vienen usando las funciones, pero muchas veces se trabajan como algo rutinario, simplemente para cumplir con un programa de clase. Las personas calculan y grafican funciones de todas índoles, sucediendo en la mayoría de los casos que ni se imaginan la importancia y utilidad de estas, son vistas casi siempre como algo abstracto.

En la vida hay cosas que son dependientes y otras son independientes. Algunos sucesos se obtienen es dependiendo de los resultados de otros, por ejemplo La cantidad de leche que dé una vaca dependerá de la cantidad de pasto y líquido que consuma en el día anterior; La cantidad de combustible gastado por un vehículo dependerá del tiempo que dure encendido. Cuando se va al supermercado se compra un producto dependiendo de su calidad y su precio. Todo depende de los factores de oferta y demanda.

Las funciones son de uso en diferentes áreas del saber tales como en la química, física, economía, estadística, medicina, finanza, etc.

<http://www.monografias.com/trabajos7/mafu/mafu.shtml> plantea que Las funciones, en matemáticas, es el término usado para indicar la relación o correspondencia entre dos o más cantidades. El término función fue usado por primera vez en 1637 por el matemático francés René Descartes para designar una potencia  $x^n$  de la variable  $x$ . En 1694 el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz utilizó el término para referirse a varios aspectos de una curva y el en 1829 por el matemático alemán, J.P.G. Lejeune-Dirichlet (1805-1859).

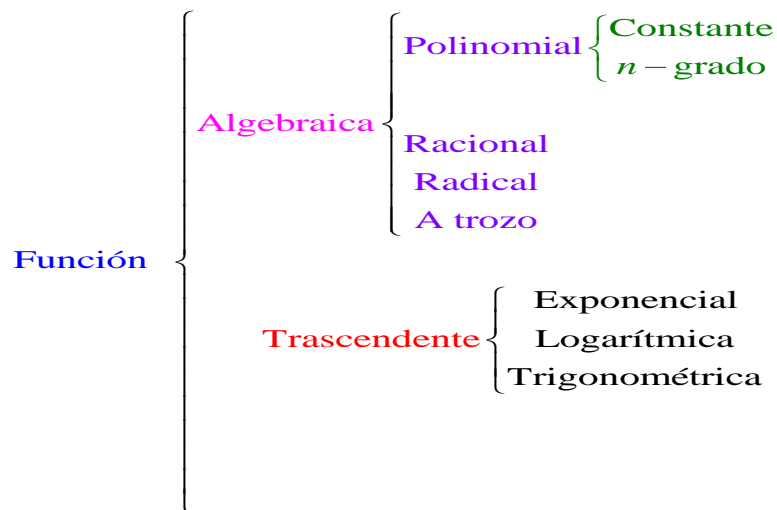
Algunas funciones tiene diferentes uso tales como las funciones cuadráticas la cuales representan parábolas. Estas se encuentran sumergidas en la naturaleza y hasta en las trayectorias descritas por los proyectiles. Los telescopios, luces de vehículos, cascadas, etc. Es incalculable el uso que tienen las funciones de segundo grado en la humanidad.

<http://www.buenastareas.com/ensayos/Embriologia-Molecular/6352897.html> dice que a las funciones exponenciales se acostumbra a llamarlas funciones de crecimiento, puesto que su empleo más extenso está en la descripción de esta clase de fenómenos, como el desarrollo poblacional de: personas, animales, bacterias; la desintegración radioactiva, crecimiento de una sustancia en una reacción química, el incremento del capital en el interés compuesto, etc. La función inversa de la función exponencial, es la función logarítmica que se utiliza ampliamente en las ciencias teóricas como en las aplicadas, por ejemplo, para resolver la ecuación exponencial que se deriva de los estudios de crecimiento poblacional y de las matemáticas financieras, aun con una calculadora científica muy buena, se necesitan las funciones logarítmicas para resolverlas.

## Clasificación de las funciones

[http://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Funciones\\_matem%C3%A1ticas#Tipos\\_de\\_funciones\\_y\\_su\\_clasificaci.C3.B3n](http://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Funciones_matem%C3%A1ticas#Tipos_de_funciones_y_su_clasificaci.C3.B3n) plantea que toda función tiene su clasificación dentro de uno de los grupos de funciones elementales y no elementales. Las funciones elementales están formadas por los polinomios, el cociente de polinomios, los radicales, las funciones trigonométricas y sus inversas, la función exponencial y logarítmica, así como todas las funciones formadas a partir de las anteriores mediante operaciones algebraicas o composición de funciones. Mientras que Las funciones no-elementales son aquellas que pueden ser obtenida mediante un número finito de pasos combinando funciones elementales. Entre estas se encuentran las inyectivas, biyectivas, sobreyectivas.

Toda función proviene de una relación y en cada una de estas hay comportamientos importantes tales como su Dominio, su rango, simetría, periodicidad, puntos de cortes, crecimiento y decrecimiento, puntos críticos: máximo y mínimo, punto de inflexión, concavidad y convexidad, etc. A continuación se presenta un organigrama de clasificación de las funciones elementales.



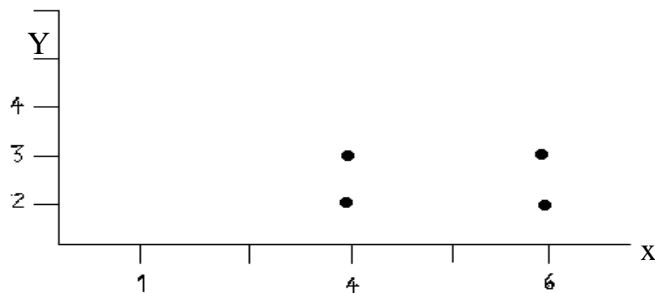
- **Conjunto producto:** Es el conjunto de los pares ordenados  $(x, y)$  donde  $x \in A$  y  $y \in B$ .
- **Relación:** Es un subconjunto del conjunto producto que se forma a través de un mandato. En toda relación se encontrará un primer conjunto llamado *conjunto de partida* y un segundo llamado conjunto de llegada.

*Ejemplo: Si  $A = \{1, 4, 6\}$ ,  $B = \{2, 3, 7\}$ . Haga el conjunto producto y buscar la relación de acuerdo  $f: x > y$ . Luego grafique la relación en el plano cartesiano y haga el diagrama de Euler-Venn.*

a) Conjunto Producto  $A \times B = \{(1,2); (1,3); (1,7); (4,2); (4,3); (4,7); (6,2); (6,3); (6,7)\}$ .

b) Relación obtenida de acuerdo a  $F: x > y$ ;  $R: \{(4,2); (4,3); (6,2); (6,3)\}$

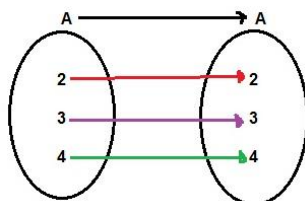
c) Plano cartesiano



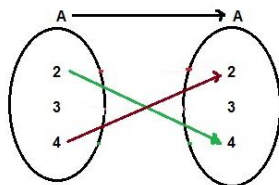
### *Propiedades de una relación:*

**1) Reflexión:** Es una propiedad que dice que todo elemento se relaciona consigo mismo, es decir, matemáticamente  $\forall x \in A; (x, x) \in A$ .

Ejemplo: sea  $A = \{2, 3, 4\}$ :  $R: A \rightarrow A$  donde  $x = x$ .



**2) Simétrica:** Dice que si un elemento  $x$  es igual a  $y$  entonces  $y$  también es igual a  $x$ . Matemáticamente se expresa  $\forall x, y \in A; (x, y) \in A \wedge (y, x) \in A$ . Ejemplo: Sea  $A = \{2, 3, 4\}$ ,  $R: \{(2,4); (4,2)\}$



**3) Transitiva:** Coloquialmente se usa cuando se dice que Carlos es igual a Pedro y Pedro es igual a Willy, entonces Carlos es igual a Willy. La definición matemática dice que

$$\forall x, y, z \in A; (x, y) \in A \wedge (y, z) \in A \rightarrow (x, z) \in A$$

Ejemplos:  $x = y \wedge y = z \rightarrow x = z$ ;  $x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$ ;

$$a \subseteq b \wedge b \subseteq c \rightarrow a \subseteq c$$

## Dominio y Rango de una función

**Dominio:** Es el conjunto de los elementos del conjunto de partida que están relacionados con algún elemento del conjunto de llegada. Matemáticamente son los elementos para los cuales la función está definida.  $\{x \in X; \exists y \in Y / f(x) = y\}$

**Rango:** Es el conjunto de los elementos del conjunto de llegada que están relacionados con algún elemento del conjunto de partida. Matemáticamente se expresa  $\{y \in Y; \exists x \in X / y = f(x)\}$ .

*Ejemplo 1: Dados  $A = \{2, 3, 4, 5\}$  y  $B = \{4, 6, 9\}$ , siendo  $R : A \rightarrow B$  la relación tal que " $x + y \leq 8$ ", determine: a) Conjunto Solución, b) Dominio, c) rango, d) Diagrama de Venn-Euler y e) Diagrama de coordenadas.*

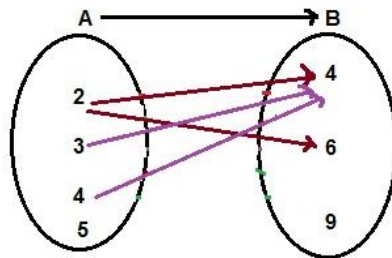
**Solución:**

a) El conjunto solución es

$$R = \{ (x, y) \in A \times B / x + y \leq 8 \} = \{ (2, 4), (2, 6), (3, 4), (4, 4) \}.$$

b) El dominio es  $D = \{2, 3, 4\}$ ; c) El rango es  $D = \{4, 6\}$

d) El diagrama de Venn – Euler es:



## Función:

**Concepto:** Es toda relación en la cual ningún elemento del dominio tiene más de una imagen en el rango.

## Definición:

Dados los conjuntos  $X \wedge Y \neq \emptyset$  una función desde X hasta Y connotada por

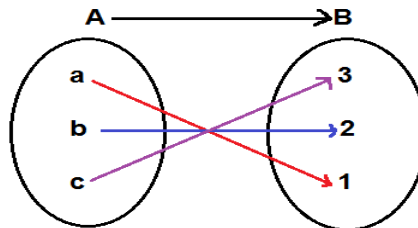
$F: X \rightarrow Y$  es una correspondencia matemática que cumple con los siguientes criterios.

### a) Condición Existencial:

$$\forall x \in X; \exists y \in Y / (x, y) \in f$$

### b) Condición de Unicidad:

$$\text{Dice que: } (x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Leftrightarrow y_1 = y_2$$



$f(1)=?$ ,  $f(-3)=9$ ,  $f(6)=?$ ,  $f(4)=16$ ; Solamente hay función en -3 y 4.

*Ejemplo 1:* Sea  $X = \{1, -3, 6, 4\}$ ;  $Y = \{7, 9, 10, 16\}$ . Dada la función  $y=x^2$   
Diga para cuales elementos se cumplen.

*Ejemplo 2:* Dada la función  $Y = \sqrt{X}$ ; Cuál es el dominio y rango

*Ejemplo 3:* Hallar el dominio de la función  $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{|x-4|-5}}$

Domino:  $R \geq 0$ , es decir x mayor que cero

Rango:  $R \geq 0$ , Y mayor que cero también.

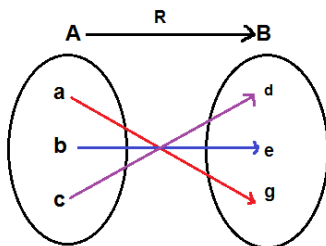
Solución: dom. f:  $x \in R / |x-4|-5 > 0$ . Resolviendo la inecuación obtendremos como resultado  $x > 9$  y  $x < 1$  por lo que el dominio de la función es es  $]-\infty, -1[ \cup ]9, \infty[$ .

## Clasificación de las funciones según su aplicación

### a) Inyectiva :

- Asigna a elementos distintos de A, elementos distintos de B.

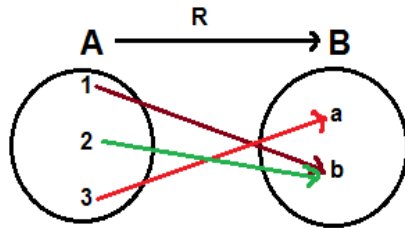
$$\forall x_1, x_2 \in A; f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$



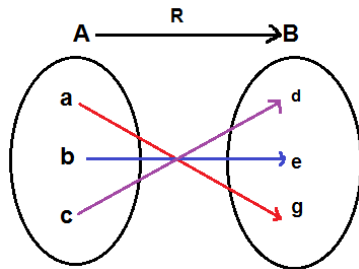


### b) Sobreyectiva:

Es cuando todos los elementos del rango son imágenes aunque sea de un solo elemento del dominio; es decir, cuando el rango sea igual al conjunto de llegada,  $R = B$ .



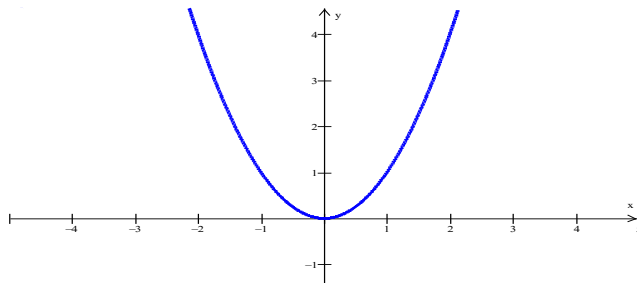
C) **Biyectiva:** Es cuando una función es inyectiva y sobreyectiva a la vez.



## Funciones par e impar

**a) Función par:** Una función es par cuando guarda simetría en el eje de la ordenada.  $y = (x)$  es par  
 $\leftrightarrow f(-x) = f(x)$ ; Ejemplo: Sea  $y = x^2$

Es par porque sea a cualquier número,  $f(-a) = f(a) \rightarrow (-a)^2 = (a)^2 \rightarrow a = a$

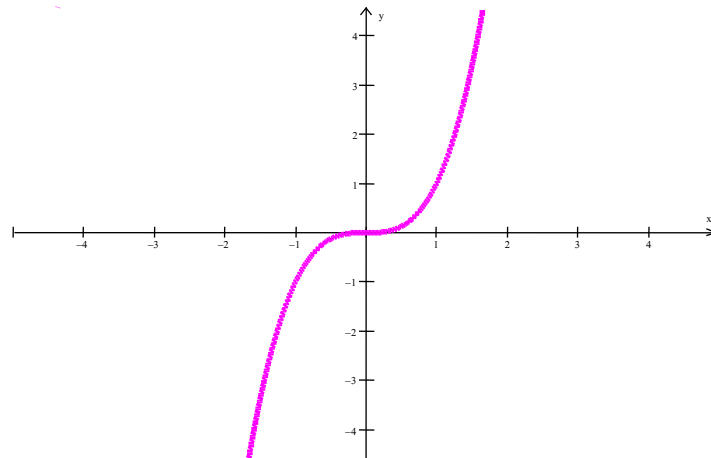


**b) Función impar:** Será impar cuando presente simetría con respecto al origen de coordenadas.

$$Y = f(x) \text{ es impar} \leftrightarrow f(-x) = -f(x) \forall x \in A; -x \in A \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

Ejemplo:

$$f(x) = x^3 \rightarrow f(-a) = -f(a) \rightarrow (-a)^3 = -(a)^3 \rightarrow -a = -a$$



### **Funciones algebraica:**

Son aquellas en la cual la variable independientemente se somete a las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potencia y radicación. *Ejemplo:*  $y = \sqrt{x-4}$

Estas pueden ser:

**a)** Explícitas: Cuando las imágenes de x se obtienen  $f(x) = 5x - 2$  por simple sustitución.

**b)** Implícita: Si no se pueden obtener las imágenes de X por simples sustitución, si no que hay que realizar operaciones.

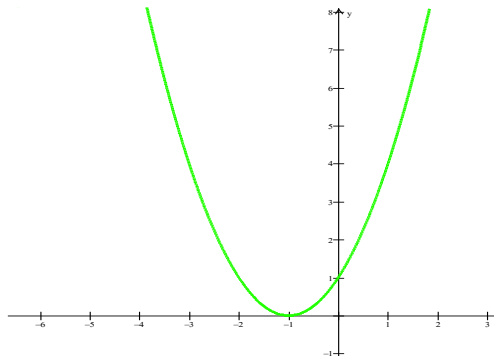
$$xy^3 - 5x^6 + xy - 2 + y = 0$$

**Funciones polinómicas:**  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

Son aquellas que vienen dadas por polinomios, tal como la función cuadrática

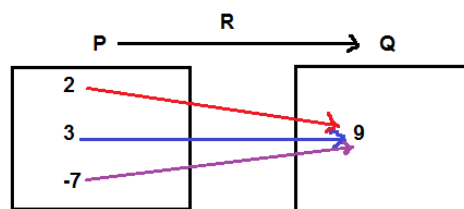
$f(x) = ax^2 + bx + c$  ;  $\forall a \neq 0$  Su gráfica es una parábola

$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$



**Función Constante:** Viene dada por un número real, y se cumple que es cuando los elementos del dominio tienen una misma imagen.

$$f: R \rightarrow R; \forall x \in R; f(x) = a$$



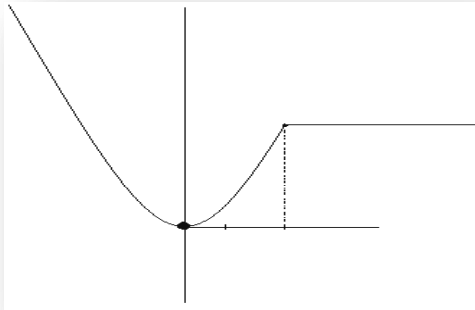
### Funciones a trozos

Son definidas por distintos criterios, según los intervalos que se consideren.

En una función a trozos hay sumergidas distintos tipos de funciones en diferentes intervalos.

Ejemplo: grafica la siguiente función:  $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < 2 \\ 4 & ; x > 2 \end{cases}$

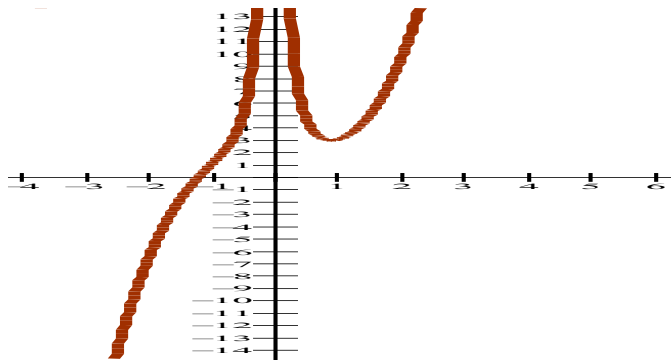
Dominio:  $\mathbb{R} - \{2\}$



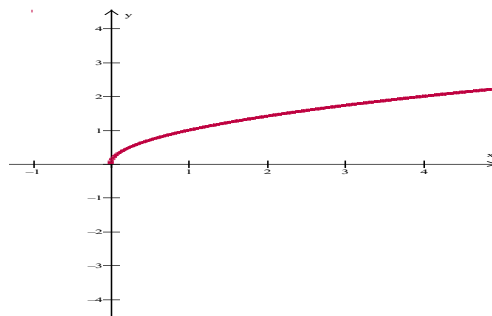
**Funciones Racionales:** Son aquellas obtenidas al dividir un polinomio por otro polinomio no idénticamente nulo. Para una única variable  $x$  una función racional se puede escribir como:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n}$$

Ejemplo:  $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$



**Funciones Radicales:** El criterio viene dado por  $x$  dentro de un radical.  $f(x) = \sqrt{x}$



## Cálculo Diferencial

Apellidos:..... Matriculas:.....

Grupo: .....Fecha: .....Profesor(a): .....Práctica:.....

- 1) Que es una relación?
- 2) Que es un conjunto producto?
- 3) Defina cada una de las propiedades de una relación y ponga ejemplos?
- 4) Defina función?
- 5) Establezca la diferencia entre el dominio y rango de una función?
- 6) Clasificación de las funciones, defina c/u y de ejemplos?
- 7) Cuando una función es algebraica?
- 8) Cuando una función es polinómica. Ejemplos?
- 9) Cuando una función es constante?
- 10) Explique a través de ejemplos cuando una función es par y cuando es impar?
- 11) Hable brevemente sobre c/u de las funciones trascendentes?

- 12) Dada  $f : A \rightarrow B$  con  $x \in A$  y  $y \in B$  y los conjuntos  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $B = N$ , determina lo que se te pide de acuerdo a  $f: x^2 = y$
- a) El conjunto de pares ordenados de .....
  - b) El dominio de la función .....
  - c) El rango de la función .....

- 13) Escribe el conjunto solución, el dominio y el rango de las siguientes funciones definidas sobre A y B.

a)  $y = x^2 - 1$ ;  $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ;  $B = \{-1, 3, 15, 25\}$ .

b)  $y = 3x + 1$ ;  $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ;  $B = \{1, 13, 25, 49\}$ .

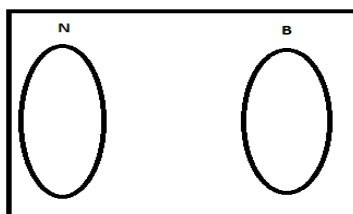
c)  $y = -2x - 1$ ;  $A = N \{0, 1, 2\}$ ;  $B = Z$ .

d)  $y = 6/x$ ;  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ;  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .

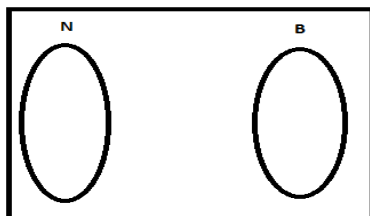
e)  $y = (x + 2)/x$ ;  $A = B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

- 14) Representa la función pedida.

a) Una función inyectiva.  



Una función constante.



15) Cuál de las siguientes expresiones representa una función?. encierralas.

- $a) y = 2x + 1$                        $d) y = \pm\sqrt{2x+2}.$   
 $b) y = \{(2, y) / y \in \square\}.$        $e) y = +\sqrt{x-3}.$   
 $c) f = \{(x, 2) / x \in \square\}.$        $f) f = \{(x, x+2) / x \in \square\}.$

16) Al lado de cada expresión escribe si es algebraica o trascendente; racional o irracional; fraccionaria o polinómica.

- $a) y = 5x - 2$       -----;-----;-----  
 $b) y = \sqrt{2x+1}$       -----;-----;-----  
 $c) y = \frac{2}{x+1}$       -----;-----;-----  
 $d) z = xgy$       -----;-----;-----

17) Escribe si las siguientes funciones tienen simetría respecto al origen o a uno de los ejes, o si no tiene simetría.

- $a) y = -x$   
 $b) y = x^2 + 1$   
 $c) y = 3x^3$

18) Identifica cuál de las siguientes funciones es par o impar.

a)  $y = x^3 - x^4$

b)  $y = 1 - x^2$

c)  $y = 2x^3$

d)  $y = 9x^2 + 5$

e)  $y = 3x + 1$

f)  $g = x - x^3$

19) Considerando los conjuntos  $A=\{1,2,3,4\}$ ;  $B=\{2,3,5\}$  y  $C=\{3,4,5\}$ , determinar:

A)  $A \times B$

B)  $B \times C$

C)  $A \times (B \cup C)$

20) Dado el conjunto  $x=\{3,7,10,11\}$  y las relaciones: cuales son funciones.

$$R_1 = \{(3,3), (7,7), (10,10), (11,11)\}$$

$$R_2 = \{(3,7), (7,10), (10,11), (3,11)\}$$

$$R_3 = \{(3,11), (7,10), (10,10), (11,7)\}$$

22. Dado el conjunto  $A=\{x \in \mathbb{N} / x \leq 5\}$ , obtén el conjunto solución, el dominio y el rango de las siguientes relaciones  $R=A \rightarrow A$  cuyas leyes de correspondencia se especifican.

$$R_1 : "x + y < 5."$$

$$R_2 : "x + y \text{ es un número par}"$$

$$R_3 : "y = x^2"$$

$$R_4 : "2x + y = 8"$$

$$R_5 : "x + y \text{ es un número primo.}"$$

$$R_6 : "x \text{ es divisible por } y."$$

$$R_7 : "x^2 + y^2 \text{ es un cuadrado perfecto.}"$$

21) En los ejercicios a, encontrar el dominio de la función.

$$a) f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}; \quad b) f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}; \quad c) g(x) = \frac{2}{1 - \cos x}$$

$$d) h(x) = \frac{1}{\sin x}; \quad e) f(x) = \frac{5}{x+31}; \quad f) g(x) = \frac{6}{x^2 - 41}$$

# **Módulo 3:** **Límite, Continuidad y Asíntotas**



## Limite

Si se va aplica la lógica humana se entiende que un límite es el punto máximo o mínimo que se puede alcanzar. Es decir, es el tope, fin, etc. Un ejemplo sencillo es el ser humano, pues nace, crece, se reproduce y muere. Otro ejemplo es el estudio de software o mecatrónica cursado en el ITLA, el título es a nivel de tecnólogo porque hasta ahora es el límite de la Carrera de la institución.

**Límite:** Es el valor de  $L$  al que se aproxima la variable dependiente ( $Y$ ), cuando la variable ( $X$ ) se aproxima a un valor  $C$ . Es decir,

$$Y = y = \lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

### 1. Resolución de Limite por proceso de evaluación.

Este dice que si una función tiene límite este es único, por la propiedad de unicidad de límite. Eso significa que si este se evalúa a la derecha y a la izquierda su valor es único.

Ejemplo:Cuál es el límite de  $y = x^2 - 1$ , cuando  $x$  tiende a 2.

La representación es de la forma  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)$

Evaluación por la izquierda

$x$	$y$
1.5	1.25
1.9	2.61
1.99	2.9601
1.999	2.996001
1.9999	2.996001

Evaluación por la derecha

$x$	$y$
2.5	5.25
2.1	3.41
2.01	3.0401
2.001	3.004001
2.0001	3.0004

El límite tanto por la derecha como por la izquierda tiende a 3

## II. Resolución de límites por propiedades.

### Propiedades de los límites.

Es importante que al momento de resolver un límite de cualquier tipo se deba tener en conocimientos las siguientes propiedades:

Si  $c$  es una constante y existen los  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$

1) **Límite de una constante :**

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

$$x \rightarrow a$$

2) **Límite de una variable:**

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

$$x \rightarrow a$$

3) **Límite de un exponente:**

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n; \text{ Si } n \text{ es } \square +$$

$$x \rightarrow a$$

4) **Límite del producto de una constante por una función:**

$$\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$x \rightarrow a \quad x \rightarrow a$$

5) **Límite de una suma y resta:**

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$x \rightarrow a \quad x \rightarrow a \quad x \rightarrow a$$

6) **Límite de un producto:**

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x).g(x)] = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left( \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)$$

$$x \rightarrow a$$

7) **Límite de un cociente:**

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}; \forall \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

8) **Límite de una potencia:**

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n$$

9) **Límite de una raíz:**

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} ; \text{ Si } n \in \mathbb{Z}^+ +$$

10) **Límite de una radicación:**

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} ; n \in \mathbb{Z}^+$$

Si  $n$  es par solo será válido para  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$

Existen más propiedades de límite, que aunque no se van a usar por ahora pero son necesarias por lo menos hacerlas notar aquí

$$11) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = 1$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right) = 1$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} x^3 - 2x^2 + 4$$

$$\begin{aligned} \text{a) Ejemplo: resolver } &= \lim_{x \rightarrow -1} x^3 - 2 \lim_{x \rightarrow -1} x^2 + \lim_{x \rightarrow -1} 4 \\ &= (-1)^3 - 2(-1)^2 + 4 = 1 \end{aligned}$$

## Operaciones con límites e indeterminaciones

### III) Sustitución Directa:

Este método consiste en hacer la sustitución directa del valor, sin necesidad de hacer la sustitución directa.

**Ejemplos:** Calcular los siguientes límites

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 1) =$$

$$(3)^2 + 1 = 9 + 1 = 10$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 2(3) - 1 = 5$$

$$3) \text{ Resolver el límite: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 + x)}{(x^2 + 4)} = \frac{(2)^3 + 4(2)}{(2)^2 + 4} = \frac{8 + 8}{4 + 4} = \frac{16}{8} = 2$$

### IV) Técnica de factorización o cancelación:

$$\text{Ejemplo 1: Resolver el } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

Resolviendo por sustitución directa da  $\frac{4 - 4}{-2 + 2} = \frac{0}{0}$  da una indeterminación, eso significa que se

debe factorizar  $\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)} = (x-2)$  y la nueva función es  $\lim_{x \rightarrow -2} (x-2) = -2 - 2 = -4$

$$\text{Ejemplo 2: Resolver } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$$

Este límite por sustitución directa falla 0/0 por lo tanto se debe efectuar o por factorización.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 3x + 9 = 27$$

### V) Límites de funciones racionales.

Una función racional es el resultado que se obtiene al dividir un polinomio por otro. Es decir;

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}; \text{ Donde P y Q tienen la forma: } f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n}$$

Para calcular el límite de una función racional puede aplicarse la regla para el cálculo de límite de un cociente de dos funciones, luego se ejecuta el método de sustitución directa.

Ejemplos: Resolver los siguientes límites

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^5 + 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 4x + 10}{x + 1}$$

$$= \frac{2(1)^5 + 3(1)^4 - 5(1)^3 + 4(1)^2 - 4(1) + 10}{1 + 1} = \frac{2 + 3 - 5 + 4 - 4 + 10}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x + 5}{x + 3} = \frac{2(\frac{1}{2}) + 5}{\frac{1}{2} + 3} = \frac{2/2 + 5}{7/2} = \frac{6}{7/2} = \frac{12}{7}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{2x - 4} = \frac{2^2 + 4}{2(2) - 4} = \frac{4 + 4}{4 - 4} = \frac{8}{0} = \infty \text{ no tiene límite}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 4}{x^2 - 4} = \frac{2(2) - 4}{2^2 - 4} = \frac{4 - 4}{4 - 4} = \frac{0}{0} = 0$$

### VI. Límite de funciones irracionales.

Una función es irracional cuando la variable independiente está afectado por un radical.

El cálculo que se hace para resolver este tipo de función es el mismo como si se tratara de una función racional.

Ejemplos: Busca el límite de cada expresión.

$$a) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 + 24}}{5 + 2} = \frac{\sqrt{5^2 + 24}}{5 + 2} = \frac{\sqrt{25 + 24}}{7} = \frac{\sqrt{49}}{7} = \frac{7}{7} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 21}}{\sqrt{x^4 + 16}} = \frac{\sqrt{2^2 + 21}}{\sqrt{2^4 + 16}} = \frac{\sqrt{4 + 21}}{\sqrt{16 + 16}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{32}} = \frac{5}{\sqrt{32}}$$

$$; \text{ Se aplica racionalización } \frac{5}{\sqrt{32}} = \frac{5}{\sqrt{32}} \cdot \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{32}} = \frac{5\sqrt{32}}{(\sqrt{32})^2} = \frac{5\sqrt{32}}{32}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x - 4} = \sqrt{4 - 4} = \sqrt{0} = 0$$

### VII) Indeterminaciones:

En los temas anteriores se desglosó las técnicas de cómo encontrar el límite de una función racional e irracional, pero existen funciones que no son muy explícita y no se resuelven por simple sustitución directa, sino que hay que aplicarle técnicas para poder tener el conocimiento del límite. Este es el caso donde se dan las *indeterminaciones* que son aquellas expresiones que una vez obtenida no permiten el conocimientos inmediato del límite, sino que hay que realizar ciertos procesos y aplicar los métodos necesarios para resolver el problema y poder así encontrar el límite de una determinada función. Entre los diferentes tipos de indeterminaciones están:

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0 \cdot \infty; \infty - \infty; 0^0; 1^\infty; \infty^\infty; \infty^0.$$

Ante de entrar a este tema es importante llevar en cuenta los siguientes criterios de operaciones con infinito.

- |  |                                   |
|--|-----------------------------------|
| $\infty \pm k = \infty$                    | $\frac{0}{c} = 0$                 |
| 1) Infinito más un número                  | 5) Cero partido por un número     |
| $\infty + \infty = \infty$                 | $\frac{c}{0} = \infty$            |
| 2) Infinito más infinito                   | 6) Un número partido por cero     |
| $\infty(\pm k) = \pm \infty$               | $\frac{k}{\infty} = 0$            |
| 3) Infinito por un número<br>Si $k \neq 0$ | 7) Un número partido por infinito |
| $\infty \cdot \infty = \infty$             |                                   |

8) Infinito partido por un número

$$\frac{\infty}{c} = \infty$$

9) Cero partido por infinito  $\frac{0}{\infty} = 0$

10) Infinito partido por cero  $\frac{\infty}{0} = \infty$

11) Un número elevado a cero  $k^0 = 1; k \neq 0$

14) Cero elevado a infinito  $0^\infty = 0$

15) Infinito elevado a infinito  $\infty^\infty = \infty$

12) Cero elevado a un número

$$0^k = \begin{cases} 0 & ; Si \ k > 0 \\ \infty & ; Si \ k < 0 \end{cases}$$

13) la constante c elevada a infinito

$$e^k = \begin{cases} \infty; & \text{si } k = \infty \\ 0; & \text{si } k = -\infty \end{cases}$$

#### **b) Indeterminaciones causadas por el infinito**

a) Infinito menos infinito  $\infty - \infty = Ind$

b) Infinito por cero  $\infty \cdot 0 = Ind$

c) Cero partido por cero  $\frac{0}{0} = Ind$

d) Infinito partido por infinito  $\frac{\infty}{\infty} = Ind$

e) Cero elevado a cero  $0^0 = Ind$

f) Infinito elevado a cero  $\infty^0 = Ind$

g) Uno elevado a infinito  $1^\infty = Ind$

**c) Indeterminación de 0/0 que se resuelven por factorización o producto conjugado.**

$$\text{Ejemplo 1) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(4)^2 - 16}{4 - 4} = \frac{16 - 16}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$

El resultado da una indeterminación por lo que se tiene que aplicar la *técnica de factorización o cancelación*.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} x+4 = 4+4=8$$

$$\text{Ejemplo 2) } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x^2 + 13} - 7}{x^2 - 6x} = \frac{\sqrt{(6)^2 + 13} - 7}{(6)^2 - 6(6)} = \frac{\sqrt{49} - 7}{36 - 36} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

En este caso cuando se realizan problemas con funciones irracionales se aplica la técnica de radicación y para resolver esta indeterminación se multiplica y se divide por el conjugado.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x^2 + 13} - 7}{x^2 - 6x} \left( \frac{\sqrt{x^2 + 13} + 7}{\sqrt{x^2 + 13} + 7} \right) &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(\sqrt{x^2 + 13})^2 - (7)^2}{(x^2 - 6x)(\sqrt{x^2 + 13} + 7)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 + 13 - 49}{(x^2 - 6x)(\sqrt{x^2 + 13} + 7)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 36}{(x-6)(x)(\sqrt{x^2 + 13} + 7)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x-6)(x+6)}{(x-6)(x)(\sqrt{x^2 + 13} + 7)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x+6)}{(x)(\sqrt{x^2 + 13} + 7)} \\ &= \frac{12}{(6)(\sqrt{(6)^2 + 13} + 7)} = \frac{2}{(\sqrt{36 + 13} + 7)} = \frac{2}{(\sqrt{49} + 7)} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

**d)**

**Indeterminación de tipo 0/0 e  $\infty/\infty$**

Cuando se está buscando el límite de una función y falla por sustitución directa, por cancelación y lo demás método, entonces debemos de ir a la regla algebraica que dice que cuando el límite da 0/0 se divide cada término de la función por la variable de menor exponente, por consiguiente si el límite da  $\infty/\infty$  se divide por la variable de mayor exponente.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 4x - 3}{5x^2 - 6} &= \frac{2(\infty)^2 + 4(\infty) - 3}{5(\infty)^2 - 6} = \frac{2(\infty) + 4(\infty) - 3}{5(\infty) - 6} = \frac{\infty + \infty - 3}{\infty - 6} = \frac{\infty}{\infty} \\ &= \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} - \frac{3}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2} - \frac{6}{x^2}} = \frac{2 + \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2}}{5 - \frac{6}{x^2}} = \frac{2 + \frac{4}{\infty} - \frac{3}{\infty^2}}{5 - \frac{6}{\infty^2}} = \frac{2 + 0 - 0}{5 - 0} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$



$$\text{Ejemplo 2: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x^2-6} = \frac{\infty+3}{(\infty)^2-6} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\text{Resolviendo } = \frac{\frac{x}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{6}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{6}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\infty} + \frac{2}{\infty^2}}{1 - \frac{6}{\infty^2}} = \frac{0+0}{1} = 0 \quad \therefore \text{El límite de esta función es } 0.$$

$$\text{Ejemplo 3) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 3x^2 - 4x}{x^2 + 6x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(0)^3 + 3(0)^2 - 4(0)}{(0)^2 + 6(0)} = \frac{2(0) + 3(0) - 4(0)}{(0) + 6(0)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x^3}{x} + \frac{3x^2}{x} - \frac{4x}{x}}{\frac{x^2}{x} + \frac{6x}{x}} = \frac{2x^2 + 3x - 4}{x + 6} = \frac{2(0)^2 + 3(0) - 4}{0 + 6} = \frac{0 + 0 - 4}{0 + 6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

***e) Resolución de límites por comparación de infinitos cuando se obtiene  $(\infty - \infty)$***

Se puede trabajar por comparación de límites dando como resultado el infinito de la que tenga mayor exponente. Siempre va a tender al infinito.

*Ejemplos: Resolver por comparación de infinitos.*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^5 + 3x^3 - 4x) = \infty \quad \text{Por tener } x^5 \text{ mayor orden}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - \sqrt{x^2 + 4x} = \infty \quad \text{Por tener } x^3 \text{ mayor orden}$$

**f) Resolución de límites racionales de indeterminación de  $(\infty - \infty)$**

Cuando se tenga este tipo de indeterminación de una función racional se debe primero resolver las operaciones algebraicas y luego reducir los términos semejantes. Tomando en cuenta que siempre se obtendrá una indeterminación de  $\infty/\infty$  ó  $0/0$  Mientras que, si es una función irracional se resuelve generalmente multiplicando y dividiendo la función por el conjugado.

**Ejemplo 1) Resolver**  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} - \frac{2x}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x+2)-2(x)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+2-2x}{(x-2)(x+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-2x}{(x-2)(x+2)} = \frac{2+2-2(2)}{(2-2)(2+2)} = \frac{4-4}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = -\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+2)} = \frac{1}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

**Ejemplo 2) Resolver**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^3+5} - \sqrt{x^3+x}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{(\infty)^3+5} - \sqrt{(\infty)^3+x} = \sqrt{\infty+5} - \sqrt{\infty+\infty} = \sqrt{\infty} - \sqrt{\infty} = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{(\sqrt{x^3+5} - \sqrt{x^3+x})(\sqrt{x^3+5} + \sqrt{x^3+x})}{\sqrt{x^3+5} + \sqrt{x^3+x}} \right] = \frac{((\sqrt{x^3+5})^2 - (\sqrt{x^3+x})^2)}{\sqrt{x^3+5} + \sqrt{x^3+x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3+5) - (x^3+x)}{\sqrt{x^3+5} + \sqrt{x^3+x}} = \frac{x^3+5-x^3-x}{\sqrt{x^3+5} + \sqrt{x^3+x}} = \frac{5+x}{\sqrt{x^3+5} + \sqrt{x^3+x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^3}{x^3} + \frac{5}{x^3}} + \sqrt{\frac{x^3}{x^3} - \frac{x}{x^3}}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

### IX Indeterminación de tipo $(\infty, 0)$

Para romper este tipo de indeterminación se debe entrar uno de los factores dentro de la raíz del otro y luego hacer las sustituciones indicadas.

Ejemplo 1: Resolver  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x) \sqrt{\frac{1}{x^2 + 5}}$

$$\infty \left( \sqrt{\frac{1}{\infty}} \right) = \infty (\sqrt{0}) = \infty \cdot 0 \quad \frac{\text{Lim}}{x \rightarrow \infty} (2x) \sqrt{\frac{1}{x^2 + 5}} = \frac{\text{Lim}}{x \rightarrow \infty} (2x)^{\frac{2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{x^2 + 5}} = \frac{\text{Lim}}{x \rightarrow \infty} \sqrt{(2x)^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{x^2 + 5}}$$

$$\rightarrow \frac{\text{Lim}}{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2}{x^2 + 5}} = \sqrt{\frac{4}{1+0}} = \sqrt{4} = 2$$

Ejemplo 1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+4) \sqrt{\frac{1}{16x^2 + 4}}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\infty + 4) \cdot \sqrt{\frac{1}{16(\infty)^2 + 4}} = \infty \cdot \sqrt{\frac{1}{\infty}} = \infty \cdot 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(x+4)^2}{16x^2 + 4}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(x+4)^2}{16x^2 + 4}} = \sqrt{\frac{x^2 + 8x + 16}{16x^2 + 4}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

### X. Resolución de indeterminación de tipo $(1^\infty)$

Este tipo de indeterminación se resuelve transformando la expresión en una potencia del número  $e$ . Es

decir;  $\left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$

Ejemplo 1) Resolver  $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x+2}{4}\right)^{\frac{x+1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x+2}{4}\right)^{\frac{x+1}{x-1}} = \left(\frac{2(1)+2}{4}\right)^{\frac{1+1}{1-1}} = \left(\frac{4}{4}\right)^{\frac{2}{0}} = 1^\infty$

1er paso: Se suma y se resta 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( 1 + \frac{2x+2}{4} - 1 \right)^{\frac{x+1}{x-1}}$$

2do paso: Se pone en a común denominador los últimos sumandos

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( 1 + \frac{2x+2}{4} \right)^{\frac{x+1}{x-1}}$$

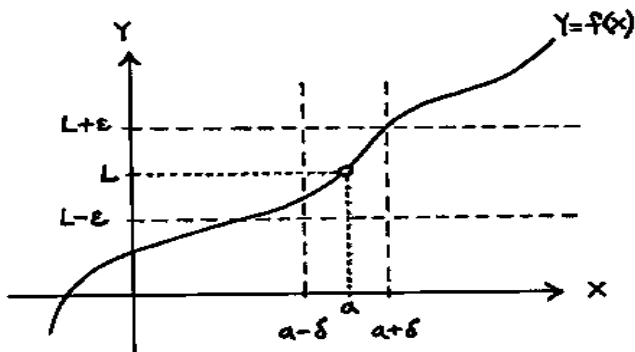
3cer paso: Sustituimos por el inverso de lo inverso.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( 1 + \frac{1}{\frac{4}{2x+2}} \right)^{\frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{2x+2}{2x+2}} = \left( 1 + \frac{1}{\frac{4}{2x+2}} \right)^{\frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{4}{2x+2}} = e \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{4}{2x+2} \right) = e \frac{4}{4} = e$$

### **Límite.** Definición épsilon- Delta de límite.

**Karl Weierstrass:** Matemático alemán, nació en 1815. Ingresó a la universidad de Bonn a estudiar comercio y finanzas para complacer a su padre; pero su interés por las ciencias Matemáticas fue más grande. Trabajó con la teoría de la serie de potencias, su trabajo más importante fue sobre elípticas y fue quien dio la definición aritmética de límite junto a Cauchy. Muere en 1897.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 / |f(x) - L| < \varepsilon \text{ siempre que } |x - a| < \delta$$



Ejemplo 1: Probar que  $\lim_{x \rightarrow 2} (2x-1) = 3$

Debe probarse que dado un  $\mathcal{E} > 0$ ;  $\exists \delta > 0$  //  $|f(x) - L| < \mathcal{E}$  siempre que  $|x - a| < \delta$  Estableciendo una relación

$$|f(x) - L| < \mathcal{E} \quad \text{Siempre que} \quad |x - 2| < \delta(\mathcal{E}).$$

$$|2x - 1 - 3| = |2x - 4| = |(2)(x - 2)| = 2|x - 2|$$

$$\text{O sea que} \quad 2|x - 2| < \mathcal{E} \quad \text{Siempre que} \quad |x - 2| < \delta$$

$$|x - 2| < \frac{\mathcal{E}}{2} \quad \text{Siempre que} \quad |x - 2| < \delta$$

Por lo que puede tomarse un  $\delta = \frac{\mathcal{E}}{2}$ .

Ejemplo 2.  $\lim_{x \rightarrow 3} (2x-5) = 1$

$$\forall \mathcal{E} > 0; \exists \delta(\mathcal{E}) > 0 \text{ // } |f(x) - L| < \mathcal{E} \text{ Siempre que } |x - a| < \delta$$

Si  $\mathcal{E} = 0.01$  ¿cuánto es  $\delta$ ?  $\Rightarrow$

$$|(2x-5)-1| < 0.01 \text{ siempre que } |x-3| < \delta$$

Operando a la izquierda tenemos

$$|2x-5-1| \Rightarrow |2x-6| \Rightarrow 2|x-3| < 0.01$$

$$2|x-3| < 0.01 \text{ siempre que } |x-3| < \delta$$

$$|x-3| < \frac{0.01}{2} \dots\dots\dots |x-3| < \delta$$

Cuando $\mathcal{E} = 0.01$ ; $\delta = 0.005$
--

Por lo tanto como  $\delta = \frac{\mathcal{E}}{2} = \frac{0.01}{2} = 0.005 \Rightarrow$  que cuando  $\mathcal{E} = 0.01$ ,  $\delta = 0.005$

## Límites con valor absoluto:

El valor absoluto de un número real, es su valor numérico sin tener en cuenta su signo.

$$|a| = \begin{cases} a & ; \text{ si } a \geq 0 \\ -a & ; \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo:  $|19| = 19$   
 $|-19| = -(-19) = 19$

Siendo **x** una variable y **a** una constante, entonces se dice que;

$$|x - a| = \begin{cases} x - a & \text{ si } x \geq a \\ -(x - a) & \text{ si } x < a \end{cases}$$

**Ejemplo :** Resolver  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x - 3|}{x^2 - 9}$

Evaluando directamente  $\frac{|3 - 3|}{3^2 - 9} = \frac{0}{0}$

Aplicando la definición de valor absoluto

$$|a| = \begin{cases} a & ; \text{ si } a \geq 0 \\ -a & ; \text{ si } a < 0 \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

$$|x - 3| = \begin{cases} (x - 3) & \text{ si } x \geq 3 \\ -(x - 3) & \text{ si } x < 3 \end{cases}$$

Esto indica que para valores mayores que 3 la expresión se sustituye por (x-3) pero para valores menores se sustituye por -(x-3), por lo que se debe calcular límite cuando  $x \rightarrow 3^+$  y cuando  $x \rightarrow 3^-$ , esto indica límite lateral izquierda y derecha.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x - 3|}{x^2 - 9} \quad \text{Haciendo una evaluación por la izquierda y derecha}$$

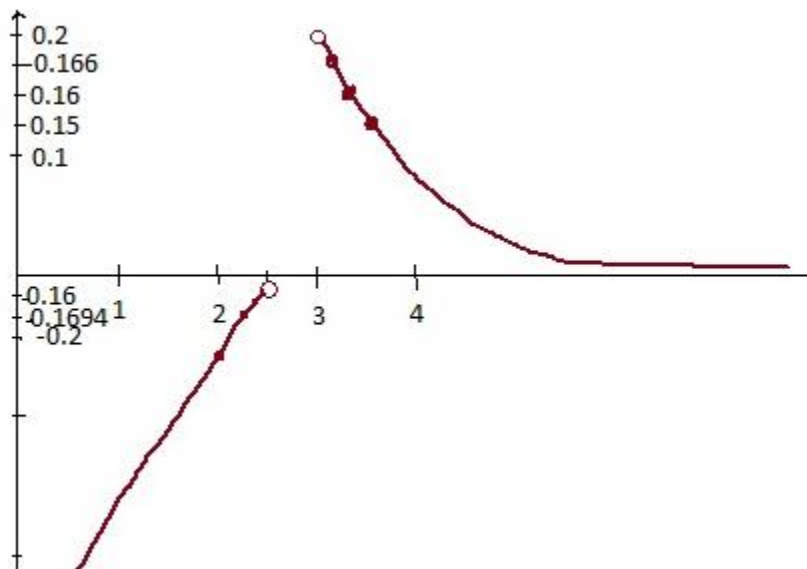
Evaluación por la izquierda

$x$	$y$
2.5	-0.2
2.9	-0.1694
2.99	-0.16694

Evaluación por la derecha

$x$	$y$
3.5	0.15
3.1	0.16393441
2.01	3.0401

Se nota que el imite por la izquierda es aproximadamente  $y = -1/6$  y por la derecha es  $y = 1/6$ . El límite no es único por lo tanto contradice al teorema de **unicidad de limite**, significa que no tiene.



Ejemplo 2:  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x-12}{2-|1-x|}$

Tomando en consideración el valor absoluto se tiene que;

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x & \text{si } 1-x \geq 0 \\ -(1-x) & \text{si } 1-x < 0 \end{cases}$$

$$|1-x| = \begin{cases} (1-x) & \text{si } x < 1 \\ -(1-x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x-12}{2-|1-x|}$$

$$|1-x| = \begin{cases} (1-x) & \text{si } x < 1 \\ -(1-x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Entonces se tiene que

$$\text{si } x \leq 1 \rightarrow f(x) = \frac{4x-12}{2-(1-x)}$$

$$\text{si } x > 1 \rightarrow f(x) = \frac{4x-12}{2-(-(1-x))}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} = \frac{4x-12}{2-(-(1-x))}$$

$$\frac{4(x-3)}{2+1-x}$$

Como  $x > 1$  se procede a operar  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4(x-3)}{3-x}$

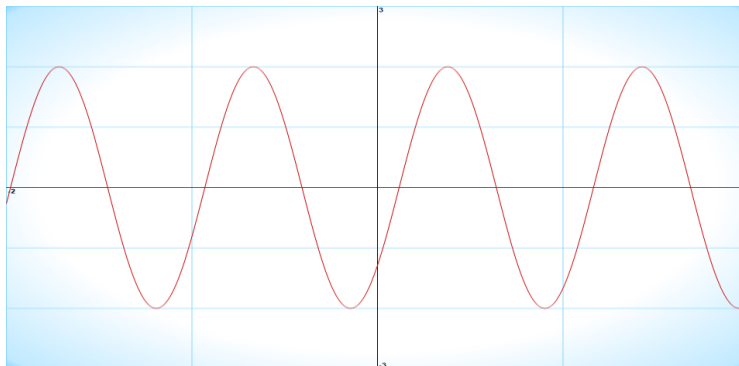
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4(x-3)}{-(x-3)}$$

Eliminando términos semejantes queda  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4}{-1} = -4$



## Continuidad

Un concepto de continuidad de una función dice que una función es continua siempre que se pueda hacer su grafica sin levantar la punta de un lápiz.



### Tipos de Continuidad

#### a) Continuidad en un punto:

Una función  $f$  se dice que es continua en un punto si se cumplen las siguientes condiciones.

- 1)  $f(c)$  está definida
- 2)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  ; exista
- 3)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

1) Por ejemplo  $f(x) = x^2 + 1$  es continua en 2, pues  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$  la condición implica que una función puede ser continua en los puntos de su dominio, por ejemplo la función  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$  no es continua para  $x=3$  porque  $f(3)$  no esta definida.

2)  $f(x) = \frac{1}{x-2}$  es discontinua en 2 porque  $f(2)$  no esta definida y también porque el  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  no existe.

**b)** Si una función  $f$  no es continua en un punto  $c$  entonces es **discontinua** en ese punto. Si al menos una de estas tres condiciones deja de cumplirse, se dice que  $f$  es discontinua (no continua) en  $x = c$ .

Esto puede producirse por varias causas dando así paso a distintos tipos de discontinuidades.

- a) **Discontinuidad Evitable o removable:** Esta nos permite redefinir la función a través de un artificio matemático para transformarla en otra donde haya límite

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}, \text{ si se observa esta función es discontinua cuando } x = -2 \text{ pero si se factoriza da un}$$

hooyo en ese número, por lo que se ha evitado esa discontinuidad.

- b) **Discontinuidad inevitable o no removable:** Es aquella que no hay forma de quitarla o

$$\text{transformarla. } f(x) = \frac{3}{x^2} \text{ presenta una discontinuidad inevitable en } x=0 \text{ ya que } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2} = \infty$$

y el infinito no es un número y no hay forma de transformar la función para evitar eso.

- b) *Continuidad de una función en un intervalo.*

Una función es continua en un intervalo  $I$ ,  $\Leftrightarrow$  es continua en todos los Puntos del intervalo, es decir;  $f$  es continua en  $I \Leftrightarrow \forall c \in I$  reescrita de otra manera via definición  $f$  es continua en  $[a, b]$  si  $f$  es continua en todos y cada uno de los puntos de un intervalo abierto  $(a, b)$ ;  $f$  es continua a la derecha en  $a$  y a la izquierda en  $b$ , pues una función continua en todo  $\mathbb{R}$  es continua en cualquier intervalo de éste.

*Ejercicios para el aula:* Determinar si son continuas las funciones siguientes en el Intervalo indicado, justifique su respuesta.

a)  $f(x) = \frac{1}{x}; (0, 1)$

b)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}; (0, 2)$

c)  $f(x) = \sin x; (0, 2\pi)$

### **Definición formal de Continuidad**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 / |f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ siempre que } |x - a| < \delta$$

## Asíntotas

Es una línea recta a la que se aproxima infinitamente una curva  $f(x)$  sin nunca tocarla. Hay tres tipos:

**1. Asíntotas Verticales:**  $\lim_{x \rightarrow a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$

Ejemplo 1: Buscar la asíntota vertical en  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 5}$

$x + 5 = 0$  por lo que en  $x = -5$  hay una A.V.

Ejemplo 2: Buscar la asíntota vertical en  $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x - 4}$ .

$$x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$$

**2. Asíntotas Horizontales:**  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = c$

Ejemplo 3:  $f(x) = \frac{24x^4 + 3x^3 - 2x + x}{3x^4 - 8x + 1}$  Buscar las A.H.

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{24x^4 + 3x^3 - 2x + x}{3x^4 - 8x + 1} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{24x^4 + 3x^3 - 2x + x}{3x^4 - 8x + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\text{por lo que } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{24x^4 + 3x^3 - 2x + x}{3x^4 - 8x + 1} = \frac{\frac{24x^4}{x^4} + \frac{3x^3}{x^4} - \frac{2x}{x^4} + \frac{x}{x^4}}{\frac{3x^4}{x^4} - \frac{8x}{x^4} + \frac{1}{x^4}} = \frac{24 + 0 - 0 + 0}{3 - 0 + 0} = \frac{24}{3}$$

$\rightarrow y = 8$  es una A.H.

Ejemplo 4:  $f(x) = \frac{2x^2 - x^3 + 3}{x^3 + x^2}$  Buscar las A.H

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x^3 + 3}{x^3 + x^2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x^3 + 3}{x^3 + x^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\text{por lo que } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x^3 + 3}{x^3 + x^2} = \frac{\frac{2x^2}{x^3} - \frac{x^3}{x^3} + \frac{3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{x^2}{x^3}} = \frac{0 - 1 + 0}{1 + 0} = -\frac{1}{1}$$

$\rightarrow y = -1$  es una A.H.

### 3. Asíntotas Oblicuas:

Es la recta de la forma  $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad y \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] \quad \text{siempre y cuando estos límites existan.}$$

Ejemplo 5: Buscar la asíntota oblicua en  $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$

Aplicando la definición hay que empezar buscando los parámetros de m y n.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x+2}}{x} = \frac{x^2}{x^2 + 2x} = \frac{\infty}{\infty}, \text{ resolviendo se tiene que } m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2 + \frac{2}{x^2}}}{\frac{x}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2 + 2x} = 1$$

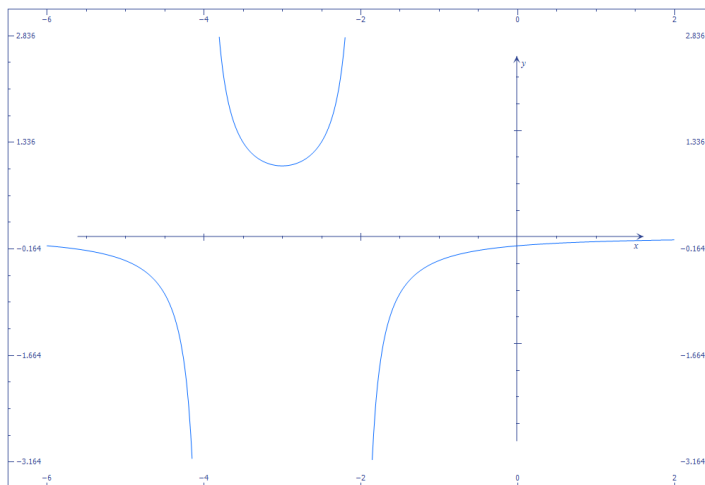
$$\text{Ahora se busca a } n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2}{x+2} - x \right] = \frac{x^2 - (x^2 - 2x)}{x+2} = \frac{x^2 - x^2 + 2x}{x+2} = \frac{2x}{x+2}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+2} = \frac{\infty}{\infty}, \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+2} = \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{2}{x}} = \frac{2}{1+0} = 2 \rightarrow m = 1 \wedge n = 2 \text{ por lo que se tiene}$$

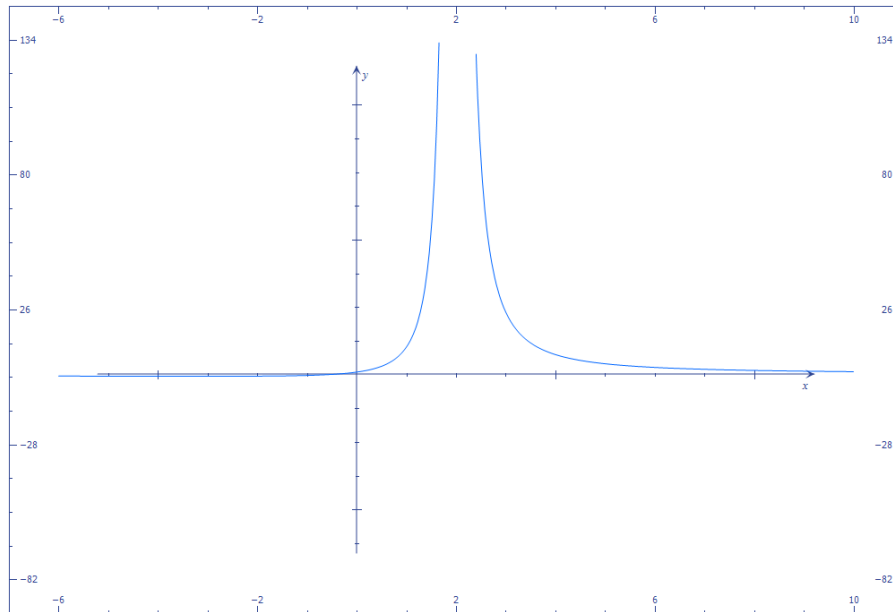
que  $y = x + 2$  es una A.O.

Ejemplos: Busque las asíntotas de las siguientes funciones y realiza la gráfica.

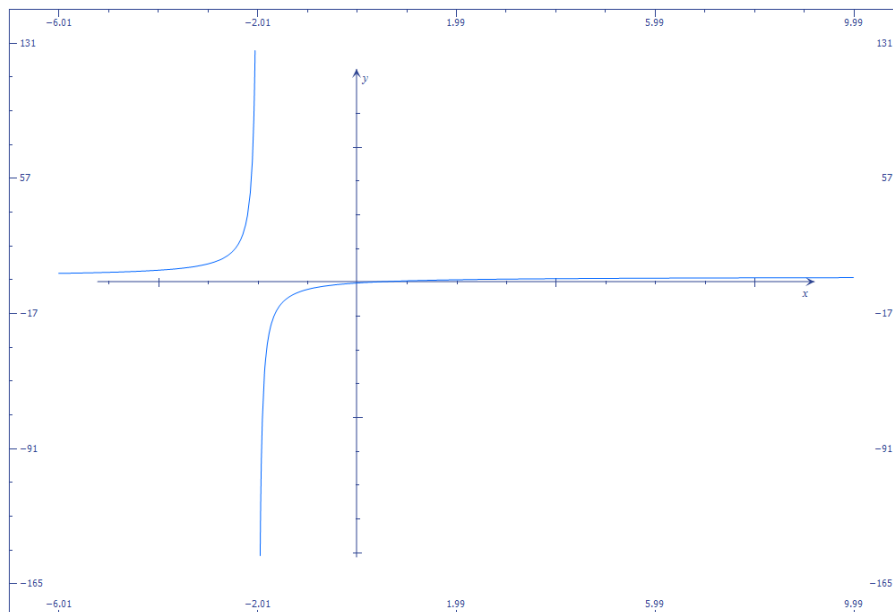
1)  $f(x) = \frac{-1}{x^2 + 6x + 8} \rightarrow x = -2 \wedge x = -4$  A.V, pero no hay A.H.



2)  $f(x) = \frac{7x+4}{x^2-4x+4} \rightarrow x = 2A.V$  pero no hay A.H.



3)  $f(x) = \frac{3x-1}{x+2} \rightarrow x = -2A.V, y = 3A.H.$



# Cálculo Diferencial

Apellidos:..... Matriculas:.....

Grupo: .....Fecha: .....Profesor(a): .....Práctica:.....

## I. Encuentre los límites de las siguientes funciones.

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 4)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -2} (x + 1)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 4} 8$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 2)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + 4}{x - 3x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 6} 4x - 8$$

$$7) \lim_{x \rightarrow a} \frac{(ax - a^2)}{x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x^2 + 9}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x^2}{x^3 + 4x^2}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 - 6x}{4x^3 - 2x + 6x}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{x^2}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 - bx}{x^2 + dx}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^3 + 2b^2}{bx^3 - 2x}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2} - 2x + 7$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 4}$$

$$21) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x - 5}$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8}$$

$$24) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 6}$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x)^2 (x - 5)}{(x - 4)(x + 4)^2}$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 3)(x - 3)(x + 4)}{(x + 8)(x - 3)(x + 4)}$$

$$27) \lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{x^2 - 4}$$

$$28) \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 - 5}$$

$$29) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-6}{(x - 4)^2}$$

$$30) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x}{(x + 2)^3}$$

$$31) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((x + 3) - \frac{1}{3})}{x}$$

$$32) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-1)(x + 2) + 2}{x}$$

$$33) \lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x} - 5}{x - 25}$$

$$34) \lim_{x \rightarrow 36} \frac{\sqrt{x} - 6}{x - 36}$$

$$35) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5}$$

$$36) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{8}}{x - 8}$$

$$37) \lim_{x \rightarrow 2} x + 1$$

$$38) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 2x - 4}{3x^2 - 12x + 9}$$

$$39) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$$

$$40) \lim_{x \rightarrow 2} x^3 - 2x + 6$$

$$41) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2-x)^2 - 4}{x}$$

$$42) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{2 - \sqrt{x^2 - 5}}$$

$$43) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 12x - 4}{3x^2 - 12x + 9}$$

$$44) \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1) \left( \sqrt{\frac{1}{x^2 + 3}} \right)$$

$$45) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x+4} - 2}$$

$$46) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 8}{x^3 - 4}$$

$$47) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$$

$$48) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 7}{3x^4 + 4}$$

$$49) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{3x-2}}{x-1}$$

$$50) \lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{x^2 - x}$$

$$51) \lim_{x \rightarrow -4} x^3 - x^2 - 6$$

$$52) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{x^3} + 3x}{\sqrt{2x^3}}$$

$$53) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1+8x^2}{x^2+4}}$$

$$54) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{\pi x^3 + 3x}{\sqrt{2x^3} + 7x}}$$

$$55) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2 + x + 3}{(x-1)(x+1)}}$$

$$56) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{2x^2 + 3} - \sqrt{2x^2 - 5} \right)$$

$$57) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 + 2x} - x \right)$$

$$58) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - 2x^2}{3x + 5x^2}$$

$$59) \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{3h + 2xh^2 + x^2h^3}{4 - 3xh - 2x^3h^3}$$

III. Compruebe por la definición:

$$60) \lim_{x \rightarrow 1} (5x - 3) = 2$$

$$61) \lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 - 7 = 9$$

$$62) \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1} = 2$$

IV. Busca las asíntotas de las siguientes funciones y haga la gráfica de cinco de ellas:

$$63) f(x) = \frac{3}{x+1}$$

$$64) f(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$$

$$65) f(x) = \frac{3}{9-x^2}$$

$$66) g(x) = \frac{14}{2x^2+7}$$

$$67) g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}$$

$$68) g(x) = \frac{x^2+2}{x-2}$$

$$69) f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

$$70) f(x) = \frac{x^2+x+6}{x^2}$$

$$71) k(x) = \frac{2+x}{x^2}$$

$$72) f(x) = \frac{x^4+1}{x^2+1}$$

$$73) f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$74) f(x) = e^{1/x}$$

$$75) g(x) = (x-1)e^{-x}$$

$$76) z(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}x}$$

$$77) y = \frac{4x^3+2x^2+x-6}{x^3+1}$$

$$78) y = \frac{3x^2}{25-x^2}$$

VI. Encuentra los valores de x (si existe algunos) en los que f no es continua.

si es descontinua diga si es evitables o removibles.

$$83) f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$90) f(x) = \frac{|x+2|}{x+2}$$

$$84) f(x) = x^2-2x+1$$

$$91) f(x) = \frac{x+2}{x^2-3x-10}$$

$$85) f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$92) f(x) = 3x - \cos x$$

$$86) f(x) = \frac{x}{x^2-x}$$

$$93) f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$$

$$87) f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$$

$$94) f(u) = \frac{2u+7}{\sqrt{u+5}}$$

$$88) g(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$95) f(x) = \frac{x^2-49}{x-7}$$

$$89) f(x) = \frac{2x^2-18}{3-x}$$

*Son nuestras escogencias y no la suerte la que determinan nuestro destino.*

*Jean Nidetch*



# Módulo 4: Derivadas

# Derivada

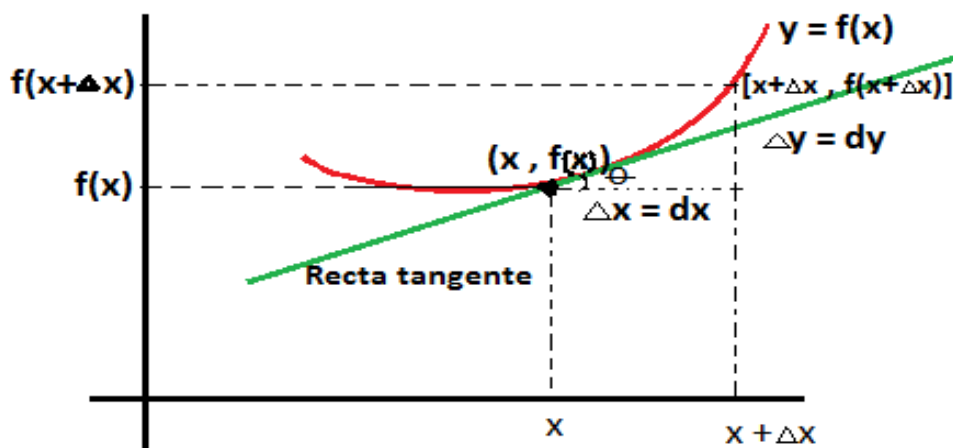
## Definición:

La derivada de una función se conceptúa desde diferentes puntos de vista.

1.- **Concepto geométrico:** Es la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto cualquiera de ella.

2.- **Concepto físico:** Es la velocidad instantánea del movimiento uniformemente acelerado en un punto único del trayecto.

3. - La **derivada** de una función es una medida de la rapidez con la que cambia el valor de dicha función según cambie el valor de su variable independiente.



$$m = \tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Esta es la definición de derivada siempre y cuando el límite exista.

### *Connotación de derivadas*

Hay varias formas de representar una derivada, todo depende de la connotación dada por el matemático que trabajó sobre el tema. Es el caso de:

- a)  $f'(x)$  notación del matemático Lagrange
- b)  $D_x$  Notaciones de Cauchy y Jacobi
- c)  $\dot{x}$  notación de Newton
- d)  $\frac{dy}{dx}$  Notación de Leibniz

### *Connotación de derivadas n-esima.*

$f'(x)$  Para la primera derivada,  $f''(x)$  para la segunda derivada,  $f'''(x)$  para la tercera derivada, y  $f^n(x)$  para las derivadas con  $(n > 3)$ .

### *Resolución de derivadas por el método de los incrementos*

Ya se sabe que la derivada de una función  $f(x)$  se define como:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Esta se puede verificar usando el método de los incrementos la cual se empieza tomando la función dada como posición inicial de la función  $y = f(x)$

1. Se reescribe la función  $y = f(x)$
2. Se Incrementa la función y la variable independiente, siendo esta la posición final  $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$
3. Se Resta la posición inicial de la función de la posición final, simplificamos y así obtenemos el incremento de la función  $(\Delta y)$
4. Se Dividen los 2 miembros del incremento de la función por el incremento de la variable independiente  $(\Delta x)$
5. Se le Aplica límites en ambos miembros del incremento cuando  $\Delta x \rightarrow 0$

Es decir que,

- 1)  $y = f(x)$  (Se reescribe la función)
- 2)  $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$  (Se incrementa 1)
- 3)  $y + \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  (Restar el estado 1 a 2)
- 4)  $\Delta y = f(x + \Delta x) - (f(x))$  (Incremento de la función)
- 5)  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - (f(x))}{\Delta x}$  (Dividir ambos miembros por  $\Delta x$ )
- 6)  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - (f(x))}{\Delta x}$
- 7)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - (f(x))}{\Delta x}$  (Se aplica limite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ )
- 8) Por definición  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ejemplo 1: hallar la derivada de  $y = x^2$  por el método de los incrementos.

1.  $y = x^2$
2.  $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x.\Delta x + \Delta x^2$
3.  $y + \Delta y - y = x^2 + 2x.\Delta x + \Delta x^2 - x^2$   
 $\Delta y = 2x.\Delta x + \Delta x^2$
4.  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x.\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{2x.\Delta x}{\Delta x} + \frac{\Delta x^2}{\Delta x}$
5. Se Aplica límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x) = 2x$$

**Ejemplo 2: hallar la derivada de  $y = 4x^2 + 2x - 3$**

1.  $y + \Delta y = 4(x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) - 3 = 4(x^2 + 2x.\Delta x + \Delta x^2) + 2x + 2\Delta x - 3$
2.  $y + \Delta y - y = 4x^2 + 8x\Delta x + 4\Delta x^2 + 2x + 2\Delta x - 3 - 4x^2 - 2x + 3$
3.  $\Delta y = 8x\Delta x + 4\Delta x^2 + 2\Delta x$

$$4. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8x.\Delta x}{\Delta x} + \frac{4\Delta x^2}{\Delta x} + \frac{2\Delta x}{\Delta x}$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (8x + 4\Delta x + 2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 8x + 2$$

***Resolución de derivadas por la definición***

Ejemplos: Derivar las siguientes funciones

1)  $f(x) = 16x$

Solución:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{16(x + \Delta x) - 16x}{\Delta x} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{16x + 16\Delta x - 16x}{\Delta x} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{16\Delta x}{\Delta x} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 16$$

$$\rightarrow f'(x) = 16$$

2)  $f(x) = \frac{5x + 2}{2x - 5}$

Solución:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \\
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{5(x + \Delta x) + 2}{2(x + \Delta x) - 5} - \frac{5x + 2}{2x - 5}}{\Delta x} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{5x + 5\Delta x + 2}{2x + 2\Delta x - 5} - \frac{5x + 2}{2x - 5}}{\Delta x} \\
 &= f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2x - 5)(5x + 5\Delta x + 2) - (5x + 2)(2x + 2\Delta x - 5)}{\Delta x(2x - 5)(2x + 2\Delta x - 5)} \\
 &= f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{10x^2 + 10x(\Delta x) + 4x - 25x - 25\Delta x - 10 - 10x^2 - 10x(\Delta x) + 25x - 4x - 4\Delta x + 10}{\Delta x(2x - 5)(2x + 2\Delta x - 5)} \\
 &= f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-29\Delta x}{\Delta x(2x - 5)(2x + 2\Delta x - 5)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-29}{(2x - 5)(2x + 2\Delta x - 5)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-29}{(2x - 5)(2x + 2(0) - 5)} \\
 &= f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-29}{(2x - 5)(2x - 5)} \rightarrow f'(x) = \frac{-29}{(2x - 5)^2}
 \end{aligned}$$

## Resolución de derivadas por fórmulas.

### Teorema 1: Derivada de una función en un punto

La derivada de la función  $f(x)$  en el punto  $x = c$  es el valor del límite, si existe, de un cociente incremental cuando el incremento de la variable tiende a cero. Se define como

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

ó

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

*Ejemplo 1: Hallar la derivada de la función  $f(x) = 4x^3$  en el punto  $x = 3$ .*

$$\begin{aligned}
 f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(3 + h)^3 - 4(3)^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(27 + 27h + 9h^2 + h^3) - 108}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h^3 + 36h^2 + 108h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (4h^2 + 36h + 108) = 108
 \end{aligned}$$

*Ejemplo 2: Calcular la derivada de la función  $f(x) = x^2 + 10x - 25$  en  $x = 1$ .*

Solución:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 + 10(1+h) - 25 - (1^2 + 10(1) - 25)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 + 10 + 10h - 25 - 1 - 10 + 25}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 12h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h + 12) = 12 \end{aligned}$$

### **Derivadas de funciones algebraicas.**

#### *Teorema 2. La regla de la constante*

La derivada de una función constante es cero, es decir,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(c)}{dx} = 0$$

#### *Demostración:*

Si se aplica la derivada a  $f(x) = c$ , entonces se tiene que :

- a) La función tiene la forma

$$f(x) = cx^0$$

- b) Incrementando

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{c(x + \Delta x)^0 - c(x)^0}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{c(1) - c(1)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

Q.E.D

Ejemplo: Si  $f(x) = 4 \rightarrow f'(x) = 0$

***Teorema 3. Regla de una variable respecto a ella misma.***

La derivada de una variable respecto a ella misma es igual a la unidad.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x)}{dx} = 1$$

Ejemplo: Derivar  $f(x) = x$ ,  $\frac{d(x)}{dx} = 1$

***Teorema 4. Regla del múltiplo constante.***

Si  $u$  es una función diferenciable de  $x$ , y  $c$  es una constante, entonces su derivada será igual a la constante por la derivada de la variable, es decir, será igual a la constante

$$\frac{d(cx)}{dx} = c \left( \frac{dx}{dx} \right)$$

Ejemplo: Derivar  $f(x) = 5x \rightarrow f'(x) = 5$



### **Teorema 5. Regla de las potencias.**

Si  $n$  es un número racional, entonces  $f(x) = x^n$  es igual al exponente por la base elevada al exponente disminuido en 1, es decir;  $\frac{d}{dx} [x^n] = nx^{n-1}$

#### **Demostración:**

Si  $n$  es un entero positivo mayor que 1, entonces el desarrollo del binomio resulta

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [x^n] &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}\end{aligned}$$

Si se elimina el denominador y se sustituye  $\Delta x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x) + \dots + (\Delta x)^{n-1}; \\ &= nx^{n-1} + 0 + \dots + 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx} [x^n] = nx^{n-1} \quad \text{Q.E.D.}\end{aligned}$$

#### **Ejemplo: Derivar**

1.  $f(x) = x^5$  eso implica  $f'(x) = 5x^4$
2.  $f(x) = 3x^5$  eso implica  $f'(x) = 3(5x^4) = 15x^4$

### **Teorema 6: Regla de cadena**

Conceptualmente se utiliza para la composición de funciones a veces para poder llegar a la variable de interés.

#### **Definición:**

Si  $y = f(u)$  es una función derivable de  $u$ , y  $u = g(x)$  es una función derivable de  $x$ , entonces  $y =$

$f(g(x))$  es una función derivable de  $x$ , es decir,  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

**Ejemplo 1: Derivar**  $y = (x^2 + 1)^3$

Solución:  $u = x^2 + 1$  por lo tanto la función ahora es  $y = u^3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (3u^2)(2x) = 6x(x^2 + 1)^2$$

### Teorema 7. Regla de la suma

La derivada de la suma o resta de dos funciones es igual a la suma o resta de las derivadas de ambas funciones, es decir,

1. Regla de la suma  $\frac{d}{dx}[u(x) + v(x)] = u'(x) + v'(x)$

2. Regla de la diferencia  $\frac{d}{dx}[u(x) - v(x)] = u'(x) - v'(x)$

### Demostración:

Asumiendo que  $y = f(x) + g(x) \Rightarrow y' = f'(x) + g'(x)$

$$f(x) + g(x) = (f + g)x$$

Aplicando la definición de derivada

$$* \quad y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{ó} \quad y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$y \quad y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{(f + g)(x + \Delta x) - (f + g)(x)}{\Delta x} \right]$$

Aplicando propiedad distributiva y restando la respectiva función

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f)(x + \Delta x) + (g)(x + \Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x}$$

Ordenar los términos de acuerdo a la definición

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{(g)(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \frac{(f)(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

Aplicando la propiedad de límite de una suma

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(g)(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f)(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Sustituyendo según asterisco

$$y' = g'(x) + f'(x); \text{ es decir que } \frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

### Ejemplos: Derivar

1.  $f(x) = 2x^3 + x$  eso implica que  $f'(x) = 6x^2 + 1$
2.  $f(x) = 5x^6 - 3x^3 - 8$  eso implica que  $f'(x) = 30x^5 - 9x^2$

### Teorema 8. Demostración de la regla de la derivada de un producto.

La derivada del producto de dos funciones derivable  $f$  y  $g$  es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la derivada de la primera por la segunda, es decir:

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$$

### Demostración

- 1) Como  $\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$  se incrementa el miembro izquierdo y se agrega la parte sin incrementar

$$f(x + \Delta x) - g(x + \Delta x) \text{ y } f(x) - g(x)$$

Se aplica la definición partiendo del paso anterior.

$$\frac{dy}{dx}[f(x)g(x)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \right]$$

- 2) Estratégicamente se suma y se resta  $f(x + \Delta x)g(x)$ .

$$\frac{dy}{dx}[f(x)g(x)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x)g(x) + f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \right]$$

3) Se saca el factor común con respecto a  $g(x)$  y  $f(x)$  tratando así de escribir la definición.

$$\frac{dy}{dx}[f(x)g(x)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

4) Ahora se aplica el límite de una suma cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ .

$$\frac{dy}{dx}[f(x)g(x)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x + \Delta x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}] + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [\frac{g(x)(f(x + \Delta x) - f(x))}{\Delta x}]$$

5) Luego se aplica límite de un producto  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ .

$$\frac{dy}{dx}[f(x)g(x)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x + \Delta x)] \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [g(x)] \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Por lo que:

$$\frac{d}{dx} [f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

*Ejemplo: Resolver las siguientes derivadas Sea  $f(x) = 8x$  y  $g(x) = 4x + 5$*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [f(x)g(x)] &= (8x)(4) + (8)(4x + 5) = 32x + 32x + 40 \\ &\rightarrow f'(x) = 67x + 40 \end{aligned}$$

*Ejemplo:  $f(x) = (4x + 1)(10x^2 - 5)$*

$$f'(x) = 20x(4x + 1) + 4(10x^2 - 5)$$

$$= 80x^2 + 20x + 40x^2 - 20 = 120x^2 + 20x - 20$$

**Teorema 9. Derivada del cociente.**

La **derivada del cociente** de dos funciones: Es igual a la derivada del numerador por el denominador menos la derivada del denominador por el numerador, divididas por el cuadrado del denominador.

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{u(x)}{v(x)} \right] = \frac{v(x) u'(x) - u(x) v'(x)}{(v(x))^2}$$

## Demostración

a) Partiendo del cociente de dos funciones:

$$y' = \frac{u(x)}{v(x)} = \left( \frac{u}{v} \right) (x)$$

b) Aplicando la definición de derivada en el paso anterior

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}$$

Operando

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x) \cdot \Delta x} - \frac{u(x)}{v(x) \cdot \Delta x}}{1}$$

c) Se escoge  $u(x + \Delta x)$  y se le resta  $u(x)$ . para que la operación no se altere se suma también la misma expresión.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x + \Delta x) - u(x) + u(x)}{v(x + \Delta x) \cdot \Delta x} - \frac{u(x)}{v(x) \cdot \Delta x}}{1}$$

d) Se separan a conveniencia los términos convenientemente, sin modificar la expresión y en busca de la formación de la definición de derivada.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{v(x + \Delta x) \cdot \Delta x} + \frac{u(x)}{v(x + \Delta x) \cdot \Delta x} - \frac{u(x)}{v(x) \cdot \Delta x}$$

e) Se hacen los arreglos adecuados en la operación anterior, operando la primera parte en si misma y la segunda y la tercera juntos.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}}{v(x + \Delta x)} + \frac{u(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)}{v(x) \cdot v(x + \Delta x) \cdot \Delta x} \right]$$

f) Sacar el factor común  $u(x)$ :

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}}{v(x + \Delta x)} + \frac{u(x) [v(x) - v(x + \Delta x)]}{v(x) \cdot v(x + \Delta x) \cdot \Delta x} \right]$$

- g) Como el objetivo es si formando la definición de derivada y en la segunda parte hay una inversión en los signos, pues se invierte el proceso multiplicando y dividiendo por  $(-1)$ .

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\left[ \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \right]}{v(x + \Delta x)} + \frac{-u(x)[v(x) - v(x + \Delta x)]}{-v(x) \cdot v(x + \Delta x) \cdot \Delta x} \right]$$

- h) Reinscribiendo:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\left[ \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \right]}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)]}{v(x) \cdot v(x + \Delta x) \cdot \Delta x} \right]$$

- i) Se separan los términos de forma tal que quede la demostración de derivada

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\left[ \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \right]}{v(x + \Delta x)} - \left[ \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right] \cdot \frac{u(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} \right]$$

- j) Se aplica límite y se hace desarrollo de sus términos

$$y' = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \right]}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x)} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right] \cdot \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x)}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x)}$$

- k) Como  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \right] = u'(x)$  y  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right] = v'(x)$

entonces se tiene las siguientes aplicaciones de límites.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [v(x + \Delta x)] &= v(x) & \bullet \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [u(x + \Delta x)] &= u(x) \\ \bullet \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [v(x)] &= v(x) & \bullet \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [u(x)] &= u(x) \end{aligned}$$

1) Haciendo la sustitución correcta  $y' = \frac{u'(x)}{v(x)} - v'(x) \cdot \frac{u(x)}{v(x) \cdot v(x)}$

$$y' = \frac{u'(x)}{v(x)} - \frac{u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$$y' = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

**Q.E.D**

*Ejemplos: Buscar la derivada de las siguientes funciones.*

Ejemplo:  $f(x) = \frac{3x^2 + 4}{5x + 2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{6x(5x + 2) - 5(3x^2 + 4)}{(5x + 2)^2} \\ &= \frac{30x^2 + 12 - 15x^2 - 20}{(5x + 2)^2} \\ &= \frac{15x^2 - 8}{(5x + 2)^2} \end{aligned}$$

***Teorema 10: Diferenciabilidad implica continuidad.***

Si una función  $f(x)$  es derivable en un punto  $c$  entonces es continua en  $x=c$ .

**Hipótesis:**  $f'(x)$  existe.

**Tesis:** Demostrar que  $f(x)$  es continua en  $x=c$

**Demostración:**

Asumiendo que  $f(x) - f(a) = f'(x)(x-a)$  se divide ambos miembros por  $(x-a)$

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)} = \frac{f'(x)(x-a)}{(x-a)}$$

Luego se transpone término y se aplica límite.

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} (x-a)$$

Aplicando propiedades de límites:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \lim_{x \rightarrow a} (x-a)$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a)'$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = f'(a)(\lim_{x \rightarrow a} (x-a))$$

Luego operamos la otra parte del producto:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = f'(a)(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

L.Q.Q.D.



### Límites trigonométrico especiales

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} x}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

### Derivadas de funciones trigonométricas

#### Teorema 11: Derivada de la función Seno

La derivada del seno es el coseno, es decir,  $\frac{d}{dx} \text{sen} x = \cos x$

#### Demostración:

A partir de la definición de derivada de una función  $f(x)$ :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Como  $f(x) = \text{sen} x$  entonces

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h}$$

A partir de la identidad trigonométrica  $\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$ , entonces tenemos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)\cos(h) + \cos(x)\text{sen}(h) - \text{sen}(x)}{h}$$

Factorizando y ordenando los términos obtenemos lo siguiente

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)(\cos(h) - 1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\text{sen}(h)}{h}$$

Como el  $\text{sen}(x)$  y el  $\cos(x)$  no se afectan por el límite tenemos lo siguiente

$$f'(x) = \text{sen}(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos(h) - 1)}{h} + \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h}$$

El valor de los límites son 0 y 1 respectivamente según el teorema del sándwich

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos(h) - 1)}{h} \quad \& \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h}$$

Por tanto tenemos que

$$f'(x) = \text{sen}(x)(0) + \cos(x)(1)$$

$$f'(x) = \cos(x) \cdot \frac{d}{dx}(x)$$

### Teorema 12: Derivada de la función coseno.

La derivada del coseno es el seno  $\frac{d}{dx} \cos x = -\text{sen} x$

### Demostración:

A partir de la definición de derivada de una función  $f(x)$ :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \text{ Como } f(x) = \cos(x) \text{ entonces}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$$

A partir de la identidad trigonométrica  $\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \text{sen}(A)\text{sen}(B)$ , entonces tenemos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \text{sen}(x)\text{sen}(h) - \cos(x)}{h}$$

Factorizando y ordenando los términos obtenemos lo siguiente

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)(\cos(h)-1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)\text{sen}(h)}{h}$$

Como el  $\cos(x)$  y el  $\text{sen}(x)$  no se afectan por el límite tenemos lo siguiente

$$f'(x) = \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos(h)-1)}{h} - \text{sen}(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h}$$

El valor de los límites son 0 y 1 respectivamente según el teorema del sándwich

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos(h)-1)}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h}$$

Por tanto se tiene que:

$$f'(x) = \cos(x)(0) - \text{sen}(x)(1) = -\text{sen}(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\cos 3x^4 + x) = -(12x + 1) \sin 3x^4 + x$$

### Teorema 13: Demostrando de la derivada de la Tangente

Por regla sabemos que:  $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

Aplicando identidades trigonométricas en la tangente se tiene  $\tan x = \frac{\text{sen} x}{\cos x}$

Por lo que  $\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen} x}{\cos x}\right) = \sec^2 x$

Aplicamos la regla del Teorema del Cociente  $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Se sustituye  $\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\text{sen} x) - (\text{sen} x) \frac{d}{dx}(\cos x)}{(\cos x)^2}$

Aplicando derivadas individuales a)  $\frac{d}{dx}(\text{sen} x) = \cos x$     b)  $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\text{sen} x$

Sustituyendo las derivadas anteriores en la expresión general de la derivada:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{(\cos x)(\cos x) - (\text{sen} x)(-\text{sen} x)}{(\cos x)^2} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{(\cos^2 x) - (-\text{sen}^2 x)}{(\cos x)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{(\cos^2 x) + (\text{sen}^2 x)}{(\cos x)^2}$$

Aplicamos la identidad trigonométrica  $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Aplicamos otra identidad trigonométrica

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right) = \left( \frac{1}{\cos x} \right)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx} (\tan x) = \sec^2 x \quad \text{Q.E.D.}$$

#### **Teorema 14: Derivada de la función cotangente**

Por regla sabemos que:  $\frac{d}{dx} (\cot x) = -\operatorname{csc}^2 x$

Igualemos la  $\cot x$  a su equivalente:  $\rightarrow \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

Demostraremos que la  $\rightarrow \frac{d}{dx} \left( \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right) = -\operatorname{csc}^2 x$

Aplicamos la regla del Teorema del Cociente  $\rightarrow \frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

$$\text{Sustituimos } \rightarrow \frac{d}{dx} \left( \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right) = \frac{\operatorname{sen} x \frac{d}{dx} (\cos x) - (\cos x) \frac{d}{dx} (\operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x)^2}$$

Aplicamos derivadas individuales: a)  $\frac{d}{dx} (\cos x) = -\operatorname{sen} x$  ; b)  $\frac{d}{dx} (\operatorname{sen} x) = \cos x$

Sustituimos las derivadas anteriores a la expresión general de la derivada:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right) &= \frac{(\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x) - (\cos x)(\cos x)}{(\operatorname{sen} x)^2} \\ \rightarrow \frac{d}{dx} \left( \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right) &= \frac{(-\operatorname{sen}^2 x) - (\cos^2 x)}{(\operatorname{sen} x)^2} = \frac{-1(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}{(\operatorname{sen} x)^2} \end{aligned}$$

Aplicamos la identidad trigonométrica de  $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right) = -\frac{(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}{(\operatorname{sen} x)^2} = -\frac{1}{(\operatorname{sen} x)^2} \quad \text{Aplicamos otra identidad trigonométrica}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) = -\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)^2 = -\operatorname{csc}^2 x \rightarrow \frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{csc}^2 x$$

Q.E.D.

### *Tabla de derivadas de funciones trigonométricas generales*

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen}(u)] = \cos(u) (u')$$

$$\frac{d}{dx}[\cot(u)] = -\operatorname{csc}^2(u) (u')$$

$$\frac{d}{dx}[\cos(u)] = -\operatorname{sen}(u) (u')$$

$$\frac{d}{dx}[\sec(u)] = \sec(u) \tan(u) (u')$$

$$\frac{d}{dx}[\tan(u)] = \sec^2(u) (u')$$

$$\frac{d}{dx}[\csc(u)] = -\csc(u) \cot(u) (u')$$

### *Ejemplos de derivadas trigonométricas*

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(20x) \\ \text{a) } f'(x) &= -20\operatorname{sen}(20x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan(9x^4) \\ \text{b) } f'(x) &= 36x^3 \sec^2(9x^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sec(7x^3) \\ \text{c) } f'(x) &= 21x^2 \sec(7x^3) \tan(7x^3) \end{aligned}$$

## Derivadas de funciones potenciales

*Teorema 15: Derivada de una función elevada a cualquier exponente.*

$$y = u^n \rightarrow y' = nu^{n-1} (u')$$

Ejemplo:  $y = (3x^4 - 1)^3 \rightarrow y' = 3(3x^4 - 1)^2 (12x^3)$

*Teorema 16: Derivadas funciones potenciales inversas.*

$$y = \frac{1}{u^n} \rightarrow y' = -\frac{n(u')}{u^{n+1}}$$

Ejemplo:  $y = \frac{1}{(3x^4 - 1)^3} \rightarrow y' = -\frac{36x^3}{(3x^4 - 1)^4}$

*Teorema 17: Derivadas para cualquier raíz (n-esima)*

$$y = \sqrt[n]{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

Ejemplos:  $y = \sqrt[3]{2x^4} \rightarrow y' = \frac{8x^3}{3\sqrt[3]{(2x^4)^2}}$

*Teorema 18: Derivadas con valores absolutos.*

Si  $u$  es una función derivable de  $x$  tal que  $u \neq 0$ , entonces

$$\frac{d}{dx} \ln|u| = \frac{u'}{u}$$

**Demostración:**

Si  $u > 0$ , entonces  $|u| = u$ , y el resultado se obtiene aplicando el teorema 3. Si  $u < 0$ , entonces  $|u| = -u$ , y se tiene

$$\frac{d}{dx} \ln|u| = \frac{d}{dx} \ln(-u) = \frac{-u'}{-u} = \frac{u'}{u} \quad \text{Q.E.D}$$

Ejemplo: Hallar la derivada de

$$y = \ln \left| \frac{\cos x}{\cos x - 1} \right|$$

Aplicando propiedades logarítmicas:

$$y = \ln \left| \frac{\cos x}{\cos x - 1} \right| = \ln |\cos x| - \ln |\cos x - 1|$$

Según el teorema 4, tomamos  $u = \cos x$  y  $z = \cos x - 1$  y escribimos:

$y = \ln u - \ln z$ , derivando la nueva expresión:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u'}{u} - \frac{z'}{z}, \text{ entonces}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x - 1}$$

Simplificando se tiene :

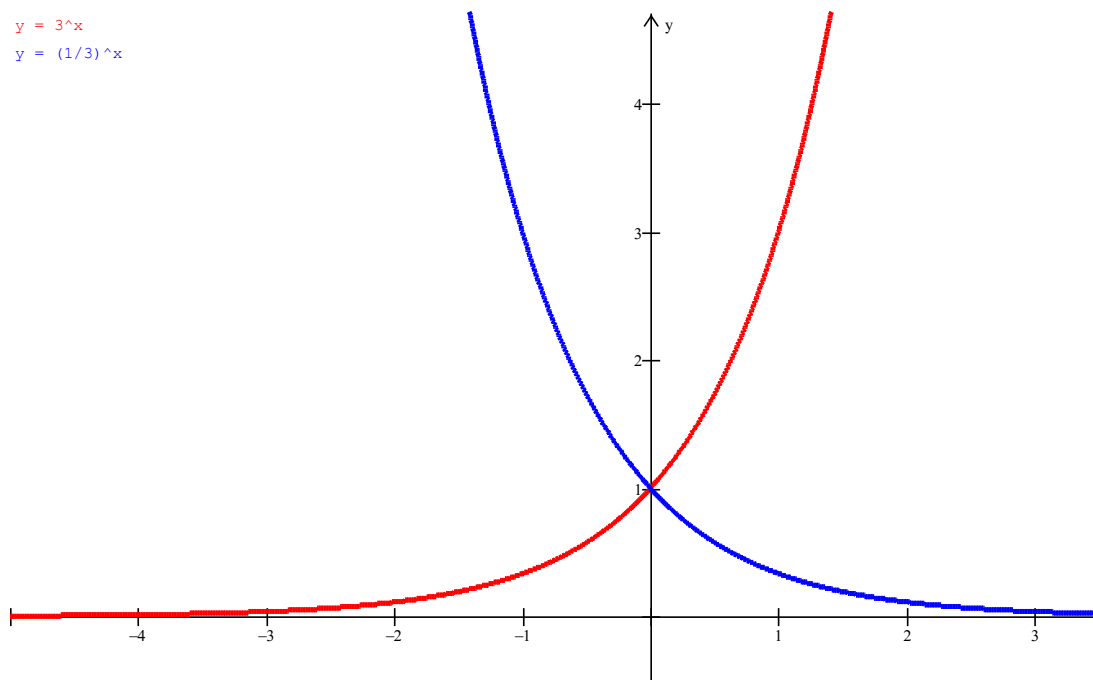
$$\frac{dy}{dx} = -\tan x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x - 1}$$

### Teorema 19: funciones exponenciales

Es aquella que se define como  $f(x) = a^x$ , donde  $a > 0$  y  $a \neq 1$ .

#### Propiedades:

- a) Su dominio es  $\forall x \in \mathbb{R}$  y Rango  $y > 0$ .
- b) Su grafica es creciente  $\forall b > 1$  y decreciente para  $0 < b < 1$ .
- c) La grafica toca al punto  $(0,1)$ .



#### *Derivada de la función exponencial en base a.*

La derivada de una función exponencial es igual a dicha función por el logaritmo natural de la base por la derivada del exponente de la función. Para el caso en el que el exponente sea  $x$ , como la derivada de  $x$  es 1, al multiplicarlo por este, el término no se altera, por tanto decimos que:

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$



Ejemplo 1:  $f(x) = 3^{\sqrt{x^2-1}} \rightarrow f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} 3^{\sqrt{x^2-1}} \ln 3 \rightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} 3^{\sqrt{x^2-1}} \ln 3$

Ejemplo 2:  $f(x) = 5^{x^4+8} \rightarrow f'(x) = 5^{x^4+8} \ln 5 \cdot 4x^3$

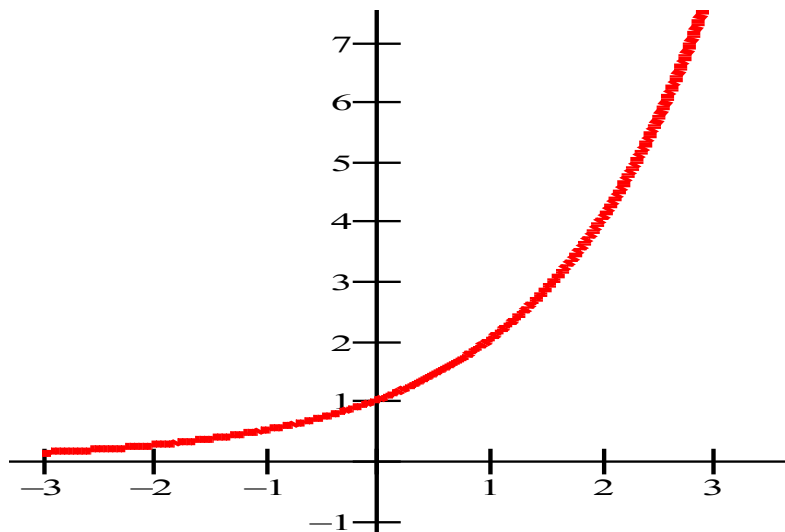
***Teorema 20: Propiedades de la función exponencial natural.***

Definición. La función inversa de la función logaritmo natural  $f(x)=\ln x$  se llama **función exponencial natural** y se denota por

$$f^{-1}(x) = e^x ; \text{ esto es } y = e^x \leftrightarrow x = \ln y.$$

La relación inversa entre las funciones logaritmo natural y exponencial natural se puede resumir como sigue:  $\ln(e^x) = x$  y  $e^{\ln x} = x$

**Gráfica de la función exponencial.**



**Operaciones con funciones exponenciales.**

Sean a y b dos números reales arbitrarios.

$$\text{a) } e^m e^n = e^{(m+n)}$$

$$\text{b) } \frac{e^m}{e^n} = e^{(m-n)}$$

Propiedades de la función exponencial natural.

1. El dominio de  $f(x) = e^x$  es  $(-\infty, \infty)$ , y su rango es  $(0, \infty)$ .
2. La función  $f(x) = e^x$  es continua, creciente e inyectiva en todo su dominio.
3. La gráfica de  $f(x) = e^x$  es cóncava hacia arriba en todo su dominio.
4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$

**Derivada de la función exponencial natural.**

Si u es una función derivable de x.

$$\text{a) } \frac{d(e^x)}{dx} = e^x$$

$$\text{b) } \frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

Demostración de  $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$  por la derivación logarítmica.

Asumiendo la función:  $y = e^u$

Aplicando logaritmo:  $\ln y = \ln e^u$

Aplicando las propiedades logarítmicas:  $\ln y = u \ln e = u$

Derivando:  $\frac{y'}{y} = \frac{du}{dx}$

Despejando a  $y$  en:  $\frac{dy}{dx} = y \frac{du}{dx}$

Sustituyendo a  $y$ :  $\frac{dy}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$

En forma general  $f(x) = e^u \rightarrow f'(x) = (u') \cdot e^u$

*Ejemplo:* si  $y = -\frac{3}{4}e^{\text{sen}x} \rightarrow y' = -\frac{3}{4}(e^{\text{sen}x} \cdot \cos x)$

*Ejemplo:* Hallar la derivada de la función exponencial dada.

$$y = e^{2x} \text{sen}x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \text{sen}x = e^{2x} (\cos x + 2\text{sen}x)$$

***Teorema 21: Derivada de una función elevada a otra función.***

Como ya se sabe  $U$  y  $V$  son funciones derivables de  $x$ , entonces se tiene que:

$$\frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1}u' + u^v \ln v \cdot v'$$

**Demostración:**

A continuación se demostrara la regla de derivación para derivar una función elevada a otra función. A diferencia del resto de demostraciones, esta vez no se hará uso de la definición de derivada, sino que se demostrara a partir de operaciones algebraicas.

Una función del tipo:  $y = f(x)^{g(x)}$

Se toma logaritmos neperianos en ambos miembros:  $\ln y = g(x) \ln[f(x)]$

A continuación se deriva:

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \ln[f(x)] + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)}$$

Se hace común denominador:

$$\frac{y'}{y} = \frac{g'(x) \ln[f(x)] f(x) + g(x) f'(x)}{f(x)}$$

Despejando  $y'$  recordando que  $y = f(x)^{g(x)}$  :

$$y' = \frac{f(x)^{g(x)}}{f(x)} [g'(x) \ln[f(x)] f(x) + g(x) f'(x)]$$

Operando:

$$y' = f(x)^{g(x)-1} [g'(x) \ln[f(x)] f(x) + g(x) f'(x)]$$

Luego queda demostrado que:

$$\text{si } y = f(x)^{g(x)} \rightarrow y' = f(x)^{g(x)-1} \cdot [g'(x) \cdot \ln[f(x)] \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x)]$$

**Ejemplo:** derivar  $y = (3x^2 + 1)^{e^x}$

$$\frac{dy}{dx} = e^x (3x^2 + 1)^{e^x - 1} \frac{d}{dx} (3x^2 + 1) + (3x^2 + 1)^{e^x} \cdot \ln e^x \frac{d}{dx} (e^x)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x (3x^2 + 1)^{e^x - 1} \cdot (6x) + (3x^2 + 1)^{e^x} (x)(e^x)$$

$$\frac{dy}{dx} = xe^x [6(3x^2 + 1)^{e^x - 1} + (3x^2 + 1)^{e^x}]$$

## Derivadas de funciones logarítmicas

### Teorema 22: Derivadas de logaritmo vulgar o base 10.

La derivada de un logaritmo en base  $a$  es igual a la derivada de la función, por el logaritmo en base  $a$  de  $e$  dividido entre la función.

$$\frac{d}{dx}(\text{Log}_a u) = \frac{u' \text{Log}_a e}{u} \text{ partiendo de esta derivada podemos}$$

$$\text{Decir que } \frac{d}{dx}(\text{Log}_a u) = \frac{u'}{u \ln a}$$

#### Demostración:

$$\frac{d}{dx}(\text{Log}_a u) = \frac{u' \text{Log}_a e}{u}; \text{Log}_a e = \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \therefore$$

$$\frac{u'}{\ln a} \div \frac{1}{1} = \frac{u'}{u \ln a} \rightarrow \frac{d}{dx}(\text{Log}_a u) = \frac{u'}{u \ln a}$$

#### Ejemplos:

$$1. \quad y = \text{Log}_3(4x^2 + 1) \rightarrow y' = \frac{8x}{(4x^2 + 1) \ln 3}$$

$$2. \quad y = \text{Log}_2(x^4 - 3x) \rightarrow y' = \frac{4x^3 - 3}{(x^4 - 3x) \ln 2}$$

$$3. \quad y = \text{Log}_6(15x^3 + 26) \rightarrow y' = \frac{45x^2}{(15x^3 + 26) \ln 6}$$

***Teorema 23. Derivada de la función logaritmo natural.***

Sea  $u$  una función derivable en  $x$

$$1. \frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x}, x > 0 \quad 2. \frac{d}{dx} (\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}, u > 0$$

Ejemplos: Derivación de funciones logarítmicas.

**a) Derivar  $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + x}$**

Aplicando propiedades logarítmicas, se reescribe antes de derivar:

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + x)$$

Derivando la nueva expresión, se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left( \frac{2x + 1}{x^2 + x} \right)$$

**b. Derivar  $f(x) = \ln \frac{x(x^2 + 1)^2}{\sqrt{2x^3 - 1}}$**

Primero se aplica las propiedades de los logaritmos y luego se deriva:

$$f(x) = \ln x + 2 \ln(x^2 + 1) - \frac{1}{2} \ln(x^3 - 1)$$

Derivando la nueva expresión:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2 \left( \frac{2x}{x^2 + 1} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{6x^2}{2x^3 - 1} \right) = \frac{1}{x} + \frac{4x}{x^2 + 1} - \frac{3x^2}{2x^3 - 1}$$

## Derivación logarítmica

Se llama derivación logarítmica al proceso de utilizar los logaritmos como ayuda en la derivación de funciones no logarítmicas.

Ejemplo: Hallar la derivada de  $y = \frac{x^3 \sqrt[5]{x^2 - 1}}{(x + 3)^9}$

Aplicando logaritmo en ambos lados:  $\ln y = \ln \frac{x^3 \sqrt[5]{x^2 - 1}}{(x + 3)^9}$

Aplicando las propiedades logarítmicas en  $\ln y = 3 \ln x + \frac{1}{5} \ln(x^2 - 1) - 9 \ln(x + 3)$

Derivando la expresión  $\frac{y'}{y} = \left( \frac{3}{x} + \frac{1}{5} \left( \frac{2x}{x^2 - 1} \right) - \frac{9}{x + 3} \right)$

Despejando a  $y' = \left[ \frac{3}{x} + \frac{1}{5} \left( \frac{2x}{x^2 - 1} \right) - \frac{9}{x + 3} \right] y$

Sustituyendo a  $y$  por su valor en:  $y' = \left[ \frac{3}{x} + \frac{1}{5} \left( \frac{2x}{x^2 - 1} \right) - \frac{9}{x + 3} \right] \left[ \frac{x^3 \sqrt[5]{x^2 - 1}}{(x + 3)^9} \right]$

**Teorema 24: Derivadas con valores absolutos.**

Si  $u$  es una función derivable de  $x$  tal que  $u \neq 0$ , entonces  $\frac{d}{dx} \ln |u| = \frac{u'}{u}$

Demostración:

$$|u| = \begin{cases} u & \text{si } u > 0 \\ -u & \text{si } u < 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx} \ln |u| = \frac{d}{dx} \ln(-u) = \frac{-u'}{-u} = \frac{u'}{u} \quad \text{Q.E.D.}$$

Ejemplo: Halla la derivada de  $y = \ln \left| \frac{x^2}{\operatorname{sen} x} \right|$

$$y = \ln |x^2| - \ln |\operatorname{sen} x|$$

$$y = 2 \ln |x| - \ln |\operatorname{sen} x|$$

$$y' = \frac{2}{x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$y' = \frac{2}{x} - \cot x$$

### **Teorema 25: Funciones inversas**

Definición de función inversa: Una función  $g$  es la función inversa de la otra si  $f(g(x))=x$  para todo  $x$  en el dominio de  $g$ , y  $g(f(x))=x$  para todo  $x$  en el dominio de  $f$ .

La función  $g$  se denota por  $f^{-1}$  (se lee como “inversa de  $f$ ”).

Algunas observaciones relevantes acerca de las funciones inversas.

1. Si  $g$  es la función inversa de  $f$ , entonces  $f$  es la función inversa de  $g$ .
2. El dominio de  $f^{-1}$  es el rango de  $f$  y el rango de  $f^{-1}$  es el dominio de  $f$ .
3. Una función puede no tener función inversa, pero si la tiene es única.
4. La gráfica de  $f$  contiene el punto  $(a,b)$  si y sólo si la gráfica  $f^{-1}$  contiene el punto  $(b,a)$ .
5. Una función tiene función inversa si y sólo si es inyectiva.
6. Si  $f$  es estrictamente monótona en todo su dominio, entonces ésta es inyectiva por lo tanto tiene inversa.

**Ejemplo:** La inversa de la función  $f(x) = x^2 + 1$  es la función  $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$

Para comprobarlo, hay que revisar si las dos funciones compuestas producen la función identidad:

$$f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x-1})^2 + 1 = x - 1 + 1 = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1 - 1} = \sqrt{x^2} = x$$

### **Teorema 27: Funciones trigonométricas inversas.**

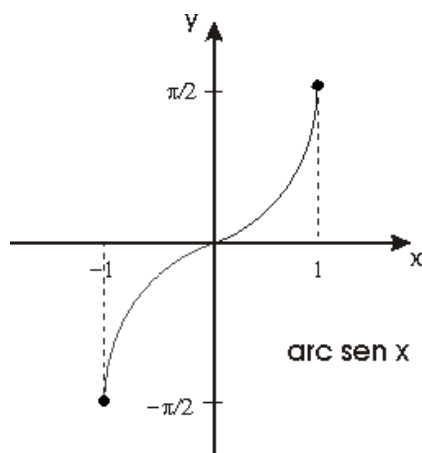
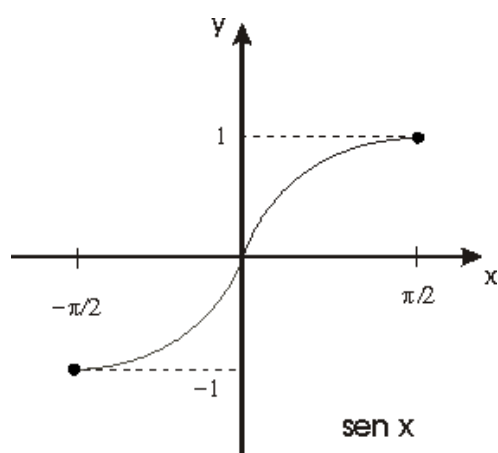
Ninguna de las seis funciones trigonométricas tiene inversa. Esto se debe a que son funciones periódicas y por tanto ninguna es inyectiva. Para que tengan funciones inversas es necesario redefinir el dominio de cada una de ellas.



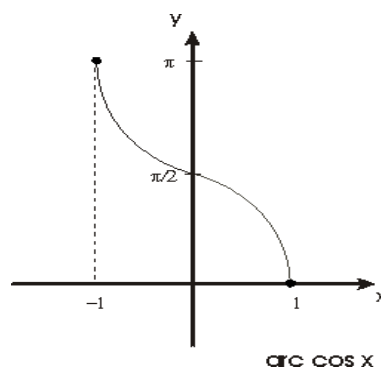
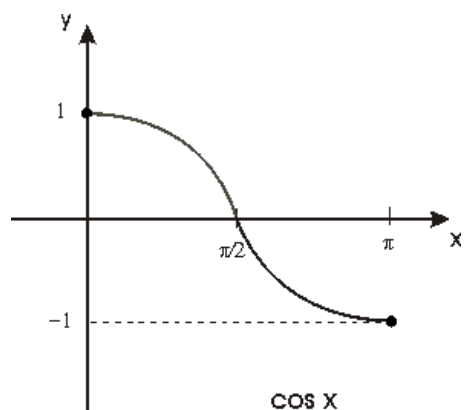
## Definición de las funciones trigonométricas inversas

Función	Dominio	Rango
$y = \arcsen x \leftrightarrow \text{sen } y = x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos x \leftrightarrow \cos y = x$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \arctan x \leftrightarrow \tan y = x$	$-\infty < x < \infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
$y = \text{arc cot } x \leftrightarrow \cot y = x$	$-\infty < x < \infty$	$0 < y < \pi$
$y = \text{arc sec } x \leftrightarrow \sec y = x$	$ x  \geq 1$	$0 \leq y \leq \pi, y \neq \frac{\pi}{2}$
$y = \text{arc csc } x \leftrightarrow \csc y = x$	$ x  \geq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, y \neq 0$

## Las gráficas de algunas funciones trigonométricas inversas.



## Gráfica de la función coseno y su inversa.



**Teorema 28: Derivadas de las funciones trigonométricas inversas.**

Si  $u$  es una función derivable de  $x$ .

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\arcsen u) &= \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} & \frac{d}{dx}(\arccos u) &= -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \\ \frac{d}{dx}(\arctan u) &= \frac{u'}{1+u^2} & \frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} u) &= -\frac{u'}{1+u^2} \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} u) &= \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}} & \frac{d}{dx}(\operatorname{arccsc} u) &= -\frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}\end{aligned}$$

**Teorema 29: Derivadas del seno inverso.**

Demostración:

Si  $y = \arcsen u$  entonces  $u = \sen y$

Derivando a  $u$

$$\frac{du}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx}$$

Despejando a  $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} \frac{du}{dx} = \frac{u'}{\cos y}$$

Aplicando las propiedades de las identidades trigonométricas:

$$\sen^2 y + \cos^2 y = 1 \rightarrow \cos y = \sqrt{1 - \sen^2 y}$$

Sustituyendo en el paso anterior

$$\cos y = \sqrt{1 - u^2}$$

Por lo tanto se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; Q.E.D$$

Ejemplos: Hallar las derivadas de

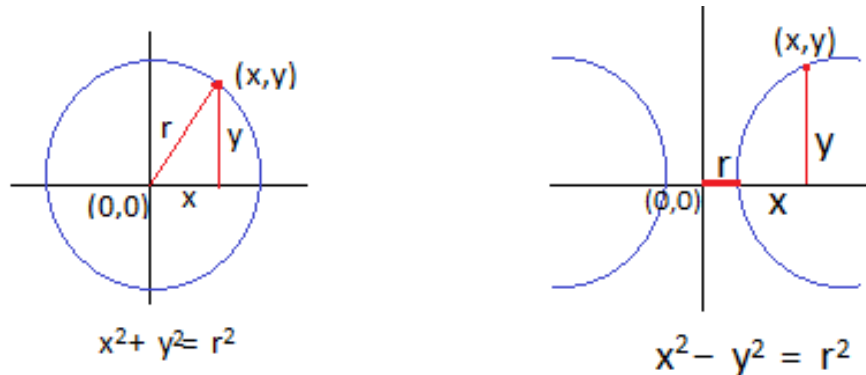
$$1) f(x) = (\arccos e^x) \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot e^x = \frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

$$2) f(x) = (\arcsen 5x^2) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(5x) = \frac{10}{\sqrt{1-25x^4}}$$

$$3. y = \arctan \sqrt{x+5} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$

### Funciones hiperbólicas.

Funciones hiperbólicas son aquellas que provienen de la comparación entre el área de una región semicircular, con el área de una región bajo una hipérbola.



### Definición de las funciones hiperbólicas.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\csc hx = \frac{1}{\sinh x}; x \neq 0$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sec hx = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x}, x \neq 0$$

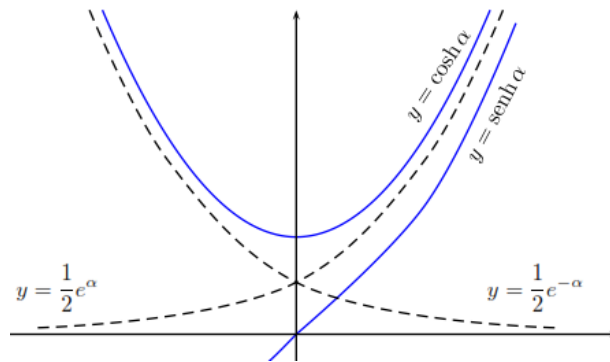
Se elegirá una función en especial para trabajarle con su gráfica y demostración de derivadas.

### Grafica del coseno hiperbólico.

La gráfica del coseno hiperbólico está formada por la combinación de las funciones exponenciales simples siguientes:

$$y = \frac{e^x}{2} \quad y \quad y = \frac{e^{-x}}{2}$$

Dichas combinaciones son muy usuales y a partir de ellas definiremos no solo la función hiperbólica del coseno, sino también las demás, aplicando las distintas propiedades. Así, cuando representamos gráficamente las funciones exponenciales anteriores tenemos:



De lo anterior se deduce que

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

### Derivadas de funciones hiperbólicas.

Sea  $u$  una función derivable de  $x$ .

$$\frac{d}{dx}(\sinh u) = (\cosh u)u'$$

$$\frac{d}{dx}(\csc hu) = -(\csc hu \coth u)u'$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh u) = (\sinh u)u'$$

$$\frac{d}{dx}(\sec hu) = -(\sec hu \tanh u)u'$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh u) = (\operatorname{sech}^2 u)u'$$

$$\frac{d}{dx}(\coth u) = -(\operatorname{csch}^2 u)u'$$

**Teorema 30: Demostración de la derivadas del coseno inverso.**

1. Se sabe que el coseno hiperbólico es:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

2. Aplicando la derivada a la función:

*Rescribiendo la función:*

$$\cosh x = \left(\frac{1}{2}\right)(e^x + e^{-x})$$

*Derivando:*

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{dy}{dx} (e^x + e^{-x}) = \frac{d}{dx} \cosh x = \left(\frac{1}{2}\right) (e^x + (-x)'(e^{-x}))$$

3. Finalmente se obtiene :

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \rightarrow \frac{d}{dx} \cosh u = \sinh u \frac{d}{dx} u$$

**Ejemplos de derivación de funciones hiperbólicas.**

- Veamos algunos ejemplos para ilustrarnos mejor sobre el tema. Derivar:

1.  $y = \cosh(3x^2 + 5x)$

$$y' = \sinh(3x^2 + 5x)(6x + 5)$$

2.  $y = \cosh(10x^5 + 5x - 3)$

$$y' = \sinh(10x^5 + 5x - 3)(50x^4 + 5)$$

3.  $y = \cosh\left(\frac{1}{7}x^5 + 10x - \pi\right)$

$$y' = \sinh\left(\frac{1}{7}x^5 + 10x - \pi\right)\left(\frac{5}{7}x^4 + 10\right)$$

4)  $y = \ln \sinh(2x^3 + \tan x)$

$$y' = \left(\frac{\cosh(2x^3 + \tan x)}{\sinh(2x^3 + \tan x)}\right)(6x^2 + \sec^2 x) = \coth(2x^3 + \tan x)(6x^2 + \sec^2 x)$$

## Funciones hiperbólicas inversas

**Teorema 31. Funciones hiperbólicas inversas.**

### Definición

Función	Dominio
$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$(-\infty, \infty)$
$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$	$[1, \infty)$
$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$	$(-1, 1)$
$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$	$(0, 1]$
$\operatorname{cosech}^{-1} x = \ln \left( \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{ x } \right)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

### Derivación de funciones hiperbólicas inversas.

Sea  $u$  una función derivable de  $x$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [\sinh^{-1} u] &= \frac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}} & \frac{d}{dx} [\cosh^{-1} u] &= \frac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}} \\ \frac{d}{dx} [\tanh^{-1} u] &= \frac{u'}{1 - u^2} & \frac{d}{dx} [\coth^{-1} u] &= \frac{u'}{1 - u^2} \\ \frac{d}{dx} [\operatorname{sech}^{-1} u] &= \frac{-u'}{u\sqrt{1 - u^2}} & \frac{d}{dx} [\operatorname{cosech}^{-1} u] &= \frac{-u'}{u\sqrt{1 + u^2}} \end{aligned}$$

\

## Derivación implícita

Se dice que una función está definida implícitamente cuando se da de la forma  $F(x,y)=0$ , es decir que tanto X y Y están ligadas de forma tal que a veces no se pueden separar para resolverla explícitamente como se ha venido haciendo.

### Derivada parcial:

En matemática, una **derivada parcial** de una función de diversas variables es su derivada respecto a una de esas variables manteniendo las otras, constantes. Las derivadas parciales son útiles en cálculo vectorial y geometría diferencial.

La derivada parcial de una función  $f$  respecto a la variable  $x$  se representa con cualquiera de las siguientes notaciones equivalentes:

$$\frac{\partial f}{\partial x} ; \partial_x f ; F_x(x)$$

### *Teorema 32 : Funciones de una variable independiente definidas implícitamente.*

Si la variable Y es una función continua de X d y c es constante real con derivadas continuas, por lo tanto se define la ecuación como:

$$F(x,y) = c$$

1. Diferenciando en ambos lados  $dF(x, y) = 0$

2. derivando  $\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$

3. despejando  $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}, F_y \neq 0$

Ejemplo: Buscar la derivada de las funciones siguientes:

$$1. F(x^3 - y + 4x^2 y^5) = 4$$

Solución:

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 8xy^5 \qquad F_y = -\frac{\partial F}{\partial y} = -1 + 20x^2 y^5$$

Luego tenemos que  $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + 8xy^5}{20x^2 y^5 - 1}$

Solución:

$$a) F_x = 2x \quad ; \quad b) F_y = -2y$$

$$2. x^2 - y^2 = 46$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_x}{-F_y} = \frac{2x}{-(-2y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$3. f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$$

Solución:

$$a) \frac{df}{dx} = \frac{(x-y) \frac{d}{dx}(x+y) - (x+y) \frac{d}{dx}(x-y)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{(x-y)(1) - (x+y)(1)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{x-y-x-y}{(x-y)^2} = \frac{-2y}{(x-y)^2}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{-2y}{(x-y)^2}$$

$$b) \frac{df}{dy} = \frac{(x-y) \frac{d}{dy}(x+y) - (x+y) \frac{d}{dy}(x-y)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{(x-y)(1) - (x+y)(-1)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{x-y+x+y}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2}$$

$$\frac{df}{dy} = \frac{2x}{(x-y)^2}$$



## Las formas indeterminadas y la regla de L'Hôpital

La forma  $\frac{0}{0}$  e  $\frac{\infty}{\infty}$  son llamadas formas indeterminadas porque no garantizan que un límite existe, ni indica lo que el límite es, si existe.

### Teorema 33. Regla de L'Hôpital

Sean  $f$  y  $g$  funciones que son derivables en un intervalo abierto  $(a, b)$  conteniendo un  $c$ . Asumir que  $g'(x)$  existe para todo  $x$  en  $(a, b)$ , excepto posiblemente el propio  $c$ . Si el límite de  $\frac{f(x)}{g(x)}$  cuando  $x$  tiene a  $c$  produce la forma indeterminada  $\frac{0}{0}$ ,

entonces,  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  siempre que el límite exista

Este resultado también aplica si el límite de  $\frac{f(x)}{g(x)}$  cuando  $x$  tiene a  $C$  produce cualquiera de las formas indeterminadas  $\frac{\infty}{\infty}, \frac{-\infty}{\infty}, \frac{\infty}{-\infty}, \frac{0}{-\infty}$ .

Las formas indeterminadas más comunes son:  $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{-\infty}, 0\infty, \frac{0}{\infty}, 0^\infty, 1^\infty, \infty - \infty$

Ejemplo 1. Encuentre el límite de:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x}{x} = \frac{2(0) - \sin 0}{0} = \frac{0 - 0}{0} = \frac{0}{0}$  Como el cálculo directo nos lleva a la forma indeterminada  $\frac{0}{0}$  podemos aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \cos x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 - \cos x = 2 - \cos 0 = 2 - 1 = 1$$

Ejemplo 2. Determine el límite  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\csc x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\csc x} = (\cos 0)^{\csc 0} = 1^\infty$$

Aplicando logaritmo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(\cos x)^{\csc x} = \lim_{x \rightarrow 0} \csc x \ln \cos x = (\csc 0) \ln \cos 0 = \infty 0$$

Para poder aplicar el método tenemos que llevarlo a una de las formas  $\frac{0}{0}$  o  $\frac{\infty}{\infty}$  Hacemos

$$\ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(\cos x)^{\csc x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(\cos x)^{\csc x} = \lim_{x \rightarrow 0} \csc x \ln \cos x = (\csc 0) \ln \cos 0 = \infty 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\csc x} = \frac{\ln \cos 0}{\csc 0} = \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\csc x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc x / \cos x}{\csc x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc x}{\cos^2 x} = \frac{\csc 0}{(\cos 0)^2} = \frac{0}{1} = 0 \text{ eso implica } \ln y = 0 \rightarrow e^{\ln y} = e^0$$

$$y = 1 \text{ Esto implica que el límite de } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\csc x} = 1$$

# Cálculo Diferencial

Apellidos:..... Matriculas:.....

Grupo: .....Fecha: .....Profesor(a): .....Práctica:.....

I. Utilizando la definición de derivada de una función, determine la derivada de cada una de las funciones cuyas ecuaciones son:

1)  $f(x) = 5x - 3$

2)  $f(x) = \frac{3}{x^2}$

3)  $g(x) = (2x + 1)^2$

4)  $f(x) = \sqrt{x}$

5)  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4$

6)  $g(t) = \frac{2t}{t+1}$

II. Calcular por medio de la definición de derivada la pendiente de la recta tangente a las curvas en los puntos que tienen la abscisa indicada:

1)  $f(x) = 3x^2 + 1$  en  $x = -1$

2)  $f(x) = x^2 - 3x - 2$  en  $x = 4$

III. Derive las siguientes funciones algebraicas:

1)  $f(x) = x^3 + x^4 - 2x + 5$

2)  $f(x) = 2x^3 - 3$

3)  $f(x) = 6\sqrt{x} + \frac{1}{x}$

4)  $f(x) = \frac{2}{x} - \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$

5)  $f(x) = 4x^{3/2} + x^{-1}$   
6)  $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 5x - 6$

7)  $f(x) = 2x \ln x - x^2$

8)  $f(x) = (e^x)(x^2 - x + 1)$

9)  $f(x) = \frac{1}{3-2x}$

10)  $f(x) = \frac{x-1}{1-2x}$

11)  $f(x) = \frac{1-3x}{2x-3}$

12)  $f(x) = x^2 \ln x$

13)  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

14)  $f(x) = \frac{2+3x}{4x}$

15)  $f(x) = 2xe^x$

16)  $f(x) = \frac{3x-2}{2-x}$

17)  $f(x) = \frac{2x-3}{x}$

18)  $y = (4x+3)(2x^2-1)$

19)  $y = (2x+8)(5x^2-2x-5)$

20)  $y = (x+1)\left(\frac{2x-3}{x^2-1}\right)$

#### IV. Derivar la función.

$$1) y = \operatorname{sen}(x^2 - 3)(x^5 - x + 2)$$

$$2) y = \tan^3\left(\frac{x-1}{x+4}\right)$$

$$3) y = 15 \cos^{12}\left(\frac{x^2-3}{x-1}\right)$$

$$4) y = \sec \sqrt[6]{5x-3}$$

$$5) y = 5^{(2x+3)\cos 6x}$$

$$6) y = e^{\operatorname{sen}^3 4x \cdot \ln(2x-3)}$$

$$7) y = \sqrt[4]{9^{2x-6}}$$

$$8) y = (x^4 - 3x - 1) \left( \sqrt[6]{x^2 - 3x} \right) (\operatorname{sen} x)$$

$$9) y = \sec(9x - 3)$$

$$10) y = \cot \sqrt{x-1}$$

#### V. Derivar las siguientes funciones.

$$1) y = \arccos(x+3)$$

$$2) y = \operatorname{arcsen}(\sqrt[4]{3x-1})$$

$$3) y = \arccos e^{c^4(\sqrt{2x-1})}$$

$$4) y = \arctan(\sqrt{x^3 + 2x - 1})$$

$$5) y = 9^{\operatorname{arcsen} x^2 + \ln(x^2 - 1)}$$

$$6) y = e^{\operatorname{senh}(x+2)} + \log_4(x^2 + 1)$$

$$7) y = \log_8(\operatorname{senh}^3(x-1))$$

$$8) y = x^{\cos x}$$

$$9) y = \operatorname{senh}^{\sqrt{x-1}} x$$

$$10) y = x^x$$

#### VI. Evaluar la derivada de la función:

$$1) y = \sec h(x+1)$$

$$2) y = \coth 3x$$

$$3) f(x) = \ln(\operatorname{senh} x)$$

$$4) g(x) = \ln(\cosh x)$$

$$5) y = \ln\left(\tanh \frac{x}{2}\right)$$

$$6) y = x \cosh x - \operatorname{senh} x$$

#### VII. Aplicar la regla de la cadena para derivar las siguientes funciones:

$$1) y = (5 - 2x)^8$$

$$2) y = (2x^3 - 7)^4$$

$$3) y = \tan(3 - \operatorname{sen} 2t)$$

$$4) y = \left( \frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{8} \right)^5$$

$$5) y = \sqrt{3x^4 + \cos x + 9}$$

$$6) y = \operatorname{sen}^3\left(\frac{5x+3}{5x-3}\right)$$

$$7) y = e^{\operatorname{sen} x}$$

$$8) y = e^{\sqrt{x} + \cos x}$$

$$9) y = \cos^{16} \frac{x^2 - 6x + 9}{x + 8}$$

VIII. Utiliza la definición de derivada para derivar la función.

$$1) 2x^3 + 1 \quad f(x) = 2x^2 - x^3 \quad g(x) = \operatorname{sen} x$$

$$2) h(x) = \frac{5x-7}{2x+1}$$

Derive logarítmicamente

$$1) y = e^{2x} \operatorname{sen} x$$

$$2) y = \ln(e^{\operatorname{sen} x^2} + \tan e^{x+\cos x})$$

$$3) y = \frac{\sqrt{x+3} + 2x - 5 \operatorname{sen}^2(x^2 + x)}{\sqrt[3]{\tan x + x}}$$

$$4) y = \frac{\sqrt[3]{x^4} + \operatorname{sen} x^2 (2x^2 + \cos x)^2}{\sqrt{\tan x + x^3}}$$

$$5) y = \ln\left(\frac{\operatorname{sen}^2 2x^2 + 6x}{\sqrt{\cos x} - \tan 6x}\right) + 3\sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$6) y = \log \frac{x^5 - 2x - 8}{\sec^6 3x}$$

$$7) y = \ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)$$

$$8) y = \frac{\operatorname{arcsen} 3x}{x}$$

$$9) y = \frac{(x^2 + 1)}{\sqrt{\cos 2x}}$$

$$10) y = \sqrt[10]{\frac{3x+4}{2x-4}}$$

$$11) y = \left(\frac{(t+1)(t-1)}{(t-2)(t+3)}\right)^5$$

$$12) y = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

IX. Encuentra  $d_y$  y  $d_x$  por medio de la derivación implícita.

$$1) x^2 + y^2 = 16$$

$$2) x^{1/2} + y^{1/2} = 9$$

$$3) x^3 - xy + y^2 = 4$$

$$4) x^3 y^3 - y = x$$

$$5) x^3 - 3x^2 y + 2xy^2 = 12$$

$$6) 3x^2 y^5 - 6x + 4y = 14$$

$$7) f(x, y) = x^y - 3x^{xy} + x^2 y^3$$

$$8) x^2 y + y^2 x = -2$$

$$9) \sqrt{xy} = x - 2y$$

$$10) 2 \operatorname{sen} x \cos y = 1$$

$$11) x^3 + y^2 = 18xy$$

$$12) xy^4 + x^2 y + 3x^3 - y + 2 = 0$$

X. Aplique la regla de Hoppital para conseguir el límite.

$$1) y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x}{x^4 + 4x}$$

$$2) y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x - 8}{x^6 - 6x - 2}$$

$$3) y = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x) \frac{1}{x}$$

$$4) y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{\text{sen} x + 3x}$$

XI. Defina.

- 1) Regla de la cadena.
- 2) Ecuación recta normal y tangente.
- 3) Derivación implícita.
- 4) Derivación logarítmica.
- 5) Derivada de un cociente.
- 6) Derivada del logaritmo natural.
- 7) Regla de Hoppital.
- 8) Enuncia el teorema del valor medio de Cauchy.
- 9) Cuáles son las formas indeterminadas más comunes.

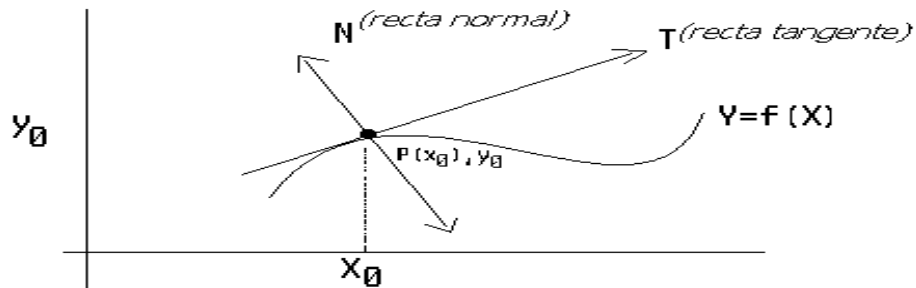
**“El que se enaltece será humillado y el que se humilla será enaltecido”**

**(Evangelio, San Lucas. 14, 1-7; 14)**

# Módulo 5:

## Aplicaciones de derivadas

## Aplicaciones de las Derivadas



### *Ecuación de la recta tangente.*

Es aquella que dada una curva  $y = f(x)$  y un punto  $(x_0, y_0)$  se obtiene mediante la expresión

$$y - y_0 = f'(x_0) (x - x_0)$$

**Ejemplo:** Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = f(x) = x^3 - x$ ; en el punto  $P(1,0)$

**Datos:**

$$f(x) = x^3 - 1 \qquad y - y_0 = f'(x_0) (x - x_0)$$

$$x_0 = 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \qquad y - 0 = [3(1)^2 - 1] (x - 1)$$

$$y_0 = 0 \qquad y = 3 - 1 (x - 1)$$

$$0y = 2x - 2$$

$$y = 2x - 2$$



*Ejemplo 2: Determinar la ecuación de la tangente a la curva*

$y = f(x) = x^2 - x$  en el punto  $P(3,6)$ .

**Datos**

$$f(x) = x^2 - x$$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f'(x) = 2x - 1$$

$$y - 6 = 5(x - 3)$$

$$x_0 = 3$$

$$y = 5x - 15 + 6$$

$$y_1 = 6$$

$$y = 5x - 9$$

$$y - 5x + 9 = 0$$

*Ecuación de la recta normal*

Es la recta perpendicular a la tangente en el punto de tangencia. Por lo tanto como la recta normal y la pendiente en un punto son mutuamente perpendiculares, la ecuación de la normal a la curva  $y = f(x)$  que pasa por  $P(x_0, y_0)$  es:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

*Ejemplo:Cuál es la ecuación de la recta normal a la curva  $y = \frac{1}{x}$  en el punto  $(1,1)$ ?*

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$y - 1 = -\frac{1}{(-1)}(x - 1)$$

$$x_0 = 1; y_0 = 1$$

$$y = x - 1 + 1 \quad f'(1) = -\frac{1}{(1)^2} = -1$$

$$y = x$$

**2) Determine la ecuación de la normal a la curva**  $y = -\frac{x^2}{2} + 2x$

En el punto  $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$

**a)**  $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x$

**b)**  $f'(x) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{d}{dx}(2x)$

$$f'(x) = -x + 2$$

$$f'(x_0) = -x + 2 \qquad y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

**c)**  $x_0 = 1 \qquad y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{1}(x - 1)$

$$f'(1) = -(1) + 2 = 1 \qquad y = -(x - 1) + \frac{3}{2}$$

$$y = -x + 1 + \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{5}{2} - x$$

$$2y + 2x - 5 = 0$$

3) Halla la ecuación de la recta tangente y de la normal a  $f(x) = 2x^2$  en  $(2,8)$ .

**Solución:**

$$f(x) = 2x^2$$

$$f'(x) = 4x \rightarrow m(x) = 4x$$

$$f'(2) = 4(2) = 8 = m$$

$$P_1(2,8) \rightarrow x_1 = 2 \wedge y_1 = 8 \quad (2)$$

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

$$y = 8(x - 2) + 8$$

$$y = 8x - 16 + 8$$

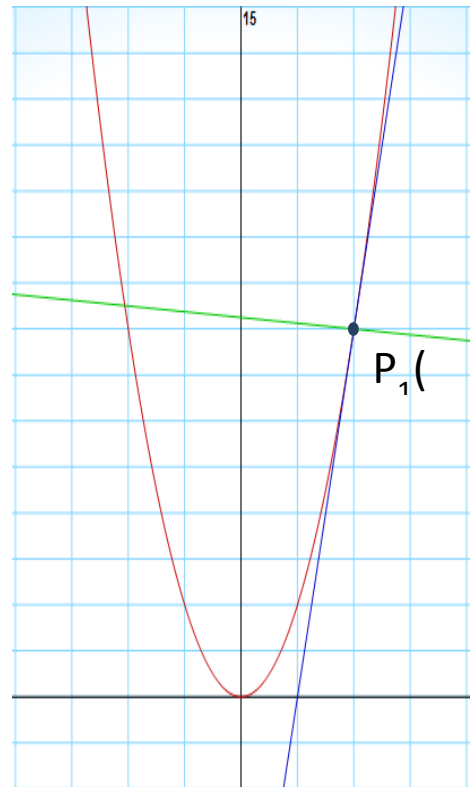
$$y = 8x - 8 : \text{ecuación de la recta tangente}$$

$$y = m_n(x - x_1) + y_1$$

$$y = -\frac{1}{8}(x - 2) + 8$$

$$y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{4} + 8$$

$$y = -\frac{1}{8}x + \frac{33}{4} : \text{ecuación de la recta normal}$$



### **Teorema 34: Fermat**

El teorema de Fermat para puntos críticos dice que si una función es continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$ , entonces alcanza un valor máximo y mínimo en ese intervalo.

### **Definición:**

Sea  $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \in D$ ,  $D$  es dominio

1)  $f$  tiene en punto máximo en  $x = C$

2)  $f$  es derivable en  $x = C$

$\therefore$

$$\Rightarrow f'(C) = 0$$

### Teorema 35: Rolle

#### Concepto:

El teorema de Michel Rolle (matemático francés (1652 - 1719)) es aquel que da condiciones suficientes para la existencia de un número crítico (o punto crítico) en una función  $f$ .

#### Teorema:

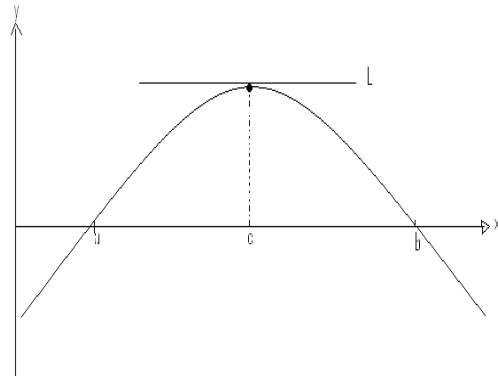
Este teorema expresa lo siguiente:

Si una función  $f$  es continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$ , derivable en el intervalo abierto  $(a, b)$  y  $f(a) = f(b)$ , entonces existe al menos un número  $c$  en  $(a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ , osea que se cumple el teorema de Fermat.

**Corolario:** Si  $f$  es continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$  y  $f(a) = f(b)$ , entonces  $f$  tiene al menos un número crítico en el intervalo abierto  $(a, b)$ .

Ejemplo1 : Estudiar si la función  $f(x) = x - x^3$  satisface las condiciones del **Teorema de Rolle** en el intervalo  $[0, 1]$ . en caso afirmativo determinar el valor de  $c$ .

$f(x)$  es una función continua en el intervalo  $[0, 1]$  y derivable en el intervalo abierto  $(0, 1)$  por ser una función polinómica.



Además cumple que:

$$f(0) = f(1) = 0$$

Por tanto es aplicable el **teorema de Rolle**.

$$f'(c) = 0$$

$$1 - 3x^2 = 0$$

$$1 - 3c^2 = 0$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \in (0, 1)$$

Ejemplo 2: ¿Satisface la función  $f(x) = 1 - x$  las condiciones del **teorema de Rolle** en el intervalo  $[-1, 1]$ ?

La función es continua en el intervalo  $[-1, 1]$  y derivable en  $(-1, 1)$  por ser una función polinómicas. No cumple **teorema de Rolle** porque  $f(-1) \neq f(1)$ .

### ***Teorema 36: valor medio DE Lagrange***

Los resultados más útiles del cálculo diferencial se refieren a funciones derivables en todos los puntos de un intervalo. El teorema del valor medio es frecuentemente atribuido a Joseph Louis Lagrange; no obstante, fue publicado por primera vez en 1806 por el físico André Marie Ampère que justificaba el resultado usando ideas de Lagrange y suponiendo que la función derivada era continua. El teorema del valor medio es uno de los resultados más útiles del Cálculo. Su utilidad se debe principalmente a que dicho teorema permite acotar el incremento de una función cuando se conoce una cota de su derivada.

#### ***Teorema:***

El teorema del valor medio de Lagrange dice que si una función  $f(x)$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ , entonces, existe algún punto  $c \in (a, b)$  tal que 
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La interpretación geométrica del **Teorema de Lagrange** nos dice que hay un punto en el que la tangente es paralela a la secante. Es una generalización del teorema de Rolle.

**Ejemplo: Se puede aplicar el teorema de Lagrange a  $f(x) = x^3$  en  $[-1, 2]$ ?**

$f(x)$  es continua en  $[-1, 2]$  y derivable en  $(-1, 2)$  por tanto se puede aplicar el teorema del valor medio:

$$f'(c) = \frac{8 - (-1)}{2 - (-1)} \rightarrow f'(c) = 3$$

$$\text{Evaluando en } c, \quad 3c^2 = 3 \rightarrow c = 1$$

### 37-Teorema de Cauchy

El teorema del valor medio de Cauchy es una generalización del teorema del valor medio de Lagrange y por lo tanto tienen la misma importancia.

Este teorema enuncia como sea  $f$  y  $g$  continuas en  $[a, b]$  y derivables en  $(a, b)$ . Entonces existe al menos un punto  $c$  dentro de  $(a, b)$  tal que:  $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

**Ejemplo: Analizar si el teorema de Cauchy es aplicable en el intervalo  $[1, 4]$  a las funciones:  $f(x) = x^2 - 2x + 3$  y  $g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$**

Primero se derivan ambas funciones:

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2x - 2$$

$$g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5 \quad \rightarrow \quad g'(x) = 3x^2 - 14x + 20$$

Ahora se evalúa en la parte izquierda del teorema:  $a=1$  y  $b=4$

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$$

$$f(1) = (1)^2 - 2(1) + 3 = 2$$

$$g(1) = (1)^3 - 7(1)^2 + 20(1) - 5 = 9$$

$$f(4) = (4)^2 - 2(4) + 3 = 11$$

$$g(4) = (4)^3 - 7(4)^2 + 20(4) - 5 = 27$$

Aplicando el teorema  $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ :

$$\frac{11-2}{27-9} = \frac{2c-2}{3c^2-14c+20} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2c-2}{3c^2-14c+20}, \text{ ahora se despeja a } c$$

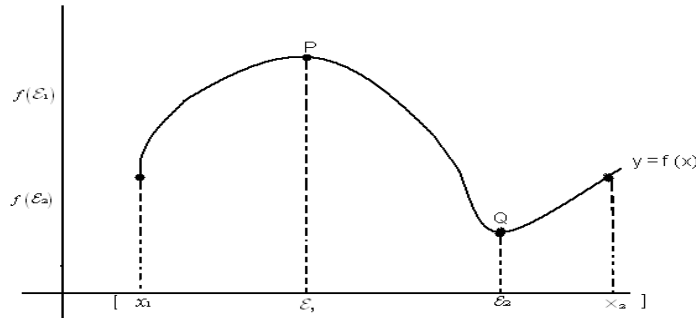
Queda demostrado que:  $g(b)$  diferente  $g(a)$  y  $g'(c)$  diferente de 0 por lo que desarrollando la ecuación anterior  $1(3c^2-14c+20) = 2c-2(2) \rightarrow 3c^2-14c+20 = 4c-4, 3c^2-18c+24=0$

Ahora se obtiene la ecuación  $3c^2-18c+24=0$  Si se factoriza,  $(c-4)(c-2)=0$ ,  $c=2$  y  $c=4$ ,  $c=4$  se descalifica porque no está dentro de  $(1, 4)$  y finalmente  $c=2$ .

$$\text{Comprobando: } \frac{1}{2} = \frac{2c-2}{3c^2-14c+20} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2(2)-2}{3(2)^2-14c+20} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

### Valores Críticos de una Función

Son los valores máximos y mínimos que pueden alcanzar una función en un intervalo dado.



Sea  $[x_1, x_2]$  un intervalo y  $y = f(x)$  Una función dada; su valor máximo (P) en  $f(\epsilon_1)$  y  $f(\epsilon_2)$  en Q es el mínimo.

Una función  $y = f(x)$  alcanzara un valor máximo relativo en  $x = \epsilon_1$ , Si  $\forall x$  en el entorno  $\epsilon_1$  cumple

$$f(\epsilon_1) \geq f(x)$$

Una función  $y = f(x)$  alcanzara un valor mínimo (2) en  $f(\epsilon_2)$  si cumple que

$$\forall x; f(\epsilon_2) \leq f(x)$$

En el punto P (Máximo) la función pasa de creciente a decreciente y en el punto Q (mínimo) de decreciente a creciente.

En cada punto critico, la derivada de la función se anula. Esto es, si para  $x = \epsilon$  hay un mínimo o máximo si cumple.

$$f'(\epsilon) = 0$$

### Pasos para conseguir los puntos críticos de una función.

1. Hallar la primera derivada
2. Igualar la primera derivada a cero y se hayan las raíces reales de la ecuación resultante. Estas raíces son los valores críticos de las variables.

3. Se aplican los Criterio de la 2da derivada para extremos relativos

Se asume que  $f'(\mathcal{E}) = 0$

Y que  $f''(\mathcal{E})$  existe, de manera que:

- 1) Si  $f''(\mathcal{E}) < 0$ , entonces  $f$  tiene un máximo relativo en  $\mathcal{E}$
- 2) Si  $f''(\mathcal{E}) > 0$ , entonces  $f$  tiene un mínimo relativo en  $\mathcal{E}$
- 3) Si  $f''(\mathcal{E}) = 0$ , se ignora lo que pasa en  $\mathcal{E}$

**Ejemplo 1:** Dada la  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$  los Mínimos y Máximo

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1, \text{ por lo que } x_1 = \frac{1}{3} \wedge x_2 = 1.$$

$$f''(x) = 6x - 4 \quad \therefore$$

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 6\left(\frac{1}{3}\right) - 4 = 2 - 4 = -2 \text{ como } -2 < 0 \text{ entonces } x = \frac{1}{3} \text{ es un máximo}$$

$$f''(x) = 6x - 4 \text{ eso implica que } f''(1) = 6(1) - 4 = 6 - 4 = 2$$

$$\therefore$$

$$2 > 0 \quad ; \quad x = 1 \text{ es un mínimo}$$

**Ejemplo 2:**  $f(x) = x^2 - 3x + 5$

$$\text{Primera derivada} = 2x - 3$$

$$\text{Valor critico } 3/2, \quad 2da \text{ derivada} = 2$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 14 \quad 2 > 0 \quad \text{Entonces } f\left(\frac{3}{2}\right) \text{ tiene un número mínimo.}$$



## Cálculo Diferencial

Apellidos:..... Matriculas:.....

Grupo: .....Fecha: .....Profesor(a): .....Práctica:.....

a) Verificar que se cumpla el teorema de Rolle.

hallar el valor de c.

1)  $f(x) = x^2 - 2x$  en  $[0, 2]$

2)  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$  en  $[1, 3]$

3)  $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 2}$  en  $[-1, 3]$

4)  $f(x) = \text{sen}(x)$  en  $[0, 2\pi]$

b) Hallar los valores de C en el intervalo  
para funciones aplicando del valor medio.

5)  $f(x) = x^2$  en  $[-2, 1]$

6)  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$  en  $[0, 1]$

7)  $f(x) = \sqrt{x-2}$  en  $[2, 6]$

8)  $f(x) = \text{sen} \phi$  en  $[-\pi, \pi]$

c) Conseguir los puntos maximos y minimos  
y haga la grafica.

9)  $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

10)  $y = x^3 - 12x$

11)  $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

12)  $y = 10 + 12x - 3x^2 - 2x^3$

13)  $y = 2x^3 + 3x^2 + 12x - 4$

14)  $f(x) = x^4 + x$

d) Determina la ecuación de la tangente y la normal a la curva.

14)  $y = x^2, (1, 3)$

15)  $y = x^3 + x - x^2 + 1, y_0 = -1$

16)  $y = \frac{2-y}{x}, y_0 = 2$

17)  $x^3 y + y^3 x = 30$  en  $(1, 3)$

e) Integral

18)  $\int (x^4 - 2) dx$

19)  $\int \left( x^{\frac{3}{2}} + 2x + 1 \right) dx$

20)  $\int \sqrt[5]{x^7} dx$

21)  $\int \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x}} dx$

22)  $\int (x+1)(3x-2) dx$

23)  $\int \left( \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$

24)  $\int \left( \frac{x^2 + 1}{x^2} \right) dx$

f) Define.

25) Recta normal

26) Recta tangente

## Bibliografía

*Tareas Plus*. (04 de noviembre de 2012). Recuperado el 04 de noviembre de 2012, de Tareas Plus: <http://www.tareasplus.com/derivada-de-la-funcion-seno-de-x-demostracion/>

*YouTube*. (04 de noviembre de 2012). Recuperado el 04 de noviembre de 2012, de YouTube: <http://www.youtube.com/watch?v=A1QuyolvHNE>

David. (04 de noviembre de 2012). *Tablas Matemáticas de David: Derivada Funciones Trig*. Recuperado el 04 de noviembre de 2012, de Tablas Matemáticas de David: Derivada Funciones Trig: <http://math2.org/math/derivatives/more/es-trig.htm>

Courant, Fritz, Jhon Richard (1999). *Introducción al Cálculo Matemático. Vol. 1 y 2*. Mexico: Limusa.

Lages Lima, Elon (1982). *Curso de Analice. Vol. 1*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. República Dominicana: CNPQ.

Peláz Bruno Fernando (2001). *Cálculo I*. Montevideo: Editorial solares.

Peña Geraldino, Rafael (1997). *Matemática básica superior. edición corregida*. República Dominicana: Editorial Antillas.

Larson Hostetler Edwards. *Calculo I*, Octava edición. Mac Graw Hill.

[WWW.Thales.cica.es](http://WWW.Thales.cica.es)

[WWW.Vitutor.com](http://WWW.Vitutor.com)

[WWW.Unizar.com](http://WWW.Unizar.com)

[WWW.Itlalaguna.edu.mx](http://WWW.Itlalaguna.edu.mx)

[WWW.Ematematicas.net](http://WWW.Ematematicas.net)

Sobel Max; Lerner Norbert, (2006). *Precálculo*. 6ta edición, México: editora Pearson Educación.

Baldor Aurelio, (1994). *Algebra*. Undécima edición, México: editora Codice América, S.A. Santillana I. serie umbral, (educación media). (2001), 1ra edición, Rep.Dom: Editora Santillana

Demana; Waits; Foley; Kennedy y Blitzer. Matemáticas universitarias introductorias con nivelador matlab. (2009), 1ra edición, México: Editora Pearson Educación. 448 pág.

Peña Geraldino, Rafael. Matemática Básica Superior, (2005), 4ta edición, Republica Dominicana. Editorial Antillanas.

Ecuaciones lineales y cuadráticas <http://www.vitutor.com/ecuaciones>

Los siete puentes de konigsbers en <http://www.aulademate.com>

Los siete puentes de konigsberghsber [http://es.wikipedia.org/wiki/Problema\\_de\\_los\\_puente](http://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_los_puente)

Biografía de Eulers: <http://es.wikipedia.org/wikileonar-euler>

Imagen de Eulers; <http://www.biografiasyvidas.com/biografia,euler>

Imagen de la gaviota: Autor y fuente desconocida (Pendiente)

<http://www.amolasmates.es/pdf/Temas/1BachCT/Limite%20de%20una%20funcion.pdf>

<http://www.mitecnologico.com/Main/PropiedadesDeLosLimitesh><http://www.mitecnologico.com/Main/PropiedadesDeLosLimitesh>

<http://www.vadenumeros.es/primerolimites-de-funciones.htm>

<http://www.youtube.com/watch?v=eMNLTTV2Rpc>

[http://es.wikipedia.org/wiki/Regla\\_del\\_cociente](http://es.wikipedia.org/wiki/Regla_del_cociente)

Algunos amigos y compañeros

<http://www.decarcaixent.com>

<http://forum.lawebdefisica.com/entries/327-Demostraci%C3%B3n-de-la-derivada-del-producto>

Wikipedia, la enciclopedia libre. “Teorema del valor medio de Cauchy”. En:

[http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_del\\_valor\\_medio\\_de\\_Cauchy](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_valor_medio_de_Cauchy)

Pérez, J. (2006). Cálculo Diferencial e Integral. España.

W., Earl (1989). Cálculo con Geometría Analítica Segunda Edición. México. Editorial Iberoamericana.

Purcell y otros (2007). Cálculo Novena Edición. México. Editor: Luis Miguel Cruz Castillo.

Dervor.” teorema de Rolle”. En: [http://www.dervor.com/teoremas/teorema\\_rolle.html](http://www.dervor.com/teoremas/teorema_rolle.html)

Dervor.” teorema del valor medio o de Lagrange”. En: [http://www.dervor.com/teoremas/teorema\\_valor\\_medio.html](http://www.dervor.com/teoremas/teorema_valor_medio.html)

Dervor. “teorema de Cauchy o teorema del valor medio generalizado”. En:

[http://www.dervor.com/teoremas/teorema\\_cauchy.html](http://www.dervor.com/teoremas/teorema_cauchy.html)

*lawebdelafisica.com*. (01 de septiembre de 2010). Obtenido de *lawebdelafisica.com*:  
<http://forum.lawebdefisica.com/entries/461-Demostraci%C3%B3n-de-la-derivada-de-una-funci%C3%B3n-elevada-a-otra-funci%C3%B3n>

*youtube*. (9 de enero de 2010). Obtenido de *youtube*:  
[https://www.youtube.com/watch?v=XZKE\\_1T1dkc](https://www.youtube.com/watch?v=XZKE_1T1dkc)

<http://es.wikipedia.org/wiki/Derivada>

[http://es.wikipedia.org/wiki/Logaritmo\\_natural](http://es.wikipedia.org/wiki/Logaritmo_natural)

[http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Logaritmo\\_neperiano.JPG](http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Logaritmo_neperiano.JPG)

*www.pesonales.ya.com*. (7 de Junio de 2007). Recuperado el 30 de Octubre de 2012, de *www.pesonales.ya.com*: <http://www.pesonales.ya.com/casachi/mat/hiperbola01.pdf>

Delgado, J. M. (s.f.). *www.tareasplus.com*. Recuperado el 30 de Octubre de 2012, de *www.tareasplus.com*: <http://www.tareasplus.com/derivada-de-seno-hiperbolico-y-coseno-hiperbolico/>

Pino, C. E. (s.f.). *www.cmap.upb.edu.co*. Recuperado el 30 de Octubre de 2012, de *www.cmap.upb.edu.co*:  
[http://cmap.upb.edu.co/rid=1151611180535\\_1484584217\\_4021/TRIGONOMETR%C3%8DA%20HIPERB%C3%93LICA.pdf](http://cmap.upb.edu.co/rid=1151611180535_1484584217_4021/TRIGONOMETR%C3%8DA%20HIPERB%C3%93LICA.pdf)

*www.tareasplus.com*. (s.f.). Recuperado el 30 de Octubre de 2012, de *www.tareasplus.com*:  
<http://www.tareasplus.com/derivada-de-seno-hiperbolico-y-coseno-hiperbolico/>

[http://es.wikipedia.org/wiki/Derivada\\_plantea\\_que](http://es.wikipedia.org/wiki/Derivada_plantea_que)

[http://es.wikipedia.org/wiki/Regla\\_del\\_cociente](http://es.wikipedia.org/wiki/Regla_del_cociente)

Algunos amigos y compañeros

Wikipedia, la enciclopedia libre. “Teorema del valor medio de Cauchy”. En:

[http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_del\\_valor\\_medio\\_de\\_Cauchy](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_valor_medio_de_Cauchy)

Pérez, J. (2006). Cálculo Diferencial e Integral. España.

W., Earl (1989). Cálculo con Geometría Analítica Segunda Edición. México. Editorial Iberoamericana

Purcell y otros (2007). Cálculo Novena Edición. México. Editor: Luis Miguel Cruz Castillo.

Dervor.” teorema de Rolle”. En:

[http://www.dervor.com/teoremas/teorema\\_rolle.html](http://www.dervor.com/teoremas/teorema_rolle.html)

Dervor.” teorema del valor medio o de Lagrange”.En:

[http://www.dervor.com/teoremas/teorema\\_valor\\_medio.html](http://www.dervor.com/teoremas/teorema_valor_medio.html)

Dervor. “teorema de Cauchy o teorema del valor medio generalizado”. En:

[http://www.dervor.com/teoremas/teorema\\_cauchy.html](http://www.dervor.com/teoremas/teorema_cauchy.html)



Revizado el 16 de Septiembre del 2013.

Wilton Oltmanns