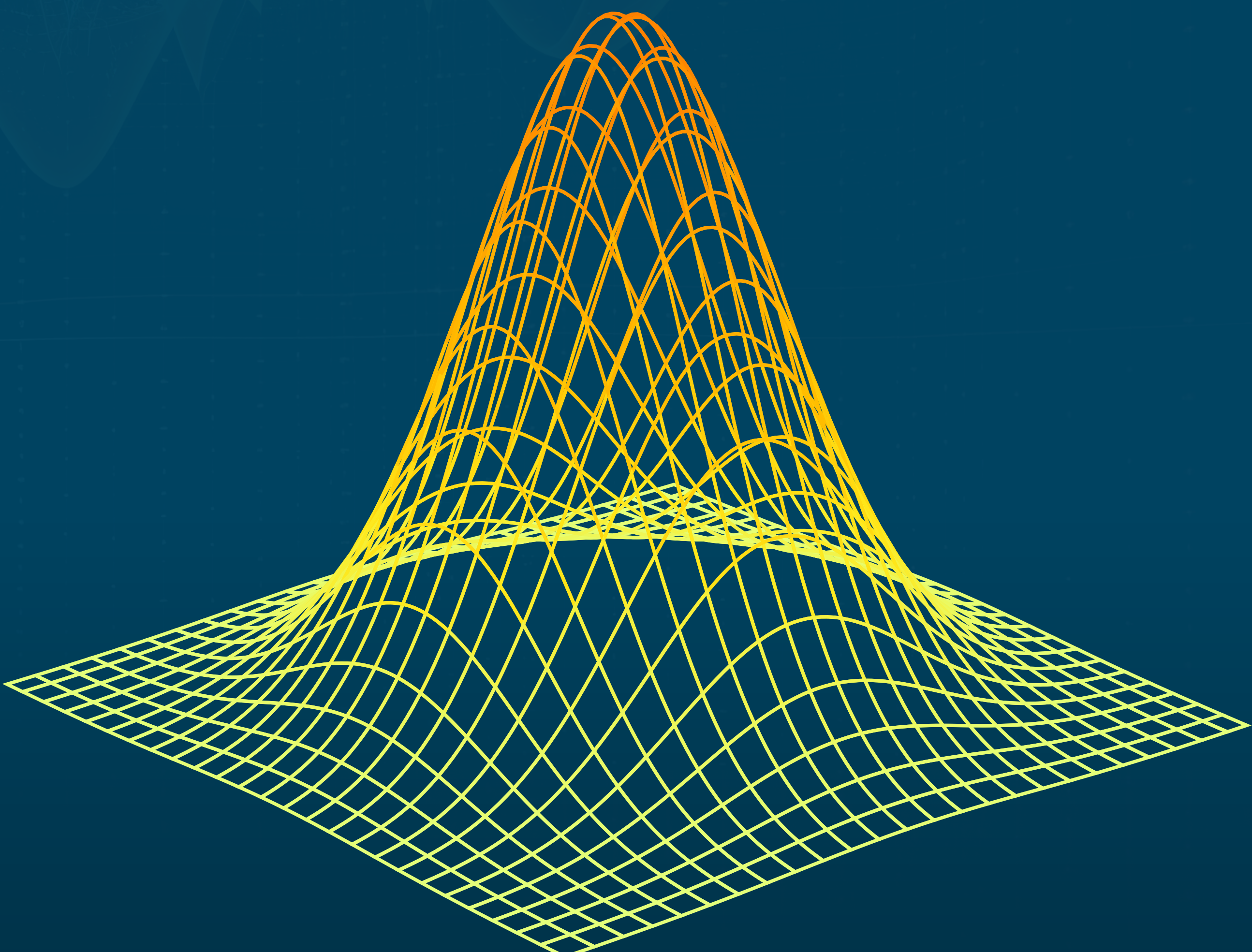
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

UN ENFOQUE TEÓRICO Y PRÁCTICO

BY Ruddy Caja



FUTURA
ANALITICA AVANZADA

Probabilidad y Estadística [1]

Un enfoque teórico y práctico

Ruddy Caja P.[2]

1 de diciembre de 2018

[1] Primer compendio de Estadística
[2] https://futuradata.pe

|1 Dedicado a mis padres Vicente y Olga quienes son fuente de sabiduría infinita, inculcaron en mí y mis hermanos la necesidad de conocimiento hacia lo extraordinario.

Índice general

Prefacio

La elaboración del presente libro surgió del interés personal de dar al estudiante universitario una guía teórica y práctica de la teoría de probabilidad y asímismo una introducción, lo más acertada posible, de estadística y distribuciones de probabilidad.

Este libro es una recopilación de varios textos reconocidos, como [1] (Walpole: Probabilidad y Estadística para Ingenieros), [2] (Paul L. Meyer: Probabilidad y aplicaciones estadísticas), [3] (G. Canavos: Probabilidad y Estadística , aplicaciones y métodos), [4](Carlos Alberola López: Probabilidad, variables aleatorias y procesos estocásticos: Una introducción orientada a las telecomunicaciones) entre otros de igual relevancia. He hecho uso específico de las definiciones y de los ejemplos que contenían sus publicaciones con la intensión "sana"de consolidar todo ese conocimiento en un material didáctico para el estudiante universitario.

Espero que con los capítulos abordados se pueda dar una primera perspectiva de los conceptos que atañen a la probabilidad y pensar en que no es tan complejo como se esperaría de cursos netamente numéricos sino que es más intuitivo en muchos aspectos.

Como es de conocimiento, la materia es clásica por cuanto la bibliografía es extensa, sin embargo el autor ha pretendido escribir un libro para estudiantes de pregrado de ingeniería por ello se ha profundizado un poco en las definiciones explícitas de cada aspecto de la teoría de probabilidades. Es así que se tienen aproximadamente 50 definiciones en los 7 capítulos abordados y asimismo 50 ejemplos prácticos en total.

El orden con el que se está armando este primer proyecto es el que se sigue en la malla curricular en todas las universidades; El capítulo 1, se centra en los experimentos aleatorios, cómo definir un evento aleatorio y asimismo cómo calcular los espacios muestrales con algunos métodos de conteo. El capítulo 2, se enfoca en la probabilidad condicional e independencia de eventos, se da un primer vistazo al teorema de Bayes, recordemos que la teoría Bayesiana es, por no decir menos, una nueva rama de la estadística con definiciones y axiomas propios. Seguido, y sin perder secuencialidad, nos adentramos en el capítulo 3, en donde se explican conceptos como variables aleatorias, se intuyen algunas distribuciones de probabilidades y se brindan definiciones de variables aleatorias bidimensionales y n-dimensionales. Los capítulos 4 y 5 son complementarios, abordan el tratamiento de las variables, y se definen conceptos clave en la estadística como la esperanza y la varianza, los momentos de orden que definen a una variable aleatoria también se explican en profundidad. Finalmente los capítulos 6 y 7, son en escencia, las distribuciones más ampliamente estudiadas en diversas bibliografías. Se ha tratado de nutrir la visualización de éstas distribuciones con gráficos creados con la librería $ggplot2$ en RCran.

Creo que será un buen material de consulta y deseo de corazón pueda ser valorado por Uds. quienes son la base de éste esfuerzo, quiero que todos hagamos la diferencia. Hagamos estadística.

1

Espacios de probabilidad

> *"Hacer predicciones es muy difícil, especialmente cuando se trata del futuro"*
>
> – Niels Bohr, *1885 - 1962*

1.1. Causalidad y Aleatoriedad

Supongamos que vive en un apartamento de 4 pisos y deja caer una bola de billar, suponga además que no existe resistencia del aire y que como bien sabemos la gravedad es una constante, en este experimento determinamos el tiempo que la bola de billar toca el suelo. ¿Y si repetimos el experimento muchas veces?. Por otro lado, suponga que le preguntan cuál será la cara que mostrará una moneda luego de ser lanzada. En ambos ejemplos, se presentan dos fenómenos distintos.

- El primero pertenece a un fenómeno **determinista**, aquellos en los que la relación *causa-efecto* está definida y que sea el número de experimentos que se hagan siempre darán el mismo resultado.

- El segundo pertenece a un fenómeno **aleatorio**, el los cuales aún repitiendo el experimento no se sabrá con certeza el resultado de la misma, siempre dentro de un conjunto posible de resultados.

Según los dos ejemplos anteriores, el primero se enmarca dentro de los ***modelos matemáticos*** dado que existe una ecuación que lo determina y siempre dará el mismo resultado. La Teoría de la probabilidad brinda ***modelos aleatorios o estocásticos*** mediante los cuales se podrán conocer los comportamientos de los fenómenos aleatorios, en términos de probabilidad.

1.2. Axiomas de probabilidad

En el ejemplo anterior, ***lanzar una moneda***, si se conocieran todas las condiciones del entorno se podría saber exactamente qué lado de la moneda nos resultaría y se podría resolver mediante un sistema de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, llegar a determinar todas las condiciones para hallar la ecuación correspondiente se vuelve utópico.

Consideremos, en cambio, lanzar la moneda muchas veces y registrar la proporción de veces que salió cara.

Imaginemos el siguiente resultado, *10 repeticiones del experimento que consiste en lanzar la moneda 1000 veces:*

0.4956 0.4990 0.5101 0.4987 0.4989 0.5013 0.4912 0.4993 0.4921 0.4998

Entonces la Teoría de la probabilidad se encarga de modelizar, no el resultado de una realización del experimento, sino de la proporción de veces que se darían los resultados, en una larga serie de repeticiones (ideales) del mismo. La formulación de Probabilidad que se utiliza actualmente proviene de *A. Kolmogorov*, quien definió la probabilidad mediante un sistema de axiomas. Si se pudiera definir la probabilidad como el *límite de frecuencias relativas*: ¿qué propiedades tendría que cumplir?. La Ley de Grandes Números mostrará que ésta definición es coherente con la noción de probabilidad como frecuencia relativa.

El ***espacio de probabilidad*** (o espacio muestral) asociado a un ***eperimento aleatorio***, es el conjunto de resultados del mismo, o cualquier conjunto que lo contenga. Se lo denota tradicionalmente con la letra Ω.

Veamos los siguientes experimentos aleatorios:

a) Lanzar dos dados y registrar los resultados

b) Elegir una persona al azar de entre una población y registrar su edad y peso

En el ejemplo *a*) tendríamos $\Omega = \{(a,b) : a,b \in \{1..,6\}\}$. En el ejemplo *b*) se tiene $\Omega = \Re x \Re = \{(a,b) : a,b \in \Re_+\}$.

Se denomina ***evento*** a los subconjuntos de Ω. Por ejemplo en el ejemplo *a*) el subconjunto $A = \{(1,1),(2,2),(3,3)...(6,6)\}$ es el "evento de que salgan números iguales"; el subconjunto $B = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4)...(6,6)\}$ es el "evento de que salgan números pares".

Las Operaciones habituales con conjuntos tienen una traducción intuitiva en términos probabilísticos: $A \cap B$ es el evento "A y B ocurren simultáneamente"; $A \cup B$ es "ocurre al menos uno de los dos"; el complemento A' es el evento "no ocurre A"; la diferencia $A - B = A \cup B'$ es "ocurre A pero no B". Si $A \cap B = \emptyset$, "A y B no pueden ocurrir simultáneamente"; si $A \subseteq B$, "siempre que ocurre A, ocurre B".

Definición 1.1. *Una probabilidad (o medida de probabilidad) es una función de P que a cada evento A le hace corresponder un número real P(A) con las siguientes propiedades:*

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ para todo $A \subseteq \Omega$
2. $P(\Omega) = 1$
3. (aditividad) $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
4. (continuidad) Sean $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ..., A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq ...$ una sucesión infinita de eventos. Entonces

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Para aclarar la notación usada en el último axioma: si $A_n (n = 1, 2, 3...)$ es una sucesión de eventos, se define $\bigcup_n A_n = \{\omega : \omega \in A_n \text{ para algún } n\}$ y $\bigcap_n A_n = \{\omega : \omega \in A_n \text{ para todo } n\}$. La motivación de los axiomas se puede comprender a partir de la idea intuitiva de la probabilidad como "límite de frecuencias relativas". Supongamos un experimento (por ejemplo, un tiro de moneda) repetido N veces. Para cada evento A, sea $f_N(A)$ la cantidad de veces que ocurre A en las N repeticiones (llamada $frecuencia$ de A). Se verifica fácilmente que cumple:

$$0 \leq f_N(A) \leq f_N(\Omega) = N$$

$$A \cap B = \emptyset \Longrightarrow f_N(A \cup B) = f_N(A) + f_N(B)$$

Sea $g_N(A) = f_N(A)/N$ (la proporción de veces que ocurre A, o *frecuencia relativa*). Entonces g_N como función de A cumple los axiomas **1, 2 y 3**. Si se pudiera definir $P(A)$ como $\lim_{N\to\infty} g_N(A)$, entonces **P** cumpliría esos tres axiomas. El axioma **4** no se puede deducir de los anteriores, y es necesario "por motivos técnicos": muchos resultados no se podrían demostrar sin usarlo.

Es fácil extender **3** a cualquier familia finita de eventos. Sean $A_i (i = 1, 2, 3...n)$ eventos disjuntos (o sea $i \neq j \Longrightarrow A_i \cap B_j = \emptyset$). Entonces:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{1.1}$$

El lector puede demostrar esta propiedad, llamada *aditividad finita*, por inducción, teniendo en cuenta que para cada n los eventos A_{n+1} y $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ son disjuntos. El mismo resultado vale para $n \to \infty$:

$$P\left(\bigcup_{i} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{1.2}$$

Para demostrarla, sean $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y $B = \bigcup_i A_i = \bigcup_n B_n$. Entonces hay que probar que $P(B) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$, lo que es consecuencia inmediata de **4**, pues $B_n \subseteq B_{n+1}$.

1.3. Resultados igualmente probables

La suposición que más comunmente se hace para espacios muestrales finitos es que todos los resultados son igualmente probables. No necesariamente cierta y debe justificarse con cuidado.

Fórmula de Laplace: Si el experimento conduce a un espacio muestral finito con n resultados posibles $\Omega = \{w_1, w_2, w_3...w_n\}$, **todos ellos igualmente probables**, la probabilidad de un suceso A que contiene m de estos resultados se obtiene mediante la fórmula

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a A}}{\text{número de casos posibles } \Omega} \tag{1.3}$$

Es importante comprender que la expresión anterior $P(A)$ es sólo una consecuencia de la suposición de que todos los resultados son igualmente probables y sólo es aplicable cuando se satisface esta suposición. Sin duda no sirve como una definición general de probabilidad. A modo didáctico, se tomarán dos ejemplos de Meyer[2], que a mi parecer es muy didáctico:

Ejemplo 1.1. Se lanza un dado y se supone que *todos los resultados son igualmente probables*. El evento A ocurre si y sólo si aparece un número mayor que 4. Esto es, $A = \{5, 6\}$. Por lo tanto, $P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$.

Ejemplo 1.2. Se lanza una moneda normal dos veces. Sea A el evento: {sale una cara }. Para evaluar $P(A)$ un análisis del problema podría ser el siguiente. El espacio muestral es $\Omega = \{0, 1, 2\}$, *donde cada uno de los resultados representa el número de caras que ocurren.* Por lo tanto $P(A) = \frac{1}{3}$. Este análsis es ***obviamente incorrecto***, puesto que en el espacio muestral antes considerado, todos los resultados **no** son igualmente probables. A fin de aplicar el método anterior deberíamos considerar, en su lugar, el espacio muestral $\Omega' = \{CC, CS, SC, SS\}$. En este espacio muestral todos los resultados son igualmente probables y, por lo tanto, obtenemos para la solución correcta de nuestro problema, $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Podríamos emplear en forma correcta el espacio muestral Ω como sigue: los resultados 0 y 2 son igualmente probables, mientras que el resultado 1 es probablemente el doble de cada uno de los otros. Por lo tanto $P(A) = \frac{1}{2}$, lo cual concuerda con la respuesta anterior.

El ejemplo 1.2 ilustra dos puntos. Primero, debemos estar seguros por completo de que todos los resultados que se pueden suponer son igualmente probables antes de utilizar el procedimiento anterior. Segundo, a menudo podemos reducir el problema a uno, en el cual todos los resultados son igualmente posibles, mediante una elección apropiada del espacio muestral. Cada vez que sea posible se debe hacer esto, puesto que en general simplifica sus cálculos.

1.4. Métodos de conteo

Ya hemos explorado la concepción del cálculo de una probabilidad $P(A)$, no obstante se nos ocurre que contar tanto los casos favorables y los casos totales se puede volver muy complejo, para ello se han definido varios métodos de conteo que tratan de mitigar tales inconvenientes, así se incluye el concepto de *factorial*, combinatoria, permutaciones y variaciones, veremos cada una de estas definiciones en los siguientes items.

1.4.1. Factorial

Si n es un entero positivo, definimos $n! = (n)(n-1)(n-2)...(2)(1)$, y lo llamamos $n-factorial$. También definimos 0!=1.

1.4.2. Permutaciones

Imaginemos que tenemos una cerradura que sólo se abre con un juego de 4 digitos. Aquí se verifica **que el orden sí importa**, en este sentido es correcto decir que para abrir la cerradura se necesita la *permutación de 4 dígitos*. En general, consideremos el esquema siguiente. Agrupar los n objetos es equivalente a ponerlos, en algún orden específico, en una caja con $n-$ *compartimientos*. La primera casilla se puede llenar de cualquiera de las n maneras, la segunda de cualquiera de la $n-1$ maneras,...., y la última casilla de una sola manera. Por lo tanto aplicando el principio de mutiplicación vemos que que la caja se puede llenar de $n(n-1)(n-2)...(2)(1)$ maneras

1	2	3	.	.	.	n

Así la permutación de n objetos diferentes está dado por

$$_nP_n = n!$$

Permutaciones sin reposición: En este caso si se reduce el número de casos en cada paso y desea escoger r objetos de un conjunto de n. Lo denotamos por $_nP_r$. Recurrimos otra vez al esquema anterior de llenar una caja que tiene n compartimientos; ahora nos detenemos después que se ha llenado el compartimiento *r-ésimo*. Así, el primer compartimiento puede llenarse de n maneras, el segundo de $n-1$ maneras..., y el *r-ésimo* de $n-(r-1)$ maneras. Así aplicando el principio de multiplicación, $n(n-1)(n-1)...(n-r+1)$ se puede escribir como:

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$ [1]

Por ejemplo, ¿cómo se puede elegir 3 bolillas de un total de 16?. La primera bolilla se puede elegir de 16 maneras, la segunda de 15 maneras pues ya elegiste una y la tercera de 14 maneras pues ya elegiste dos anteriores, de esta forma existen 16x15x14 = 3,360 maneras de elegir tres bolillas de un total de 16.

Permutaciones con reposición: En este caso no se reduce el numero de casos en cada paso, se desea escoger r objeto de un conjunto de n. Se puede volver a usar el esquema anterior, llenar una caja que tiene n compartimientos; ahora nos detenemos después que se ha llenado el compartimiento

[1] Permutaciones de r tomados de n, se conoce como Variación

r-ésimo. Así, el primer compartimiento puede llenarse de n maneras, el segundo de n maneras..., y el *r-ésimo* de n maneras. Así aplicando el principio de multiplicación, $n(n)(n)...(n)$ se puede escribir como:

$$n^r$$

Permutaciones cuando no todos los objetos son diferentes: Supongamos que tenemos n objetos tales que hay n_1 de una clase, n_2 de otra clase,..., n_r de una $r-esima$ clase, donde $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$. Entonces, el número de permutaciones de estos n objetos esta dada por

$$P^n_{n_i} = \frac{n!}{n_1!.n_2!.n_3!...n_r!}$$ [2]

1.4.3. Combinaciones

Imaginemos que tenemos una ensalada de frutas, tiene plátanos, manzanas y fresas. Aquí se verifica **que el orden no importa**, pues da lo mismo que se combinen plátanos, fresas y manzanas o manzanas, fresas y plátanos en este sentido es correcto decir que para obtener la ensalada de frutas se tiene una *combinación de 3 ingredientes.*

Combinaciones sin reposición: Consideremos nuevamente n objetos diferentes. Esta vez estamos interesados en contar el número de maneras como podemos escoger r de esos n objetos sin considerar el orden. Por ejemplo, tenemos los objetos *a, b, c y d*, y $r = 2$; deseamos contar *ab, ac, ad, bc, bd y cd*. En otras palabras, *no* contamos *ab y ba* puesto que los mismos objetos están relacionados y sólo difiere en orden. Veamos

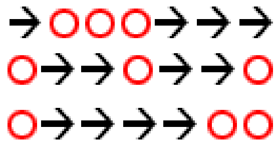
$$\binom{n}{r} = C^r_n = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$ [3]

Combinaciones con reposición: Esta vez estamos interesados en contar el número de maneras como podemos escoger r de esos n objetos sin considerar el orden pero el evento de interes se puede repetir

$$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

[2]Se pide al lector que asuma que cada clase es de uno. Llegará al factorial
[3]El número de maneras de elegir r objetos diferentes, sin considerar el orden

Por ejemplo, digamos que tenemos 5 sabores de helados: n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, se pueden tomar tres paladas. ¿De cuantas maneras se pueden hacer? Algunos ejemplos del espacio muestral pueden ser: $\{n_2, n_2, n_2\}\{n_1, n_3, n_5\}\{n_1, n_5, n_5\}$...



El gráfico muestra que se dieron 3 paladas al 2do sabor o 1 palada al primero, tercero y quinto. Es decir hizo 3 repeticiones (como si fuese uno) de un evento haciendo constantes las otras 4. Si aplicamos la ecuación antes mencionada se tendrían 35 posibilidades de dar 3 paladas con repetición.

2

Probabilidad Condicional e Independencia

> *"Nunca se puede predecir un acontecimiento físico con una precisión absoluta"*
>
> – Max Planck, *1858 - 1947*

2.1. Probabilidad Condicional

[1] Supongamos que tenemos una urna con 80 artículos sin defecto y 20 artículos defectuosos. Pensemos en elegir dos artículos a) con sustitución y b) sin sustitución. Definamos los eventos siguentes:

$$A = \{\text{el primer artículo es defectuso}\}$$

$$B = \{\text{el segundo artículo es defectuso}\}$$

Si escogemos con sustitución, $P(A) = P(B) = 20/100 = 1/5$. Cada vez que elegimos, en el lote hay 20 artículos defectuosos de un total de 100. Sin embargo, si elegimos sin sustitución, los resultados no son totalmente inmediatos. Todavía es verdad, por supuesto, que $P(A) = 1/5$. Pero, ¿cual es el valor de $P(B)$?. Es evidente que con el propósito de calcular $P(B)$ deberíamos conocer la composición del lote cuando se escoge el segundo artículo. **Deberíamos saber si el evento A ocurrió o no**. Sean A y B dos eventos asociados con un experimento ε. Indiquemos con $P(B/A)$ la **probabilidad condicional** del evento B, **dado que ha ocurrido** A.

En el ejemplo, $P(B/A) = 19/99$. Por que si A ha ocurrido, entonces, al sacar por segunda vez, sólo quedan 99 artículos, de los cuales 19 son defectuosos.

Cada vez que calculamos $P(B/A)$, escencialmente estamos calculando $P(B)$ **respecto al espacio muestral reducido de** A, en vez del espacio muestral ori-

[1] Definición basada en Paul L. Meyer. Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas

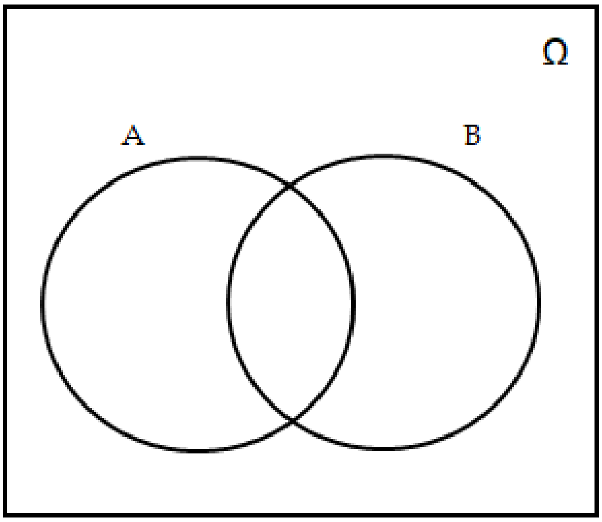


Figura 2.1: Diagrama de Venn
Fuente: Creación propia

ginal Ω. Consideremos el diagrama de Venn de la figura 2.1. Cuando calculamos $P(B)$ nos preguntamos qué tan probable es que estemos en B, sabiendo que debemos estar en Ω, y cuando evaluamos $P(B/A)$ nos preguntamos **qué tan probable es que estemos en B, sabiendo que debemos estar en A**.(Esto es, el espacio muestral se ha reducido de Ω a A).

Pronto se dará una definición formal de $P(B/A)$. Por el momento, sin embargo, seguiremos con nuestra noción intuitiva de probabilidad condicional y consideraremos un ejemplo.

Ejemplo 2.1. Se lanzan dos dados normales y se anotan los resultados (x_1, x_2), donde x_i es el resultado del *i-ésimo*dado, $i = 1, 2$. Por tanto, el espacio muestral Ω se puede representar por el arreglo siguiente con 36 resultados igualmente posibles:

$$\Omega = \begin{pmatrix} (1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)(1,6) \\ (2,1)(2,2)(2,3)(2,4)(2,5)(2,6) \\ (3,1)(3,2)(3,3)(3,4)(3,5)(3,6) \\ (4,1)(4,2)(4,3)(4,4)(4,5)(4,6) \\ (5,1)(5,2)(5,3)(5,4)(5,5)(5,6) \\ (6,1)(6,2)(6,3)(6,4)(6,5)(6,6) \end{pmatrix}$$

Consideremos los dos eventos siguientes

$$A = \{(x_1, x_2)|x_1 + x_2 = 10\}, B = \{(x_1, x_2)|x_1 > x_2\}$$

Asi:

A = {(5,5),(4,6),(6,4) } y
B = { (2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5) }.

Por tanto, $P(A) = \frac{3}{36}$ y $P(B) = \frac{15}{36}$. Además, $\mathbf{P(B/A)} = \frac{1}{3}$, ya que el espacio muestral es ahora A (que son tres resultados), y sólo uno de ellos es consistente con el evento B. De manera semejante, podemos calcular $\mathbf{P(A/B)} = \frac{1}{15}$. Finalmente, calculemos $P(A \cap B)$. El evento $(A \cap B)$ ocurre si y sólo si la suma de los dados es diez y el primer dado indica un valor mayor que el segundo. Solamente hay **un** resultado y, por tanto, $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$. Si observamos con cuidado los diversos números que antes hemos calculado, concluímos que se cumple lo siguiente:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Consideremos que $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$ en cada caso.

Hasta ahora hemos hecho un deducción de la definición de Probabilidad Condicional, mayor detalle en Paul L. Meyer[2].

Ejemplo 2.2. Supóngase que en una oficina hay 100 máquinas de escribir. Algunas de esas máquinas son eléctricas (E),mientras que otras son manuales (M). Además algunas son nuevas (N), mientras las otras son usadas (U). El cuadro 2.1 da el número de máquinas de cada categoría. Una persona entra a la oficina, **escoge una máquina al azar** y descubre que es **nueva**. ¿Cuál es la probabilidad de que sea **eléctrica**?.

	E	M	
N	40	30	**70**
U	20	10	**30**
	60	**40**	**100**

Cuadro 2.1: Distribución de máquinas

En este contexto lo que se nos solicita es $\mathbf{P(E/N)}$. De acuerdo a la fórmula que logramos inducir, el **espacio muestral** acotado es N (es decir, las 70 máquinas nuevas) y sobre ésta se debe encontrar la proporción de E en N, entonces tenemos que: $\mathbf{P(E/N)} = \frac{40}{70} = \frac{4}{7}$. Usando la definición de probabilidad condicional obtendríamos:

$$\mathbf{P(E/N)} = \frac{P(E \cap N)}{P(N)} = \frac{40/100}{70/100} = \frac{4}{7}$$

La consecuencia inmediata a partir de la definición de **probabilidad condicional** se obtiene escribiendola de la manera siguiente

$$P(A \cap B) = P(B/A)P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A/B)P(B)$$

Esto también se conoce como el ***teorema de multiplicación*** de probabilidades.

Ejemplo 2.3. Consideremos otra vez el lote que consta de 20 artículos defectuosos y 80 sin defectos. Si se escogen 2 artículos al azar, sin sustitución, ¿cuál es la probabilidad de que ambos artículos sean defectuosos?

Como antes, definimos los eventos A y B como sigue:

$$A = \{\text{el primer artículo es defectuso}\}$$

$$B = \{\text{el segundo artículo es defectuso}\}$$

Por lo tanto $P(A \cap B)$, se puede calcular como $P(B/A)P(A)$. Pero $P(B/A) = 19/99$, mientras que $P(A) = 1/5$. Por lo tanto:

$$P(A \cap B) = \frac{19}{495}$$

Ejemplo 2.4. Falsos positivos. Supongamos un grupo de personas en las que el **1 % sufre cierta enfermedad**, y el resto está bien. Así definimos dos eventos:

$Enfermo = \{\text{una persona está enferma}\}$ y $Sano = \{\text{una persona está sana}\}$

$P(Enfermo) = 1\,\%$ y $P(Sano) = 99\,\%$

Supongamos que aplicamos **una prueba** a una persona que **no tiene la enfermedad**, hay una posibilidad de 1 % de conseguir un falso positivo, esto es:

$Positivo = \{\text{la prueba da positivo}\}$ y $Negativo = \{\text{la prueba da negativo}\}$

$P(Positivo/Sano) = 1\,\%$ y $P(Negativo/Sano) = 99\,\%$

Finalmente, supongamos que aplicando la prueba a una persona que tiene la enfermedad, hay una posibilidad de 1% de un falso negativo

$P(Negativo/Enfermo) = 1\,\%$ y $P(Positivo/Enfermo) = 99\,\%$

Se pide calcular:

- ***La fracción de individuos en el grupo que están sanos y dan negativo***

  $P(Sano \cap Negativo) = P(Sano)P(Negativo/Sano) = 99\,\% x 99\,\% = 98{,}01\,\%$

- ***La fracción de individuos en el grupo que están enfermos y dan positivo***

  $P(Enfermo \cap Positivo) = P(Enfermo)P(Positivo/Enfermo) = 1\,\% x 99\,\% = 0{,}99\,\%$

- ***La fracción de individuos en el grupo que dan falso positivo***

  $P(Sano \cap Positivo) = P(Sano)P(Positivo/Sano) = 99\,\% x 1\,\% = 0{,}99\,\%$

- ***La fracción de individuos en el grupo que dan falso negativo***

  $P(Enfermo \cap Negativo) = P(Enfermo)P(Negativo/Enfermo) = 1\,\% x 1\,\% = 0{,}01\,\%$

- ***Además, la fracción de individuos en el grupo que dan positivo***

  $P(Positivo) = P(Sano \cap Positivo) + P(Enfermo \cap Positivo) = 0{,}99\,\% x 0{,}99\,\% = 1{,}98\,\%$

- ***Finalmente, la probabilidad de que un individuo realmente tenga la enfermedad, dado un resultado de la prueba positivo***

  $P(Enfermo/Positivo) = \frac{P(Enfermo \cap Positivo)}{P(Positivo)} = \frac{0{,}99\,\%}{1{,}98\,\%} = 50\,\%$

Veamos la definición de Probabilidad Condicional.

Definición 2.1. *Si A y B son eventos con P(B)>0, la probabilidad condicional de A dado B es*

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (2.1)$$

de la definición es inmediato que

$$P(A \cap B) = P(A/B)P(B) \tag{2.2}$$

Definición 2.2. *Los eventos A y B son independientes si*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{2.3}$$

2.2. Modelos basados en probabilidades condicionales

De pronto en esta sección haremos una generalización del problema de la Probabilidad Condicional (Teorema de probabilidad Total) y así su formulación en el Teorema de Bayes. Veamos.

Definición 2.3. *Decimos que los eventos $B_1, B_2, ..., B_k$ representan una* ***partición*** *del espacio muestral Ω si:*

- $B_i \cap B_j = \varnothing$ para toda $i \neq j$
- $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = \Omega$
- $P(B_i) > 0$ para todo i

En otras palabras cuando se efectua el experimento ε, ocurre uno y $solo$ uno de los eventos B_i. (Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado $B_1 = \{1,2\}, B_2 = \{3,4,5\}$ y $B_3 = \{6\}$ representarían una partición del espacio muestral (porque se tienen eventos de 1 a 6 una única vez), mientras que $C_1 = \{1,2,3,4\}$ y $C_2 = \{4,5,6\}$ no lo harían). Sea A algún evento respecto a Ω y sea $B_1, B_2, B_3, ..., B_k$ una partición de Ω. El diagrama de Venn de la figura 2.2 ilustra esto para $k = 7$.Por tanto, podemos escribir

$$A = A \cap B_1 \cup A \cap B_2 \cup A \cap B_3 \cup ... \cup A \cap B_k$$

Por supuesto alguno de los conjuntos $A \cap B_j$ pueden ser vacíos, pero esto no invalida la anterior descomposición de A. Lo importante es que todos los eventos $A \cap B_1, A \cap B_2, ..., A \cap B_k$ son parejas **mutuamente excluyentes**. Por lo tanto, podemos aplicar la propiedad aditiva para este tipo de eventos y escribir:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) + ... + P(A \cap B_k)$$

Sin embargo cada término $P(A \cap B_j)$ se puede escribir como $P(A/B_j)P(B_j)$ y, por tanto, obtenemos el llamado **teorema de probabilidad total**.

$$P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + ... + P(A/B_k)P(B_k)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A/B_i)P(B_i) \tag{2.4}$$

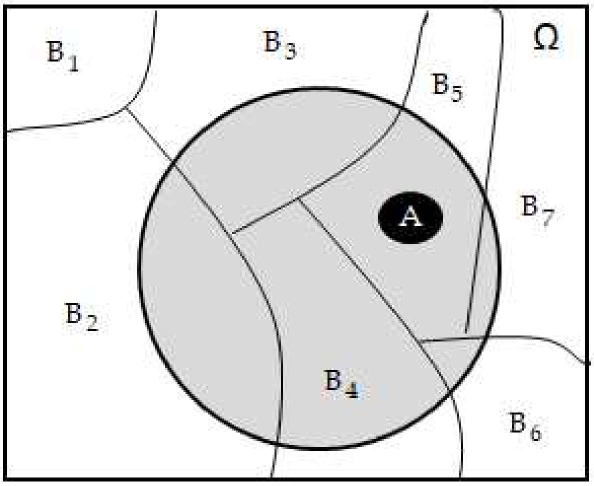


Figura 2.2: Diagrama de Venn
Fuente: Creación propia

Definición 2.4. *Puede tener interés, y de hecho en muchas ocasiones ocurre, conocer la probabilidad asociada a cada elemento de la partición dado que ha ocurrido A, es decir,* $P(B_i/A)$. *Para ello recordemos la definición de probabilidad condicionada y apliquemos el resultado anterior*

$$P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A/B_i)P(B_i)} \qquad i = 1, 2, 3...k \tag{2.5}$$

A l ecuación anterior se le conoce como **teorema de Bayes** o probabilidad de las "causas". Puesto que las B_i son una partición del espacio muestral, uno y sólo uno de los eventos B_i ocurre. Por lo tanto, la fórmula anterior nos da la probabilidad de un B_i particular (esto es, una "causa"), dado que el evento A ha ocurrido.

3

Variable aleatoria unidimensional y bidimensional

“La imaginación frecuentemente nos llevará a mundos que jamás fueron. Pero sin ella, no iremos a ningún lado”
– Carl Sagan, *1934 - 1996*

3.1. Noción general de variable aleatoria

La probabilidad es un mecanismo por medio del cual pueden estudiarse sucesos aleatorios, cuando éstos se comparan con los fenómenos determinísticos. Por ejemplo, nadie espera predecir con certeza el resultado de una experimento tan simple como el lanzamiento de una moneda. Sin embargo cualquier estudiante es capaz de determinar el tiempo que transcurrirá para un objeto que se deja caer desde una conocida altura.[1]

Definamos el experimento del lanzamiento de dos monedas y registremos sus resultados. Este experimento tiene el siguiente espacio muestral

$$\Omega = \{(C,C),(C,S),(S,C),(S,S)\}$$

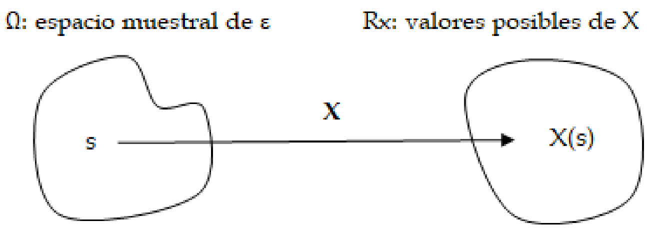
En diversas ocasiones nos interesa medir algo y acotarlo como un número. Entonces pensemos que nos interesa saber el número de caras obtenidas en los dos lanzamientos. Por lo tanto $X(C,C) = 2$, $X(C,S) = X(S,C) = 1$ y $X(S,S) = 0$.

Lo que hemos hecho es asignar un número x a cada uno de los elementos de Ω, $x = X(s)$.

Veamos algunos otros ejemplos

- número de llamadas que llegan a una central telefónica en un intervalo de tiempo

[1]Jorge Canavos, Probabilidad y Estadísticas



- altura y peso de un individuo
- suma y valor absoluto de la diferencia de caras que muestran dos dados al ser lanzados

Como vimos y reiteramos, nuestro interés al examinar el resultado de un experimento aleatorio no es tanto el espacio de probabilidad resultante, como la o las características numéricas asociadas, lo que supone cambiar nuestro objetivo de Ω a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^k$. Puesto que se trata de características numéricas ligadas a un experimento aleatorio, son ellas mismas **cantidades aleatorias**. Esto supone que para su estudio y conocimiento no bastará con saber que valores toman, habrá que conocer además la probabilidad con que lo hacen. Asi definimos el espacio de probabilidades y la variable aleatoria.

Definición 3.1. ***Espacio de probabilidades*** *En general un espacio probabilístico* $(\Omega,\mathcal{F},P)$ *está integrado por tres componentes. Primero, el conjunto* Ω *llamado (espacio muestral) de los posibles resultados del experimento, llamados sucesos elementales. Segundo, por la colección* $\mathcal{F}$ *de todos los sucesos aleatorios (no solo los elementales), que es una* $\sigma - algebra$*. El par* $(\Omega,\mathcal{F})$ *es lo que se conoce como un espacio de medida. Por último, una medida de probabilidad o función de probabilidad* P *que asigna una probabilidad a todo suceso y que verifica los llamados axiomas de Kolmogórov. Al respecto de la clase de sucesos debemos mencionar que si el espacio muestral tiene cardinal finito igual a N, la clase de sucesos tendrá un número de subconjuntos igual a* 2^N*. No obstante, si el cardinal del espacio muestral es infinito, el número de subconjuntos también lo será, de forma que podríamos pensar en uniones e intersecciones de infinitos sucesos.*[2]

Definición 3.2. *Sea* ε *un experimento aleatorio y* Ω *un espacio muestral asociado con él. Una función* X *que asigna a cada uno de los elementos* $\boldsymbol{s} \in \Omega$ *un número real* $X(s)$*, se llama* ***variable aleatoria****.*

Creemos que toda la teoría antes indicada podrán tener un significado más profundo con el siguiente ejemplo:

[2]Carlos Alberola, Probabilidad, Variables aleatorias y procesos estocáticos

Ejemplo 3.1. Considerese el lanzamiento de dos dados equilibrados y los 36 posibles resultados. Se define como variable aleatoria X, *a la suma de los valores de las dos caras del dado*. El cuadro 3.1 relaciona los 36 resultados con los valores correspondientes de la variable aleatoria X y sus probabilidades. La naturaleza probabilistica de la variable aleatoria X, la suma de las dos caras, puede observarse al graficar cada valor de X contra su probabilidad como se muestra en en la figura 3.1.

Resultado	*Valor de la variable aleatoria*	*Número de ocurrencias*	*Probabilidad*
(1,1)	2	1	1/36
(1,2),(2,1)	3	2	2/36
(1,3),(2,2),(3,1)	4	3	3/36
(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)	5	4	4/36
(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)	6	5	5/36
(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)	7	6	6/36
(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)	8	5	5/36
(3,6),(4,5),(5,4)(6,3)	9	4	4/36
(4,6),(5,5),(6,4)	10	3	3/36
(5,6),(6,5)	11	2	2/36
(6,6)	12	1	1/36

Cuadro 3.1: Correspondencia entre los resultados del lanzamiento de un par de dados y la variable aleatoria que representa la suma de las caras

Fuente: George Canavos

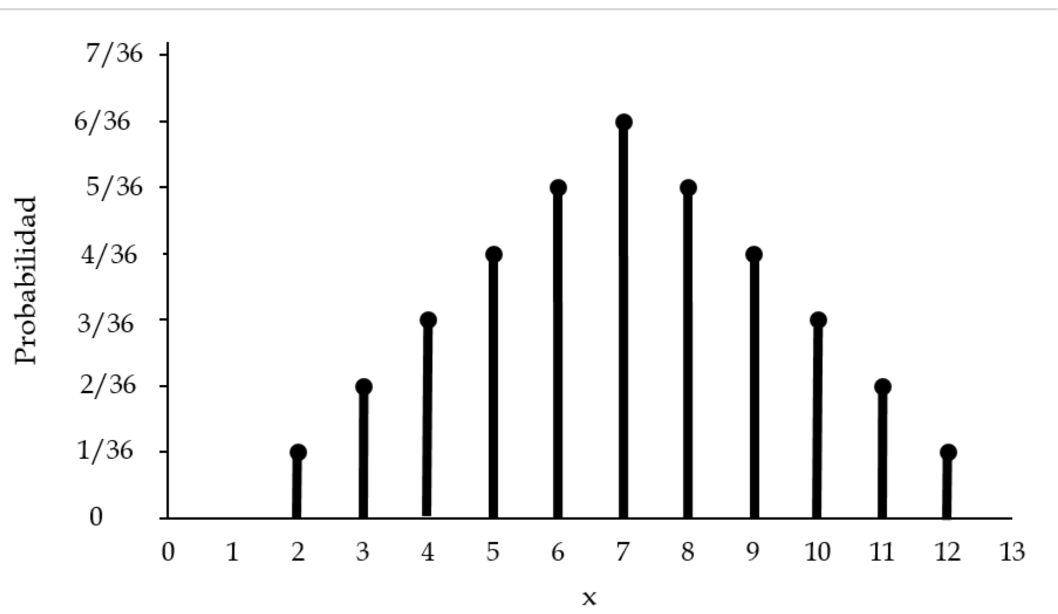


Figura 3.1: probabilidad para la suma de las caras de los dados

3.2. Distribuciones de probabilidad de v.a. discretas

Una variable aleatoria discreta X representa los resultados de un espacio muestral en forma tal que por $P(X = x)$ se entenderá la *probabilidad de que X tome el valor de x*. De esta forma, al considerar los valores de una variable aleatoria es posible desarrollar una función matemática que asigne una probabilidad a cada *realización x* de la variable aleatoria X. Esta función recibe el nombre de ***función de probabilidad***[3] de la variable aleatoria.

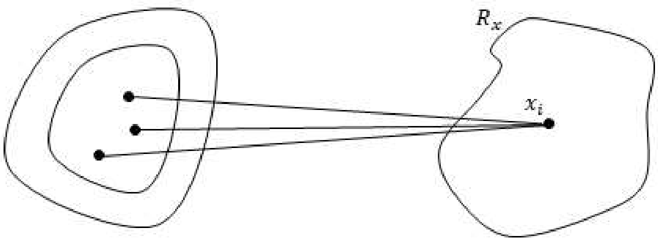
Definición 3.3. *Sea **X** una variable aleatoria. Si el número de valores posibles de X es **finito o infinito numerable**, llamamos a X una variable aleatoria discreta. Esto es, se pueden anotar los valores posibles de X como* $(x_1, x_2 ..., x_n$. *En el caso finito, la lista termina y en el caso infinito numerable, la lista continúa indefinidamente.*

Dada la concepción de variable aleatoria discreta, procedemos a indicar la descripción probabilística como sigue:

Definición 3.4. *Sea **X** una variable aleatoria discreta. Se llamará **p(x) = P(X=x)** función de probabilidad de la variable aleatoria X, si satisface las siguientes propiedades*

- $a) p(x_i) \geqslant 0$ para toda i
- $b) \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

La colección de pares $(x_i, p(x_i), i = 1, 2, 3, ...$, algunas veces se llama ***distribución de probabilidad de X***.



Para entender completamente el concepto de variable aleatoria discreta, veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 3.2. [4]Supóngase que se pone un tubo de radio en un soporte y se prueba. Considérese que la probabilidad de que el control sea positivo es

[3]El nombre completo de esta función es el de *función masica de probabilidad* de una variable aleatoria

[4]Paul L. Meyer, pag 79

igual a 3/4; por tanto, la probabilidad de que el control sea negativo es 1/4. Supóngase además, que probamos una gran cantidad de esos tubos. La prueba continúa hasta que aparece el primer tubo positivo. Definase la variable aleatoria X como sigue: X es el número de pruebas necesarias para finalizar es experimento. Es espacio muestral asociado con este experimento es:

$$\Omega = \{+, -+, --+, ---+, ----+, -----+, ..., ---+)\}$$

Para determinar la distribución de probabilidades de X razonamos de la siguiente manera. Los valores posibles de X son 1,2,3,...,n,... (espacio muestral idealizado). Y $X = n$ si y sólo si los primeros $(n-1)$ son negativos y el n-*ésimo* tubo es positivo. Si suponemos que la condición de un tubo no afecta la condición de otro, podemos escribir:

$$p(n) = P(X = n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\frac{3}{4}, \quad n = 1, 2, ...$$

Observemos que la suma de $p(n)$ debe dar 1.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} p(n) &= \frac{3}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + ...\right) \\ &= \frac{3}{4}.\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 1 \end{aligned}$$

Supóngase que se quiere calcular $P(A)$, donde A se define como **El experimento termina después de un número par de repeticiones**, así tenemos:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} p(2n) = \frac{3}{16} + \frac{3}{256} + ... \\ &= \frac{3}{16}\left(1 + \frac{1}{16} + ...\right) \\ &= \frac{3}{16}.\frac{1}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.3. Considérese de nuevo el lanzamiento de dos dados. Si X es la variable aleatoria que representa la suma de las caras. la función de probabilidad de X es

$$p(x) = \begin{cases} \frac{6-|7-x|}{36} & \text{if } x = 2, 3, 4... \\ 0 & \text{if } x = para\, otro\, valor \end{cases}$$

3.2.1. Función de distribución acumulativa

Evaluando la función para los valores de x y acumulando en $F(x)$, se tiene la figura 3.2, con forma escalonada.

En general, la función acumulativa $F(x)$ de una variable aleatoria discreta es una función no decreciente de los valores de X, de tal manera que

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ para cualquier x.
2. $F(x_i) \geqslant F(x_j)$ si $x_i \geqslant x_j$.
3. $P(X > x) = 1 - F(x)$.

Además puede establecerse que para las variables aleatorias de valor entero se tiene que:

4. $P(X = x) = F(x) - F(x-1)$.
5. $P(x_i \leqslant X \leqslant x_j) = F(x_j) - F(x_i - 1)$.

La gráfica de la distribución acumulativa del ejemplo del lanzamiento de dos dados se muestra en la figura 3.2. En esta figura es evidente que la función de distribución acumulativa de una variable aleatoria discreta es una función escalón, que toma un valor superior en cada salto

3.3. Distribucion de probabilidad de v.a. continuas

Qué nuevas consideraciones debemos tener cuando la variable aleatoria es continua?, ante esta pregunta podemos indicar, primero, lo siguiente; En el caso discreto, se asignan probabilidades positivas a todos los valores puntuales de la variable aleatoria, pero la suma de todas ellas es uno a pesar de que el conjunto de valores sea infinito contable. Para el caso ***continuo*** lo anterior no es posible. ***Por esta razón, la probabilidad de que una variable aleatoria continua X tome un valor específico x es cero***. La *distribución de probabilidad de una variable continua X* está caracterizado por una función $f(x)$ que recibe el nombre de *función de densidad de*

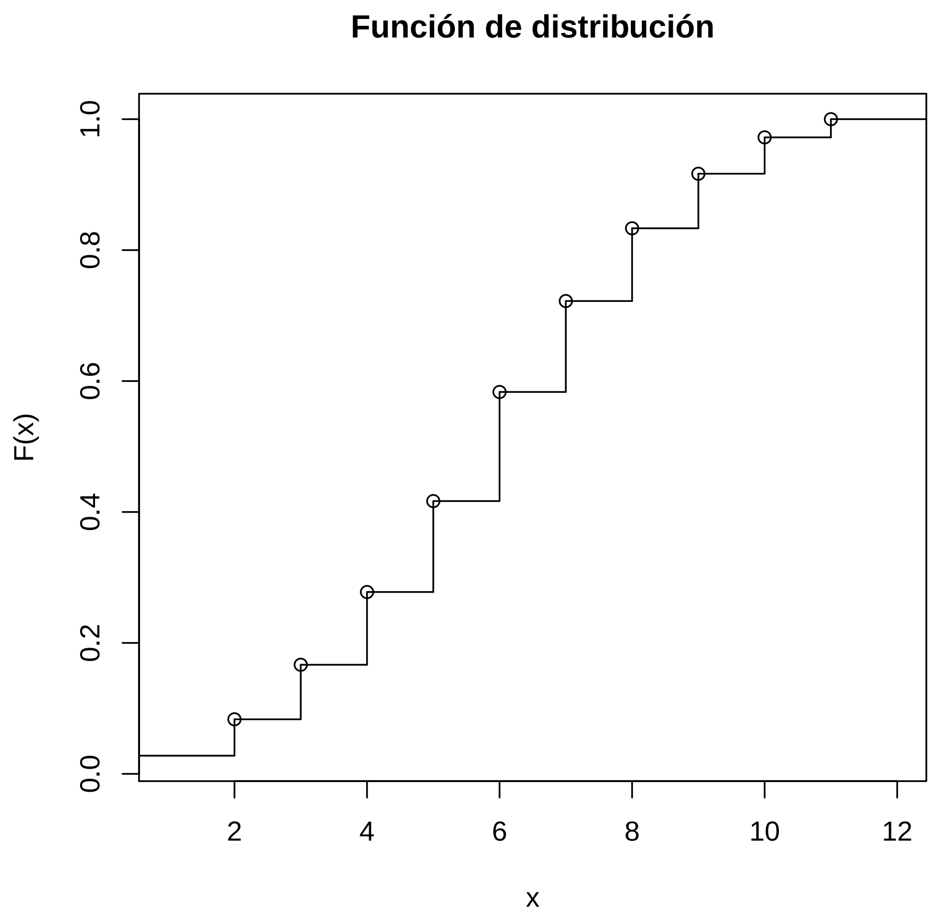


Figura 3.2: Función acumulativa del lanzamiento de dos dados

probabilidad. Esta función $f(x)$ no es la misma función de probabilidad que para el caso discreto. Como existe la probabilidad de que X tome un valor específico x es cero, la función de densidad no representa la probabilidad de que $X = x$. Más bien, ésta proporciona un medio para determinar la probabilidad de un intervalo $a \leqslant X \leqslant b$.[5] En este sentido, podemos definir la Función de densidad de probabilidad de una variable aleratoria continua como sigue

Definición 3.5. *Sea* $\boldsymbol{X}$ *una variable aleatoria continua. Se llamará* $\boldsymbol{f(x)}$ *función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria* X*, si satisface las siguientes propiedades*

1. $f(x) \geqslant 0$, $-\infty < x < \infty$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, y.
3. $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)dx$.

[5] George Canavos, Probabilidades

Puesto que el área total bajo $f(x)$ es uno, las probabilidades del interbalo $a \leqslant X \leqslant b$ es el área acotada por la función de densidad y las rectas $X = a$ y $X = b$, como se muestra en la figura 3.3.

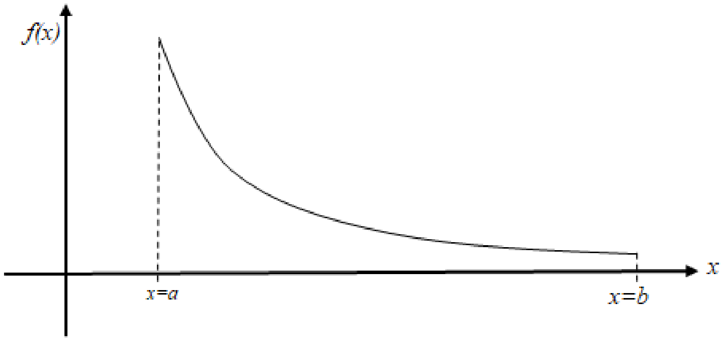


Figura 3.3: Función de distribución

3.3.1. Función de distribución acumulativa

Al igual que en el caso discreto, la función de distribución acumulativa de una variable aleatoria continua X es la probabilidad de que X tome un valor menor o igual a alguún x específico. Esto es

$$P(X \leqslant x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{3.1}$$

donde t es una variable artificial de integración. Por lo tanto, la función de distribución acumulativa $F(x)$ es el área acotada por la función de densidad que se encuentra a la izquierda de la recta $X = x$, como se ilustra en la figura 3.4.

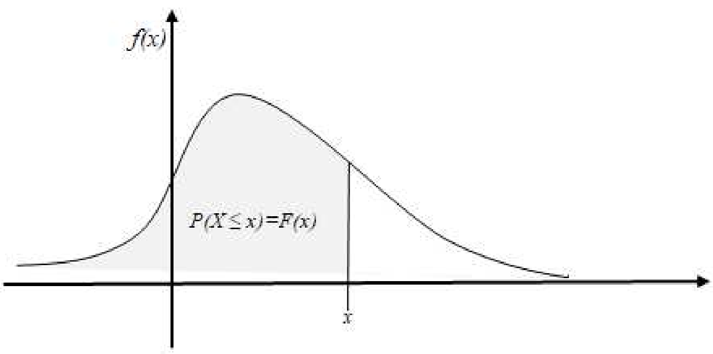


Figura 3.4: Función de distribución acumulativa

Dado que para cualquier variable aleatoria continua X,

$$P(X = x) = F(x) = \int_x^x f(t)dt = 0$$

entonces,

$$P(X \leqslant x) = P(X < x) = F(x)$$

La distribución acumulativa $F(x)$, es una función lisa no decreciente de los valores de la variable aleatoria con las siguientes propiedades:

1. $F(-\infty) = 0$.
2. $F(\infty) = 1$.
3. $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.
4. $dF(x)/dx = f(x)$.

Ejemplo 3.4. Sea X la duración en horas de cierto tipo de bombilla eléctrica. Supóngase que X es una variable aleatoria continua y supóngase que la fdp f de X está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^3} & \text{si } 1500 \leqslant \text{x} \leqslant 2500 \\ 0 & \text{para otro valor} \end{cases}$$

La función de probabilidad se muestra en el gráfico 3.5.

Ejemplo 3.5. La variable aleatoria X representa el intervalo de tiempo entre dos llegadas consecutivas a una tienda y su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k.exp(-x/2) & 0 \leqslant \text{x} \leqslant \infty \\ 0 & \text{para otro valor} \end{cases}$$

para una constante k apropiada. Determinar el valor de k, la función de distribución acumulativa, la probabilidad de que $2 < X < 6$, y la probabilidad de que $X \leqslant 8$. De cuerdo con la ecuación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$$

por lo tanto, dado que en este ejemplo $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$, entonces el valor de k está determinado por:

$$k \int_0^{\infty} exp(-x/2)dx = 1$$

Después de la integración se tiene que

$$-2k.exp(-x/2) \mid_0^{\infty} = 1$$

y $k = 1/2$. La función de distribución acumulativa es:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0dt + \frac{1}{2}\int_0^x exp(-t/2)dt \\ &= 1 - exp(-x/2) \text{ para x>0,} \end{aligned}$$

y $F(x) = 0$ para $x \leqslant 0$. Además $dF(x)/dx = 1/2.exp(-x/2)$, que es la función de distribución.

La probabilidad de que un **intervalo entre dos llegadas consecutivas se encuentre** entre dos y seis minutos es:

$$\begin{aligned} P(2 < X < 6) &= \frac{1}{2}\int_2^6 exp(-x/2)dx = F(6) - F(2) \\ &= [1 - exp(-3)] - [1 - exp(-1)] = 0{,}3181, \end{aligned}$$

La probabilidad de que **transcurran menos de ocho minutos** entre dos llegadas consecutivas es:

$$P(X < 8) = F(8) = 1 - exp(-4) = 0{,}9817$$

3.4. Distribuciones de Probabilidad Conjunta

[6] Hasta la sección anterior nos hemos restringido sólo a variables aleatorias unidimensionales y sus distribuciones de probabilidad. Habrá situaciones, sin embargo, donde podemos encontrar que es deseable registrar los resultados simultáneos de diversas variables aleatorias. Por ejemplo, podemos medir la dureza H y la resistencia a la tensión T de una pieza manufacturada de acero y consideraríamos (h, t) como un solo resultado experimental. Podríamos estudiar la altura A y el peso P de una persona determinada, que daría lugar al resultado (a, p).

[6] Probabilidad y estadística para ingenieros, Walpole, Myers, Myers

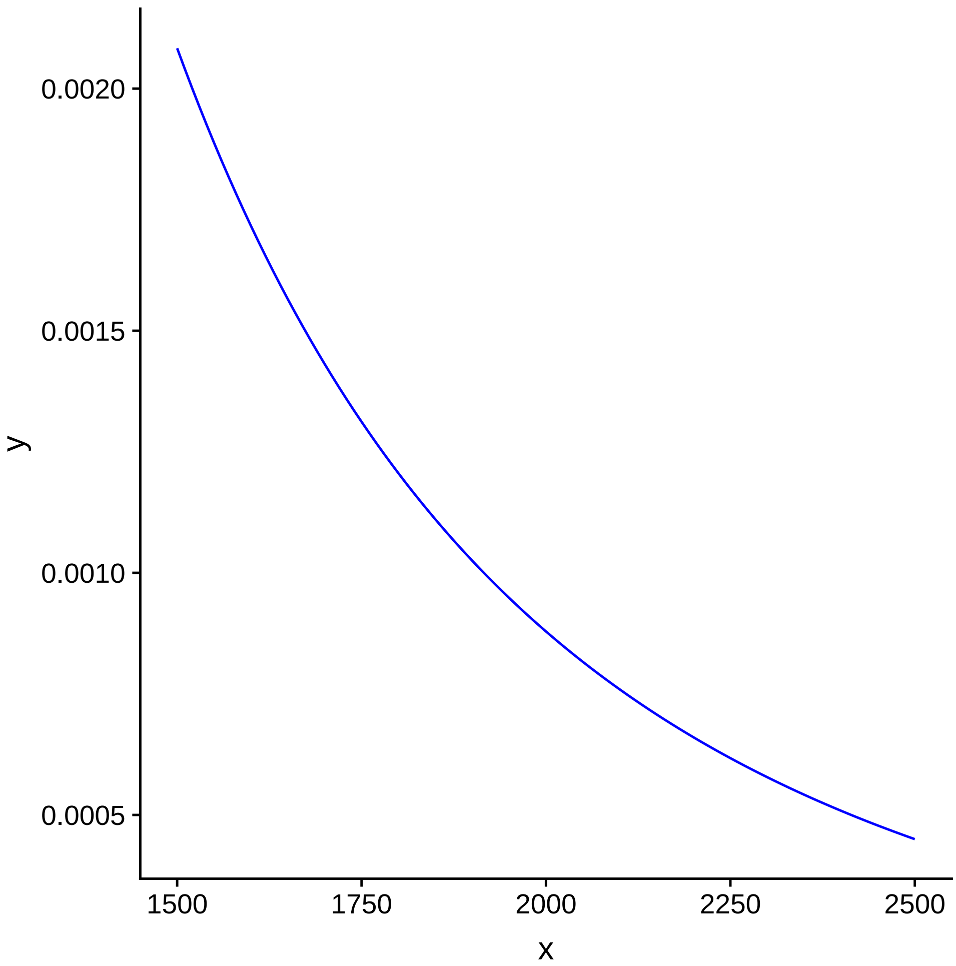


Figura 3.5: Función de distribución acumulada de $f(x) = a/x^3$

Definición 3.6. *Sea ϵ un experimento y Ω un espacio muestral asociado. Sean $X = X(s)$ y $Y = Y(s)$ dos funciones que asignan un número real a cada uno de los resultados $s \in \Omega$. Figura 3.6*

Llamamos a (X, Y) variable aleatoria bidimensional (que también se denomina vector aleatorio).

Si $X_1 = X_1(s), X_2 = X_2(s), ..., X_n(s)$ son n funciones, cada una de las cuales asigna un número real a cada resultado $s \in \Omega$, entonces llamamos a $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una variable aleatoria $n-dimensional$.

Para nuestra sección consideraremos lo siguiente, si X e Y son dos variable aleatorias discretas la distribución de probabilidad de sus ocurrencias simultáneas se puede representar mediante una función con valores $f(x, y)$ para cualquier par de valores (x, y) dentro del rango de las variables aleatorias X e Y. De aquí en el caso discreto

Después de la integración se tiene que

$$f(x,y) = P(X = x, Y = y);$$

es decir, los valores $f(x,y)$ dan la probabilidad de que ocurran los resultados x e y al mismo tiempo. Por ejemplo, si se le va a dar servicio a un televisor y X representa la edad de la unidad al año más próximo y Y representa el número de bulbos defectuosos en el televisor, entonces $f(5,3)$ es la probabilidad de que el televisor tenga cinco años y necesite tres bulbos nuevos.

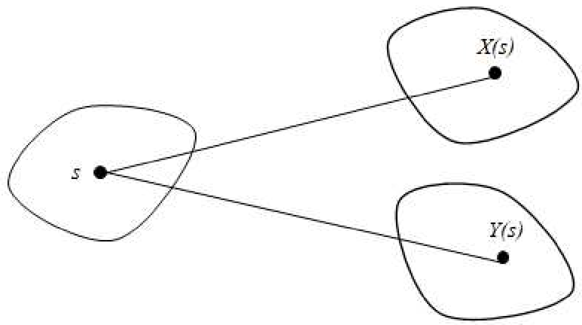


Figura 3.6:

Definición 3.7. *la función f(x,y) es una* ***distribución de probabilidad conjunta*** *o* ***función de masa de probabilidad*** *de las variables aleatorias discretas X e Y si*

1. $f(x,y) \geqslant 0$ para toda (x,y).
2. $\sum_x \sum_y f(x,y) = 1$.
3. $P(X = x, Y = y) = f(x,y)$.

Para cualquier región A en el plano xy, $P[(X,Y) \in A] = \sum\sum_A f(x,y)$.

Ejemplo 3.6. Se seleccionan al azar dos repuestos para un bolígrafo de una caja que contiene tres repuestos azules, dos rojos y tres verdes. Si X es el número de repuestos azules y Y es el número de repuestos rojos que se seleccionan, encuentre (a) la función de probabilidad conjunta $f(x,y)$ y (b) $P[(X,Y) \in A]$ donde A es la región $\{(x,y) \mid x + y \leqslant 1\}$. Veamos,

(a) Los posibles pares de valores (x,y) son (0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(0,2) y (2,0). Ahora bien $f(0,1)$, por ejemplo, representa la probabilidad de que se seleccionen un repuesto rojo y uno verde. El número total de formas igualmente probables de seleccionar cualesquiera dos repuestos de los ocho es

$\binom{8}{2} = 28$. El número de formas de seleccionar uno rojo de dos repuestos rojos y uno verde es $\binom{2}{1}\binom{3}{1} = 6$. De aquí f(0,1) = 6/28 = 3/14. Cálculos similares dan las probabilidades para los otros casos, que se representan en el cuadro 3.2. Nótese que las probabilidades suman 1. La distribución de probabilidad conjunta se puede representar mediante la fórmula

$$f(x,y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{2-x-y}}{\binom{8}{2}},$$

para $x = 0,1,2$; $y = 0,1,2$; $0 \leqslant x + y \leqslant 2$

		x			*Total*
f(x,y)		***0***	***1***	***2***	*fila*
	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\mathbf{\frac{15}{28}}$
y	***1***	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$		$\mathbf{\frac{3}{7}}$
	2	$\frac{1}{14}$			$\mathbf{\frac{1}{28}}$
Total columna		$\mathbf{\frac{5}{14}}$	$\mathbf{\frac{15}{28}}$	$\mathbf{\frac{3}{28}}$	**1**

Cuadro 3.2: Función de probabilidad conjunta

(b)

$$\begin{aligned} P[(X,Y) \in A] &= P(X+Y \leqslant 1) \\ &= f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) \\ &= \frac{2}{28} + \frac{3}{14} + \frac{9}{28} \\ &= \frac{9}{14} \end{aligned}$$

Cuando X e Y son variables aleatorias continuas, la **función de densidad conjunta** $f(x,y)$ es una superficie en el planno xy y $P[(X,Y) \in A]$, donde A es cualquier región en el plano xy, es igual al volúmen del cilindro recto limitado por la base A y la superficie.

Definición 3.8. *la función f(x,y) es una* ***distribución de densidad conjunta*** *de las variables aleatorias continuas X e Y si*

1. $f(x,y) \geqslant 0$ para toda (x,y).
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$.

3. $P[(X,Y)\in A]=\int\int_A f(x,y)dxdy.$

para cualquier región A en el plano xy.

Ejemplo 3.7. Una fábrica de dulces distribuye cajas de chocolate con un surtido de cremas, chiclosos y nueces cubiertas con chocolate claro y oscuro. Para una caja seleccionada al azar, sean X e Y, respectivamente, las proporciones de chocolate claro y oscuro que son cremas y suponga que la función de densidad conjunta es

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{5}(2x+3y), & 0\leqslant \mathrm{x}\leqslant 1{,}0\leqslant \mathrm{y}\leqslant 1\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

(a) VerifIque la condición 2 de la definión 3.8.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy &= \int_0^1\int_0^1\frac{2}{5}(2x+3y)dxdy\\ &= \int_0^1\frac{2x^2}{5}+\frac{6xy}{5}\Big|_{x=0}^{x=1}dy\\ &= \int_0^1\left(\frac{2}{5}+\frac{6y}{5}\right)dy=\frac{2y}{5}+\frac{3y^2}{5}\Big|_{y=0}^{y=1}\\ &= \frac{2}{5}+\frac{3}{5}=1\end{aligned}$$

(b) Encuentre $P[(X,Y)\in A]$, donde A está en la región $\left\{(x,y)\mid 0<x<\frac{1}{2},\frac{1}{4}<y<\frac{1}{2}\right\}$.

$$\begin{aligned}P[(X,Y)\in A] &= P(0<X<\frac{1}{2},\frac{1}{4}<Y<\frac{1}{2})\\ &= \int_{1/4}^{1/2}\int_0^{1/2}\frac{2}{5}(2x+3y)dxdy\\ &= \int_{1/4}^{1/2}\frac{2x^2}{5}+\frac{6xy}{5}\Big|_{x=0}^{x=1/2}dy\\ &= \int_{1/4}^{1/2}\left(\frac{1}{10}+\frac{3y}{5}\right)dy=\frac{y}{10}+\frac{3y^2}{10}\Big|_{y=1/4}^{y=1/2}\\ &= \frac{1}{10}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{16}\right)\right]=\frac{13}{160}\end{aligned}$$

Dada la distribución de probabilidad conjunta $f(x,y)$ de las variables aleatorias discretas X e Y, la distribución de probabilidad $g(x)$ de X sola se obtiene al sumar $f(x,y)$ sobre los valores de Y. De manera similar, la distribución de probabilidad $h(y)$ de Y sola se obtiene al sumar $f(x,y)$ sobre los valores de X. Definimos $g(x)$ y $h(y)$ como **distribuciones marginales** de X e Y, respectivamente. Cuando X e Y son variables aleatorias continuas, las sumatorias se reemplazarán por integrales.

Definición 3.9. *Las **distribuciones marginales** de X sola e Y sola son*

$$g(x) = \sum_y f(x,y) \quad y \quad h(y) = \sum_x f(x,y)$$

para el caso discreto, y

$$g(x) = \int_{\infty}^{\infty} f(x,y)dy \quad y \quad h(y) = \int_{\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

para el caso continuo.

El término *marginal* se utiliza aquí debido a que, en el caso discreto, los valores de g(x) y h(y) son exactamente los totales marginales de las columnas y filas respectivos cuando los valores $f(x,y)$ se muestran en una tabla rectangular.

Ejemplo 3.8. Muestre que los totales de columnas y filas de el cuadro 3.2 dan las distribuciones marginales de X sola e Y sola.

Para la variable aleatoria X tenemos

$$\begin{aligned}
P(X=0) = g(0) = \sum_{y=0}^{2} f(0,y) &= f(0,0) + f(0,1) + f(0,2) \\
&= \frac{3}{28} + \frac{3}{14} + \frac{1}{28} = \frac{5}{14} \\
P(X=1) = g(1) = \sum_{y=0}^{2} f(1,y) &= f(1,0) + f(1,1) + f(1,2) \\
&= \frac{9}{28} + \frac{3}{14} + 0 = \frac{15}{28} \\
P(X=2) = g(2) = \sum_{y=0}^{2} f(2,y) &= f(2,0) + f(2,1) + f(2,2) \\
&= \frac{3}{28} + 0 + 0 = \frac{3}{28}
\end{aligned}$$

Notará el lector que son los mismos valores que el cuadro 3.2.

Ejemplo 3.9. Supóngase que la variable aleatoria bidimensional (X, Y) está distribuída uniformemente en la región sombreada R que se indica en la figura 3.7. Por tanto

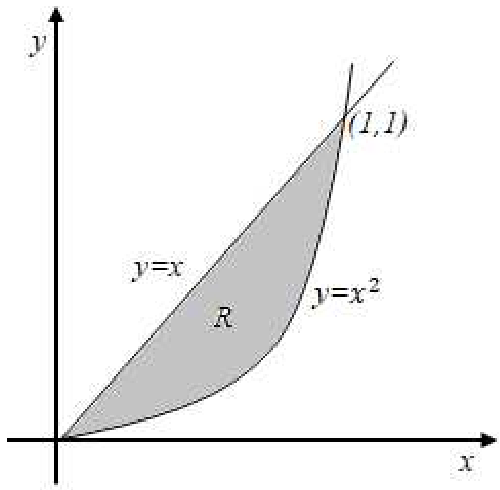


Figura 3.7:

$$f(x,y) = \frac{1}{Area\,R}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}$$

Encontramos que

$$Area(\mathbb{R}) = \int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{6}$$

Luego la fdp está dada por

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 6, \quad (x,y) \in \mathbb{R} \\ &= 0, \quad (x,y) \notin \mathbb{R} \end{aligned}$$

En las ecuaciones siguientes encontramos las fdp marginales de X e Y

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{x^2}^{x} 6dy \\ &= 6(x - x^2), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_{y}^{\sqrt{y}} 6dx \\ &= 6(\sqrt{y} - y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1; \end{aligned}$$

La gráficas de estas fdp se presentan el la figura 3.8.

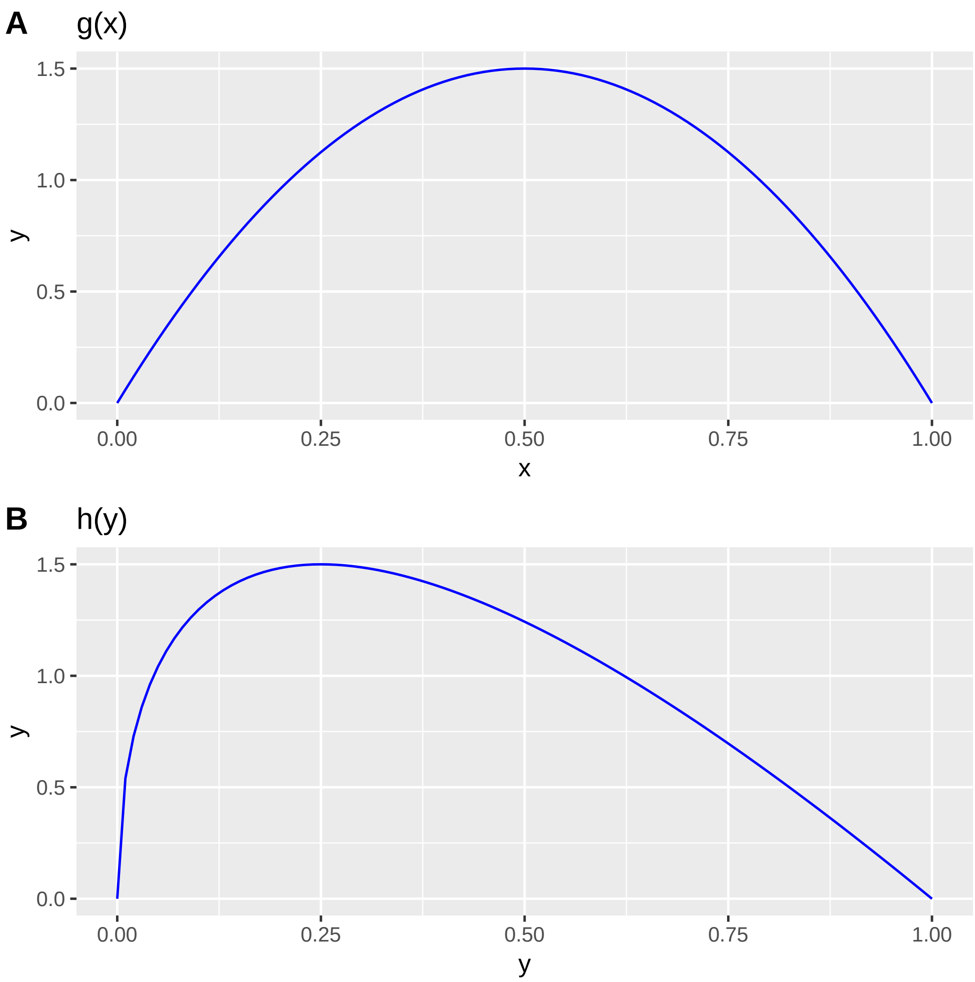

A
g(x)
1.5
1.0
0.5
0.0
y
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
x
B
h(y)
1.5
1.0
0.5
0.0
y
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
y

Figura 3.8:

Ejemplo 3.10. Encuentre $g(x)$ y $h(y)$ para la función de densidad conjunta del ejemplo 3.7 3.7.

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)dy = \frac{4xy}{5} + \frac{6y^2}{10} |_{y=0}^{y=1} = \frac{4x+3y}{5}$$

para $0 \leqslant x \leqslant 1$ y $g(x) = 0$ o en cualquier otro caso. De manera similar

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)dx = \frac{2(1+3y)}{5}$$

para $0 \leqslant y \leqslant 1$ y $h(y) = 0$ o en cualquier otro caso.

EL hecho de que las distribuciones marginales $g(x)$ y $h(y)$ sean en realidad las distribuciones de probabilidad de las variables individuales X e Y solas se puede verificar al mostrar que se satisfacen las condiciones de la definición 3.4 o la definición 3.5.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx = 1$$

y

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a < X < b, -\infty < Y < \infty) \\ &= \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx = \int_a^b g(x)dx \end{aligned}$$

Si aplicamos la definición de probabilidad condicional tenemos;

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \qquad P(A) > 0,$$

Donde A y B son ahora evento definidos por $X = x$ y $Y = y$, respectivamente, entonces

$$P(Y = y \mid X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} = \frac{f(x,y)}{g(x)}, \qquad g(x) > 0$$

donde X e Y son variables aleatorias discretas. Lo mismo para el caso continuo.

3.4.1. Distribución de probabilidad condicional

Definición 3.10. *Sean X e Y dos variables aleatorias, discretas o continuas. La* ***distribucion condicional*** *de la variable aleatoria Y, dado que $X = x$, es*

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{g(x)}, \text{g(x) >0},$$

De manera similar, la distribución condicional de la variable aleatoria X, dado que $Y = y$, es

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}, \text{h(y) >0},$$

Si se desea encontrar la probabilidad de que la variable aleatoria discreta X caiga entre a y b cuando se sabe que la variable aleatoria discreta $Y = y$, evaluamos

$$P(a < X < b/Y = y) = \sum_x f(x/y),$$

donde la sumatoria se extiende a todos los valores de X entre a y b. Cuando X y Y son continuas, evaluamos

$$P(a < X < b/Y = y) = \int_a^b f(x/y)dx$$

Ejemplo 3.11. Con referencia al ejemplo 3.6, encontrar la distribución condicional de X, dado que $Y = 1$, y utilícela para determinar $P(X = 0/Y = 1)$.

Necesitamos encontrar $f(x/y)$, donde $y = 1$. Primero encontramos que

$$h(1) = \sum_{x=0}^{2} f(x,1) = \frac{3}{14} + \frac{3}{14} + 0 = \frac{3}{7}$$

Ahora bien,

$$f(x \mid 1) = \frac{f(x,1)}{h(1)} = \frac{7}{3} f(x,1), \quad \text{x=0,1,2}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} f(0 \mid 1) &= \frac{7}{3} f(0,1) = \left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{3}{14}\right) = \frac{1}{2} \\ f(1 \mid 1) &= \frac{7}{3} f(1,1) = \left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{3}{14}\right) = \frac{1}{2} \\ f(2 \mid 1) &= \frac{7}{3} f(2,1) = \left(\frac{7}{3}\right)(0) = 0, \end{aligned}$$

Finalmente

$$P(X = 0 \mid Y = 1) = f(0 \mid 1) = \frac{1}{2}$$

Por tanto, si se sabe que uno de los dos repuestos seleccionados es rojo, tenemos una probabilidad igual a 1/2 de que el otro repuesto no sea azul.

Con el método gráfico, se puede obtener que (3/14)/(3/7)= (1/2). Cuadro 3.3

	$f(x,y)$	x = 0	1	2	Total fila
y	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$
	1	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$		$\frac{3}{7}$
	2	$\frac{1}{14}$			$\frac{1}{28}$
	Total columna	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

Cuadro 3.3: Función de probabilidad conjunta

Ejemplo 3.12. La densidad conjunta para las varaibles aleatorias (X,Y), donde X es el cambio de temperatura unitario y Y es la proporción de desplazamiento espectral que produce cierta partícula atómica es

$$f(x) = \begin{cases} 10xy^2, & 0 \leqslant \mathrm{x} \leqslant \mathrm{y} \leqslant 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Encuentre las densidades marginales $g(x)$, $h(x)$ y la densidad condicional $f(x/y)$.

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_x^1 10xy^2 dy = \frac{10}{3}xy^3 \mid_{y=x}^{y=1} = \frac{10}{3}x(1-x^3), \quad 0<\mathrm{x}<1 \\ h(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^y 10xy^2 dx = 5x^2y^2 \mid_{x=0}^{x=y} = 5y^4, \quad 0<\mathrm{y}<1 \end{aligned}$$

Ahora bien

$$f(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{g(x)} = \frac{10xy^2}{\frac{10}{3}x(1-x^3)} = \frac{3y^2}{1-x^3}, \quad 0<\mathrm{x}<\mathrm{y}<1$$

(b) Encuentre la probabilidad de que el espectro se desplace más de la mitad de las observaciones totales, dado que la temperatura aumenta a 0.25 de unidad.

$$P\left(Y > \frac{1}{2} \mid X = 0{,}25\right) = \int_{1/2}^{1} f(y \mid x = 0{,}25)dy = \int_{1/2}^{1} \frac{3y^2}{(1-0{,}25^3)}dy = \frac{8}{9}$$

Ejemplo 3.13. Dada la función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x(1+3y^2)}{4}, & 0 < x < 2, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{para otro caso} \end{cases}$$

encuentre $g(x)$, $h(y)$ y $f(x \mid y)$, y evalúe $P(1/4 < X < 1/2 \mid Y = 1/3)$.

Por definición

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 \frac{x(1+3y^2)}{4}dy \\ &= \frac{xy}{4} + \frac{xy^3}{4} \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{x}{2}, \quad 0 < x < 2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} h(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^2 \frac{x(1+3y^2)}{4}dx \\ &= \frac{x^2}{8} + \frac{3x^3y^2}{8} \Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{1+3y^2}{2} \quad 0 < y < 1 \end{aligned}$$

Por tanto

$$f(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} = \frac{x(1+3y^2)/4}{(1+3y^2)/2} = \frac{x}{2}, \quad 0 < x < 2$$

y

$$P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} \mid Y = \frac{1}{3}\right) = \int_{1/4}^{1/2} \frac{x}{2}dx = \frac{3}{64}$$

3.4.2. Independencia Estadística

Tal como se definió el concepto de independencia entre dos eventos A y B, ahora definiremos las **variables aleatorias independientes**. Lo que queremos decir intuitivamente es que X e Y son variables aleatorias independientes si el resultado de X, digamos, de ninguna menra influye en el resultado de Y. Ésta es una noción extremadamente importante y hay muchas situaciones en que dicha suposición se justifica.

Si $f(x \mid y)$ no depende de y, como es el caso en el ejemplo 3.13, entonces $f(x/y) = g(x)$ y $f(x,y) = g(x)h(y)$.

$$f(x,y) = f(x \mid y)h(y)$$

en la distribución marginal de X. Es decir

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x \mid y)h(y)dy$$

Si $f(x \mid y)$ no depende de y, podemos escribir

$$g(x) \;=\; f(x \mid y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)dy = 1$$

Finalmente $f(x,y) = g(x)h(y)$

Veamos la definición formal de independencia

Definición 3.11. *Sean X e Y dos variables aleatorias, discretas o continuas. La* ***distribucion de probabilidades*** *conjunta f(x,y) y distribuciones marginales g(x) y h(y), respectivamente. Se dice que las variables aleatorias X e Y son* ***estadísticamente independientes*** *si y sólo si*

$$f(x,y) = g(x)h(y)$$

para toda (x,y) dentro de sus rangos.

Ejemplo 3.14. Muestre que las variables aleatorias del ejemplo 3.6 no son estadísticamente independientes.

Veamos

Consideremos el punto (0,1). Del cuadro 3.2 encontramos que las tres probabilidades $f(0,1)$, $g(0)$ y $h(1)$ son

$$\begin{aligned} f(0,1) &= \frac{3}{14} \\ g(0) &= \sum_{y=0}^{2} f(0,y) = \frac{3}{28} + \frac{3}{14} + \frac{1}{28} = \frac{5}{14} \\ h(1) &= \sum_{x=0}^{2} f(x,1) = \frac{3}{14} + \frac{3}{14} + 0 = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

Ciertamente, $f(0,1) \neq g(0)h(1)$. Por tanto X y Y no son estadísticamente independientes.

3.4.3. Un vistazo a las variables aleatorias n-dimensionales

Todas las definiciones anteriores respecto a dos variables aleatorias se pueden generalizar al caso de n variables aleatorias. Sea $f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ la función de probabilidad conjunta de las variables aleatorias $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. La distribución marginal de X_1, por ejemplo es

$$g(x_1) = \sum_{x_2} \sum_{x_3} ... \sum_{x_n} f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$$

para toda (x, y) dentro de sus rangos.

para el caso discreto, y

$$g(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_2 dx_3 ... dx_n$$

para el caso continuo. Ahora podemos obtener **distribuciones marginales conjuntas** como $\phi(x_1, x_2)$ donde,

$$\phi(x_1, x_2) = \begin{cases} \sum_{x_3} ... \sum_{x_n} f(x_1, x_2, ..., x_n) & \text{caso discreto} \\ \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_3 dx_4 ... dx_n & \text{caso continuo} \end{cases}$$

Definición 3.12. *Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias, discretas o continuas, con distribución de probabilidad conjunta $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ y distribuciones marginales $f_1(x_1), f_2(x_2), ..., f_n(x_n)$, respectivamente. Se dice que las variables aleatorias $X_1, X_2, ..., X_n$ son **estadísticamente independientes** mutuamente si y sólo si*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1), f_2(x_2), ..., f_n(x_n)$$

para todo $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dentro de sus rangos.

4

Funciones de variables aleatorias

> *"En ciencia uno intenta decir a la gente, en una manera en que todos lo puedan entender, algo que nunca nadie supo antes. La poesía es exactamente lo contrario"*
>
> – Paul Dirac, *1902 - 1984*

4.1. Introducción

Este capítulo es relevante pues nos da una primera introducción al análisis multivariante, veremos que muchas de las mediciones que hacemos en la realidad no incluyen sólo una variable o, en sí, la variable persé, sino más bien alguna transformación que nos simplificará el estudio de la misma. Por ejemplo la inferencia estadística requeriará la distribución de éstas funciones como cuando usamos el **promedio de variables aleatorias**. Otros casos pueden verse en los Modelos Lineales, o también nos puede interesar la distribución de la suma de cuadrados de variables aleatorias. Así como estos ejemplos, veremos algunas más siempre guardando la conceptualización con casos prácticos.[1]

4.2. Transformación de variables

[2] Supongamos que el radio X de la entrada de un tubo muy bien calibrado se considera como una variable aleatoria continua con fdp f. Sea $A = \pi X^2$ el área de la sección de la entrada; entonces es evidente que, puesto que el valor de X es el resultado de un experimento aleatorio, también lo es el valor de A. Es decir, A es una variable aleatoria (continua), y podríamos obtener su fdp, digamos g. Esperaríamos que, puesto que A es una función de X, la

[1] Walpole
[2] Meyer

fdp g se puede derivar de alguna manera conociendo la fdp f. La figura 4.1 muestra la relación entre una variable aleatoria inicial y su transformada.

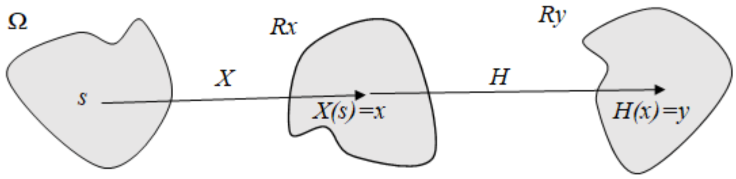


Figura 4.1:

4.2.1. Variables aleatorias discretas

Definición 4.1. *Suponga que X es una* ***variable aleatoria discreta*** *con distribución de probabilidad f(x). Definimos la variable aleatoria Y=H(X) una transformación uno a uno entre los valores de X e Y de modo que la ecuación y=h(x) se pueda resolver unívocamente para x en términos de y, digamos x=w(y). Entonces la distribución de probabilidad de Y es*

$$g(y) = f[w(y)] \tag{4.1}$$

Ejemplo 4.1. Sea X una variable aleatoria geométrica con distribución de probabilidad $f(x) = \frac{3}{4}(\frac{1}{4})^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3....$ Encuentre la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $Y = X^2$.

Como los valores de X son todos positivos la transformación define una correspondencia uno a uno entre los valores **x** y **y**, $y = x^2$ y $x = \sqrt{y}$. De aqui

$$f(\sqrt{y}) = \begin{cases} \frac{3}{4}(\frac{1}{4})^{\sqrt{y}-1} & \text{y=1,4,9...} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Paul L. Meyer[3], logra indentificar dos casos de estudio para la transformación de variables aleatorias discretas:

Caso 1: Si X es una variables aleatoria discreta y $Y = H(X)$, entonces de inmediato se deduce que Y es también una variable aleatoria discreta.

Ejemplo 4.2. Supóngase que la variable aleatoria X toma tres valores -1,0,1 con probabilidades 1/3, 1/2 y 1/6, respectivamente. Sea $Y = 3X+1$, entonces los valores posibles de Y son -2, 1 y 4, cuyas probabilidades se supone que son 1/3, 1/2 y 1/6.

[3] Paul L. Meyer

Este ejemplo sugiere el siguiente *procedimiento general*: si $x_1, ..., x_n, ...$, son los valores posibles de X, $p(x_i) = P(X = x_i)$ y H es una función tal que a cada valor de y le corresponda exactamente un valor de x, entonces la distribución de probabilidades de Y se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Valores posibles de } Y &: \; y_i = H(x_i), \;\; i = 1, 2, 3, ..., n, ... \\ \text{Probabilidades de } Y &: \; q_i = P(Y = y_i) = p(x_i) \end{aligned}$$

A menudo, la función H no tiene la característica anterior, y puede suceder que varios valores de X den el mismo valor de Y, como ilustra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.3. Supongamos que consideramos la misma variable aleatoria X como el ejemplo anterior. Sin embargo introducimos $Y = X^2$. En este caso, los valores posibles de Y son 0 y 1, cuyas probabilidades se supone que son 1/2, 1/2, porque $Y = 1$ si y sólo si *X=-1 o X=1* y la probabilidad de este último evento es $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. Los eventos $B : \{X \pm 1\}$ y $C : \{Y = 1\}$ son eventos equivalentes y, por lo tanto, tienen probabilidades iguales.

El *procedimiento general* para situaciones como la descrita en el ejemplo anterior es el que sigue: representemos con $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}, ...$, los valores de X que tienen la propiedad $H(x_{i_j}) = y_i$ para toda j. Luego

$$q(y_i) = P(Y = y_i) = p(x_{i_1}) + p(x_{i_2}) + ... + p(x_{i_k}) + ...$$

Ejemplo 4.4. Tenga X los valores posibles 1,2,3,...,n,... y supóngase que $P(X = n) = (1/3)^n$. Digamos, además, que:

$$\begin{aligned} Y &= 1, \qquad \text{si X es par} \\ &= -1, \quad \text{si X es impar} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P(Y = 1) = (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^4 + (\frac{1}{3})^6 + ... = \frac{1}{8}$$

Entonces se deduce que $P(Y = -1) = 7/8$

Caso 2: X es una variable aleatoria continua. Puede suceder que X sea una variable aleatoria continua, mientras que Y sea discreta. Por ejemplo, supongamos que X puede tomar todos los valores reales, mientras que se define que Y sea +1 si $X \geqslant 0$ y que Y sea -1 si $X < 0$.

Por lo tanto $P(Y = 1) = P(X \geqslant 0)$, mientras que $P(Y = -1) = P(X < 0)$.

En general

$$q(y_i) = P(Y = y_i) = \int_A f(x)dx$$

4.2.2. Variables aleatorias continuas

Definición 4.2. *Suponga que X es una **variable aleatoria continua** con distribución de probabilidad f(x). Definamos la variable aleatoria Y=H(X) una correspondencia uno a uno entre los valores de X e Y de modo que la ecuación y=h(x) se pueda resolver unívocamente para x en términos de y, digamos x=w(y). Entonces la distribución de probabilidad de Y es*

$$g(y) = f[w(y)]|J|$$

donde $J = w^{'}(y)$ y se llama jacobiano de la transformación.

Si $y = h(x)$ una función creciente, entonces

$$P(a < Y < b) = P(w(a) < X < w(b)) = \int_{w(a)}^{w(b)} f(x)dx$$

Al cambiar la variable de integración de x a y mediante la relación $x = w(y)$, obtenemos $dx = w^{'}(y)dy$, y de aquí

$$P(a < Y < b) = P(w(a) < X < w(b)) = \int_a^{b)} f[w(y)]w^{'}(y)dy$$

Como la integral da la probabilidad que se desea para toda $a < b$ dentro del conjunto permisible de valores y, entonces la distribución de probabilidad de Y es

$$g(y) = f[w(y)]w^{'}(y) = f[w(y)]|J| \tag{4.2}$$

Nos dará el mismo resultado si la función es decreciente.

Ejemplo 4.5. Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{12} & \text{1<x<5} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

encuentre la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $Y = 2X - 3$.

La solución inversa de $y = 2x - 3$ da $x = \frac{y+3}{2}$, de la que obtenemos $J = w^{'}(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}$. Por tanto, con el uso de la definición 4.2, encontramos que la función de densidad de Y es

$$g(y) = \begin{cases} \frac{(y+3)/2}{12}\frac{1}{2} = \frac{y+3}{48} & \text{-1<y<7} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 4.6. Supóngase que X tiene fdp

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{0<x<1} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Sea $H(x) = 3x + 1$. Por tanto para encontrar la fdp de $Y = H(X)$ tenemos la figua 4.2.

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leqslant y) = P(3X + 1 \leqslant y) \\ &= P(X \leqslant \frac{y-1}{3}) \\ &= \int_0^{(y-1)/3} 2x dx = \left[(\frac{y-1}{3})^2 \right] \end{aligned}$$

Así

$$g(y) = G(y)^{'} = \frac{2}{9}(y-1)$$

Puesto que $f(x) > 0$ para todo $0 < x < 1$, encontramos que $g(y) > 0$ para $1 < y < 4$.

4.3. Distribución: producto y cociente de VA independientes

[4] Entre las funciones de X y Y más importantes que deseamos considerar están la suma $S = X + Y$, el producto $W = XY$ y el cociente $Z = X/Y$.

[4] Meyer

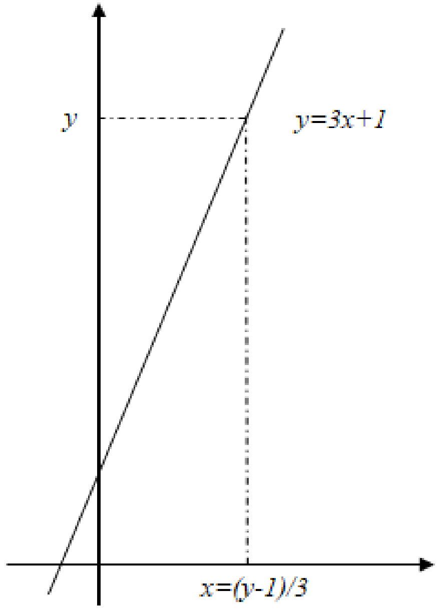


Figura 4.2:

Definición 4.3. *Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional continua y supongamos que X y Y son independientes. Por tanto, la fdp f se puede escribir como f(x,y)=g(x)h(y). Sea W=XY. Luego, la fdp de W, digamos p, está dada por:*

$$p(w) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)h(\frac{w}{u})\left|\frac{1}{u}\right| du \tag{4.3}$$

Es práctico poder demostrar esta definición.

Sea $w = xy$ y $u = x$. Así, $x = u$ y $y = \frac{w}{u}$. El jacobiano es

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{w}{u^2} & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{1}{u}$$

Por tanto, la fdp conjunta de $W = XY$ y $U = X$ es

$$s(w,u) = g(u)h\left(\frac{w}{u}\right)\left|\frac{1}{u}\right|$$

La fdp marginal de W se obtiene al integrar $s(w,u)$ respecto a u, lo que da el resultado pedido. Los valores de w para los cuales $p(w) > 0$ dependen de los valores (x,y) con los cuales $f(x,y) > 0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(u)h\left(\frac{w}{u}\right)\left|\frac{1}{u}\right| du = \int_{0}^{\infty} g(u)h\left(\frac{w}{u}\right)\left|\frac{1}{u}\right| du - \int_{-\infty}^{0} g(u)h\left(\frac{w}{u}\right)\left|\frac{1}{u}\right| du$$

Ejemplo 4.7. Supóngase que tenemos un circuito en el cual la corriente I y la resistencia R varían de modo aleatorio. Supóngase específicamente que I y R son variables aleatorias continuas independientes con las siguientes fdp.

$$\begin{aligned} I : g(i) = 2i & \quad 0 \leq \text{i} \leq 1 \text{ y } 0 \text{ en otra parte} \\ R : h(r) = r^2/9 & \quad 0 \leq \text{r} \leq 3 \text{ y } 0 \text{ en otra parte} \end{aligned}$$

Es de interés la variable aleatoria $E = IR$ (el voltaje del circuito).

Sea p la fdp de E.

$$p(e) = \int_{-\infty}^{\infty} g(i) h\left(\frac{e}{i}\right) \left|\frac{1}{i}\right| di$$
$$0 \leq \text{i} \leq 1 \text{ y } 0 \leq \text{e/i} \leq 3$$

Los dos dominios son equivalentes a $e/3 \leq i \leq 1$.

$$\begin{aligned} p(e) &= \int_{e/3}^{1} 2i \frac{e^2}{9i^2} \frac{1}{i} di \\ &= -\frac{2}{9} e^2 \frac{1}{i} |_{e/3}^{1} \\ &= \frac{2}{9} e(3-e), \ 0 \leq e \leq 3 \end{aligned}$$

La representación de la función se muestra en la figura 4.3.

Definición 4.4. *Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional continua y supongamos que X y Y son independientes. Por tanto, la fdp f se puede escribir como f(x,y)=g(x)h(y). Sea Z=X/Y. Luego, la fdp de Z, digamos q, está dada por:*

$$q(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(vz) h(v) |v| dv \tag{4.4}$$

Ejemplo 4.8. Representemos con X y Y la duración de dos bombillas fabricadas mediante dos procedimientos distintos. Supongamos que X e Y son variables aleatorias independientes con fdp f y g, respectivamente, donde

$$\begin{aligned} f(x) = e^{-x} & \quad \text{x} \geq 0 \text{ y } 0 \text{ en otra parte} \\ g(y) = 2e^{-2y} & \quad \text{y} \leq \text{y } 0 \text{ en otra parte} \end{aligned}$$

Nos es de interés la variable aleatoria $Z = X/Y$.

$$
\begin{aligned}
q(z) &= \int_0^\infty e^{-vz} 2e^{-2v} |v| \, dv = 2 \int_0^\infty v e^{v(2+z)} dv \\
&= \frac{2}{(z+2)^2}, \quad z \geq 0
\end{aligned}
$$

La representación de la función se muestra en la figura 4.3.

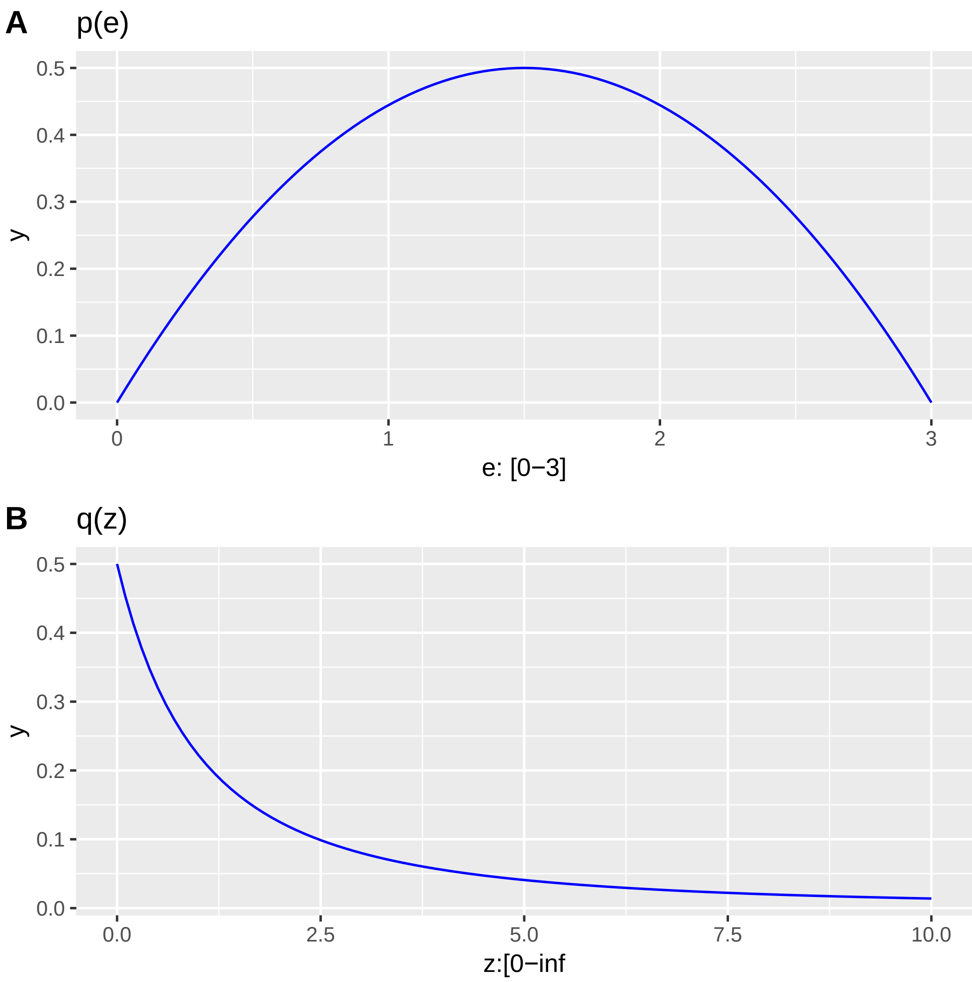


Figura 4.3:

5

Valor esperado y momentos de una variable aleatoria

"Caballeros, debo recordarles que, mis probabilidades de éxito, aumentan en cada nuevo intento..."

– John Forbes Nash, *1928 - 2015*

5.1. Introducción

Hasta el capítulo anterior hemos podido explicar la caracterización probabilística de una variable aleatoria, conocida la función de transformación así como la función de densidad de la variable origen de la transformación.[1] Sin embargo, en múltiples ocasiones puede que no sea necesario conocer la caracterización probabilística de la variable aleatoria destino de transformación, sino baste con conocer algunos parámetros de la distribución de dicha variable. Nos referimos, típicamente, a la media, la varianza y/o el valor cuadrático medio (VCM). Tales parámetros y otros similares se conoce como *caracterización parcial de la variable aleatoria.*

En resumen, el objetivo de esta sección se puede enunciar como sigue: dada X, con función de densidad $f(x)$, y dada una función de transformación $Y = H(X)$, obténgase parámetros de caracterización parcial de la variable aleatoria Y sin llevar a cabo el cálculo explícito de la función de densidad $f(y)$.

5.2. Valor esperado de una variable aleatoria

El valor promedio de una variable aleatoria después de un número grande de experimentos, es su valor esperado. Para ilustrar mejor la esencia de la

[1] Carlos Alberola López, Probabilidad y Estadísticas

esperanza, se analizará el siguiente juego de azar. Supónga que se tiene una moneda y el jugador tiene tres oportunidades para que al lanzarla aparezca una 'cara'. El juego termina en el momento en el que cae una 'cara' o después de tres intentos, lo que suceda primero. Si en el *primero*, *segundo* o *tercer* lanzamiento aparece 'cara' el jugador recibe \$2, \$4 y \$8 respectivamente. Si no cae 'cara' en ninguno de los tres lanzamientos, pierde \$20.

Para determinar la ganancia o pérdida promedio después de un número grande de juegos, sea X la variable aleatoria que representa la cantidad que se gana o se pierde cada vez que se juega. Los posibles valores de X junto con sus respectivas probabilidades se encuentra en el cuadro 5.1. Después de un número grande de juegos se espera ganar \$2 en cualquiera de los dos lanzamientos, \$4 en cualesquiera de los cuatro lanzamientos, \$8 una vez cada ocho lanzamientos y se espera perder \$20 una vez en cada ocho intentos.

El valor esperado, o la cantidad promedio que se ganaría en cada juego después de un número muy grande de éstos, se determina multiplicando cada cantidad que se gana o se pierde por su respectiva probabilidad y sumando los resultados.

De acuerdo a lo anterior, la esperanza de ganar es:

$$\$2\frac{1}{2} + \$4\frac{1}{4} + \$8\frac{1}{8} - \$20\frac{1}{8} = \$0{,}50$$

Nótese que el valor esperado de 50 centavos no es ninguno de los posibles valores de la variable aleatoria; de esta forma, es completamente posible que una variable aleatoria nunca tome el valor de su esperanza.

X		*P(X)*	
2	*P(X)=2*	*P(H)*	*1/2*
4	*P(X)=4*	*P(T ∩ H)*	*1/4*
8	*P(X)=8*	*P(T ∩ T ∩ H)*	*1/8*
-20	*P(X)=-20*	*P(T ∩ T ∩ T)*	*1/8*

Cuadro 5.1:

Definición 5.1. *El valor esperado de una variable aleatoria X es el promedio o valor medio de X dado por*

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x xp(x) \qquad \text{si X es discreta, o} \\ E(X) &= \int_x xf(x)dx \qquad \text{si X es continua} \end{aligned}$$

en donde $p(x)$ y $f(x)$ son las funciones de probabilidad y de densidad de probabilidad, respectivamente.

Definición 5.2. *Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad f(x). La media o valor esperado de la variable aleatoria g(X) es*

$$\begin{aligned} E(g(X)) &= \textstyle\sum_x g(x)p(x) \qquad \text{si X es discreta, o} \\ E(g(X)) &= \textstyle\int_x g(x)f(x)dx \quad \text{si X es continua} \end{aligned} \tag{5.1}$$

La esperanza de una variable aleatoria X no es una función de X sino un número fijo y una propiedad de la distribución de probabilidad de X. Por otra parte, el valor esperado puede no existir dependiendo de si la correspondiente suma o integral no converge en un valor finito.

Ejemplo 5.1. Recordemos el experimento que consistía en lanzar dos dados y cunatificar el resultado de la suma de las caras, ejemplo 3.3, sea X la variable aleatoria, en consecuencia a la definición 5.1 se tiene:

$$E(X) = \sum_{x=2}^{12} xp(x) = 2\frac{1}{36} + 3\frac{2}{36} + ... + 12\frac{1}{36} = 7$$

$$E(X) = \sum_{x} xp(x) = \sum_{x=2}^{12} x\frac{6 - |7 - x|}{36} = 7$$

En siguiente ejemplo servirá para poder conocer algunas propiedades de la esperanza de una variable aleatoria.

Ejemplo 5.2. Supónga que se tiene el cuadro 5.2 el cual representa el porcentaje de ganancia y la probabilidad asociada a una inversión de \$100,000.

Cuadro 5.2: Distribución de ganancias

S. No.	Ganancia(%)	Probabilidad
1°	30	0.20
2°	25	0.20
3°	20	0.30
4°	15	0.15
5°	10	0.10
6°	5	0.05

$$E(X) = (0{,}3)(0{,}2) + (0{,}25)(0{,}20) + \ldots + (0{,}05)(0{,}05) = 0{,}205$$

Entonces, la ganancia esperada es de \$20,500. Sin embargo a pesar de ser la ganancia promedio no necesariamente implica que realmente su ganancia estará cerca a este número.

Ejemplo 5.3. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} & \text{-1<x<2} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Encuentre el valor esperado $g(X) = 4X + 3$.

Según la fórmula (5.1), tenemos

$$E(4X+3) = \int_{-1}^{2} \frac{(4x+3)x^2}{3} dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^{2} (4x^3 + 3x^2) dx = 8$$

5.3. Valor esperado de combinaciones lineales de variables aleatorias

- El valor esperado de una constante c es el valor de la constante.

$$E(c) = \int_{-\infty}^{\infty} c f(x) dx = c \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = c$$

- El valor esperado de la cantidad $aX + b$, en donde a y b son constantes, es el producto de a por el valor esperado de x más b.

$$E(aX+b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b) f(x) dx = a \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = aE(X) + b$$

- El valor esperado de la suma de dos funciones $g(X)$ y $h(X)$ de X es la suma de los valores esperados de $g(X)$ y $h(X)$.

$$E[g(X) + h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} [g(X) + h(X)] f(x) dx$$

Ejemplo 5.4. Sea X una variable aleatoria con la distribución de probabilidad que sigue:

x	0	1	2	3
$f(x)$	1/3	1/2	0	1/6

Cuadro 5.3:

Encontremos el valor esperado de $Y = (X-1)^2$.

$$E[(X-1)^2] = E(X^2 - 2X + 1) = E(X^2) - 2E(X) + E(1)$$

Calculamos:

$$\begin{aligned} E(X) &= (0)\frac{1}{3} + (1)\frac{1}{2} + (2)0 + (3)\frac{1}{6} = 1 \\ E(X^2) &= E(g(X)) = (0^2)\frac{1}{3} + (1^2)\frac{1}{2} + (2^2)0 + (3^2)\frac{1}{6} = 2 \end{aligned}$$

Finalmente, reemplanzando los valores, tenemos:

$$E[(X-1)^2] = 2 - 2(1) + 1 = 1$$

Ejemplo 5.5. La demanda semanal de cierta bebida, en miles de litros, en una cadena de tiendas es una variable aleatoria continua $g(X) = X^2 + X - 2$, donde X tiene función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{1<x<2} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Encuentre el valor esperado para la demanda semanal de la bebida.

$$E[X^2 + X - 2] = E(X^2) + E(X) - E(2)$$

De acuerdo a la definición 5.1 y 5.2 tenemos:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_1^2 2x(x-1)dx = 2\int_1^2 (x^2 - x)dx = \frac{5}{3} \\ E(X^2) &= \int_1^2 2x^2(x-1)dx = 2\int_1^2 (x^3 - x^2)dx = \frac{17}{6} \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$E[X^2 + X - 2] = \frac{17}{6} + \frac{5}{3} - 2 = \frac{5}{2}$$

por lo que la demanda semanal promedio de la bebida en esta cadena de tiendas es 2500 litros.

5.4. Valor esperado de funciones de probabilidad conjuntas

Debemos extender ahora nuestro concepto de esperanza matemática al caso de dos variables aleatorias X y Y con distribución de probabilidad conjunta $f(x,y)$.

Definición 5.3. *Sean X y Y dos variables aleatorias con distribución de probabilidad conjunta f(x,y). La media o valor esperado de la variable aleatoria $g(X,Y)$ es*

$$E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) f(x,y)$$

si X y Y son discretas, y

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y) dx dy$$

si X y Y son continuas.

Ejemplo 5.6. Sean X e Y variables aleatorias con distribución de probabilidad conjunta del ejemplo 3.6 (Distribuciones de probabilidad conjunta), encuentre el valor esperado de $g(X,Y) = XY$.

Sea el cuadro 5.4.

		x			Total
f(x,y)		*0*	*1*	*2*	*fila*
	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\mathbf{\frac{15}{28}}$
y	*1*	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$		$\mathbf{\frac{3}{7}}$
	2	$\frac{1}{14}$			$\mathbf{\frac{1}{28}}$
Total columna		$\mathbf{\frac{5}{14}}$	$\mathbf{\frac{15}{28}}$	$\mathbf{\frac{3}{28}}$	**1**

Cuadro 5.4:

Por la definición escribimos:

$$\begin{aligned} E(X,Y) = \sum_{x=0}^{2} \sum_{y=0}^{2} xy f(x,y) &= (0)(0) f(0,0) + (0)(1) f(0,1) \\ &+ (1)(0) f(1,0) + (1)(1) f(1,1) + (2)(0) f(2,0) \\ &= f(1,1) = \frac{3}{14} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.7. Encuentre $E\left(\frac{Y}{X}\right)$ para la función de densidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x(1+3y^2)}{4} & \text{1<x<2, \ 0<y<1} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

de acuerdo a la definición 5.3 tenemos,

$$\begin{aligned} E\left(\frac{Y}{X}\right) &= \int_0^1 \int_0^2 \left(\frac{y}{x}\right) \frac{x(1+3y^2)}{4} dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^2 \frac{y(1+3y^2)}{4} dxdy \\ &= \int_0^1 \frac{y+y^3}{2} dy = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

De la definición 5.3, si asumimos $g(X,Y) = X$, tendríamos:

$$E(X) = \begin{cases} \sum_x \sum_y x f(x,y) = \sum_x x g(x) & \text{caso discreto} \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y) dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} x g(x) dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

donde $g(x)$ es la distribución marginal de X. Del mismo modo se puede mostrar:

$$E(X) = \begin{cases} \sum_x \sum_y x f(x,y) = \sum_y y h(y) & \text{caso discreto} \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y) dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} y h(y) dy & \text{caso continuo} \end{cases}$$

donde $h(y)$ es la distribución marginal de Y.

5.4.1. Propiedades adicionales de esperanza de distribuciones conjuntas

Sea la distribución de probabilidad conjunta $f(x,y)$ asociado a dos variables aleatorias X y Y.

Definición 5.4. *El valor esperado de la suma o diferencia de dos o más funciones de variables aleatorias X y Y es la suma o diferencia de los valores esperados de las funciones. Es decir:*

$$E[g(X,Y) \pm h(X,Y)] = E[g(X,Y)] \pm E[h(X,Y)]$$

Para demostrarlo, veamos;

$$\begin{aligned} E[g(X,Y) \pm h(X,Y)] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[g(x,y) \pm h(x,y)]f(x,y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy \pm \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)f(x,y)dxdy \\ &= E[g(X,Y)] \pm E[h(X,Y)] \end{aligned}$$

Al ser una generalización podemos probar los siguientes resultados:

- Al hacer $g(X,Y) = g(X)$ y $h(X,Y) = h(Y)$, vemos que
$$E[g(X) \pm h(Y)] = E[g(X)] \pm E[h(Y)]$$
- Al hacer $g(X,Y) = X$ y $h(X,Y) = Y$, vemos que.
$$E[X \pm Y] = E[X] \pm E[Y]$$

Definición 5.5. *Sean X y Y dos variables aleatorias independientes, entonces*

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

La demostración es sencilla, dejamos el planteamiento y el lector se encargará de hacer los cálculos.

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy$$

Y recordemos que $f(x,y) = g(x)h(y)$ para distribuciones conjuntas independientes.

Ejemplo 5.8. En la producción de microchips de arseniuro de galio, se sabe que la proporción entre galio y arseniuro es independiente de la producción de un alto porcentaje de obleas manejables, que son los principales componentes de los microchips. Denótee con X la proporción de galio y arseniuro y con Y el porcentaje de microobleas manejables producidas durante un periodo de una hora. X y Y son variables aleatorias independientes con la siguiente densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} x\frac{1+3y^2}{4} & \text{0<x<2, 0<y<1} \\ 0 & \end{cases}$$

Ilustre que $E(XY) = E(X)E(Y)$

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \int_0^1 \int_0^2 xyf(xy)dxdy = \int_0^1 \int_0^2 \frac{x^2y(1+3y^2)}{4}dxdy \\
&= \int_0^1 \frac{x^3y(1+3y^2)}{12} |_{x=0}^{x=2} dy = \int_0^1 \frac{2y(1+3y^2)}{3}dy = \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^1 \int_0^2 xf(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^2 \frac{x^2(1+3y^2)}{4}dxdy \\
&= \int_0^1 \frac{x^3(1+3y^2)}{12} |_{x=0}^{x=2} dy = \int_0^1 \frac{2(1+3y^2)}{3}dy = \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \int_0^1 \int_0^2 yf(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^2 \frac{xy(1+3y^2)}{4}dxdy \\
&= \int_0^1 \frac{x^2y(1+3y^2)}{8} |_{x=0}^{x=2} dy = \int_0^1 \frac{y(1+3y^2)}{2}dy = \frac{5}{8}
\end{aligned}
$$

Luego de resolver las integrales,

$$E[XY] = E(X)E(Y) = \frac{4}{3}\frac{5}{8} = \frac{5}{6}$$

5.5. Momentos de una variable aleatoria

Los momentos de una variable aleatoria X, son los valores esperados de ciertas funciones de X[2]. Éstos forman una colección de medidas descriptivas que pueden emplearse para caracterizar la distribución de probabilidad de X y especificarla si todos los momentos de X son conocidos.[3]

A pesar de que los momentos de X **pueden definirse alrededor de cualquier punto de referencia**, generalmente se definen alrededor de cero o del valor esperado de X.

El conocimiento del momento de una variable aleatoria -que caracteriza a la distribución de probabilidad- es muy importante más aún cuando es poco probable que el experimentador conozca la distribución de probabilidad. Todas las proposiciones con respecto a los momentos se encuentran sujetas a la existencia de las sumas o integrales que las definan.

Definición 5.6. *Sea X una variable aleatoria. El r-ésimo momento de X alrededor de cero se define por:*

[2]También es apropiado emplear la frase *momentos de la distribución de probabilidad X*

[3]Canavos

$$\begin{aligned}
\mu_r' = E(X^r) &= \sum_x x^r p(x) \qquad \text{si X es discreta} \\
\mu_r' = E(X^r) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx \quad \text{si X es continua}
\end{aligned}$$

El primer momento alrededor de cero es la *media* o valor esperado de la variable aleatoria y se denota por μ; de esta manera se tiene que $\mu_1' = \mu = E(X)$. La media de una variable aleatoria se considera como una cantidad numérica alrededor de la cual los valores de la variable aleatoria tienden a agruparse. Por lo tanto, la media es una medida de tendencia central.

Definición 5.7. *Sea X una variable aleatoria. El r-ésimo momento 'central' de X o el r-ésimo momento alrededor de la media X se define por:*

$$\begin{aligned}
\mu_r = E(X-\mu)^r &= \sum_x (x-\mu)^r p(x) \qquad \text{si X es discreta} \\
\mu_r = E(X-\mu)^r &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r f(x)dx \quad \text{si X es continua}
\end{aligned}$$

El momento central cero de cualquier variable aleatoria es uno, dado que:

$$\mu_0 = E(X-\mu)^0 = E(1) = 1$$

De manera similar, el primer momento central de cualquier variable aleatoria es cero, dado que:

$$\mu_1 = E(X-\mu)^1 = E(X) - \mu = 0$$

El segundo momento central:

$$\mu_2 = E(X-\mu)^2$$

recibe el nombre de *varianza* de la variable aleatoria. Puesto que:

$$\begin{aligned}
\mu_2 = Var(X) &= E(X-\mu)^2 \\
&= E(X^2 - 2X\mu + \mu^2) \\
&= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= \mu_2' - \mu^2
\end{aligned} \tag{5.2}$$

La varianza de una variable aleatoria es una medida de la dispersión de la distribución de probabilidad de ésta. Por ejemplo, en el caso continuo si la mayor parte del área por debajo de la curva de distribución se encuentra cercana a la media, la varianza es pequeña; si la mayor parte del área se encuentra muy dispersa alrededor de la media, la varianza será grande. La raiz cuadrada positiva de la varianza recibe el nombre de *desviación estándar* y se denota por σ.

Algunas demostraciones acerca de las propiedades de la varianza se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}
Var(aX+b) &= E(aX+b)^2 - E^2(aX+b) \\
&= E(a^2X^2+2abX+b^2) - [aE(X)+b]^2 \\
&= a^2E(X^2)+2abE(X)+b^2-a^2E^2(X)-2abE(X)-b^2 \\
&= a^2E(X^2)-a^2E^2(X) \\
&= a^2[E(X^2)-E^2(X)] \\
&= a^2Var(X)
\end{aligned}$$

Una medida que compara la dispersión relativa de dos distribuciones de probabilidad es el *coeficiente de variación*, que está definido por:

$$V = \frac{\sigma}{\mu}$$

Este coeficiente expresa la magnitud de la dispersión de la variable aleatoria con respecto a su valor esperado. V es una medida estandarizada de la variación con respecto a la media, especialmente útil para comparar dos distribuciones de probabilidad cuando la escala de medición difiere de manera apreciable entre éstas.

5.5.1. Momentos centrales tercero y cuarto de una v.a. X

Estos momentos centrales proporcionan información muy útil con respecto a la forma de la distribución de probabilidad de X. A pesar de que pueden considerarse momentos de orden superior, su utilidad para caracterizar una **distribución de probabilidad** es mucho menor que la de los primeros cuatro momentos.

El tercer momento central está relacionado con la *asimetría* de la distribución de probabilidad de X.

$$\mu_3 = E(X-\mu)^3$$

Veamos un forma de obtener los momentos de cualquier número.

$$\mu_r = E(X-\mu)^r$$

pero la expansión de $(X-\mu)^r$ puede expresarse como:

$$\begin{aligned}
(X-\mu)^r &= \sum_{i=0}^{r}(-1)^i\frac{r!}{(r-i)!i!}\mu^i x^{r-i} \\
E(X-\mu)^r &= \sum_{i=0}^{r}(-1)^i\frac{r!}{(r-i)!i!}\mu^i E(X^{r-i}) \\
\mu_r &= \sum_{i=0}^{r}(-1)^i\frac{r!}{(r-i)!i!}\mu^i \mu'_{r-i})
\end{aligned}$$

En particular,

$$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu\mu'_2 + 2\mu^3 \tag{5.3}$$

Para las distribuciones de probabilidad que presentan un sólo pico, si $\mu_3 < 0$, se dice que la distribución es *asimétrica negativamente*; si $\mu_3 > 0$ es *asimétrica positivamente*; y si $\mu_3 = 0$, la distribución recibe el nombre de *simétrica.*

A menos que la distribución presente un solo pico, μ_3 no sirve para tener una idea de la distribución. A pesar de ello, el tercer momento central puede dar resultados erróneos, dado que depende de las unidades en las que se mide la v.a. X. Así como el coeficiente de variabilidad, se define el tercer momento estandarizado que recibe el nombre de **coeficiente de asimetría** como:

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{\frac{3}{2}}} \tag{5.4}$$

Algunas propiedades se muestran en la figura 5.1.

El cuarto momento central es una medida de qué tan *puntiaguda* es la distribución de probabilidad y recibe el nombre de **curtosis**.

$$\begin{aligned}
\mu_4 &= E(X-\mu)^4 \\
&= \mu'_4 - 4\mu\mu'_3 + 6\mu^2\mu'_2 - 3\mu^4
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Al igual que el tercer momento es preferible usar el cuarto momento estandarizado.

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \tag{5.6}$$

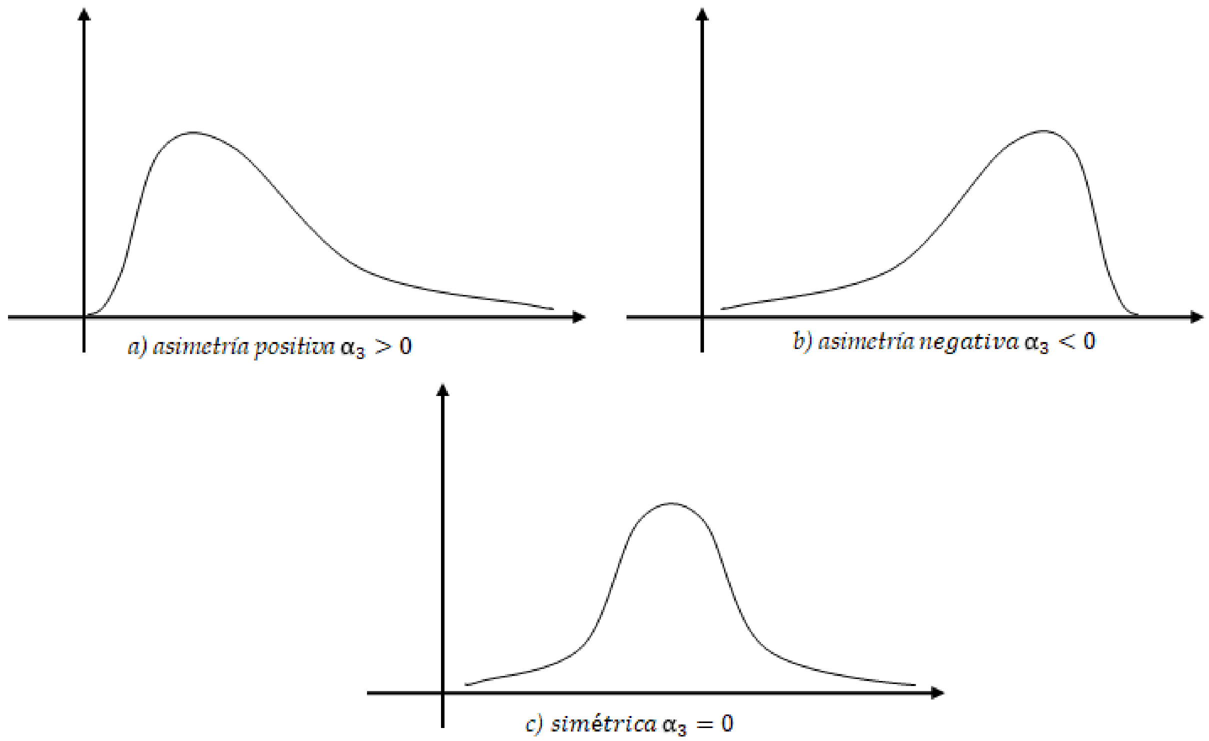


Figura 5.1:

Si $\alpha_4 > 3$, la distribución de probabilidad presenta un pico relativamente alto y recibe el nombre de *leptocúrtica*; si $\alpha_4 < 3$, la distribución es relativamente plana y recibe el nombre de *platicúrtica*; y si $\alpha_4 = 3$, la distribución no tiene un pico ni muy alto y ni muy bajo, se dice *mesocúrtica*. Véase la figura 5.2.

Finalmente, los momentos estandarizados tercero y cuarto, también se conocen como los factores de $forma$ primero y segundo, respectivamente, de la distribución de probabilidad debido a que, en gran medida, determinan la forma de la distribución de probabilidad.

Ejemplo 5.9. Para ilustrar los conceptos de esta sección, veamos las siguientes tablas de datos (figura 5.3) de dos variables aleatorias X y Y.

Para la variable aleatoria X.

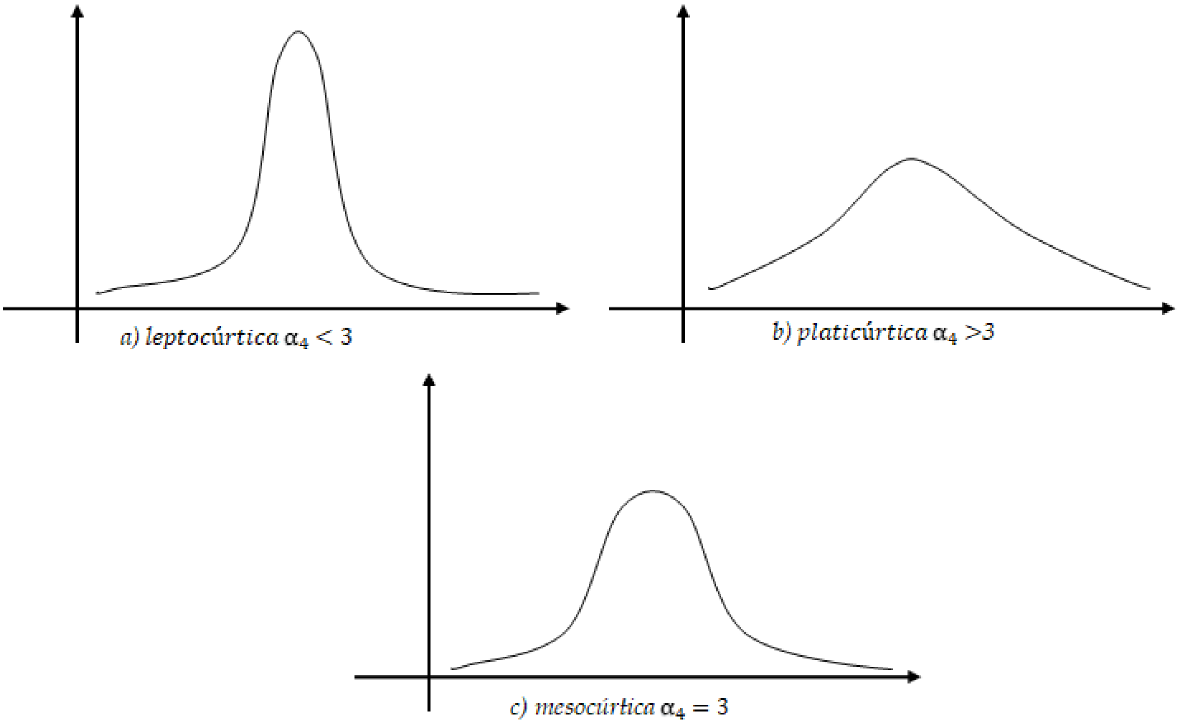


Figura 5.2:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(x)$	0.02	0.09	0.21	0.28	0.23	0.12	0.04	0.01	0

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(y)$	0.06	0.21	0.28	0.24	0.13	0.05	0.02	0.01	0	0	0	0	0

Figura 5.3:

$$\begin{aligned}
\mu &= (0)(0{,}02)+(1)(0{,}09)+\ldots+(8)(0)=3{,}18\\
\mu_2' &= (0)^2(0{,}02)+(1)^2(0{,}09)+\ldots+(8)^2(0)=12{,}16\\
\mu_3' &= (0)^3(0{,}02)+(1)^3(0{,}09)+\ldots+(8)^3(0)=51{,}12\\
\mu_4' &= (0)^4(0{,}02)+(1)^4(0{,}09)+\ldots+(8)^4(0)=235{,}86
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(X) &= 1{,}95\\
\mu_3(X) &= 0{,}3825\\
\mu_4(X) &= 10{,}565
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3(X) &= 0{,}1405 \\ \alpha_4(X) &= 2{,}78 \end{aligned}$$

Para la variable aleatoria Y.

$$\begin{aligned} \mu &= 2{,}45 \\ \mu_2^{'} &= 8{,}03 \\ \mu_3^{'} &= 31{,}25 \\ \mu_4^{'} &= 138{,}59 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(Y) &= 2{,}03 \\ \mu_3(Y) &= 1{,}6418 \\ \mu_4(Y) &= 13{,}4504 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3(Y) &= 0{,}5676 \\ \alpha_4(Y) &= 3{,}26 \end{aligned}$$

Como se observa, si sólo nos limitáramos a la esperanza y la varianza, pareciera que X y Y no tubieran diferencias, no obstante la distribución de Y tiene un sesgo positivo más grande que la de X. Además la distribución de X es platicúrtica ($\alpha_4 < 3$), y mientras que Y es leptocúrtica ($\alpha_4 > 3$).

5.6. Función generadora de momentos

Es un procedimiento alternativo para el cálculo de momentos de variables aleatorias. La llamamos **función generadora de momentos**.

Definición 5.8. *Sea X una variable aleatoria. El valor esperado de e^{tX} recibe el nombre de función generadora de momentos, y se denota por $m_X(t)$. Si el valor esperado existe para cualquier valor de t en algún intervalo -c<t<c en donde c es un número positivo. En otras palabras:*

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E[(e^{tX})] = \sum_x e^{(tx)} p(x) \qquad \text{si X es discreta} \\ m_X(t) &= E[(e^{tX})] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(tx)} f(x) dx \quad \text{si X es continua} \end{aligned}$$

Nótese que $m_X(t)$ nada más es función de argumento t. Si $\boldsymbol{t=0}$, entonces $m_X(0) = E(e^0) = 1$. Si la función generadora de momentos existe, puede demostrarse que es única y que determina por completo la distribución de probabilidad de X.

El otras palabras, si dos variables aleatorias tienen la misma función generadora de momentos, entonces tienen la misma función de probabilidad.

Si la función generadora de momentos existe para $-c < t < c$, entonces existen las derivadas de ésta de todas las órdenes para $t = 0$. Esto asegura que $m_X(t)$ generará todos los momentos de X alrededor del origen.

Al tomar la primera derivada y evaluar en $t = 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m_X(t)}{\partial t}\Big|_{t=0} &= \frac{\partial E[(e^{tX})]}{\partial t}\Big|_{t=0} \\
&= E\left\{\frac{\partial}{\partial t} e^{tX}\right\} \\
&= E[Xe^{tX}]\,\big|_{t=0} \\
&= E(X) = \mu
\end{aligned}$$

Al tomar la segunda derivada y evaluar en $t = 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 m_X(t)}{\partial t^2}\Big|_{t=0} &= \frac{\partial^2 E[(e^{tX})]}{\partial t^2}\Big|_{t=0} \\
&= E\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{tX}\right\} \\
&= E\left\{\frac{\partial}{\partial t}[Xe^{tX}]\right\} \\
&= E[X^2 e^{tX}]\,\big|_{t=0} \\
&= E(X^2) = \mu_2^{'}
\end{aligned}$$

De estas dos resoluciones podemos definir lo siguiente:

Definición 5.9. *Sea X una variable aleatoria con función generadora de momentos $m_X(t)$. Entonces*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^r m_X(t)}{\partial t^r}\Big|_{t=0} &= \frac{\partial^r E[(e^{tX})]}{\partial t^r}\Big|_{t=0} \\
&= E\left\{\frac{\partial^r}{\partial t^r} e^{tX}\right\} \\
&= E[X^r e^{tX}]\,\big|_{t=0}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^r m_X(t)}{\partial t^r}\Big|_{t=0} = E(X^r) = \mu_r^{'}$$

Definición 5.10. *Sea X una variable aleatoria. El valor esperado de* $e^{t(X-\mu)}$ *recibe el nombre de función generadora de momentos central y se denota por* $m_{X-\mu}(t)$*, si el valor esperado existe para cualquier t en algún intervalo -c<t<c, en donde c es un número positivo*

$$\begin{aligned} m_{X-\mu}(t) &= E[(e^{t(X-\mu)})] = \sum_x e^{[t(x-\mu)]}p(x) \quad \text{si X es discreta} \\ m_{X-\mu}(t) &= E[(e^{t(X-\mu)})] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{[t(x-\mu)]}f(x)dx \quad \text{si X es continua} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.10. Encuentre la función generadora de momentos de la variable aleatoria binomial X y después utilícela para verificar que $\mu = np$ y $\sigma^2 = npq$.

Sea:

$$m_X(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tX}\binom{n}{x}p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pe^t)^x q^{n-x}$$

Si la última expresión la reconocemos como binomial $(pe^t+q)^n$. Obtenemos;

$$m_X(t) = (pe^t+q)^n$$

Calculamos su primera derivada y segunda derivada (primer momento y segundo momento).

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_X(t)}{\partial t} &= n(pe^t+q)^{n-1}pe^t, \\ \frac{\partial^2 m_X(t)}{\partial t^2} &= np[e^t(n-1)(pe^t+q)^{n-2}pe^t + (pe^t+q)^{n-1}e^t] \end{aligned}$$

Si hacemos $t = 0$, tenemos,

$$\mu_1^{'} = np \quad y \quad \mu_2^{'} = np[(n-1)p+1]$$

Por tanto;

$$\mu = \mu_1^{'} = np \quad y \quad \sigma^2 = \mu_2^{'} - \mu^2 = np(1-p) = npq$$

Ejemplo 5.11. Muestre que la función generadora de momentos de la variable aleatoria X que tiene una distribución de probabilidad normal con media μ y varianza σ^2 está dada por:

$$m_X(t) = e^{\frac{\mu t+\sigma^2+t^2}{2}}$$

Veamos;

$$\begin{aligned}
m_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^t x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right\}^2\right]dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} exp\left[\frac{-[x^2-2(\mu+t\sigma^2)x+\mu^2]}{2\sigma^2}\right]dx
\end{aligned}$$

Al completar los cuadrados en el exponente, podemos escribir;

$$x^2 - 2(\mu + t\sigma^2)x + \mu^2 = [x - (\mu + t\sigma^2)]^2 - 2\mu t\sigma^2 - t^2\sigma^4$$

entonces,

$$\begin{aligned}
m_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} exp\left[\frac{-[[x-(\mu-t\sigma^2)]^2-2\mu t\sigma^2+t^2\sigma^4]}{2\sigma^2}\right] \\
&= exp\left[\frac{2\mu t+\sigma^2 t^2}{2}\right]\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} exp\left[\frac{-(1/2)\{[x-(\mu+t\sigma^2)]\}}{\sigma^2}\right]dx
\end{aligned}$$

hagamos $w = \frac{[x-(\mu+t\sigma^2)]}{\sigma}$, entonces $\partial x = \sigma\partial w$, y

$$\begin{aligned}
m_X(t) &= exp\left[\frac{2\mu t+\sigma^2 t^2}{2}\right]\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{w^2/2} \\
m_X(t) &= exp\left[\frac{2\mu t+\sigma^2 t^2}{2}\right]
\end{aligned}$$

6

Distribuciones de probabilidad Discretas

"La vida es un juego de probabilidades terribles; si fuera una apuesta no intervendrías en ella"

– Tom Stoppard, *1937 - actualidad*

6.1. Introducción

En los capítulos uno y dos se dió una introducción a las definiciones de evento y espacio muestral, cada una con sus cálculos respectivos, de esta forma se hizo un preámbulo hacia el capítulo tres y cuatro, en los cuales definimos variables aleatorias y funciones de densidad de probabilidades, así mismo estos dos capítulos nos llevan al capítulo cinco que es muy importante en cuanto al tratamiento de las variables, será mayor su utilidad en el cálculo de estadística multivariada en una siguiente publicación, no obstante, con en conocimiento instruído hasta el capítulo cinco, el lector se sentirá en la capacidad de poder definir correctamente una distribución de probabilidad.

Este capítulo está diseñado para poder identificar y entender algunas distribuciones de probabilidad discretas, para ello se definirán algunas nomenclaturas básicas para mantener un orden en cada caso. De esta manera, podemos indicar que *una distribución de probabilidad* está caracterizada, de manera general, por una o más cantidades que reciben el nombre de parámetros de la distribución. Un parámetro puede tomar cualquier valor de un conjunto dado y, en ese sentido, define una familia de distribuciones de probabilidad, que tendrán la misma función genérica de probabilidad o función de densidad de probabilidad.

Los parámetros que se indicarán en este capítulo serán el de *conteo, la proporción, la rapidez, la localización y la forma.* De esta manera, emplearemos las letras n y k para referirnos a los parámetros de conteo, p para la proporción, λ para la rapidez, μ para la localización, σ y θ para la escala, y α y β para la forma. En el caso de que no se esté tratando un parámetro en particular, se empleará θ para designar dicho parámetro. Podemos indicar además que, un parámetros de **conteo y proporción** se entienden solos. Un parámetro de **rapidez** representa la rapidez en que ocurre un evento aleatorio en el tiempo o el espacio(distribución poisson). Un parámetro de **localización** relaciona la función (densidad) de probabilidad con el origen de la escala de medición. El parámetro de localización se presenta de la siguiente forma (x-μ). Un parámetro de **escala** es una cantidad que relaciona las unnidades físicas de la variable aleatoria y de esta forma la escala, también influye en la dispersión, y así en la apariencia de la función de probabilidad, la aparición de un parámetro de escala es de la forma (x/θ). Veremos algunas distribuciones de probabilidad y definiremos sus parámetros.

6.2. Distribución uniforme discreta

La variable aleatoria toma cada uno de sus valores con probabilidad idéntica.

Definición 6.1. *Si la variable aleatoria X toma valores $x_1, x_2, ..., x_k$, con idénticas probabilidades, entonces la distribución uniforme discreta está dada por:*

$$f(x;k) = \frac{1}{k}, \qquad x = x_1, x_2, ..., x_k \tag{6.1}$$

Usamos la notación $f(x;k)$ en lugar de $f(x)$ para indicar que la distribución uniforme depende del parámetro k.

Ejemplo 6.1. Cuando se selecciona un foco al azar de una caja que contiene un foco de 40 watts, uno de 60 watts, uno de 75 watts y uno de 100 watts, cada elemento del espacio muestral $\Omega = \{40, 60, 75, 100\}$ ocurre con probabilidad $\frac{1}{4}$. Por tanto, tenemos una distribución uniforme, con:

$$f(x;4) = \frac{1}{4}, \qquad x = 40, 60, 75, 100$$

Ejemplo 6.2. Cuando se lanza un dado, cada elemento del espacio muestral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ocurre con probabilidad $\frac{1}{6}$. Por tanto, tenemos una distribución uniforme, con:

$$f(x;6) = \frac{1}{6}, \qquad x = 1,2,3,4,5,6$$

La representación gráfica de los dos ejemplos anteriores se muestra en la figura 6.1.

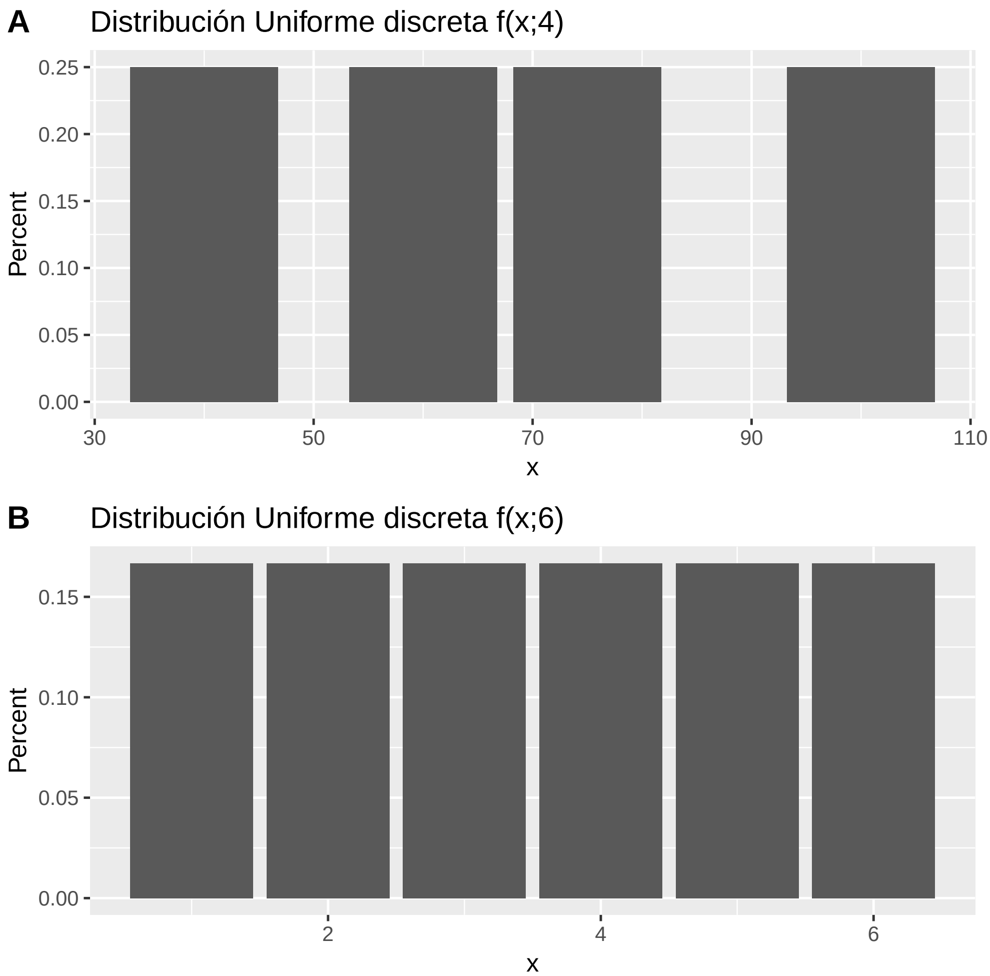


Figura 6.1: Distribución uniforme

Definición 6.2. *La media y la varianza de la districbución uniforme discreta f(x;k) son:*

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k} \quad y \quad \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2}{k} \tag{6.2}$$

6.3. Distribución binomial

Esta distribución tiene muchas aplicaciones en modelamiento y en encuestas. Imaginemos un experimento en el que el resultado es la ocurrencia o la no ocurrencia de un evento. Llamenos 'éxito' a la ocurrencia del evento y 'fracaso' a su no ocurrencia. Además sea p la probabilidad de éxito cada vez que el experimento se lleva a cabo y $1-p$ la probabilidad de fracaso. Si realizamos el experimento n veces, y cada uno de éstos es independiente de todos los demás, y sea X la variable aleatoria que representa el número de éxitos en los n ensayos. El interés está en **determinar la probabilidad de obtener exactamente $X = x$ éxitos durante los n ensayos**.

Asumiremos entonces que;

- La probabilidad de éxito p permanece constante para cada ensayo.
- Los n ensayos son independientes entre sí.

Una forma de darle sentido a la distribución binomial se ve en el siguiente ejemplo, supongamos que el Centro de control de enfermedades tiene la responsabilidad de vigilar las enfermedades transmisibles. Supongamos que la probabilidad de contraer cierta enfermedad transmisible para un grupo etário es constante, de ésta manera la distribución binomial puede ser una forma correcta de modelizarlo.

Para obtener la función de probabilidad binomial, primero se determina la probabilidad de tener, en n ensayos, x éxitos consecutivos seguidos de $n-x$ fracasos consecutivos. Esto porque la hipótesis es que los n ensayos son independientes.

$$p.p.p...p(1-p)(1-p)(1-p)...(1-p) = p^x(1-p)^{n-x}$$

p, tiene x términos y $(1-p)$ tiene $n-x$ términos. De ésta manera, la probabilidad de tener x éxitos y $n-x$ fracasos **en cualquier orden**, es el producto de $p^x(1-p)^{n-x}$ por el **número de órdenes distintos**. Esto último es el número de combinaciones de n objetos tomados x a la vez.

Definición 6.3. *Sea X una variable aleatoria que representa el número de éxitos en n ensayos y p la probabilidad de éxito con cualquiera de éstos. Se dice que X tiene una distribución binomial con función de probabilidad.*

$$p(x;n,p) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-x)!x!}p^x(1-p)^{n-x}, & \text{x=0,1,2,3,...,n,} \\ \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{6.3}$$

Usamos la notación $p(x;n,p)$ en lugar de $p(x)$ para indicar que la distribución binomial depende del parámetro n y p.

También se define la probabilidad de que una **variable aleatoria** X **sea menor o igual** a un valor específico x denominado distribución acumulativa, como:

$$P(X \leq x) = F(x; n, p) = \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \tag{6.4}$$

Algunas gráficas de distribución binomial se muestran en la figura 6.2.

Ejemplo 6.3. La probabilidad de que cierta clase de componente sobreviva a una prueba de choque dada es $\frac{3}{4}$. Encuentre la probabilidad de que sobrevivan exactamente dos de los siguientes cuatro que se prueben.

$$p(2; 4, \frac{3}{4}) = \binom{4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{4!}{2!2!} . \frac{3^2}{4^2} = \frac{27}{128}$$

Ejemplo 6.4. La probabilidad de que un paciente se recupere de una rara enfermedad sanguínea es 0.4. Si se sabe que 15 personas contraen ésta enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que (a) sobrevivan al menos 10, (b) sobrevivan de 3 a 8 y (c) sobrevivan exactamente cinco?.

a)

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - \sum_{x=0}^{9} p(x; 15, 0{,}4) = 1 - 0{,}9662 = 0{,}0338$$

b)

$$\begin{aligned} P(3 \leq X \leq 8) &= \sum_{x=3}^{8} p(x; 15, 0{,}4) \\ &= \sum_{x=0}^{8} p(x; 15, 0{,}4) - \sum_{x=0}^{2} p(x; 15, 0{,}4) \\ &= = 0{,}9050 - 0{,}0271 = 0{,}8779 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} P(X = 5) &= p(5; 15, 0{,}4) = \sum_{x=0}^{5} p(x; 15, 0{,}4) - \sum_{x=0}^{4} p(x; 15, 0{,}4) \\ &= 0{,}4032 - 0{,}2173 = 0{,}1859 \end{aligned}$$

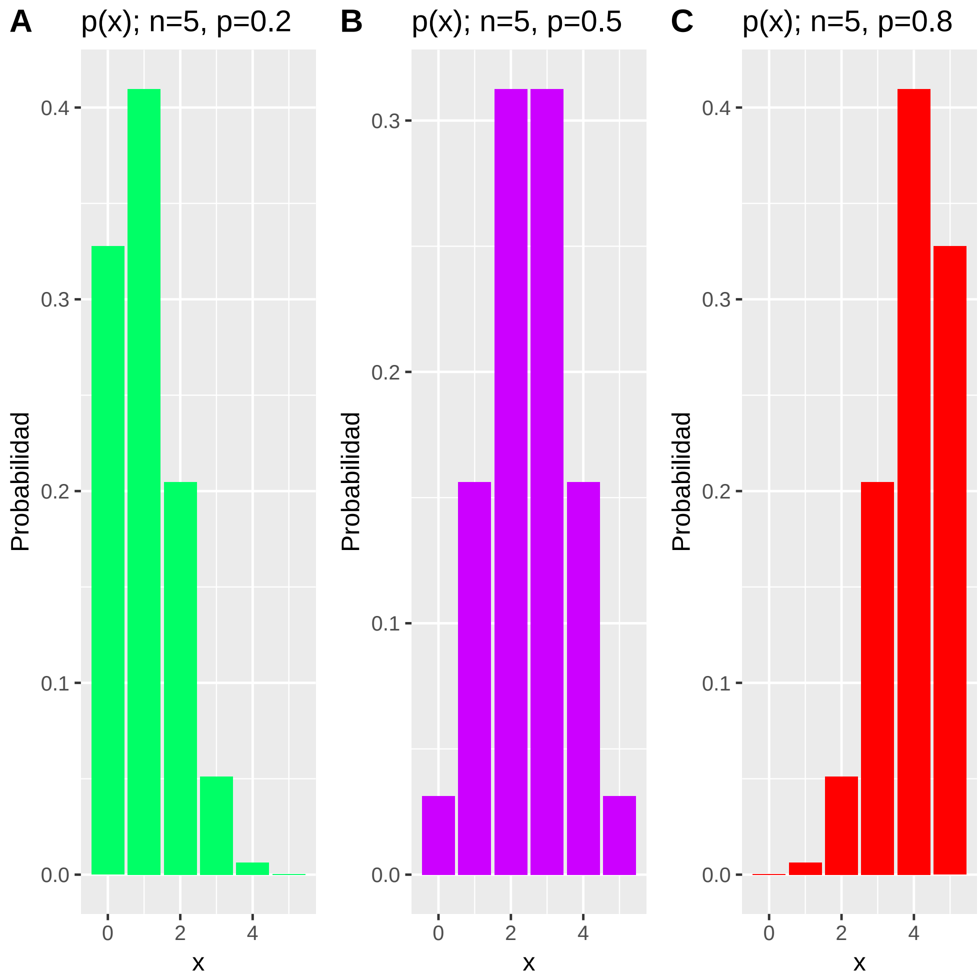


Figura 6.2: Distribución binomial con diferentes parámetros

Definición 6.4. *La media y la varianza de la distribución binomial p(x;n,p) son*

$$\mu = np \qquad y \qquad \sigma^2 = npq \tag{6.5}$$

6.4. Distribución Poisson

El proceso de Poisson es una distribución discreta que representa el **número de eventos independientes que ocurren a una velocidad constante**. Muchos eventos aleatorios ocurren de manera independiente con una velocidad constante en el tiempo o el espacio. Algunos ejemplos son el número de llamadas telefónocas en un determinado tiempo, número de defectos en piezas similares para el material, el número de bacterias en un cultivo, el número de solicitudes de seguro procesadas por una compañía en un período específico, unas muchas más. Una propiedad es que la distribución Poisson se aproxima a la Binomial cuando p es pequeño y n es grande.

Definición 6.5. *Sea X una variable aleatoria que representa el número de eventos aleatorios independientes que ocurre a una rapidez constante sobre el tiempo o el espacio. Se dice entonces que la variable aleatoria X tiene una distribución de Poisson con función de probabilidad.*

$$p(x;\lambda) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & \text{x=0,1,2,3,...,n; } \lambda > 0 \\ \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{6.6}$$

Usamos la notación $p(x;\lambda)$ en lugar de $p(x)$ para indicar que la distribución poisson depende del parámetro λ.

El parámetro de la distribución Poisson es λ, el número promedio de ocurrencias del evento aleatorio por unidad de tiempo.

También se define la probabilidad de que una **variable aleatoria** X **sea menor o igual** a un valor específico x denominado distribución acumulativa, como:

$$P(X \leq x) = F(x;\lambda) = \sum_{i=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \tag{6.7}$$

En algunos textos a λ la denotan como λt, donde t es un factor de tiempo, véase el ejemplo 6.5, subpregunta (b).

Algunas gráficas de distribución poisson se muestran en la figura 6.3.

Ejemplo 6.5. Durante un experimento de laboratorio el número promedio de partículas radioactivas que pasan a travéz de un contador en un milisegundo es cuatro. a) ¿Cuál es la probabilidad de que seis partículas entren al contador en un milisegundo dado?. y b) ¿Cuál es la probabilidad de que 7 partículas entren al contador en dos milisegundos?

Al usar la distribución de Poisson con $x = 6$ y $\lambda = 4$, encontramos que:

$$p(x;\lambda) = p(6;4) = \frac{e^{-4}4^6}{6!} = \sum_{x=0}^{6} p(x;4) - \sum_{x=0}^{5} p(x;4) = 0{,}8893 - 0{,}7851 = 0{,}1042$$

Al usar la distribución de Poisson con $x = 7$ y $\lambda = 4x2$, encontramos que:

$$p(x;\lambda) = p(7;8) = \frac{e^{-8}8^7}{7!} = \sum_{x=0}^{7} p(x;8) - \sum_{x=0}^{6} p(x;8) = 0{,}1395$$

Ejemplo 6.6. El número promedio de automóviles que llega cada día a cierta cochera es 10. Las instalaciones en la cochera pueden manejar a lo más 15 automóviles por día. ¿Cuál es la probabilidad de que en un día dado los automóviles se tengan que regresar?.

$$P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - \sum_{x=0}^{15} p(x;10) = 1 - 0{,}9513 = 0{,}0487$$

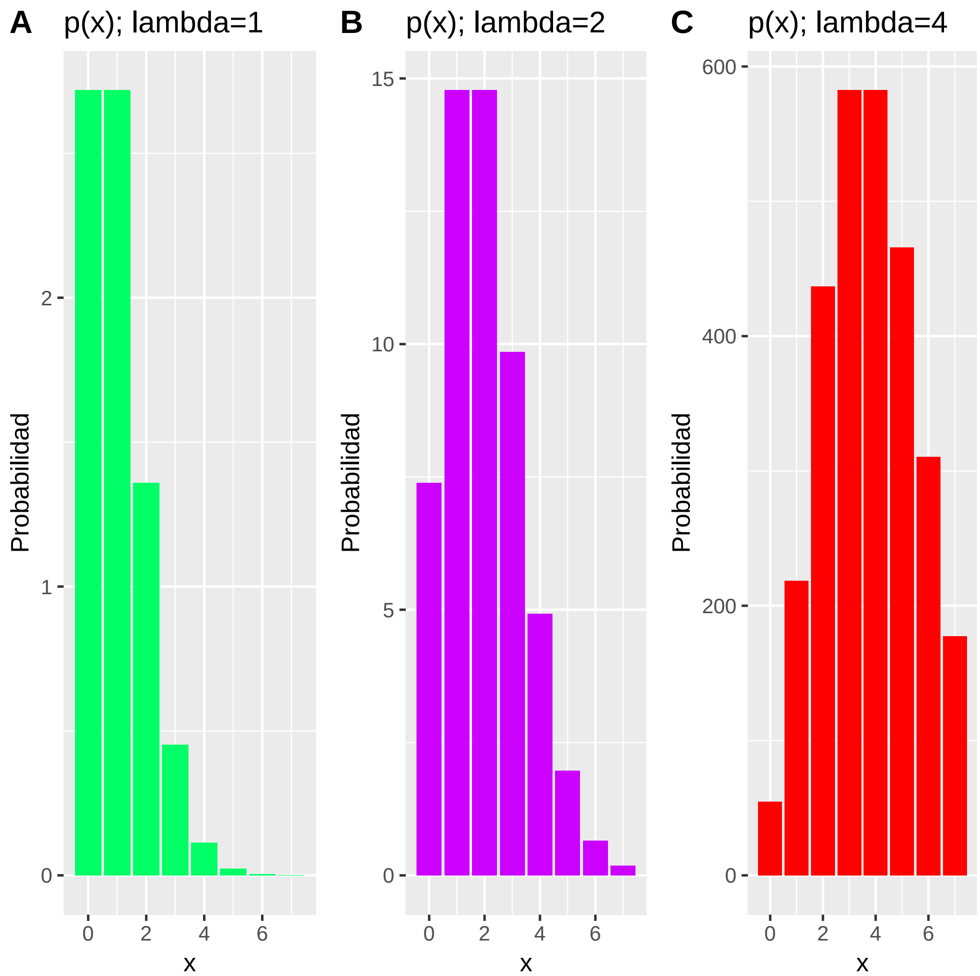


Figura 6.3: Distribución Poisson con diferentes parámetros y $t = 1$

Definición 6.6. *La media y la varianza de la distribución poisson $p(x;\lambda)$ es λ*

$$\mu = \lambda \qquad y \qquad \sigma^2 = \lambda \tag{6.8}$$

Veamos la media.

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \lambda \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

Ahora bien, sea $y = x - 1$ lo que da.

$$E(X) = \lambda \sum_{y=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!} = \lambda$$

Veamos la varianza.

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \lambda^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-2}}{(x-2)!}$$

Si hacemos $y = x - 2$.

$$E[X(X-1)] = \lambda^2 \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!} = \lambda^2$$

De aquí podemos obtener:

$$\sigma^2 = E[X(X-1)] + \lambda - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

6.4.1. Distribución Poisson como límite de la distribución binomial

Definición 6.7. *Sea X una variable aleatoria binomial con distribución de probabilidad p(x;n,p). Cuando* $n \to \infty$, $p \to 0$, *y* $\mu = np$ *permanecen constantes*

$$p(x; n, p) \to p(x; \lambda)$$

Considerar $\mu = \lambda$.
Al sustituir $p = \lambda/n$, tenemos:

$$\begin{aligned} p(x; n, p) &= \frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \\ &= 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\frac{\lambda^x}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \end{aligned}$$

Conforme $n \to \infty$ mientras x y λ permanecen constantes,

$$\lim_{n\to\infty} 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{1}\right) = 1, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} = 1$$

y de la definición de número e, tenemos;

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\frac{1}{(-n)/\lambda}\right]^{-n/\lambda}\right\}^{-\lambda}=e^{-\lambda}$$

Ambas relaciones se reemplazan y se tiene:

$$p(x;n,p)\to\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},\quad x=0,1,2,3,...$$

6.5. Distribución Multinomial

El experimento binomial se convierte en un **experimento multinomial** si cada prueba tiene más de dos resultados posibles. Por ejemplo, la fabricación de un producto fabricado como ligero, pesado o aceptable y el registro de tardanzas en cierta escuela de acuerdo con el día de la semana constituyen experimentos multinomiales. Extraer una carta de una baraja *con reemplazo* también es un experimento multinomial si los cuatro palos son los resultados de interés. De esta forma, si una prueba puede tener como consecuencia cualquiera de los k resultados posibles $E_1, E_2, ..., E_k$ con probabailidades $p_1, p_2, ..., p_k$, entonces la distribución multinomial dará la posibilidad de que E_1 ocurra x_1 veces; E_2 ocurra x_2 veces;...; y E_k ocurra x_k veces, en n prubas independientes, donde

$$x_1+x_2+x_3+...+x_n=n$$

Denotaremos esta distribución conjunta como

$$f(x_1,x_2,...,x_k;p_1,p_2,..,p_k)$$

Para derivar la fórmula general, procederemos como en el caso binomial. Como las pruebas son independientes, cualquier orden específico que produzca x_1 resultados para E_1, x_2 para E_2,...,x_k para E_k ocurrirá con probabilidades $p_1^{x_1}, p_2^{x_2}...p_k^{x_k}$.

El número total de órdenes que den resultados similares para las n pruebas es igual al número de particiones de n pruebas en k grupos con x_1 en el primer grupo, x_2 en el segundo... y x_k en el k-ésimo grupo.

$$\binom{n}{x_1,x_2,...,x_k}=\frac{n!}{x_1!x_2!...x_k!}$$

Como todas las particiones son mutuamente excluyentes y ocurren con igual probabilidad, obtenemos la distribución multinomial al multiplicar la probabilidad para un orden específico por el número total de particiones.

Definición 6.8. *Si una prueba dada puede conducir a los k resultados $E_1, E_2, ..., E_k$ con probabilidades $p_1, p_2, ...p_k$, entonces la distribución de probabilidad de las variables aleatorias $X_1, X_2..., X_k$ que representan el número de ocurrencias para $E_1, E_2, ..., E_k$ en n pruebas independientes*

$$f(x_1, x_2, ..., x_k; p_1, p_2, ...p_k) = \binom{n}{x_1, x_2, ..., x_k} = \frac{n!}{x_1!x_2!...x_k!} p_1^{x_1}, p_2^{x_2} ... p_k^{x_k} \quad (6.9)$$

Con $\sum_{i=1}^{k} x_i = n \quad y \quad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$

Ejemplo 6.7. Si se lanza seis veces un par de dados, ¿cuál es la probabilidad de obtener un total de siete u once dos veces, un par igual una vez y cualquier otra combinación 3 veces?

E_1 : ocurre un total de 7 u 11
E_2 : ocurre un par igual
E_3 : no ocurre ni un par ni un total de 7 u 11

El evento E_1 tiene los siguientes resultados para el lanzamiento de dos dados, (1,6),(2,5),(3,4),(6,1),(5,2),(4,3)(6,5),(5,6) de un total de 36, $p_1 = 8/36$. El evento E_2 tiene 6 posibilidades de 36, (1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6), $p_2 = 6/36$, y finalmente el evento E_3 es $p_3 = 1 - p_1 - p_2 = 22/36$. Con lo cual:

$$f(2, 1, 3; \frac{8}{36}, \frac{6}{36}, \frac{22}{36}) = \binom{6}{2, 1, 3} = \frac{6!}{2!1!3!} (\frac{8}{36})^2 (\frac{6}{36})^1 (\frac{22}{36})^3 = 0{,}1127$$

6.6. Distribución Hipergeométrica

Las aplicaciones de la distribución hipergeométrica son muy similares a la binomial. En ambos nos interesa el cálculo de probabilidades para el número de observaciones que caen en una categoría particular. Pero en el caso de la **binomial**, se requiere la independencia entre las pruebas. Como resultado, si se aplica la binomial, el muestreo se debe efectual **con reemplazo**. Por otro lado, la distribución **hipergeométrica** no requiere independencia y se basa en el el muestreo que se realiza **sin reemplazo**. Si deseamos encontrar la probabilidad de observar tres cartas rojas de cinco extracciones de una baraja ordinaria de 52 cartas, la **distribución binomial** no se aplica a menos que cada carta se reemplace y que el paquete se baraje en cada extracción. Para resolver el problema de muestrear *sin reemplazo*, planteamos el problema. Si se sacan 5 cartas al azar, nos interesamos en la probabilidad de seleccionar tres cartas rojas de las 26 disponibles y dos negras de las 26 cartas negras de que dispone la baraja. Hay $\binom{26}{3}$ formas de selccionar tres cartas rojas, y para cada una de éstas podemos elegir dos cartas negras de $\binom{26}{2}$ maneras. Por tanto, el número total de formas de seleccionar tres cartas rojas y dos negras en cinco extracciones es el producto $\binom{26}{3}\binom{26}{2}$. El número total de formas de seleccionar cualesquiera cinco cartas de 52 disponibles es $\binom{52}{5}$. Por ello, la probabilidad de seleccionar cinco cartas sin reemplazo de las cuales tres sean rojas y dos negras está dada por

$$\frac{\binom{26}{3}\binom{26}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{[26!/(3!23!)][26!/(2!24!)]}{52!/(5!47!)} = 0{,}3251$$

En general, nos interesa la probabilidad de seleccionar x éxitos de los k artículos considerados como éxito y $n-k$ fracasos de los $N-k$ artículos que se consideran como fracasos cuando se selecciona una muestra aleatoria de tamaño n de N artículos.

Esto se conoce como **experimento hipergeométrico**; es decir, uno que posee las siguientes dos propiedades:

- Se selecciona sin reemplazo una muestra aleatoria de tamaño n de N artículos.
- k de los N artículos se pueden clasificar como éxitos y $N-k$ se clasifican como fracasos.

En número X de éxitos de un experimento hipergeométrico se denomina **variable aleatoria hipergeométrica**. En consecuencia, la distribución de probabilidad de la variable hipergeométrica se llama **distribución hipergeométrica**, y sus valores se denotan como $h(x;N,n,k)$, debido a que dependen del número de éxitos k en el conjunto N del que seleccionamos n artículos.

Definición 6.9. *La distribución de probabilidad de la variable aleatoria hipergeométrica X, el número de éxitos en una muestra aleatoria n que se selecciona de N artículos de los que k se denomina **éxito** y $N-k$ **fracasos**, es:*

$$h(x;N,n,k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 0,1,2,3,...,n;\ x \leq k;\ n-x \leq N-k \tag{6.10}$$

Ejemplo 6.8. Lotes de 40 unidades cada uno se denominan aceptables si no contienen más de tres defectuosos. El procedimiento para muestrear el lote es la selección de cinco componentes al azar y rechazar el lote si se encuentra un componente defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentre exactamente un defectuoso en la muestra si hay tres defectuosos en todo el lote?.

Si se utiliza la distribución hipergeométrica con *n=5, N=40, k=3* y $x = 1$ encontramos que la probabilidad de obtener un defectuoso es

$$h(x; N, n, k) = \frac{\binom{3}{1}\binom{37}{4}}{\binom{40}{5}} = 0{,}3011$$

Algunas gráficas de la distribución hipergeométrica se muestran en la figua 6.4.

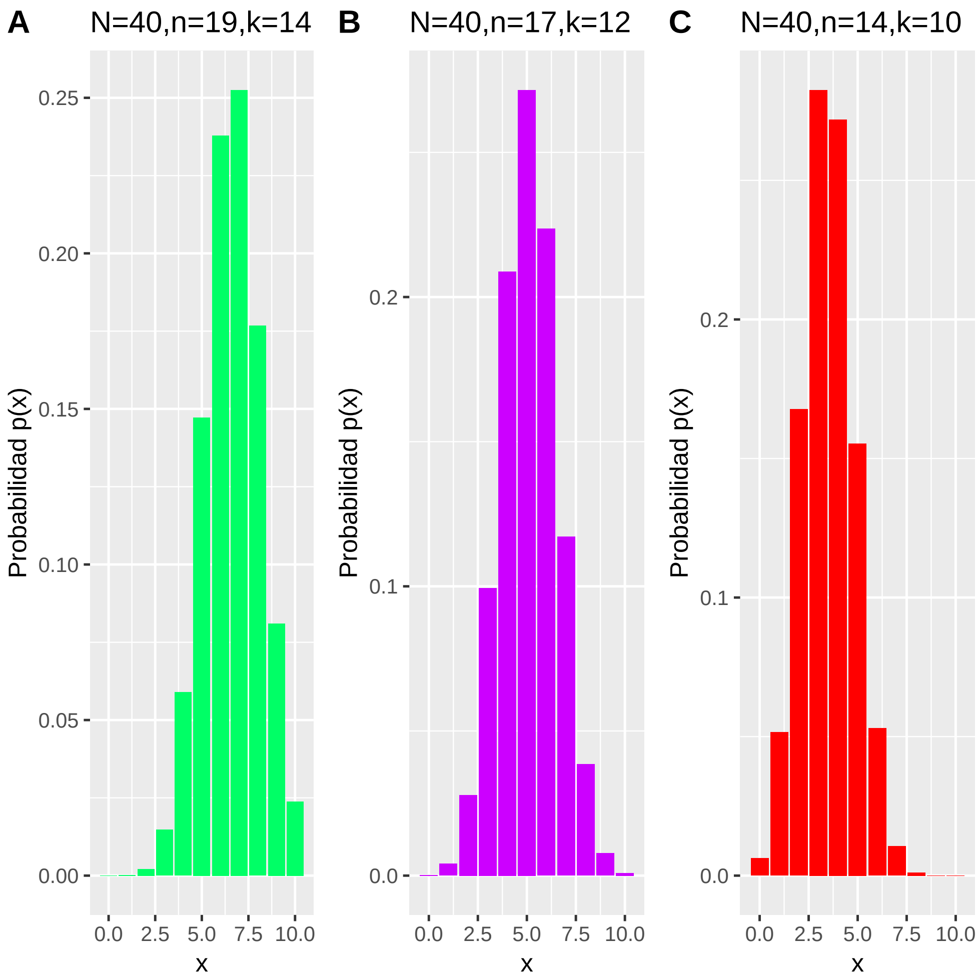


Figura 6.4: Distribución Hipergeométrica

Definición 6.10. *La media y varianza de la distribución hipergeométrica h(x;N,n,k) son*

$$\mu = \frac{nk}{N} \qquad y \qquad \sigma^2 = \frac{N-n}{N-1}.n.\frac{k}{N}.(1-\frac{k}{N}) \tag{6.11}$$

6.7. Distribución binomial negativa

Sea un escenario binomial en que se observa una secuencia de ensayos independientes;la probabilidad de éxito en cada ensayo es constante en igual a p. En lugar de fijar el número de ensayos en n y observar el número de éxitos, supóngase que se continúan los ensayos hasta que han ocurrido exactamente k éxitos. En este caso, la variable aleatoria es el número de ensayos necesarios para observar k éxitos. Esta situación lleva a lo que se conoce como la distribución binomial negativa.

Seguiremos el mismo razonamiento que hicimos para la distribución binomial y la hipergeométrica. Se desea determinar la probabilidad de que en el n-ésimo ensayo ocurra el k-ésimo éxito. Si se continúan los ensayos independientes hasta que ocurre el k-ésimo éxito, entonces el resultado del último ensayo fue éxito. Antes del último ensayo, habían ocurrido $k-1$ éxitos en $n-1$ ensayos. El número de maneras distintas en las que pueden observarse $k-1$ éxitos en $n-1$ ensayos es: $\binom{n-1}{k-1}$. Por lo tanto, la probabilidad de tener k éxitos en n ensayos con el último siendo un éxito, es:

$$p(n;k,p) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \quad n = k, k+1, k+2, .. \tag{6.12}$$

Esto es lo que se conoce como la *distribución de Pascal.* Mediante el empleo de ésta función puede obtenerse la distribución binomial negativa sustituyendo $n = x + k$, donde x es el valor de una variable aleatoria que representa el número de fracasos hasta que se observan, de manera exacta, k éxitos.

Definición 6.11. *Sea $X + k$ el número de ensayos independientes necesarios para alcanzar, k éxitos en un experimento binomial en dónde la probabilidad de éxito en cada ensayo es p. Se dice entonces que X es una variable binomial negativa con función de probabilidad*

$$p(x;k,p) = \begin{cases} \binom{k+x-1}{k-1} p^k (1-p)^x & \text{x=0,1,2...;} \quad \text{k=1,2,...;} \quad 0 \leq \text{p} \leq 1 \\ \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \tag{6.13}$$

La distribución se llama **binomial negativa** debido a que las probabilidades dadas por la fórmula anterior corresponden a los términos sucesivos de la expresión binomial de:

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1-p}{p}\right)^{-k}$$

Los parámetros de la distribución binomial negativa son k y p, en donde k no necesita ser un cero. Si es así, la distribución se conoce como Distribución de Pascal, misma que se interpreta como el tiempo que hay que esperar para que ocurra el k-ésimo éxito. Si k no es entero, la función de probabilidad dada se escribe de manera tal que se involucre la función gamma.

$$p(x;k,p) = \frac{\Gamma(k+x)}{x!\Gamma(k)} p^k (1-p)^x, \quad \text{x=0,1,2...;} \quad \text{k>0;} \quad 0 \leq \text{p} \leq 1 \tag{6.14}$$

En este caso la distribución binomial negativa es un caso particular de la distribución de Poisson Compuesta. [1]

Debe notarse que si $k = 1$, surge un caso especial de distribución binomial negativa, que se conoce con el nombre de **distribución geométrica** y cuya función de probabilidad está dada por

$$p(x;p) = p(1-p)^x, \quad \text{x=0,1,2,3..} \quad 0 \leq \text{p} \leq 1$$

La variable aleatoria **geométrica** representa el número de fallas que ocurren antes de que se presente el primer éxito. En la figura 6.5 se ilustran varias gráficas de la función de probabilidad negativa para varios valores de k y p.

Es posible emplear la **distribución binomial para obtener las probabilidades de la distribución binomial negativa**. Puede demostrarse que si X es una variable aleatoria binomial negativa con densidad de probabilidad en la fórmula (6.13), tenemos:

$$P(X \leq x) = P(Y \geq k)$$

[1] Meyer

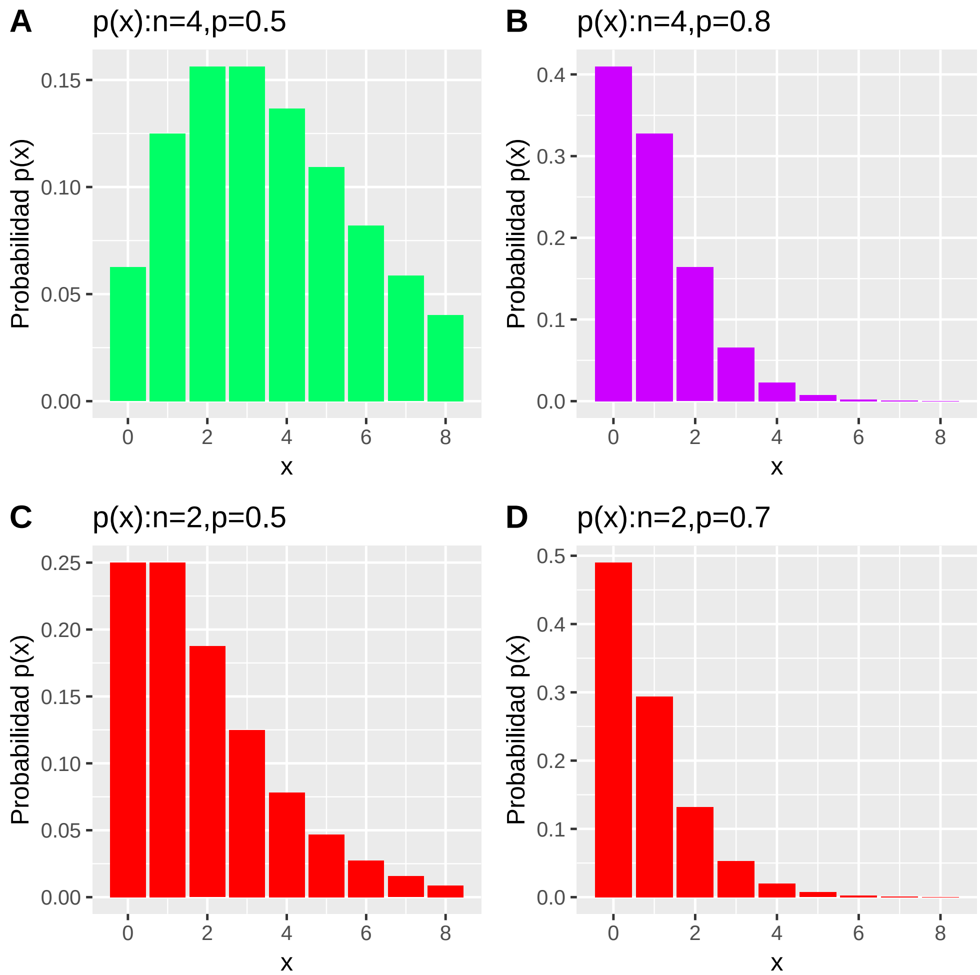


Figura 6.5: Distribución binomial negativa

donde Y es una variable aleatoria binomial con parámetros $n = k + x$ y p. Esto es:

$$F_{NB} = (x; k, p) = 1 - F_B(k - 1; k + x; p) \tag{6.15}$$

en donde $F_{NB} = (x; k, p)$ es la distribución binomial negativa acumulada y $F_B = (k - 1; k + x, p)$ es la distribución binomial acumulada.

Definición 6.12. *La media y varianza de la distribución binomial negativa* $p(x;k,p)$ *son*

$$\mu = \frac{k(1-p)}{p} \qquad y \qquad \sigma^2 = \frac{k(1-p)}{p^2} \tag{6.16}$$

7

Funciones de probabilidad Continua

> *"La esencia de la vida es la improbabilidad estadística a escala colosal. "El relojero ciego"(1986)*
>
> – Richard Dawkins, *1941 - actualidad*

7.1. Introducción

Este capítulo se centrará en la distribuciones de probabilidad continuas clásicas, el capítulo anterior nos ha introducido en el modelamiento de algunas variables discretas y así poder clasificar la naturaleza de su forma para calcular un valor de probabilidad adecuado. Este capítulo sigue con la misma línea de acción pero aplicado a variables aleatorias continuas, aquí el concepto de área bajo la curva vuelve a tomar relevancia.

Desarrollaremos un método para determinar la distribución de probabilidad de una función de variable aleatoria, asimismo identificaremos algunos modelos clásicos de probabilidad y su aplicación adecuada, reiterams que los conceptos al ser generales se han agregado algunos gráficos con simulación en R Cran.

Algunos modelos de probabilidad que se estudiarán son: Normal, Uniforme, Beta, Gamma, Erlang, Exponencial negativa y Weibull.

7.2. Distribución Uniforme

Supóngase que ocurre un evento en que una variable aleatoria toma valores de un intervalo finito, de manera que éstos se encuentran distribuidos igualmente sobre el intervalo. Esto es, la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor en cada subintervalo de igual longitud es la misma. Se dice entonces que la variable aleatoria se encuentra *distribuida uniformemente* sobre el intervalo.

Definición 7.1. *Se dice que la variable aleatoria X está distribuida uniformemente sobre el intervalo (a,b) si su función de densidad de probabilidad está dada por:*

$$p(x;a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{a} \leq \text{x} \leq \text{b} \\ \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \tag{7.1}$$

La función de densidad de probabilidad de una distribución uniforme es constante en el intervalo (a, b). Por esto, tal distribución se conoce como distribución 'rectangular'.

Algunas gráficas de la distribución uniforme continuo se muestran en la figua 7.1.

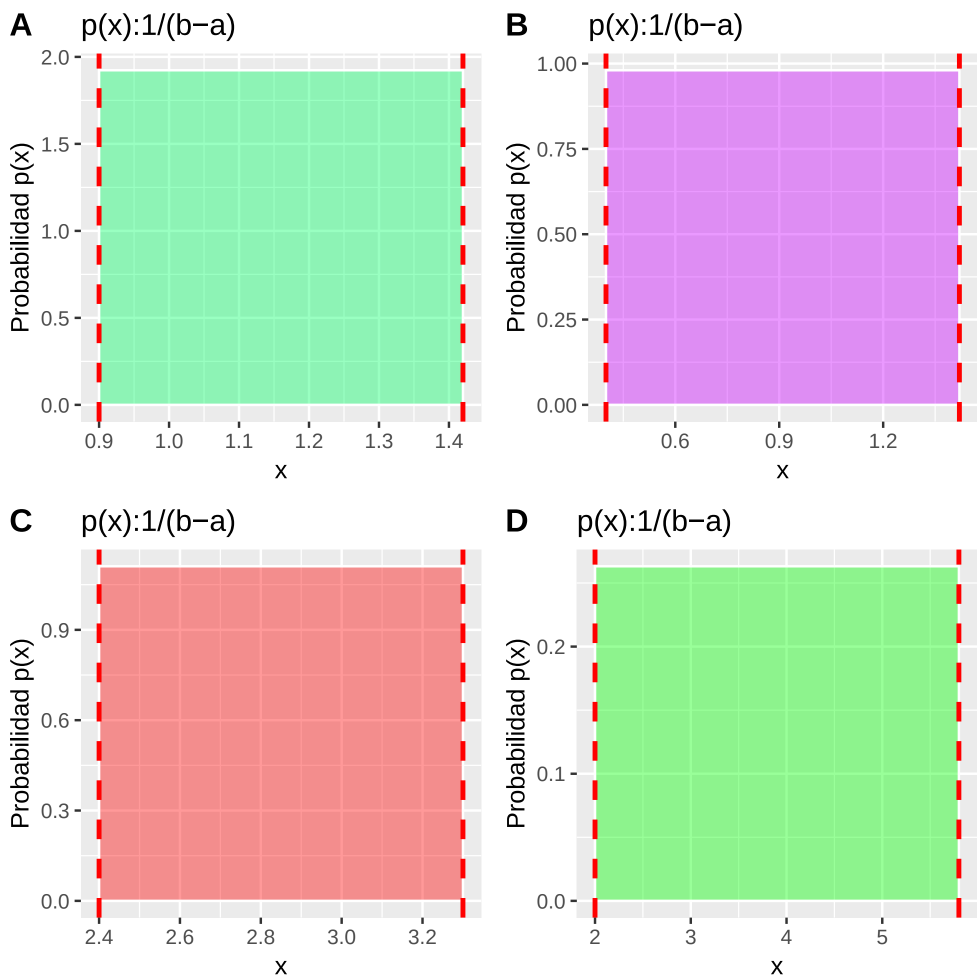


Figura 7.1: Distribución uniforme continuo

La función de distribución acumulativa se determina de manera fácil y está dada por

$$P(X \leq x) = F(x;a,b) = (b-a)^{-}1 \int_a^x dx = \begin{cases} 0 & \text{x<a} \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{a} \leq \text{x} \leq \text{b} \\ \\ 1 & \text{x>b} \end{cases} \tag{7.2}$$

Definición 7.2. *La media y varianza de la distribución uniforme continua p(x;a,b) son*

$$\mu = \frac{a+b)}{2} \qquad y \qquad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{7.3}$$

7.3. Distribución Normal

Esta distribución es, sin exagerar, la más importante de las distribuciones continuas, su aplicación incluye, datos meteorológicos como la temperatura, medición de organismos vivos, pruebas y exámenes de aptitud, mediciones físicas de resistencia, y un sin fin de variables aleatorias. La característica de ésta distribución es que forma una campana que nunca toca el eje de las abscisas. Es importante mencionar que muchas distribuciones se aproximan a la Normal cuando la muestra es grande. Por otra parte, una asunción de ésta distribución, sin previa validación, incurre en errores muy serios en el análisis que se esté haciendo. Es posible que una distribución normal proporcione de manera razonable una buena aproximación alrededor de la media de una variable aleatoria. Por ejemplo, si se diseña cierto material para resistir una cantidad dada de presión, que se supone se encuentra distribuida normalmente alrededor de un valor promedio, y el diseño se hace con base en esta suposición, el material puede verse seriamente dañado al aplicársele una presión muy elevada.

En la definición 7.3 se proporciona la función de densidad de probabilidad de la distribución normal, la cual fue descubierta por DeMoivre en 1733 como una forma límite de la función de probabilidad binomial; después la estudió Laplace. También se denomina *distribución Gausiana* porque Gaus la citó en un artículo que publicó en 1809. Durante el siglo XIX se empleó de manera extensa por científicos que habían notado que los errores, al llevar a cabo mediciones físicas, frecuentemente seguían un patrón que sugería la distribución normal.

Definición 7.3. *Se dice que la variable aleatoria X se encuentra normalmente distribuida si su función de densidad de probabilidad está dada por*

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]\quad \begin{array}{c}-\infty<x<\infty\\ -\infty<\mu<\infty\\ \sigma>0\end{array} \tag{7.4}$$

Los parámetros de la distribución normal son μ y σ, y además determinan de manera completa la función de densidad de probabilidad. Como se verá posteriormente, estos parámetros son la media y la desviación estándar de X. La figura 7.2 proporciona varias gráficas de la función (7.4) para distintos valores de μ fijo y σ variable, y viceversa.

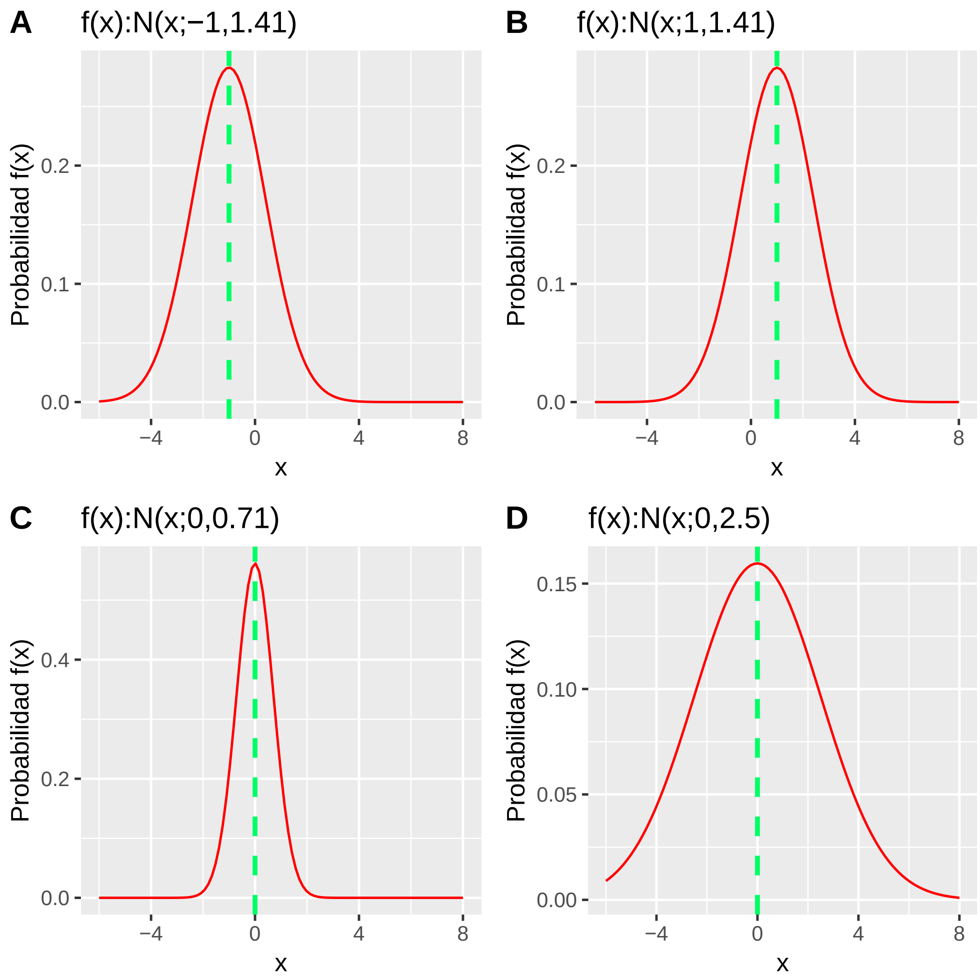


Figura 7.2: Distribución normal: A y B con media *variable* y $\sigma = 1.41$; C y D media = 0 y σ *variable*

Si se obtienen las dos primeras derivadas de $f(x;\mu,\sigma)$ con respecto a x y se igualan a cero, se tiene que el valor máximo de $f(x;\mu,\sigma)$ ocurre cuando $x=\mu$, y los valores $x=\mu\pm\sigma$ son las abcisas de los dos puntos de inflexión de la curva.

Definición 7.4. *La media y la varianza de la Distribuciíón normal son:*

$$E(X) = \mu \qquad y \qquad Var(X) = \sigma^2 \tag{7.5}$$

Una distribución normal es simétrica alrededor de su media μ. Si el valor máximo de la función de densidad de probabilidad normal ocurre cuando $x = \mu$, μ es la media, la mediana y la moda de cualquier variable distribuida normalmente.

Para encontrar los demás momentos, se determinará la función generadora de momento de la sección 5.6.

$$\begin{aligned} m_{X-\mu}(t) = E[e^{t(X-\mu)}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} exp[t(x-\mu)]exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 t(x-\mu)]\right\}dx \end{aligned}$$

Se completa cuadrado en el corchete y se obtiene: $(x-\mu-\sigma^2 t)^2 - \sigma^4 t^2$ y,

$$\begin{aligned} m_{X-\mu}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} exp(\frac{\sigma^2 t^2}{2})exp\left\{-\frac{[x-(\mu+\sigma^2 t)]^2}{2\sigma^2}\right\}dx \\ &= exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-\frac{[x-(\mu+\sigma^2 t)]^2}{2\sigma^2}\right\}dx \\ &= exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \end{aligned}$$

De ésta manera, derivando, 1, 2, 3, 4 se tienen el primer momento, segundo momento (Varianza), tercer momento y cuarto momento de la distribución Normal.

Para momentos alrededor de cero, se puede determinar la función generadora de momentos X, mediante el empleo directo de la función generadora de momentos centrales (o viceversa). Dado que:

$$\begin{aligned} m_{X-\mu}(t) &= E[e^{t(X-\mu)}] \\ &= exp(-\mu t)E[exp(tX)] \\ &= exp(-\mu t)m_X(t) \end{aligned}$$

para una distribución normal, se tiene;

$$exp(-\mu t)m_X(t) = exp(\sigma^2 t^2/2)$$

y

$$m_X(t) = exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

La probabilidad de que una variable aleatoria normalmente distribuida X sea menor o igual a un valor específico, x está dada por la **función de distribución acumulativa**.

$$P(X \leq x) = F(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dt \tag{7.6}$$

Si introducimos el concepto de estandarización, mediante la relación:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \tag{7.7}$$

De acuerdo con lo anterior, Z es una variable aleatoria estandarizada con media cero y desviación estándar uno. Si la transformación (7.7) se sustituye en (7.6) se tiene;

$$\begin{aligned} F_X(x; \mu, \sigma) &= F_Z(z; 0, 1) \\ P(X \leq x) &= P(Z \leq z) \end{aligned}$$

Para cualquier valor específico de z, el correspondiente valor en la tabla Normal acumulada, del Apéndice, es la probabilidad de que la variable aleatoria normal estándar Z sea menor o igual a z; esto es,

$$P(Z \leq z) = F_z(z; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} exp(-t^2/2) dt \tag{7.8}$$

En este momento es conveniente introducir la notación $X \sim N(\mu, \sigma)$ para denotar que la variable X se encuentra distribuida normalmente con media μ y desviación estándar σ.

Si se desea encontrar $P(a \leq X \leq b)$, tenemos,

$$\begin{aligned}
P(a \leq X \leq b) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_a^b exp[-(x-\mu)^2/2\sigma^2]dx \\
&= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} exp[-(z)^2/2]dz \\
&= F_z\left(\frac{b-\mu}{\sigma};0,1\right) - F_z\left(\frac{a-\mu}{\sigma};0,1\right)
\end{aligned}$$

Y decimos que $Z \sim N(0,1)$

En una siguiente edición se ahondará mucho más en el uso de la distribución Normal, en problemas de inferencia y modelamiento de información, la distribución Normal Multivariada se volverá la piedra angular en algunos métodos estadísticos, tales como La regresión Lineal, Análisis Discriminante, Regresión Logística (en algunos aspectos) y muchas otras más.

Ejemplo 7.1. Supóngase que X tiene distribución $X \sim N(\mu,\sigma) : N(3,2)$. Deseamos encontrar un múmero c tal que:

$$P(X > c) = 2P(X \leq c)$$

Si hacemos;

$$3P(Z \leq \frac{c-3}{2}) = 1$$

```
> # indica el valor z de la probabilidad ingresada
> qnorm(1/3)
```

```
[1] -0.4307273
```

Con lo cual $\frac{c-3}{2} = -0{,}4307273$, hacemos que $c = 2{,}1385$.

Ejemplo 7.2. Dada una distribución normal estándar, encuentre el valor k tal que:

(a) $P(Z > k) = 0{,}3015$, y
(b) $P(k < Z < -0{,}18) = 0{,}4197$.

La revisión gráfica de los ejemplos 7.1 y 7.2 se muestran en la figura 7.3.

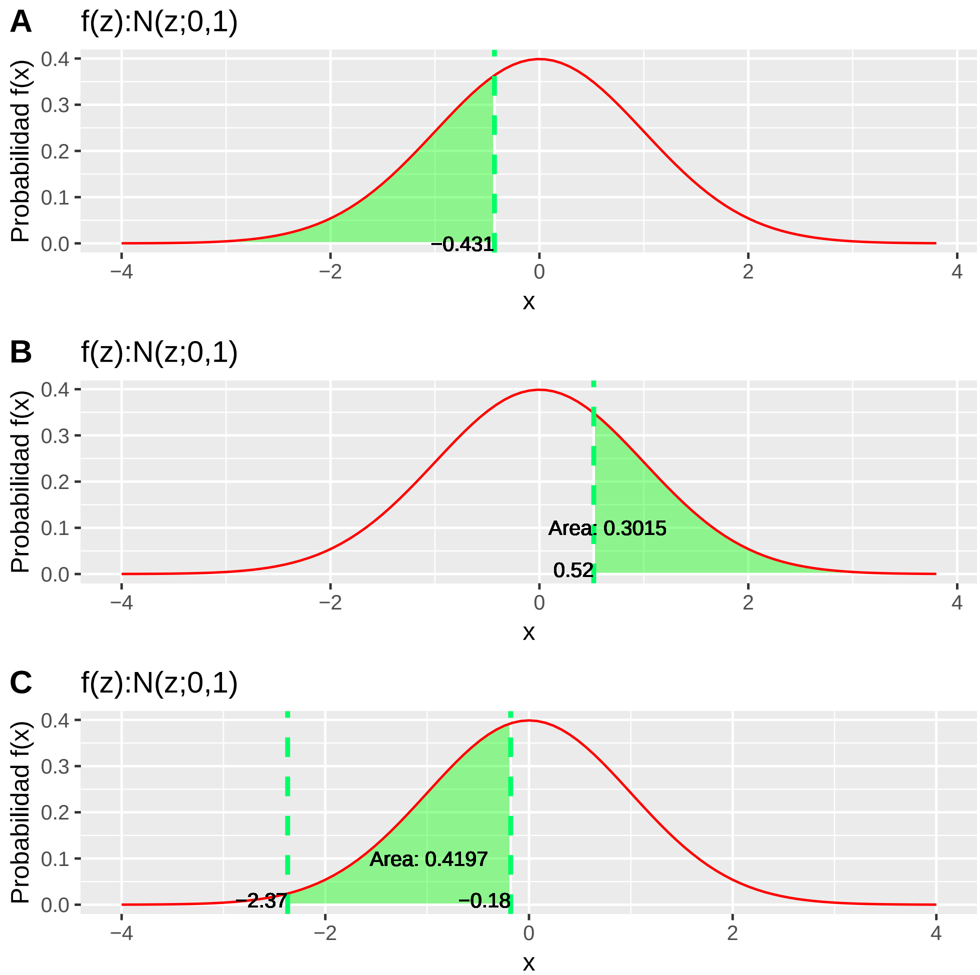


Figura 7.3: Distribución normal con media 0 y $\sigma = 1$; (A) Corresponde al ejemplo 7.1, (B y C) 7.2

7.4. Distribución Beta

Esta distribución se ha utilizado para representar variables físicas cuyos valores se encuentran restringidos a un intervalo de longitud finita y para encontrar ciertas cantidades que se conocen como **límites de tolerancia** sin necesidad de la hipótesis de una distribución normal. Algunas mediciones con ésta función de distribución pueden ser:

1. Porporción de impurezas en un producto químico.
2. La proporción vendida de un lote durante un tiempo t.
3. La humedad relativa media en cierto lugar de Lima.
4. Fracción del costo total destinado al mantenimiento de un departamento.

Como hemos observado, la distribución Beta trata fracciones o proporciones en su mayoría.

La distribucion beta estandar se utiliza por lo comun para modelar la variación en la proporcion o porcentaje de una cantidad que se presenta en muestras diferentes, tales como la proporción de horas que duerme un individuo o la proporcion de cierto elemento de un compuesto químico.

Una aplicación adicional se puede apreciar en el cálculo del índice de Oportunidades Humanas [1]. Aquí la variable que responde éste índice es *el porcentaje de hogares con carencias para la población de 17 años o menos según su localidad, de acuerdo con las condiciones de los hogares donde residen con base a la distribución beta.*

En la inferencia bayesiana, por ejemplo, es muy utilizada como distribución a priori cuando las observaciones tienen una distribución binomial.

Definición 7.5. *Se dice que una variable aleatoria X posee una distribución beta si su función de densidad de probabilidad está dada por:*

$$f(x,\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & 0<\text{x} <1, \quad \alpha,\beta>0 \\ \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases} \tag{7.9}$$

Nótese que si en (7.9) x se reemplaza por $x-1$, se obtiene la siguiente relación simétrica:

$$f(1-x,\beta,\alpha) = f(x,\alpha,\beta) \tag{7.10}$$

Las cantidades α y β de la distribución beta son, ambas, parámetros de $perfil$.

Si tanto α y β son menores que uno, la distribución beta tiene un perfil en forma de U. Si $\alpha < 1$ y $\beta \geq 1$, la distribución tiene un perfil de J transpuesta, y si $\beta > 1$ y $\alpha \geq 1$, el perfil es una J.

Cuando tanto α y β son mayores que uno, la distribución presenta un pico en $x = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}$.

Finalmente, la distribución beta es simétrica cuando $\alpha = \beta$. En la figura 7.4 se ilustran estos perfiles para distintos valores de α y β .

La función beta se define como:

[1] Distribución Beta para modelar porporciones en áreas pequeñas, Luz Karime Bernal M.

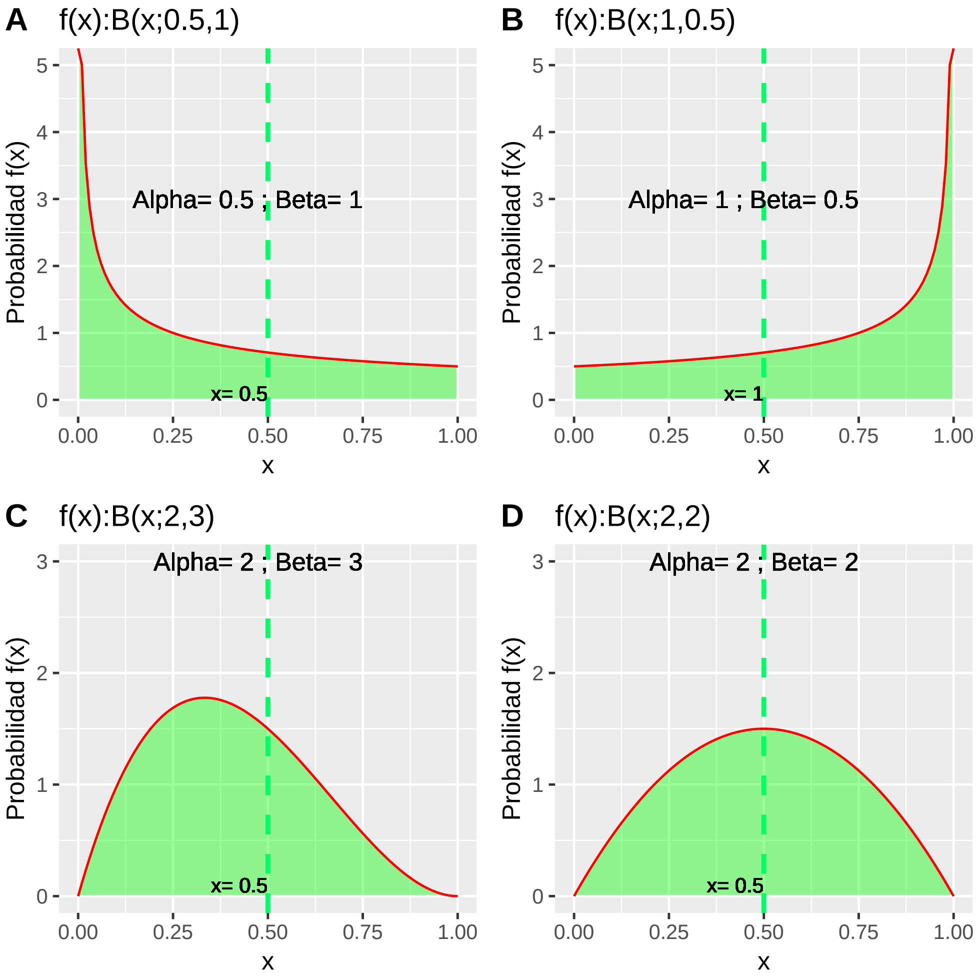


Figura 7.4: Distribución beta con diferentes parámetros modelan curvas empíricas diferentes

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(a-x)^{1-\beta}dx \tag{7.11}$$

Tenemos, además, la relación entre las funciones beta y gamma, como sigue:

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{7.12}$$

Mediante el empleo de 7.11 y 7.12, y la función de densidad 7.9.

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}B(\alpha,\beta) = 1$$

La función de **distribución acumulativa** se define como:

$$P(X \leq x) = F(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} 0 & \text{x} \leq 0 \\ \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt & 0<\text{x} <1 \\ 1 & \text{x} \geq 1 \end{cases} \tag{7.13}$$

donde la integral que se muestra en la función (7.13) es la función beta incompleta.

Definición 7.6. *La media y la varianza de la Distribución Beta son:*

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad y \qquad Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \tag{7.14}$$

Ejemplo 7.3. Un distribuidor mayorista de gasolina tiene tanques de almacenamiento de gran capacidad con un abastecimiento fijo, los cuales se llenan cada lunes. Él, desea saber el porcentaje de gasolina vendido durante la semana.

Después de varias semanas de observación, el mayorista descubre que este porcentaje podría describirse mediante una distribución beta con $\alpha = 4$ y $\beta = 2$.

Calcule la probabilidad de que venda:

a) Al menos, el 90 % de sus existencias en una semana.

```
> pbeta(0.9, 4, 2, lower.tail = F)
[1] 0.08146
```

Por lo tanto, la probabilidad de que venda más al menos el 90 % de la existencia de gasolina en una semana es muy baja: 0.08146.

b) Menos del 50 % de sus existencias en una semana.

```
> pbeta(0.5, 4, 2, lower.tail = T)
[1] 0.1875
```

Por lo tanto, la probabilidad de que venda menos del 50 % de la existencia de gasolina en una semana es: 0.1875.

c) P(X <x) = 1/5.

Necesitamos obtener el valor de x (Ventas de gasolina en una semana) para satisfacer: $P(X < x) = 1/5$, empleamos para tal propósito, la función de cuantiles con el área de cola hacia la izquierda:

```
> qbeta(1/5, 4, 2, lower.tail = T)

[1] 0.5098077
```

Para una probabilidad de 1/5, hay que vender menos del 50.98 % de sus existencias de gasolina en una semana.

d) P(X >x) = 2/5.

Necesitamos obtener el valor de x (Ventas de gasolina en una semana) para satisfacer: $P(X > x) = 2/5$, empleamos para tal propósito, la función de cuantiles con el área de cola hacia la derecha:

```
> qbeta(2/5, 4, 2, lower.tail = F)

[1] 0.7344313
```

Para una probabilidad de 2/5, hay que vender más de 73.44 % de sus existencias de gasolina en una semana.

Los gráficos de los ítems (a) y (b) se muestran en la figura 7.5.

7.5. Distribución Gamma

Entre los muchos usos que se hacen a esta distribución se encuentran los siguientes: Número de individuos involucrados en accidentes de tránsito en Lima; es más común que la mayoría de accidentados den la proporción de un herido por vehículo, que otras proporciones superiores. Altura a la que inician las precipitaciones, es más habitual que precipitaciones en altura baja, que a gran altitud. Supóngase que una pieza metálica se encuentra sometida a cierta fuerza, de manera que se romperá después de aplicar un número específico de ciclos de fuerzas. Si los ciclos de fuerza suceden de manera independiente y a una frecuencia promedio, entonces el tiempo que debe pasar antes de que el material se rompa es una variable aleatoria que cumple con la distribución gamma. También puede ser el tiempo o espacio necesarios para observar X sucesos que siguen una distribución de Poisson.

Cabe indicar también que la distribución gamma es una generalización de la distribución Exponencial y de Erlang. Algunos inconvenientes al aplicar una distribución Gamma; problemas en la complejidad de algunos cálculos,

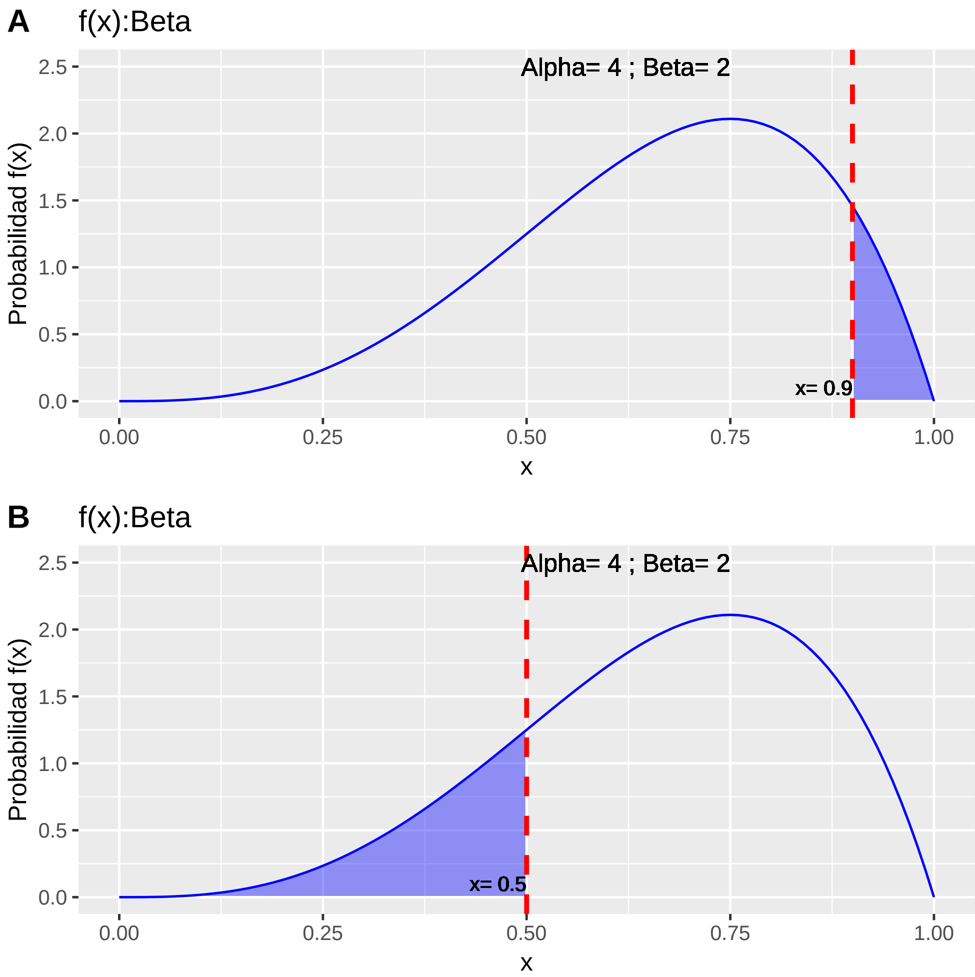


Figura 7.5: Distribución beta con parametros alfa = 4 y beta = 2

especialmente en la función gamma cuando el parámetro α es un valor no entero. También el cálculo de parámetros muestrales es complejo. No obstante, con los métodos númericos se pueden solucionar.

Si se está interesado en la ocurrencia de un evento generado por un proceso Poisson (número de eventos en un tiempo/espacio t) con media λ, la variable que mide el *tiempo transcurrido hasta obtener 'n' ocurrencias del evento* sigue una distribución gamma. Por ejemplo, la distribución gamma aparece cuando se realiza un estudio de duración de elementos físicos (tiempos de ocurrencia). Se usa en fiabilidad, mantenimiento, y fenómenos de espera - Tiempo que transcurre hasta la llegada de tercer paciente-.

Definición 7.7. *Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución gamma si su función de densidad de probabilidad está dada por:*

$$f(x;\alpha,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}}x^{\alpha-1}exp(\frac{-x}{\theta}) & \text{x>0}, \quad \alpha,\theta>0\\ \\ 0 & \text{para cualquier otro valor}\end{cases} \tag{7.15}$$

en donde $\Gamma(\alpha)$ es la función gamma definida como:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt \tag{7.16}$$

Tal como hicimos con la distribución Beta, la figura 7.6 tiene curvas gamma con direfentes comportamientos; para $\alpha\leq 1$, la distribución gamma tiene un perfil en forma de J transpuesta. Para $\alpha>1$ presenta un pico que ocurre en $x=\theta(\alpha-1)$. Para un valor fijo de θ, el perfil básico de la distribución gamma no se altera si el valor de α cambia. Lo anterior da como resultado que las cantidades α y θ son los factores de **forma y de escala**, respectivamente, en la distribución gamma.

Como comentamos antes, la distribución se emplea en problemas de lineas de espera, completar la reparación de éstas líneas es independiente y ocurre con frecuencia constante igual a $\lambda=1/\theta$. También podemos indicar que algunos ejemplos no siguen el patrón anterior y que podemos aproximar, como los ingresos familiares y la edad del hombre al contraer matrimonio por primera vez, hay picos al inicio y en la cola se hace menor.

Mediante el empleo de la función gamma, función (7.16), puede demostrarse que (7.15) es una función de densidad de probabilidad. Para hacerlo, considérese un cambio de variable de integración, tal que $u=\frac{x}{\theta}$, $x=\theta u$ y $dx=\theta du$; entonces:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}}\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}exp(-x/\theta)dx &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}}\int_0^{\infty}(\theta u)^{\alpha-1}exp(-u)\theta du\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}u^{\alpha-1}exp(-u)du=1\end{aligned}$$

La función de **distribución acumulativa** de la función gamma es como sigue:

$$F(x;\alpha,\theta)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}}\int_0^{x}t^{\alpha-1}exp(-t/\theta)dt \quad \text{x>0} \tag{7.17}$$

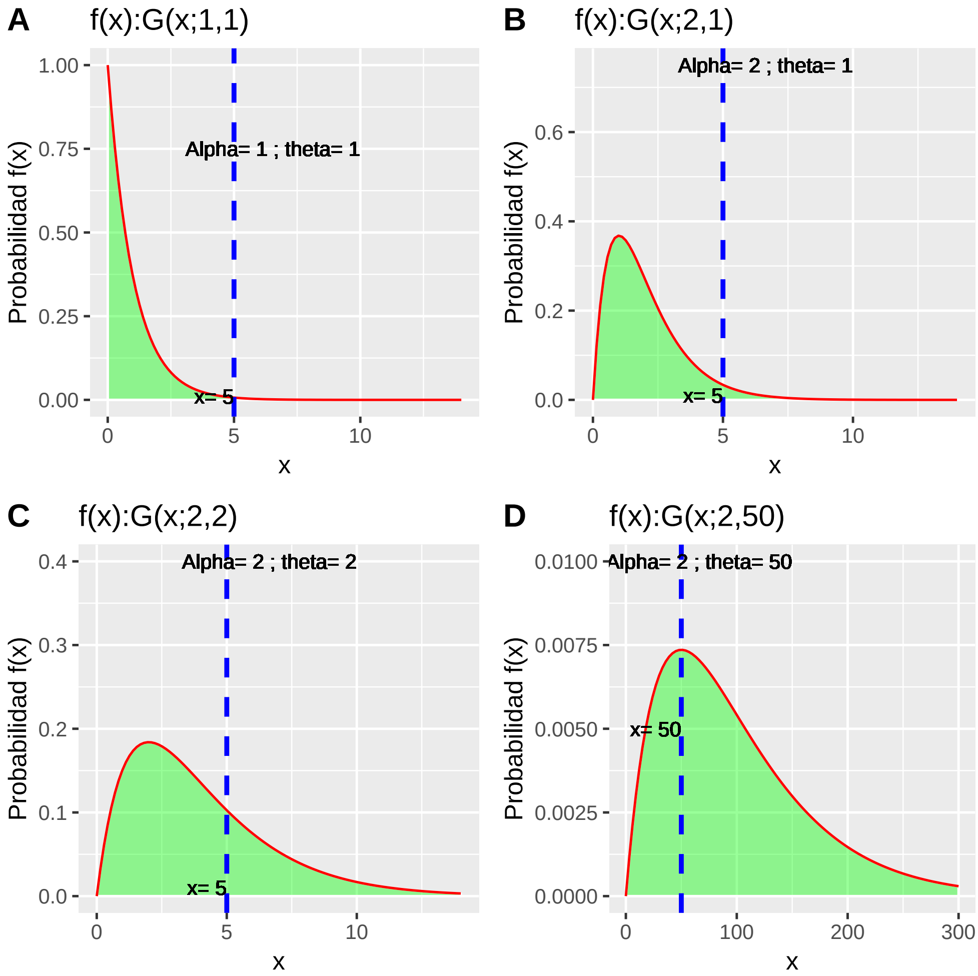


Figura 7.6: Distribución gamma con diferentes parámetros modelan curvas empíricas diferentes

Definición 7.8. *La media y la varianza de la distribución gamma son:*

$$E(X) = \alpha\theta \qquad y \qquad Var(X) = \alpha\theta^2 \tag{7.18}$$

Ejemplo 7.4. En un estudio biomédico con ratas se usa una investigación de respuesta a la dosis para determinar el efecto de la dosis de un tóxico en su tiempo de sobrevivencia. El tóxico es uno que se descarga con frecuencia en la atmósfera desde el combustible de los aviones. Para cierta dosis del tóxico el estudio determina que el tiempo de sobrevivencia, en semanas, tiene una distribución gamma con $\alpha = 5$ y $\theta = 10$.¿Cuál es la probabilidad de que una rata no sobreviva más de 60 semanas?

Sea la variable aleatoria X el tiempo de sobrevivencia(tiempo para morir).

La probabilidad que se requiere es:

$$\begin{aligned}
P(X \leq x) &= F(x;\alpha,\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}}\int_0^x t^{\alpha-1}exp(-t/\theta)dt \\
P(X \leq 60) &= F(x;5,10) = \frac{1}{\Gamma(5)10^5}\int_0^{60} t^{5-1}exp(-t/10)dt \\
P(X \leq 60) &= F(x;5,10) = \frac{1}{4!}\left(-\frac{2760}{e^6} - (-24)\right) = 0{,}715
\end{aligned}$$

```
> pgamma(60, 5, scale = 10, lower.tail = T)
[1] 0.7149435
```

La probabilidad de que la rata no sobreviva más de 60 días es 0.715.

Ejemplo 7.5. Supóngase que cierta pieza metálica se romperá después de sufrir dos ciclos de esfuerzo. Si estos ciclos ocurren de manera independiente a una frecuencia promedio de dos por cada 100 horas, obtener la probabilidad de que el intervalo de tiempo se encuentre hasta que ocurre el segundo ciclo:

a) dentro de una desviación estándar del tiempo promedio.

b) a más de dos desviaciones estándar por encima de la media.

Sea X la variable aleatoria que representa el lapso que transcurre hasta que la pieza sufre el segundo ciclo de esfuerzo. Si X tiene una distribución gamma con $\alpha = 2$ y $\theta = 50$ horas debido a que la frecuencia promedio es 0.02 por hora. La función de densidad de probabilidad es

$$f(x;2,50) = \frac{1}{\Gamma(2)50^2}xe^{-x/50}, \quad x > 0$$

Y la función de densidad acumulada es

$$F(x;2,50) = 1 - \left(1 - \frac{x}{50}\right)e^{\frac{-x}{50}}, \quad x > 0$$

De acuerdo a la definición (7.8), la media y desviación estándar son 100 y 70.71, respectivamente.

De acuerdo con lo que se pide;

a)

$$\begin{aligned}
P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) &= P(29{,}29 < x < 170{,}71) \\
&= F(170{,}71;2,50) - F(29{,}29;2,50) \\
&= 0{,}8547608 - 0{,}117248 \\
&= 0{,}7376
\end{aligned}$$

Nótese que la probabilidad de que el lapso sea menor de una desviación estándar por debajo de la media es de 0.1172 y la probabilidad de que éste sea más grande que la media por una desviación estándar es 1-0.854= 0.1452.

b)

$$\begin{aligned} P(X > \mu + 2\sigma) &= P(X > 241{,}42) \\ &= 1 - F(241{,}42; 2, 50) = 0{,}0466 \end{aligned}$$

7.6. Distribución Erlang

Dado que ya se expuso la distribución gamma, se puede indicar que la distribución Erlang es un caso especial de la gamma.

Esta distribución fue desarrollada para examinar el número de las llamadas telefónicas que se pudieron efectuar, **al mismo tiempo**, a los operadores de las estaciones de conmutación. Recibe su nombre en honor al científico danés Agner Krarup Erlang, quien la introdujo por primera vez a principios del año 1900.

La distribución de Erlang sucede cuando el parámetro α en la distribución gamma, es un entero positivo.

Definición 7.9. *Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución Erlang si su función de densidad de probabilidad está dada por:*

$$f(x;\alpha,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{(\alpha-1)!\theta^{\alpha}}.x^{\alpha-1}.exp(\frac{-x}{\theta}) & \text{x>0}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_{+}, \theta > 0 \\ \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases} \tag{7.19}$$

Existe una asociación entre los modelos de probabilidad de Poisson y Erlang. Si el número de eventos aleatorios independientes que ocurren en un lapso específico (comunmente tiempo o espacio) es una variable Poisson con una frecuencia constante de ocurrencia igual a $\lambda = \frac{1}{\theta}$, entonces para una α, el tiempo de espera hasta que ocurre el α-ésimo evento de Poisson tiene una distribución de Erlang.[2]

Esto es, la probabilidad de que ocurran a lo más $\alpha - 1$ eventos de Poisson en un tiempo **x** a una frecuencia constante $\lambda = \frac{1}{\theta}$ es:

[2] Canavos

$$\begin{aligned} P(X \leq \alpha - 1) &= \sum_{n=0}^{\alpha-1} \frac{e^{-x/\theta}(x/\theta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\alpha-1} \frac{e^{-x/\theta}}{n!}\left(\frac{x}{\theta}\right)^n \\ &= e^{-x/\theta}\left(1 + \frac{x}{\theta} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{\theta}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{x}{\theta}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{(\alpha-1)!}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha-1}\right) \end{aligned}$$

La función de **distribución acumulativa** de Erlang es como sigue:

$$F(x;\alpha,\theta) = \frac{1}{(\alpha-1)!\theta^{\alpha}} \int_0^x t^{\alpha-1} exp(-t/\theta)dt, \quad \text{x>0} \tag{7.20}$$

y además tiene una equivalencia,

$$\begin{aligned} P(X > x) &= 1 - F(x;\alpha,\theta) \\ &= 1 - \left\{1 - e^{-x/\theta}\left(1 + \frac{x}{\theta} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{\theta}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{(\alpha-1)!}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha-1}\right)\right\} \\ &= e^{-x/\theta}\left(1 + \frac{x}{\theta} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{\theta}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{(\alpha-1)!}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha-1}\right) \\ &= F_{Pois}(\alpha-1; x/\theta) \end{aligned}$$

La igualdad $1 - F(x;\alpha,\theta) = F_{Pois}(\alpha-1;x/\theta)$, relaciona la distribución acumulada de Erlang y la distribución acumulada Poisson.

En resumen, la probabilidad de que el tiempo que transcurre hasta el α-ésimo evento exceda el valor x es igual a la probabilidad de que el número de eventos de Poisson observados en x no sea mayor que $\alpha - 1$.

La distribución de Erlang es el modelo para el tiempo de espera hasta que ocurre el α-ésimo evento Poisson, y la distribución Poisson es el modelo para el número de eventos independientes que ocurren en un tiempo x, encontrándose éste distribuido de acuerdo con el modelo Erlang. Así $\lambda = 1/\theta$ es la frecuencia constante de ocurrencia y θ es el tiempo promedio entre dos ocurrencias sucesivas.

La distribución **Exponencial Negativa o simplemente Exponencial** es una variante de la distribución Erlang cuando el parámetro de forma α es igual a uno. Ésta variable aleatoria puede pensarse como el lapso que transcurre hasta el primer evento de Poisson.

Ejemplo 7.6. El número de clientes, en promedio, que llegan por minuto a solicitar un servicio a un banco es cinco. ¿Cuál es la probabilidad de que dos clientes tarden de 30 a 45 segundos en llegar al banco?

Hay que tener en cuenta que:

- El número de clientes por minuto que llegan a solicitar servicio a un banco es una variable aleatoria discreta Poisson (con parámetro λ).
- El tiempo que tarden k clientes en llegar a solicitar servicio a un banco es una variable aleatoria continua Gamma ($\alpha = k$, $\theta = 1/\lambda$).

Según éstas consideraciones, tenemos;

$$\lambda = \frac{5\, clientes}{60\, seg} = \frac{1}{12}$$

Sea X la variable aleatoria $continia$ que representa el tiempo, en segundos, que tardan k clientes en llegar a un banco.

Así $X \sim Er(\alpha, \theta)$. Donde:

$$\begin{aligned} \alpha &= k = 2 \\ \theta &= \frac{1}{\lambda} = 12 \end{aligned}$$

Tenemos entonces $X \sim Er(\alpha = 2, \theta = 12)$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta} dx$$

Para este caso,

$$P(30 \leq X \leq 45) = \int_{30}^{45} \frac{1}{12^2 \Gamma(2)} x^{2-1} e^{-x/12} dx = 0{,}175$$

```
> pgamma(45, shape=2, scale = 12, lower.tail = T) -
+ pgamma(30, shape=2, scale = 12, lower.tail = T)

[1] 0.1755882
```

7.7. Distribución Exponencial

Se ha observado que la distribución gamma, cuando el parámetro α toma un valor entero positivo, se conoce como distribución de Erlang. Ahora bien, cuando ese entero positivo es igual a uno, esto es $\alpha = 1$, la distribución de Erlang se reduce a la conocida distribución exponencial, siendo así la distribución exponencial un caso especial de la distribución gamma. Debido a lo mencionado anteriormente y al hecho de que ésta distribución se deriva de la distribución de Poisson, su descubrimiento se le atribuye a Agner Krarup Erlang y Siméon-Denis Poisson.[3]

Definición 7.10. *Se dice que una variable aleatoria continua X que toma todos los valores no negativos tiene una distribución exponencial con parámetro* $\theta = 1/\lambda$ *si su fdp es:*

$$f(x;1/\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{\frac{-x}{\theta}} & \text{x>0}, \quad \theta > 0 \\ \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases} \tag{7.21}$$

La distribución exponencial desempeña un papel importante en la descripción de una gran clase de fenómenos, especialmente en el área de la *teoría de fiabilidad.*

La distribución exponencial es utilizada para determinar la probabilidad de que en cierto tiempo suceda un determinado evento.

Gracias a que pudimos definir la distribución Erlang, para el caso exponencial podemos interpretarlo como el lapso que transcurre hasta el primer evento de Poisson.

Recordemos que la distribución de Poisson se define como;[4]

$$p(x;\lambda t) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}, & \text{x=0,1,2,3,...,n; } \lambda > 0 \\ \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Consideremos la variable aleatoria X_1 como el número de eventos en un intervalo de tiempo t_{fijo}. Además definimos X_2 como el tiempo $(t_{variable})$ que se requiere para que ocurra el primer evento.

Si hacemos uso de la distribución Poisson y calculamos la probabilidad de que no ocurra algún evento tenemos que: $X_1 \sim Pois(x_1 = 0, \lambda t) = e^{-\lambda t}$.

Asímismo X_2, es el tiempo para el primer evento de Poisson. La probabilidad de que la duración del tiempo hasta el primer evento exceda t_{fijo} es la misma que la probabilidad de que no ocurra algún evento Poisson en t_{fijo}.

[3] Distribuciones Poisson y Gamma: Una Discreta y Continua Relación, *Indira Arroyo, Luis C. Bravo M., Dr. Ret. Nat. Humberto Llinás., Msc. Fabián L. Muñoz.*

[4] introducimos la variable t para generalizar, así vemos el ejemplo 6.5

$$P(X_2 > t_{fijo}) = P(X_1 = 0) = e^{-\lambda t}$$

Si hacemos que t se denote como x, y X_2 simplemente X tenemos que;

$$\begin{aligned} P(X > x) &= e^{-\lambda x} \\ 1 - P(0 \leq X \leq x) &= 1 - e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

Que es la función de distribución acumulativa de la distribución exponencial.

Y si derivamos, obtenemos la función de densidad de probabilidad exponencial:

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Donde $\lambda = 1/\theta$.

Veamos la figura 7.7, que compara ambas distribuciones, (a) Poisson y (b) Exponencial, en un intervalo t.

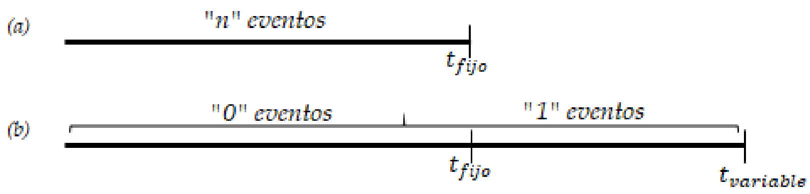


Figura 7.7: Relación de Poisson y Exponencial cuando t se hace variable

Ejemplo 7.7. El proceso Poisson se aplica al tiempo que pasa hasta la ocurrencia de dos eventos de Poisson que siguen una distribución gamma con $\theta = 1/5$ y $\alpha = 2$. Sea la variable aleatoria X el tiempo en minutos que transcurre antes de que lleguen dos llamadas. La probabilidad que se requiere está dada por:

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= \int_0^x \frac{1}{\theta^2} x e^{-x/\theta} \\ P(X \leq 1) &= 25 \int_0^1 x e^{-5x} dx = [1 - e^{-5(1)}(1+5)] = 0{,}96 \end{aligned}$$

Mientras el origen de la distribución Gamma trata con el tiempo(espacio) hasta la ocurrencia de α eventos de Poisson, hay muchos ejemplos donde una distribución gamma trabaja muy bien aunque no exista una estructura de Poisson clara. Esto es particularmente cierto para problemas de **tiempo de supervivencia** en aplicaciones de ingeniería y biomédicas.

Bibliografía

[1] Walpole, Raymond H. Myers y Sharon L. Myers, *Probabilidad y Estadística para Ingenieros*, Traducción de Ricardo Cruz. Prentice-Hall, Inc. México, 1999.

[2] Paul L. Meyer, *Probabilidad y aplicaciones estadísticas*, primera edición, Mexico, DF, 1992.

[3] George C. Canavos, *Probabilidad y Estadística , aplicaciones y métodos*, Traducción de Edmundo G. Urbina M. McGraw- Hill. México, 1988.

[4] Carlos Alberola López *Probabilidad, variables aleatorias y procesos estocásticos: Una introducción orientada a las telecomunicaciones*, Secretariado de publicación e intercambio editorial. Universidad de Valladolid College, España, 2011.

[5] Llinás H., Rojas C., *Estadística Descriptiva y Distribuciones de Probabilidad*, Ediciones Uninorte. Barranquilla, 2009

[6] Dixon, John *Introducción a la probabilidad*, primera edición, México, Limusa-Wiley, 1968.

[7] Arley, Niels Rander Buch, *Introducción a la teoría de la probabilidad y de la estadística*, primera edición, Madrid, Alhambra, 1968.

[8] Hoel, Paul *Introducción a la estadística matemática*, primera edición, Barcelona, Ariel, 1968.

[9] Zylberberg A. D. *Probabilidad y Estadística*, Editorial Nueva Librería. Argentina, 2005.

[10] Indira Arroyo, Luis C. Bravo M., Dr. Ret. Nat. Humberto Llinás., Msc. Fabián L. Muñoz 2014, *Distribuciones Poisson y Gamma: Una Discreta y Continua Relación*, Bogotá, pág 99-107, 1968.

[11] K. Pearson *Tables of the incomplete gamma function*, Biometrika Office. University College, London, 1948.

[12] D. J. Best and D. E. Roberts *Algorithm AS 89: The Upper Tail Probabilities of Spearman's Rho*, Applied Statistics. 24:377–379, 1975.

[13] Devore, J. L. *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences*, 4th ed. Monterey, Calif.: Brooks/Cole Publishing Co., 1995.

[14] Wickham, Hadley *Ggplot2: elegant graphics for data analysis*, New York: Springer, 1999.

Anexos

Anexos A

Anexo I: Tablas de distribuciones de probabilidades

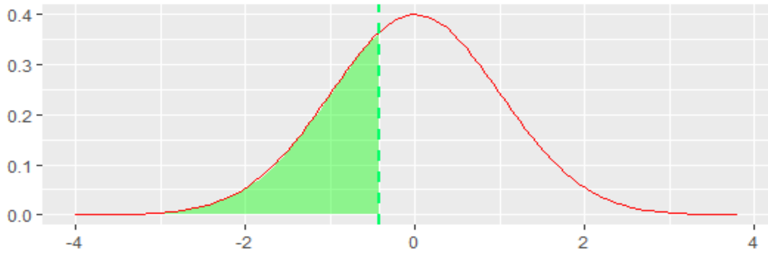


Tabla A: Probabilidad Normal Estándar Acumulada *Z*(0,1)

Z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
-3.40	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.30	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.20	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.10	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.00	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.90	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.80	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.70	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.60	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.50	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.40	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.30	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.20	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.10	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.00	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.90	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.80	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.70	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.60	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.50	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.40	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.30	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.20	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.10	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.00	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.90	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.80	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.70	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.60	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.50	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.40	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.30	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.20	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.10	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.00	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

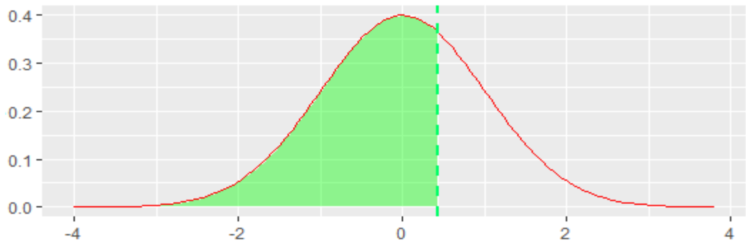


Tabla B: Probabilidad Normal Estándar Acumulada Z(0,1)

Z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.00	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.80	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.90	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.00	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.10	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.20	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.30	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.40	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.50	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.60	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.70	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.80	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.90	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.00	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.10	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.20	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.30	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.40	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Tabla A: Probabilidad Binomial bin(x;n,p)

n	**x**	**p**	**0.01**	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
2	**0**		0.980	0.903	0.810	0.723	0.640	0.563	0.490	0.423	0.360	0.303	0.250
	1		0.020	0.095	0.180	0.255	0.320	0.375	0.420	0.455	0.480	0.495	0.500
	2		0.000	0.003	0.010	0.023	0.040	0.063	0.090	0.123	0.160	0.203	0.250
3	**0**		0.970	0.857	0.729	0.614	0.512	0.422	0.343	0.275	0.216	0.166	0.125
	1		0.029	0.135	0.243	0.325	0.384	0.422	0.441	0.444	0.432	0.408	0.375
	2		0.000	0.007	0.027	0.057	0.096	0.141	0.189	0.239	0.288	0.334	0.375
	3		0.000	0.000	0.001	0.003	0.008	0.016	0.027	0.043	0.064	0.091	0.125
4	**0**		0.961	0.815	0.656	0.522	0.410	0.316	0.240	0.179	0.130	0.092	0.063
	1		0.039	0.171	0.292	0.368	0.410	0.422	0.412	0.384	0.346	0.299	0.250
	2		0.001	0.014	0.049	0.098	0.154	0.211	0.265	0.311	0.346	0.368	0.375
	3		0.000	0.000	0.004	0.011	0.026	0.047	0.076	0.111	0.154	0.200	0.250
	4		0.000	0.000	0.000	0.001	0.002	0.004	0.008	0.015	0.026	0.041	0.063
5	**0**		0.951	0.774	0.590	0.444	0.328	0.237	0.168	0.116	0.078	0.050	0.031
	1		0.048	0.204	0.328	0.392	0.410	0.396	0.360	0.312	0.259	0.206	0.156
	2		0.001	0.021	0.073	0.138	0.205	0.264	0.309	0.336	0.346	0.337	0.313
	3		0.000	0.001	0.008	0.024	0.051	0.088	0.132	0.181	0.230	0.276	0.313
	4		0.000	0.000	0.000	0.002	0.006	0.015	0.028	0.049	0.077	0.113	0.156
	5		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.002	0.005	0.010	0.018	0.031
6	**0**		0.941	0.735	0.531	0.377	0.262	0.178	0.118	0.075	0.047	0.028	0.016
	1		0.057	0.232	0.354	0.399	0.393	0.356	0.303	0.244	0.187	0.136	0.094
	2		0.001	0.031	0.098	0.176	0.246	0.297	0.324	0.328	0.311	0.278	0.234
	3		0.000	0.002	0.015	0.041	0.082	0.132	0.185	0.235	0.276	0.303	0.313
	4		0.000	0.000	0.001	0.005	0.015	0.033	0.060	0.095	0.138	0.186	0.234
	5		0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.004	0.010	0.020	0.037	0.061	0.094
	6		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.002	0.004	0.008	0.016
7	**0**		0.932	0.698	0.478	0.321	0.210	0.133	0.082	0.049	0.028	0.015	0.008
	1		0.066	0.257	0.372	0.396	0.367	0.311	0.247	0.185	0.131	0.087	0.055
	2		0.002	0.041	0.124	0.210	0.275	0.311	0.318	0.298	0.261	0.214	0.164
	3		0.000	0.004	0.023	0.062	0.115	0.173	0.227	0.268	0.290	0.292	0.273
	4		0.000	0.000	0.003	0.011	0.029	0.058	0.097	0.144	0.194	0.239	0.273
	5		0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.012	0.025	0.047	0.077	0.117	0.164
	6		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.008	0.017	0.032	0.055
	7		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.002	0.004	0.008

Tabla B: Probabilidad Binomial Acumulada bin(x;n,p)

n	**x**	**p**	**0.01**	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
2	**0**		0.980	0.903	0.810	0.723	0.640	0.563	0.490	0.423	0.360	0.303	0.250
	1		1.000	0.998	0.990	0.978	0.960	0.938	0.910	0.878	0.840	0.798	0.750
	2		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3	**0**		0.970	0.857	0.729	0.614	0.512	0.422	0.343	0.275	0.216	0.166	0.125
	1		1.000	0.993	0.972	0.939	0.896	0.844	0.784	0.718	0.648	0.575	0.500
	2		1.000	1.000	0.999	0.997	0.992	0.984	0.973	0.957	0.936	0.909	0.875
	3		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4	**0**		0.961	0.815	0.656	0.522	0.410	0.316	0.240	0.179	0.130	0.092	0.063
	1		0.999	0.986	0.948	0.890	0.819	0.738	0.652	0.563	0.475	0.391	0.313
	2		1.000	1.000	0.996	0.988	0.973	0.949	0.916	0.874	0.821	0.759	0.688
	3		1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.996	0.992	0.985	0.974	0.959	0.938
	4		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
5	**0**		0.951	0.774	0.590	0.444	0.328	0.237	0.168	0.116	0.078	0.050	0.031
	1		0.999	0.977	0.919	0.835	0.737	0.633	0.528	0.428	0.337	0.256	0.188
	2		1.000	0.999	0.991	0.973	0.942	0.896	0.837	0.765	0.683	0.593	0.500
	3		1.000	1.000	1.000	0.998	0.993	0.984	0.969	0.946	0.913	0.869	0.813
	4		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.995	0.990	0.982	0.969
	5		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
6	**0**		0.941	0.735	0.531	0.377	0.262	0.178	0.118	0.075	0.047	0.028	0.016
	1		0.999	0.967	0.886	0.776	0.655	0.534	0.420	0.319	0.233	0.164	0.109
	2		1.000	0.998	0.984	0.953	0.901	0.831	0.744	0.647	0.544	0.442	0.344
	3		1.000	1.000	0.999	0.994	0.983	0.962	0.930	0.883	0.821	0.745	0.656
	4		1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.995	0.989	0.978	0.959	0.931	0.891
	5		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.996	0.992	0.984
	6		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
7	**0**		0.932	0.698	0.478	0.321	0.210	0.133	0.082	0.049	0.028	0.015	0.008
	1		0.998	0.956	0.850	0.717	0.577	0.445	0.329	0.234	0.159	0.102	0.063
	2		1.000	0.996	0.974	0.926	0.852	0.756	0.647	0.532	0.420	0.316	0.227
	3		1.000	1.000	0.997	0.988	0.967	0.929	0.874	0.800	0.710	0.608	0.500
	4		1.000	1.000	1.000	0.999	0.995	0.987	0.971	0.944	0.904	0.847	0.773
	5		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.991	0.981	0.964	0.938
	6		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.996	0.992
	7		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabla B: Probabilidad Poisson P(x;λ)

		λ									
x	**p**	**0.10**	**0.20**	**0.30**	**0.40**	**0.50**	**0.60**	**0.70**	**0.80**	**0.90**	**1.00**
0		0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1		0.0905	0.1637	0.2222	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679
2		0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988	0.1217	0.1438	0.1647	0.1839
3		0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613
4		0.0000	0.0001	0.0003	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153
5		0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031
6		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005
7		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

x	**p**	**1.10**	**1.20**	**1.30**	**1.40**	**1.50**	**1.60**	**1.70**	**1.80**	**1.90**	**2.00**
0		0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353
1		0.3662	0.3614	0.3543	0.3452	0.3347	0.3230	0.3106	0.2975	0.2842	0.2707
2		0.2014	0.2169	0.2303	0.2417	0.2510	0.2584	0.2640	0.2678	0.2700	0.2707
3		0.0738	0.0867	0.0998	0.1128	0.1255	0.1378	0.1496	0.1607	0.1710	0.1804
4		0.0203	0.0260	0.0324	0.0395	0.0471	0.0551	0.0636	0.0723	0.0812	0.0902
5		0.0045	0.0062	0.0084	0.0111	0.0141	0.0176	0.0216	0.0260	0.0309	0.0361
6		0.0008	0.0012	0.0018	0.0026	0.0035	0.0047	0.0061	0.0078	0.0098	0.0120
7		0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0008	0.0011	0.0015	0.0020	0.0027	0.0034
8		0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0006	0.0009
9		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002

x	**p**	**2.10**	**2.20**	**2.30**	**2.40**	**2.50**	**2.60**	**2.70**	**2.80**	**2.90**	**3.00**
0		0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1		0.2572	0.2438	0.2306	0.2177	0.2052	0.1931	0.1815	0.1703	0.1596	0.1494
2		0.2700	0.2681	0.2652	0.2613	0.2565	0.2510	0.2450	0.2384	0.2314	0.2240
3		0.1890	0.1966	0.2033	0.2090	0.2138	0.2176	0.2205	0.2225	0.2237	0.2240
4		0.0992	0.1082	0.1169	0.1254	0.1336	0.1414	0.1488	0.1557	0.1622	0.1680
5		0.0417	0.0476	0.0538	0.0602	0.0668	0.0735	0.0804	0.0872	0.0940	0.1008
6		0.0146	0.0174	0.0206	0.0241	0.0278	0.0319	0.0362	0.0407	0.0455	0.0504
7		0.0044	0.0055	0.0068	0.0083	0.0099	0.0118	0.0139	0.0163	0.0188	0.0216
8		0.0011	0.0015	0.0019	0.0025	0.0031	0.0038	0.0047	0.0057	0.0068	0.0081
9		0.0003	0.0004	0.0005	0.0007	0.0009	0.0011	0.0014	0.0018	0.0022	0.0027
10		0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0008
11		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
12		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

x	**p**	**3.10**	**3.20**	**3.30**	**3.40**	**3.50**	**3.60**	**3.70**	**3.80**	**3.90**	**4.00**
0		0.0450	0.0408	0.0369	0.0334	0.0302	0.0273	0.0247	0.0224	0.0202	0.0183
1		0.1397	0.1304	0.1217	0.1135	0.1057	0.0984	0.0915	0.0850	0.0789	0.0733
2		0.2165	0.2087	0.2008	0.1929	0.1850	0.1771	0.1692	0.1615	0.1539	0.1465
3		0.2237	0.2226	0.2209	0.2186	0.2158	0.2125	0.2087	0.2046	0.2001	0.1954
4		0.1733	0.1781	0.1823	0.1858	0.1888	0.1912	0.1931	0.1944	0.1951	0.1954
5		0.1075	0.1140	0.1203	0.1264	0.1322	0.1377	0.1429	0.1477	0.1522	0.1563
6		0.0555	0.0608	0.0662	0.0716	0.0771	0.0826	0.0881	0.0936	0.0989	0.1042
7		0.0246	0.0278	0.0312	0.0348	0.0385	0.0425	0.0466	0.0508	0.0551	0.0595
8		0.0095	0.0111	0.0129	0.0148	0.0169	0.0191	0.0215	0.0241	0.0269	0.0298
9		0.0033	0.0040	0.0047	0.0056	0.0066	0.0076	0.0089	0.0102	0.0116	0.0132
10		0.0010	0.0013	0.0016	0.0019	0.0023	0.0028	0.0033	0.0039	0.0045	0.0053
11		0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0009	0.0011	0.0013	0.0016	0.0019
12		0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006
13		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
14		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

Tabla B: Probabilidad Poisson P(x;λ)

						λ					
x	**p**	**4.10**	**4.20**	**4.30**	**4.40**	**4.50**	**4.60**	**4.70**	**4.80**	**4.90**	**5.00**
0		0.0166	0.0150	0.0136	0.0123	0.0111	0.0101	0.0091	0.0082	0.0074	0.0067
1		0.0679	0.0630	0.0583	0.0540	0.0500	0.0462	0.0427	0.0395	0.0365	0.0337
2		0.1393	0.1323	0.1254	0.1188	0.1125	0.1063	0.1005	0.0948	0.0894	0.0842
3		0.1904	0.1852	0.1798	0.1743	0.1687	0.1631	0.1574	0.1517	0.1460	0.1404
4		0.1951	0.1944	0.1933	0.1917	0.1898	0.1875	0.1849	0.1820	0.1789	0.1755
5		0.1600	0.1633	0.1662	0.1687	0.1708	0.1725	0.1738	0.1747	0.1753	0.1755
6		0.1093	0.1143	0.1191	0.1237	0.1281	0.1323	0.1362	0.1398	0.1432	0.1462
7		0.0640	0.0686	0.0732	0.0778	0.0824	0.0869	0.0914	0.0959	0.1002	0.1044
8		0.0328	0.0360	0.0393	0.0428	0.0463	0.0500	0.0537	0.0575	0.0614	0.0653
9		0.0150	0.0168	0.0188	0.0209	0.0232	0.0255	0.0281	0.0307	0.0334	0.0363
10		0.0061	0.0071	0.0081	0.0092	0.0104	0.0118	0.0132	0.0147	0.0164	0.0181
11		0.0023	0.0027	0.0032	0.0037	0.0043	0.0049	0.0056	0.0064	0.0073	0.0082
12		0.0008	0.0009	0.0011	0.0013	0.0016	0.0019	0.0022	0.0026	0.0030	0.0034
13		0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0011	0.0013
14		0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005
15		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002

x	**p**	**5.10**	**5.20**	**5.30**	**5.40**	**5.50**	**5.60**	**5.70**	**5.80**	**5.90**	**6.00**
0		0.0061	0.0055	0.0050	0.0045	0.0041	0.0037	0.0033	0.0030	0.0027	0.0025
1		0.0311	0.0287	0.0265	0.0244	0.0225	0.0207	0.0191	0.0176	0.0162	0.0149
2		0.0793	0.0746	0.0701	0.0659	0.0618	0.0580	0.0544	0.0509	0.0477	0.0446
3		0.1348	0.1293	0.1239	0.1185	0.1133	0.1082	0.1033	0.0985	0.0938	0.0892
4		0.1719	0.1681	0.1641	0.1600	0.1558	0.1515	0.1472	0.1428	0.1383	0.1339
5		0.1753	0.1748	0.1740	0.1728	0.1714	0.1697	0.1678	0.1656	0.1632	0.1606
6		0.1490	0.1515	0.1537	0.1555	0.1571	0.1584	0.1594	0.1601	0.1605	0.1606
7		0.1086	0.1125	0.1163	0.1200	0.1234	0.1267	0.1298	0.1326	0.1353	0.1377
8		0.0692	0.0731	0.0771	0.0810	0.0849	0.0887	0.0925	0.0962	0.0998	0.1033
9		0.0392	0.0423	0.0454	0.0486	0.0519	0.0552	0.0586	0.0620	0.0654	0.0688
10		0.0200	0.0220	0.0241	0.0262	0.0285	0.0309	0.0334	0.0359	0.0386	0.0413
11		0.0093	0.0104	0.0116	0.0129	0.0143	0.0157	0.0173	0.0190	0.0207	0.0225
12		0.0039	0.0045	0.0051	0.0058	0.0065	0.0073	0.0082	0.0092	0.0102	0.0113
13		0.0015	0.0018	0.0021	0.0024	0.0028	0.0032	0.0036	0.0041	0.0046	0.0052
14		0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0011	0.0013	0.0015	0.0017	0.0019	0.0022
15		0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
16		0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003
17		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001

x	**p**	**6.10**	**6.20**	**6.30**	**6.40**	**6.50**	**6.60**	**6.70**	**6.80**	**6.90**	**7.00**
0		0.0022	0.0020	0.0018	0.0017	0.0015	0.0014	0.0012	0.0011	0.0010	0.0009
1		0.0137	0.0126	0.0116	0.0106	0.0098	0.0090	0.0082	0.0076	0.0070	0.0064
2		0.0417	0.0390	0.0364	0.0340	0.0318	0.0296	0.0276	0.0258	0.0240	0.0223
3		0.0848	0.0806	0.0765	0.0726	0.0688	0.0652	0.0617	0.0584	0.0552	0.0521
4		0.1294	0.1249	0.1205	0.1162	0.1118	0.1076	0.1034	0.0992	0.0952	0.0912
5		0.1579	0.1549	0.1519	0.1487	0.1454	0.1420	0.1385	0.1349	0.1314	0.1277
6		0.1605	0.1601	0.1595	0.1586	0.1575	0.1562	0.1546	0.1529	0.1511	0.1490
7		0.1399	0.1418	0.1435	0.1450	0.1462	0.1472	0.1480	0.1486	0.1489	0.1490
8		0.1066	0.1099	0.1130	0.1160	0.1188	0.1215	0.1240	0.1263	0.1284	0.1304
9		0.0723	0.0757	0.0791	0.0825	0.0858	0.0891	0.0923	0.0954	0.0985	0.1014
10		0.0441	0.0469	0.0498	0.0528	0.0558	0.0588	0.0618	0.0649	0.0679	0.0710
11		0.0244	0.0265	0.0285	0.0307	0.0330	0.0353	0.0377	0.0401	0.0426	0.0452
12		0.0124	0.0137	0.0150	0.0164	0.0179	0.0194	0.0210	0.0227	0.0245	0.0263
13		0.0058	0.0065	0.0073	0.0081	0.0089	0.0099	0.0108	0.0119	0.0130	0.0142
14		0.0025	0.0029	0.0033	0.0037	0.0041	0.0046	0.0052	0.0058	0.0064	0.0071
15		0.0010	0.0012	0.0014	0.0016	0.0018	0.0020	0.0023	0.0026	0.0029	0.0033
16		0.0004	0.0005	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0010	0.0011	0.0013	0.0014
17		0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006
18		0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002
19		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001

Tabla B: Probabilidad Poisson P(x;λ)

		λ									
x	**p**	**7.10**	**7.20**	**7.30**	**7.40**	**7.50**	**7.60**	**7.70**	**7.80**	**7.90**	**8.00**
0		0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0003
1		0.0059	0.0054	0.0049	0.0045	0.0041	0.0038	0.0035	0.0032	0.0029	0.0027
2		0.0208	0.0194	0.0180	0.0167	0.0156	0.0145	0.0134	0.0125	0.0116	0.0107
3		0.0492	0.0464	0.0438	0.0413	0.0389	0.0366	0.0345	0.0324	0.0305	0.0286
4		0.0874	0.0836	0.0799	0.0764	0.0729	0.0696	0.0663	0.0632	0.0602	0.0573
5		0.1241	0.1204	0.1167	0.1130	0.1094	0.1057	0.1021	0.0986	0.0951	0.0916
6		0.1468	0.1445	0.1420	0.1394	0.1367	0.1339	0.1311	0.1282	0.1252	0.1221
7		0.1489	0.1486	0.1481	0.1474	0.1465	0.1454	0.1442	0.1428	0.1413	0.1396
8		0.1321	0.1337	0.1351	0.1363	0.1373	0.1381	0.1388	0.1392	0.1395	0.1396
9		0.1042	0.1070	0.1096	0.1121	0.1144	0.1167	0.1187	0.1207	0.1224	0.1241
10		0.0740	0.0770	0.0800	0.0829	0.0858	0.0887	0.0914	0.0941	0.0967	0.0993
11		0.0478	0.0504	0.0531	0.0558	0.0585	0.0613	0.0640	0.0667	0.0695	0.0722
12		0.0283	0.0303	0.0323	0.0344	0.0366	0.0388	0.0411	0.0434	0.0457	0.0481
13		0.0154	0.0168	0.0181	0.0196	0.0211	0.0227	0.0243	0.0260	0.0278	0.0296
14		0.0078	0.0086	0.0095	0.0104	0.0113	0.0123	0.0134	0.0145	0.0157	0.0169
15		0.0037	0.0041	0.0046	0.0051	0.0057	0.0062	0.0069	0.0075	0.0083	0.0090
16		0.0016	0.0019	0.0021	0.0024	0.0026	0.0030	0.0033	0.0037	0.0041	0.0045
17		0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0012	0.0013	0.0015	0.0017	0.0019	0.0021
18		0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
19		0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003	0.0004
20		0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002
21		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001

x	**p**	**8.10**	**8.20**	**8.30**	**8.40**	**8.50**	**8.60**	**8.70**	**8.80**	**8.90**	**9.00**
0		0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001
1		0.0025	0.0023	0.0021	0.0019	0.0017	0.0016	0.0014	0.0013	0.0012	0.0011
2		0.0100	0.0092	0.0086	0.0079	0.0074	0.0068	0.0063	0.0058	0.0054	0.0050
3		0.0269	0.0252	0.0237	0.0222	0.0208	0.0195	0.0183	0.0171	0.0160	0.0150
4		0.0544	0.0517	0.0491	0.0466	0.0443	0.0420	0.0398	0.0377	0.0357	0.0337
5		0.0882	0.0849	0.0816	0.0784	0.0752	0.0722	0.0692	0.0663	0.0635	0.0607
6		0.1191	0.1160	0.1128	0.1097	0.1066	0.1034	0.1003	0.0972	0.0941	0.0911
7		0.1378	0.1358	0.1338	0.1317	0.1294	0.1271	0.1247	0.1222	0.1197	0.1171
8		0.1395	0.1392	0.1388	0.1382	0.1375	0.1366	0.1356	0.1344	0.1332	0.1318
9		0.1256	0.1269	0.1280	0.1290	0.1299	0.1306	0.1311	0.1315	0.1317	0.1318
10		0.1017	0.1040	0.1063	0.1084	0.1104	0.1123	0.1140	0.1157	0.1172	0.1186
11		0.0749	0.0776	0.0802	0.0828	0.0853	0.0878	0.0902	0.0925	0.0948	0.0970
12		0.0505	0.0530	0.0555	0.0579	0.0604	0.0629	0.0654	0.0679	0.0703	0.0728
13		0.0315	0.0334	0.0354	0.0374	0.0395	0.0416	0.0438	0.0459	0.0481	0.0504
14		0.0182	0.0196	0.0210	0.0225	0.0240	0.0256	0.0272	0.0289	0.0306	0.0324
15		0.0098	0.0107	0.0116	0.0126	0.0136	0.0147	0.0158	0.0169	0.0182	0.0194
16		0.0050	0.0055	0.0060	0.0066	0.0072	0.0079	0.0086	0.0093	0.0101	0.0109
17		0.0024	0.0026	0.0029	0.0033	0.0036	0.0040	0.0044	0.0048	0.0053	0.0058
18		0.0011	0.0012	0.0014	0.0015	0.0017	0.0019	0.0021	0.0024	0.0026	0.0029
19		0.0005	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0011	0.0012	0.0014
20		0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0005	0.0006
21		0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003
22		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001

Tabla B: Probabilidad Poisson P(x;λ)

		λ									
x	**p**	**9.10**	**9.20**	**9.30**	**9.40**	**9.50**	**9.60**	**9.70**	**9.80**	**9.90**	**10.00**
0		0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000
1		0.0010	0.0009	0.0009	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
2		0.0046	0.0043	0.0040	0.0037	0.0034	0.0031	0.0029	0.0027	0.0025	0.0023
3		0.0140	0.0131	0.0123	0.0115	0.0107	0.0100	0.0093	0.0087	0.0081	0.0076
4		0.0319	0.0302	0.0285	0.0269	0.0254	0.0240	0.0226	0.0213	0.0201	0.0189
5		0.0581	0.0555	0.0530	0.0506	0.0483	0.0460	0.0439	0.0418	0.0398	0.0378
6		0.0881	0.0851	0.0822	0.0793	0.0764	0.0736	0.0709	0.0682	0.0656	0.0631
7		0.1145	0.1118	0.1091	0.1064	0.1037	0.1010	0.0982	0.0955	0.0928	0.0901
8		0.1302	0.1286	0.1269	0.1251	0.1232	0.1212	0.1191	0.1170	0.1148	0.1126
9		0.1317	0.1315	0.1311	0.1306	0.1300	0.1293	0.1284	0.1274	0.1263	0.1251
10		0.1198	0.1210	0.1219	0.1228	0.1235	0.1241	0.1245	0.1249	0.1250	0.1251
11		0.0991	0.1012	0.1031	0.1049	0.1067	0.1083	0.1098	0.1112	0.1125	0.1137
12		0.0752	0.0776	0.0799	0.0822	0.0844	0.0866	0.0888	0.0908	0.0928	0.0948
13		0.0526	0.0549	0.0572	0.0594	0.0617	0.0640	0.0662	0.0685	0.0707	0.0729
14		0.0342	0.0361	0.0380	0.0399	0.0419	0.0439	0.0459	0.0479	0.0500	0.0521
15		0.0208	0.0221	0.0235	0.0250	0.0265	0.0281	0.0297	0.0313	0.0330	0.0347
16		0.0118	0.0127	0.0137	0.0147	0.0157	0.0168	0.0180	0.0192	0.0204	0.0217
17		0.0063	0.0069	0.0075	0.0081	0.0088	0.0095	0.0103	0.0111	0.0119	0.0128
18		0.0032	0.0035	0.0039	0.0042	0.0046	0.0051	0.0055	0.0060	0.0065	0.0071
19		0.0015	0.0017	0.0019	0.0021	0.0023	0.0026	0.0028	0.0031	0.0034	0.0037
20		0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0011	0.0012	0.0014	0.0015	0.0017	0.0019
21		0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
22		0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004
23		0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
24		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001

x	**p**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
0		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1		0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2		0.0010	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3		0.0037	0.0018	0.0008	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4		0.0102	0.0053	0.0027	0.0013	0.0006	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
5		0.0224	0.0127	0.0070	0.0037	0.0019	0.0010	0.0005	0.0002	0.0001	0.0001
6		0.0411	0.0255	0.0152	0.0087	0.0048	0.0026	0.0014	0.0007	0.0004	0.0002
7		0.0646	0.0437	0.0281	0.0174	0.0104	0.0060	0.0034	0.0019	0.0010	0.0005
8		0.0888	0.0655	0.0457	0.0304	0.0194	0.0120	0.0072	0.0042	0.0024	0.0013
9		0.1085	0.0874	0.0661	0.0473	0.0324	0.0213	0.0135	0.0083	0.0050	0.0029
10		0.1194	0.1048	0.0859	0.0663	0.0486	0.0341	0.0230	0.0150	0.0095	0.0058
11		0.1194	0.1144	0.1015	0.0844	0.0663	0.0496	0.0355	0.0245	0.0164	0.0106
12		0.1094	0.1144	0.1099	0.0984	0.0829	0.0661	0.0504	0.0368	0.0259	0.0176
13		0.0926	0.1056	0.1099	0.1060	0.0956	0.0814	0.0658	0.0509	0.0378	0.0271
14		0.0728	0.0905	0.1021	0.1060	0.1024	0.0930	0.0800	0.0655	0.0514	0.0387
15		0.0534	0.0724	0.0885	0.0989	0.1024	0.0992	0.0906	0.0786	0.0650	0.0516
16		0.0367	0.0543	0.0719	0.0866	0.0960	0.0992	0.0963	0.0884	0.0772	0.0646
17		0.0237	0.0383	0.0550	0.0713	0.0847	0.0934	0.0963	0.0936	0.0863	0.0760
18		0.0145	0.0255	0.0397	0.0554	0.0706	0.0830	0.0909	0.0936	0.0911	0.0844
19		0.0084	0.0161	0.0272	0.0409	0.0557	0.0699	0.0814	0.0887	0.0911	0.0888
20		0.0046	0.0097	0.0177	0.0286	0.0418	0.0559	0.0692	0.0798	0.0866	0.0888
21		0.0024	0.0055	0.0109	0.0191	0.0299	0.0426	0.0560	0.0684	0.0783	0.0846
22		0.0012	0.0030	0.0065	0.0121	0.0204	0.0310	0.0433	0.0560	0.0676	0.0769
23		0.0006	0.0016	0.0037	0.0074	0.0133	0.0216	0.0320	0.0438	0.0559	0.0669
24		0.0003	0.0008	0.0020	0.0043	0.0083	0.0144	0.0226	0.0328	0.0442	0.0557
25		0.0001	0.0004	0.0010	0.0024	0.0050	0.0092	0.0154	0.0237	0.0336	0.0446
26		0.0000	0.0002	0.0005	0.0013	0.0029	0.0057	0.0101	0.0164	0.0246	0.0343
27		0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0016	0.0034	0.0063	0.0109	0.0173	0.0254
28		0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0009	0.0019	0.0038	0.0070	0.0117	0.0181
29		0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0011	0.0023	0.0044	0.0077	0.0125
30		0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0006	0.0013	0.0026	0.0049	0.0083
31		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007	0.0015	0.0030	0.0054
32		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0004	0.0009	0.0018	0.0034
33		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0005	0.0010	0.0020
34		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0006	0.0012
35		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007

Tabla B: Probabilidad Poisson Acumulada P(x;λ)

		λ									
x	**p**	**0.10**	**0.20**	**0.30**	**0.40**	**0.50**	**0.60**	**0.70**	**0.80**	**0.90**	**1.00**
0		0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1		0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725	0.7358
2		0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371	0.9197
3		1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865	0.9810
4		1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977	0.9963
5		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994
6		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
7		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x	**p**	**1.10**	**1.20**	**1.30**	**1.40**	**1.50**	**1.60**	**1.70**	**1.80**	**1.90**	**2.00**
0		0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353
1		0.6990	0.6626	0.6268	0.5918	0.5578	0.5249	0.4932	0.4628	0.4337	0.4060
2		0.9004	0.8795	0.8571	0.8335	0.8088	0.7834	0.7572	0.7306	0.7037	0.6767
3		0.9743	0.9662	0.9569	0.9463	0.9344	0.9212	0.9068	0.8913	0.8747	0.8571
4		0.9946	0.9923	0.9893	0.9857	0.9814	0.9763	0.9704	0.9636	0.9559	0.9473
5		0.9990	0.9985	0.9978	0.9968	0.9955	0.9940	0.9920	0.9896	0.9868	0.9834
6		0.9999	0.9997	0.9996	0.9994	0.9991	0.9987	0.9981	0.9974	0.9966	0.9955
7		1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9994	0.9992	0.9989
8		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
9		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x	**p**	**2.10**	**2.20**	**2.30**	**2.40**	**2.50**	**2.60**	**2.70**	**2.80**	**2.90**	**3.00**
0		0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1		0.3796	0.3546	0.3309	0.3084	0.2873	0.2674	0.2487	0.2311	0.2146	0.1991
2		0.6496	0.6227	0.5960	0.5697	0.5438	0.5184	0.4936	0.4695	0.4460	0.4232
3		0.8386	0.8194	0.7993	0.7787	0.7576	0.7360	0.7141	0.6919	0.6696	0.6472
4		0.9379	0.9275	0.9162	0.9041	0.8912	0.8774	0.8629	0.8477	0.8318	0.8153
5		0.9796	0.9751	0.9700	0.9643	0.9580	0.9510	0.9433	0.9349	0.9258	0.9161
6		0.9941	0.9925	0.9906	0.9884	0.9858	0.9828	0.9794	0.9756	0.9713	0.9665
7		0.9985	0.9980	0.9974	0.9967	0.9958	0.9947	0.9934	0.9919	0.9901	0.9881
8		0.9997	0.9995	0.9994	0.9991	0.9989	0.9985	0.9981	0.9976	0.9969	0.9962
9		0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9991	0.9989
10		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
11		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
12		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x	**p**	**3.10**	**3.20**	**3.30**	**3.40**	**3.50**	**3.60**	**3.70**	**3.80**	**3.90**	**4.00**
0		0.0450	0.0408	0.0369	0.0334	0.0302	0.0273	0.0247	0.0224	0.0202	0.0183
1		0.1847	0.1712	0.1586	0.1468	0.1359	0.1257	0.1162	0.1074	0.0992	0.0916
2		0.4012	0.3799	0.3594	0.3397	0.3208	0.3027	0.2854	0.2689	0.2531	0.2381
3		0.6248	0.6025	0.5803	0.5584	0.5366	0.5152	0.4942	0.4735	0.4532	0.4335
4		0.7982	0.7806	0.7626	0.7442	0.7254	0.7064	0.6872	0.6678	0.6484	0.6288
5		0.9057	0.8946	0.8829	0.8705	0.8576	0.8441	0.8301	0.8156	0.8006	0.7851
6		0.9612	0.9554	0.9490	0.9421	0.9347	0.9267	0.9182	0.9091	0.8995	0.8893
7		0.9858	0.9832	0.9802	0.9769	0.9733	0.9692	0.9648	0.9599	0.9546	0.9489
8		0.9953	0.9943	0.9931	0.9917	0.9901	0.9883	0.9863	0.9840	0.9815	0.9786
9		0.9986	0.9982	0.9978	0.9973	0.9967	0.9960	0.9952	0.9942	0.9931	0.9919
10		0.9996	0.9995	0.9994	0.9992	0.9990	0.9987	0.9984	0.9981	0.9977	0.9972
11		0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9991
12		1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
13		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
14		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla B: Probabilidad Poisson Acumulada P(x;λ)

		λ									
x	**p**	**4.10**	**4.20**	**4.30**	**4.40**	**4.50**	**4.60**	**4.70**	**4.80**	**4.90**	**5.00**
0		0.0166	0.0150	0.0136	0.0123	0.0111	0.0101	0.0091	0.0082	0.0074	0.0067
1		0.0845	0.0780	0.0719	0.0663	0.0611	0.0563	0.0518	0.0477	0.0439	0.0404
2		0.2238	0.2102	0.1974	0.1851	0.1736	0.1626	0.1523	0.1425	0.1333	0.1247
3		0.4142	0.3954	0.3772	0.3594	0.3423	0.3257	0.3097	0.2942	0.2793	0.2650
4		0.6093	0.5898	0.5704	0.5512	0.5321	0.5132	0.4946	0.4763	0.4582	0.4405
5		0.7693	0.7531	0.7367	0.7199	0.7029	0.6858	0.6684	0.6510	0.6335	0.6160
6		0.8786	0.8675	0.8558	0.8436	0.8311	0.8180	0.8046	0.7908	0.7767	0.7622
7		0.9427	0.9361	0.9290	0.9214	0.9134	0.9049	0.8960	0.8867	0.8769	0.8666
8		0.9755	0.9721	0.9683	0.9642	0.9597	0.9549	0.9497	0.9442	0.9382	0.9319
9		0.9905	0.9889	0.9871	0.9851	0.9829	0.9805	0.9778	0.9749	0.9717	0.9682
10		0.9966	0.9959	0.9952	0.9943	0.9933	0.9922	0.9910	0.9896	0.9880	0.9863
11		0.9989	0.9986	0.9983	0.9980	0.9976	0.9971	0.9966	0.9960	0.9953	0.9945
12		0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9992	0.9990	0.9988	0.9986	0.9983	0.9980
13		0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993
14		1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
15		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999

x	**p**	**5.10**	**5.20**	**5.30**	**5.40**	**5.50**	**5.60**	**5.70**	**5.80**	**5.90**	**6.00**
0		0.0061	0.0055	0.0050	0.0045	0.0041	0.0037	0.0033	0.0030	0.0027	0.0025
1		0.0372	0.0342	0.0314	0.0289	0.0266	0.0244	0.0224	0.0206	0.0189	0.0174
2		0.1165	0.1088	0.1016	0.0948	0.0884	0.0824	0.0768	0.0715	0.0666	0.0620
3		0.2513	0.2381	0.2254	0.2133	0.2017	0.1906	0.1800	0.1700	0.1604	0.1512
4		0.4231	0.4061	0.3895	0.3733	0.3575	0.3422	0.3272	0.3127	0.2987	0.2851
5		0.5984	0.5809	0.5635	0.5461	0.5289	0.5119	0.4950	0.4783	0.4619	0.4457
6		0.7474	0.7324	0.7171	0.7017	0.6860	0.6703	0.6544	0.6384	0.6224	0.6063
7		0.8560	0.8449	0.8335	0.8217	0.8095	0.7970	0.7841	0.7710	0.7576	0.7440
8		0.9252	0.9181	0.9106	0.9027	0.8944	0.8857	0.8766	0.8672	0.8574	0.8472
9		0.9644	0.9603	0.9559	0.9512	0.9462	0.9409	0.9352	0.9292	0.9228	0.9161
10		0.9844	0.9823	0.9800	0.9775	0.9747	0.9718	0.9686	0.9651	0.9614	0.9574
11		0.9937	0.9927	0.9916	0.9904	0.9890	0.9875	0.9859	0.9841	0.9821	0.9799
12		0.9976	0.9972	0.9967	0.9962	0.9955	0.9949	0.9941	0.9932	0.9922	0.9912
13		0.9992	0.9990	0.9988	0.9986	0.9983	0.9980	0.9977	0.9973	0.9969	0.9964
14		0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9991	0.9990	0.9988	0.9986
15		0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995
16		1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998
17		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999

x	**p**	**6.10**	**6.20**	**6.30**	**6.40**	**6.50**	**6.60**	**6.70**	**6.80**	**6.90**	**7.00**
0		0.0022	0.0020	0.0018	0.0017	0.0015	0.0014	0.0012	0.0011	0.0010	0.0009
1		0.0159	0.0146	0.0134	0.0123	0.0113	0.0103	0.0095	0.0087	0.0080	0.0073
2		0.0577	0.0536	0.0498	0.0463	0.0430	0.0400	0.0371	0.0344	0.0320	0.0296
3		0.1425	0.1342	0.1264	0.1189	0.1118	0.1052	0.0988	0.0928	0.0871	0.0818
4		0.2719	0.2592	0.2469	0.2351	0.2237	0.2127	0.2022	0.1920	0.1823	0.1730
5		0.4298	0.4141	0.3988	0.3837	0.3690	0.3547	0.3406	0.3270	0.3137	0.3007
6		0.5902	0.5742	0.5582	0.5423	0.5265	0.5108	0.4953	0.4799	0.4647	0.4497
7		0.7301	0.7160	0.7017	0.6873	0.6728	0.6581	0.6433	0.6285	0.6136	0.5987
8		0.8367	0.8259	0.8148	0.8033	0.7916	0.7796	0.7673	0.7548	0.7420	0.7291
9		0.9090	0.9016	0.8939	0.8858	0.8774	0.8686	0.8596	0.8502	0.8405	0.8305
10		0.9531	0.9486	0.9437	0.9386	0.9332	0.9274	0.9214	0.9151	0.9084	0.9015
11		0.9776	0.9750	0.9723	0.9693	0.9661	0.9627	0.9591	0.9552	0.9510	0.9467
12		0.9900	0.9887	0.9873	0.9857	0.9840	0.9821	0.9801	0.9779	0.9755	0.9730
13		0.9958	0.9952	0.9945	0.9937	0.9929	0.9920	0.9909	0.9898	0.9885	0.9872
14		0.9984	0.9981	0.9978	0.9974	0.9970	0.9966	0.9961	0.9956	0.9950	0.9943
15		0.9994	0.9993	0.9992	0.9990	0.9988	0.9986	0.9984	0.9982	0.9979	0.9976
16		0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9992	0.9990
17		0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996
18		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
19		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla B: Probabilidad Poisson Acumulada P(x;λ)

		λ									
x	**p**	**7.10**	**7.20**	**7.30**	**7.40**	**7.50**	**7.60**	**7.70**	**7.80**	**7.90**	**8.00**
0		0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0003
1		0.0067	0.0061	0.0056	0.0051	0.0047	0.0043	0.0039	0.0036	0.0033	0.0030
2		0.0275	0.0255	0.0236	0.0219	0.0203	0.0188	0.0174	0.0161	0.0149	0.0138
3		0.0767	0.0719	0.0674	0.0632	0.0591	0.0554	0.0518	0.0485	0.0453	0.0424
4		0.1641	0.1555	0.1473	0.1395	0.1321	0.1249	0.1181	0.1117	0.1055	0.0996
5		0.2881	0.2759	0.2640	0.2526	0.2414	0.2307	0.2203	0.2103	0.2006	0.1912
6		0.4349	0.4204	0.4060	0.3920	0.3782	0.3646	0.3514	0.3384	0.3257	0.3134
7		0.5838	0.5689	0.5541	0.5393	0.5246	0.5100	0.4956	0.4812	0.4670	0.4530
8		0.7160	0.7027	0.6892	0.6757	0.6620	0.6482	0.6343	0.6204	0.6065	0.5925
9		0.8202	0.8096	0.7988	0.7877	0.7764	0.7649	0.7531	0.7411	0.7290	0.7166
10		0.8942	0.8867	0.8788	0.8707	0.8622	0.8535	0.8445	0.8352	0.8257	0.8159
11		0.9420	0.9371	0.9319	0.9265	0.9208	0.9148	0.9085	0.9020	0.8952	0.8881
12		0.9703	0.9673	0.9642	0.9609	0.9573	0.9536	0.9496	0.9454	0.9409	0.9362
13		0.9857	0.9841	0.9824	0.9805	0.9784	0.9762	0.9739	0.9714	0.9687	0.9658
14		0.9935	0.9927	0.9918	0.9908	0.9897	0.9886	0.9873	0.9859	0.9844	0.9827
15		0.9972	0.9969	0.9964	0.9959	0.9954	0.9948	0.9941	0.9934	0.9926	0.9918
16		0.9989	0.9987	0.9985	0.9983	0.9980	0.9978	0.9974	0.9971	0.9967	0.9963
17		0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9992	0.9991	0.9989	0.9988	0.9986	0.9984
18		0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993
19		0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997
20		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
21		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x	**p**	**8.10**	**8.20**	**8.30**	**8.40**	**8.50**	**8.60**	**8.70**	**8.80**	**8.90**	**9.00**
0		0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001
1		0.0028	0.0025	0.0023	0.0021	0.0019	0.0018	0.0016	0.0015	0.0014	0.0012
2		0.0127	0.0118	0.0109	0.0100	0.0093	0.0086	0.0079	0.0073	0.0068	0.0062
3		0.0396	0.0370	0.0346	0.0323	0.0301	0.0281	0.0262	0.0244	0.0228	0.0212
4		0.0940	0.0887	0.0837	0.0789	0.0744	0.0701	0.0660	0.0621	0.0584	0.0550
5		0.1822	0.1736	0.1653	0.1573	0.1496	0.1422	0.1352	0.1284	0.1219	0.1157
6		0.3013	0.2896	0.2781	0.2670	0.2562	0.2457	0.2355	0.2256	0.2160	0.2068
7		0.4391	0.4254	0.4119	0.3987	0.3856	0.3728	0.3602	0.3478	0.3357	0.3239
8		0.5786	0.5647	0.5507	0.5369	0.5231	0.5094	0.4958	0.4823	0.4689	0.4557
9		0.7041	0.6915	0.6788	0.6659	0.6530	0.6400	0.6269	0.6137	0.6006	0.5874
10		0.8058	0.7955	0.7850	0.7743	0.7634	0.7522	0.7409	0.7294	0.7178	0.7060
11		0.8807	0.8731	0.8652	0.8571	0.8487	0.8400	0.8311	0.8220	0.8126	0.8030
12		0.9313	0.9261	0.9207	0.9150	0.9091	0.9029	0.8965	0.8898	0.8829	0.8758
13		0.9628	0.9595	0.9561	0.9524	0.9486	0.9445	0.9403	0.9358	0.9311	0.9261
14		0.9810	0.9791	0.9771	0.9749	0.9726	0.9701	0.9675	0.9647	0.9617	0.9585
15		0.9908	0.9898	0.9887	0.9875	0.9862	0.9848	0.9832	0.9816	0.9798	0.9780
16		0.9958	0.9953	0.9947	0.9941	0.9934	0.9926	0.9918	0.9909	0.9899	0.9889
17		0.9982	0.9979	0.9977	0.9973	0.9970	0.9966	0.9962	0.9957	0.9952	0.9947
18		0.9992	0.9991	0.9990	0.9989	0.9987	0.9985	0.9983	0.9981	0.9978	0.9976
19		0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0.9995	0.9994	0.9993	0.9992	0.9991	0.9989
20		0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996
21		1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
22		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999

Tabla B: Probabilidad Poisson Acumulada P(x;λ)

		λ									
x	**p**	**9.10**	**9.20**	**9.30**	**9.40**	**9.50**	**9.60**	**9.70**	**9.80**	**9.90**	**10.00**
0		0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000
1		0.0011	0.0010	0.0009	0.0009	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0005	0.0005
2		0.0058	0.0053	0.0049	0.0045	0.0042	0.0038	0.0035	0.0033	0.0030	0.0028
3		0.0198	0.0184	0.0172	0.0160	0.0149	0.0138	0.0129	0.0120	0.0111	0.0103
4		0.0517	0.0486	0.0456	0.0429	0.0403	0.0378	0.0355	0.0333	0.0312	0.0293
5		0.1098	0.1041	0.0986	0.0935	0.0885	0.0838	0.0793	0.0750	0.0710	0.0671
6		0.1978	0.1892	0.1808	0.1727	0.1649	0.1574	0.1502	0.1433	0.1366	0.1301
7		0.3123	0.3010	0.2900	0.2792	0.2687	0.2584	0.2485	0.2388	0.2294	0.2202
8		0.4426	0.4296	0.4168	0.4042	0.3918	0.3796	0.3676	0.3558	0.3442	0.3328
9		0.5742	0.5611	0.5479	0.5349	0.5218	0.5089	0.4960	0.4832	0.4705	0.4579
10		0.6941	0.6820	0.6699	0.6576	0.6453	0.6329	0.6205	0.6080	0.5955	0.5830
11		0.7932	0.7832	0.7730	0.7626	0.7520	0.7412	0.7303	0.7193	0.7081	0.6968
12		0.8684	0.8607	0.8529	0.8448	0.8364	0.8279	0.8191	0.8101	0.8009	0.7916
13		0.9210	0.9156	0.9100	0.9042	0.8981	0.8919	0.8853	0.8786	0.8716	0.8645
14		0.9552	0.9517	0.9480	0.9441	0.9400	0.9357	0.9312	0.9265	0.9216	0.9165
15		0.9760	0.9738	0.9715	0.9691	0.9665	0.9638	0.9609	0.9579	0.9546	0.9513
16		0.9878	0.9865	0.9852	0.9838	0.9823	0.9806	0.9789	0.9770	0.9751	0.9730
17		0.9941	0.9934	0.9927	0.9919	0.9911	0.9902	0.9892	0.9881	0.9870	0.9857
18		0.9973	0.9969	0.9966	0.9962	0.9957	0.9952	0.9947	0.9941	0.9935	0.9928
19		0.9988	0.9986	0.9985	0.9983	0.9980	0.9978	0.9975	0.9972	0.9969	0.9965
20		0.9995	0.9994	0.9993	0.9992	0.9991	0.9990	0.9989	0.9987	0.9986	0.9984
21		0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995	0.9995	0.9994	0.9993
22		0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997
23		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
24		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x	**p**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
0		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1		0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2		0.0012	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3		0.0049	0.0023	0.0011	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4		0.0151	0.0076	0.0037	0.0018	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
5		0.0375	0.0203	0.0107	0.0055	0.0028	0.0014	0.0007	0.0003	0.0002	0.0001
6		0.0786	0.0458	0.0259	0.0142	0.0076	0.0040	0.0021	0.0010	0.0005	0.0003
7		0.1432	0.0895	0.0540	0.0316	0.0180	0.0100	0.0054	0.0029	0.0015	0.0008
8		0.2320	0.1550	0.0998	0.0621	0.0374	0.0220	0.0126	0.0071	0.0039	0.0021
9		0.3405	0.2424	0.1658	0.1094	0.0699	0.0433	0.0261	0.0154	0.0089	0.0050
10		0.4599	0.3472	0.2517	0.1757	0.1185	0.0774	0.0491	0.0304	0.0183	0.0108
11		0.5793	0.4616	0.3532	0.2600	0.1848	0.1270	0.0847	0.0549	0.0347	0.0214
12		0.6887	0.5760	0.4631	0.3585	0.2676	0.1931	0.1350	0.0917	0.0606	0.0390
13		0.7813	0.6815	0.5730	0.4644	0.3632	0.2745	0.2009	0.1426	0.0984	0.0661
14		0.8540	0.7720	0.6751	0.5704	0.4657	0.3675	0.2808	0.2081	0.1497	0.1049
15		0.9074	0.8444	0.7636	0.6694	0.5681	0.4667	0.3715	0.2867	0.2148	0.1565
16		0.9441	0.8987	0.8355	0.7559	0.6641	0.5660	0.4677	0.3751	0.2920	0.2211
17		0.9678	0.9370	0.8905	0.8272	0.7489	0.6593	0.5640	0.4686	0.3784	0.2970
18		0.9823	0.9626	0.9302	0.8826	0.8195	0.7423	0.6550	0.5622	0.4695	0.3814
19		0.9907	0.9787	0.9573	0.9235	0.8752	0.8122	0.7363	0.6509	0.5606	0.4703
20		0.9953	0.9884	0.9750	0.9521	0.9170	0.8682	0.8055	0.7307	0.6472	0.5591
21		0.9977	0.9939	0.9859	0.9712	0.9469	0.9108	0.8615	0.7991	0.7255	0.6437
22		0.9990	0.9970	0.9924	0.9833	0.9673	0.9418	0.9047	0.8551	0.7931	0.7206
23		0.9995	0.9985	0.9960	0.9907	0.9805	0.9633	0.9367	0.8989	0.8490	0.7875
24		0.9998	0.9993	0.9980	0.9950	0.9888	0.9777	0.9594	0.9317	0.8933	0.8432
25		0.9999	0.9997	0.9990	0.9974	0.9938	0.9869	0.9748	0.9554	0.9269	0.8878
26		1.0000	0.9999	0.9995	0.9987	0.9967	0.9925	0.9848	0.9718	0.9514	0.9221
27		1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9983	0.9959	0.9912	0.9827	0.9687	0.9475
28		1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9978	0.9950	0.9897	0.9805	0.9657
29		1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9989	0.9973	0.9941	0.9882	0.9782
30		1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9986	0.9967	0.9930	0.9865
31		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9982	0.9960	0.9919
32		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9978	0.9953
33		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9988	0.9973
34		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9985
35		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992

BY Ruddy Caja

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

UN ENFOQUE TEÓRICO Y PRÁCTICO

"Probabilidad y Estadística: Un Enfoque Teórico y Práctico" condensa los fundamentos y técnicas avanzadas en una guía indispensable para estudiantes y profesionales. Explorando desde espacios probabilísticos hasta el análisis detallado de variables aleatorias y sus distribuciones, este texto ofrece una ruta clara para entender y aplicar métodos estadísticos.

A través de una mezcla equilibrada de teoría y ejemplos aplicados, aborda temas como la probabilidad condicional e independencia, junto con el estudio de funciones de variables aleatorias. Se pone un énfasis especial en cómo se utilizan las distribuciones de variables, tanto discretas como continuas, en el análisis de datos, subrayando su papel crítico en diversas disciplinas.

Cada sección está cuidadosamente diseñada para reforzar el entendimiento analítico y la interpretación crítica, presentando ejercicios seleccionados que demuestran la relevancia de la estadística en situaciones concretas. Este enfoque asegura la accesibilidad de conceptos complejos, preparando a los lectores para enfrentar desafíos estadísticos en entornos académicos y profesionales.

Conciso y profundo, este libro no solo sirve como un recurso educativo excepcional, sino también como una referencia esencial para quienes aspiran a dominar la estadística y la probabilidad, facilitando un dominio confiado de estas disciplinas esenciales.

https://futuradata.pe

FUTURA
ANALITICA AVANZADA