Sistema Digestivo: Gastritis

Armenta Contreras Odin Enrique (21212140)
Paniagua Fernandez Jaime Johelly (21211271)
Venegas Ameca Ángel Ismael (21212184)
Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica
Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico de Tijuana

December 13, 2024

Palabras clave: Circuito RLC; Controlador PI; In silico; Laplace; Lazo cerrado

Correo: **l21212140@tectijuana.edu.mx; l21212171@tectijuana.edu.mx; l21212184@tectijuana.edu.mx**

Carrera: **Ingeniería Biomédica**

Asignatura: **Modelado de Sistemas Fisiológicos**

Profesor: **Dr. Paul Antonio Valle Trujillo** (paul.valle@tectijuana.edu.mx)

1 Función de transferencia

1.1 Ecuaciones principales

La malla principal del sistema puede ser definido por la siguiente ecuación:

$$V_e(t) = L\frac{di_1(t)}{dt} + R\left[i_1(t) - i_2(t)\right]$$

La segunda malla se define con la siguiente ecuación:

$$R\left[i_1(t) - i_2(t)\right] = \frac{1}{C_1}\int i_2(t)\,dt + \frac{1}{C_2}\int i_2(t)\,dt$$

Y la salida del sistema sería

$$V_s(t) = \frac{1}{C_2}\int i_2(t)\,dt$$

1.2 Transformada de Laplace

Primero se lleva a Laplace la ecuación de la primera malla

$$V_e(s) = Lsi_1(s) + R\left[i_1(s) - i_2(s)\right]$$

Después la ecuación de la segunda malla

$$R\left[i_1\left(s\right)-i_2\left(s\right)\right]=\frac{i_2\left(s\right)}{C_1s}+\frac{i_2\left(s\right)}{C_2s}$$

Para después llevar a Laplace la ecuación del voltaje de salida

$$V_s(s)=\frac{i_2\left(s\right)}{C_2s}$$

1.3 Procedimiento algebraico

Primeramente, se desfacatorizan los términos que multiplican a R

$$V_e(s)=Lsi_1\left(s\right)+Ri_1\left(s\right)-Ri_2\left(s\right)$$

Después se factorizan las corrientes

$$V_e(s)=\left(Ls+R\right)i_1\left(s\right)-Ri_2\left(s\right)$$

Una vez con esto, se procede a despejar $i_1\left(s\right)$ de la primera ecuación, comenzando con desfactorizar los términos que multiplican a R

$$Ri_1\left(s\right)-Ri_2\left(s\right)=\frac{i_2\left(s\right)}{C_1s}+\frac{i_2\left(s\right)}{C_2s}$$

Después todo aquello que multiplica a $i_2\left(s\right)$ se pasa dividiendo de lado derecho de la ecuación

$$Ri_1\left(s\right)=\frac{i_2\left(s\right)}{C_1s}+\frac{i_2\left(s\right)}{C_2s}+Ri_2\left(s\right)$$

Seguido de esto de vuelve a factorizar los términos que multiplican a $i_2\left(s\right)$

$$Ri_1\left(s\right)=\left(\frac{1}{C_1s}+\frac{1}{C_2s}+R\right)i_2\left(s\right)$$

Se simplifica la suma de fracciones

$$Ri_1\left(s\right)=\left(\frac{C_1+C_2}{sC_1C_2}+R\right)i_2\left(s\right)$$

Se simplifica todo aquello que multiplica a $i_2\left(s\right)$

$$Ri_1\left(s\right)=\left(\frac{C_1+C_2+RsC_1C_2}{sC_1C_2}\right)i_2\left(s\right)$$

Se divide entre R ambas partes de la ecuación

$$i_1\left(s\right)=\left(\frac{C_1+C_2+RsC_1C_2}{sC_1C_2}\right)\left(\frac{1}{R}\right)i_2\left(s\right)$$

Finalmente se obtiene la igualación de $i_1(s)$

$$i_1(s) = \left(\frac{C_1 + C_2 + RsC_1C_2}{RsC_1C_2}\right) i_2(s)$$

Seguido de esto se sustituye $i_1(s)$ en la ecuación de la primera malla

$$V_e(s) = (Ls + R)\left(\frac{C_1 + C_2 + RsC_1C_2}{RsC_1C_2}\right) i_2(s) - Ri_2(s)$$

Se simplifica la ecuación

$$V_e(s) = \frac{(R + Ls)(C_1 + C_2 + RsC_1C_2)}{RsC_1C_2} i_2(s) - Ri_2(s)$$

Se factoriza $i_2(s)$

$$V_e(s) = \left[\frac{(R + Ls)(C_1 + C_2 + RsC_1C_2)}{RsC_1C_2} - R\right] i_2(s)$$

Finalmente se simplifica y se obtiene el voltaje de entrada en función de $i_2(s)$

$$V_e(s) = \left[\frac{LRC_1C_2s^2 + (LC_1 + LC_2)s + (RC_1 + RC_2)}{RC_1C_2s}\right] i_2(s)$$

1.4 Resultado

Para obtener la función de transferencia se debe dividir la respuesta a la salida sobre la entrada de voltaje:

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{\frac{1}{C_2s} i_2(s)}{\left[\frac{LRC_1C_2s^2 + (LC_1 + LC_2)s + (RC_1 + RC_2)}{RC_1C_2s}\right] i_2(s)}$$

Debido a que se tiene $i_2(s)$ tanto en el numerador cómo en el denominador, se cancelan:

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{\frac{1}{C_2s}}{\frac{LRC_1C_2s^2 + (LC_1 + LC_2)s + (RC_1 + RC_2)}{RC_1C_2s}}$$

Al simplificar la ecuación se tiene la funcion de transferencia:

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{RC_1}{LRC_1C_2s^2 + (LC_1 + LC_2)s + (RC_1 + RC_2)}$$

2 Estabilidad del sistema en lazo abierto

Para obtener la estabilidad del sistema en lazo abierto, se debe de analizar el sistema encontrando las raíces. Siendo este un sistema de segundo orden, se tendran dos raices:

$$LRC_1C_2s^2 + (LC_1 + LC_2)s + (RC_1 + RC_2) = 0$$

$\text{assume}(C_1, \text{positive}) = (0, \infty)$

$\text{assume}(C_2, \text{positive}) = (0, \infty)$

$\text{assume}(L, \text{positive}) = (0, \infty)$

$\text{assume}(R, \text{positive}) = (0, \infty)$

Los polos obtenidos de sistema se tienen como:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\frac{1}{LRC_1C_2}\left(\frac{1}{2}LC_1 + \frac{1}{2}LC_2 - \frac{1}{2}\sqrt{L}\sqrt{(C_1+C_2)(-4C_1C_2R^2 + LC_1 + LC_2)}\right) \\
\lambda_2 &= -\frac{1}{LRC_1C_2}\left(\frac{1}{2}LC_1 + \frac{1}{2}LC_2 + \frac{1}{2}\sqrt{L}\sqrt{(C_1+C_2)(-4C_1C_2R^2 + LC_1 + LC_2)}\right)
\end{aligned}$$

:

Al simplifacarlo adquiere la forma:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\frac{1}{2LRC_1C_2}\left(LC_1 + LC_2 - \sqrt{L}\sqrt{(C_1+C_2)(-4C_1C_2R^2 + LC_1 + LC_2)}\right) \\
\lambda_2 &= -\frac{1}{2LRC_1C_2}\left(LC_1 + LC_2 + \sqrt{L}\sqrt{(C_1+C_2)(-4C_1C_2R^2 + LC_1 + LC_2)}\right)
\end{aligned}$$

Debido a que se tienen dos sistemas, uno es el de una persona sana (control) y un paciente con gastritis (caso) por lo que se calcularan las raices para ambos casos.

Primero se define el valor que sera igual en ambos casos:

$$L = 3.3 \times 10^{-3}$$

2.1 Control

Primero se definen los valores específicos que toma el control:

$$\begin{aligned}
C_1 &= 1 \\
C_2 &= 1 \\
R &= 100
\end{aligned}$$

Seguido de esto, se sustituyen los valores en la ecuación de segundo orden:

$$0.33s^2 + 0.006\,6s + 200 = 0$$

Para finalmente calcular sus raíces:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -0.01 - 24.\,618i \\
\lambda_2 &= -0.01 + 24.\,618i
\end{aligned}$$

Ambas raices tienen parte real y parte imaginaria, pero como la parte real es negativa, el sistema es estable

2.2 Caso

Se definen los valores específicos para el caso

$$
\begin{aligned}
C_1 &= 0.75 \\
C_2 &= 0.2 \\
R &= 400
\end{aligned}
$$

Se sustituyen los valores en la ecuación de segundo orden obteniendo el siguiente resultado

$$0.198\, s^2 + 3.135 \times 10^{-3} s + 380.0 = 0$$

Finalmente se calculan sus raíces

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= -7.9167 \times 10^{-3} - 43.809i \\
\lambda_2 &= -7.9167 \times 10^{-3} + 43.809i
\end{aligned}
$$

Ambas raices tienen parte real y parte imaginaria, pero como la parte real es negativa, el sistema también es estable

3 Modelo de ecuaciones integro-diferenciales

El modelo de ecuacines integro-diferenciales se formula al despejar las variables dependientes y la salida del sistema, partiendo de las ecuaciones principales:

Comenzamos con la ecuación de la primera malla

$$V_e(t) = L\frac{di_1(t)}{dt} + R\left[i_1(t) - i_2(t)\right]$$

Se desfactoriza la R

$$V_e(t) - L\frac{di_1(t)}{dt} = Ri_1(t) - Ri_2(t)$$

Se suma $Ri_2(t)$ en ambos lados de la ecuación

$$V_e(t) - L\frac{di_1(t)}{dt} + Ri_2(t) = Ri_1(t)$$

Se divide entre R en ambos lados de la ecuación y se obtiene la igualación de $i_1(t)$

$$i_1(t) = \frac{V_e(t) - L\frac{di_1(t)}{dt} + Ri_2(t)}{R}$$

Luego se trabaja con la ecuación de la segunda malla para despejar $i_2(t)$

$$R\left[i_1(t) - i_2(t)\right] = \frac{1}{C_1}\int i_2(t)\,dt + \frac{1}{C_2}\int i_2(t)\,dt$$

Se desfactoriza R del lado izquierdo de la ecuación

$$Ri_1(t) - Ri_2(t) = \frac{1}{C_1}\int i_2(t)\,dt + \frac{1}{C_2}\int i_2(t)\,dt$$

Se resta $Ri_1(t)$ en ambos lados de la ecuación

$$-Ri_2(t) = \frac{i_2(t)}{C_1} + \frac{i_2(t)}{C_2} - Ri_1(t)$$

Se multiplica todo por -1 y se reordenan los términos

$$Ri_2(t) = Ri_1(t) - \frac{1}{C_1}\int i_2(t)\,dt - \frac{1}{C_2}\int i_2(t)\,dt$$

Finalmente se dividen ambos lados de la ecuación entre R y se obtiene la igualación de $i_2(t)$

$$i_2(t) = \frac{Ri_1(t) - \frac{1}{C_1}\int i_2(t)\,dt - \frac{1}{C_2}\int i_2(t)\,dt}{R}$$

Por último, la ecuación del voltaje de salida se queda igual

$$V_s(t) = \frac{1}{C_2}\int i_2(t)\,dt$$

4 Error en estado estacionario

El error del estado estacionario se calcula mediante el límite siguiente:

$$e(t) = \lim_{s\to 0} sR(s)\left[1 - \frac{V_s(s)}{V_e(s)}\right] = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\left[1 - \frac{RC_1}{LRC_1C_2s^2 + (LC_1 + LC_2)s + (RC_1 + RC_2)}\right]$$

dónde $R(s)$ representa la estrada al sistema

Por lo que al realizar el límite se tiene

$$e(t) = 1 - \frac{RC_1}{(RC_1 + RC_2)}$$

Calculando el límite, se tiene que el error estacionario es diferente de 0 y, por ende, es diferente para el caso y para el control

4.1 Control

El error en estado estacionario del sistema para el control adquiere la siguiente forma:

$$e(t) = 1 - \frac{100}{(100 + 100)} = 1 - \frac{1}{2}$$

Por lo que error en estado estacionario del control seria de 0.5

$$e(t) = \frac{1}{2}$$

4.2 Caso

El error en estado estacionario del sistema para el caso adquiere la siguiente forma:

$$e\left(t\right)=1-\frac{300}{\left(300+80\right)}=1-\frac{15}{19}$$

:

Por lo que el error en estado estacionario del caso seria de $\frac{4}{19}$

$$e\left(t\right)=\frac{4}{19}$$

5 Cálculo de componentes para el controlador PID

Para calcular los componentes para el controlador PI se utiliza la herramienta "Tune" de Simulink para controladores (en este caso PI), se fueron sintonizando diferentes valores y velocidades hasta llegar a menos de 100 milisegundos a no mas de 10 % de ganancia Al lograr los requerimientos, se obtuvo que la respusta integral es igual a 54874.1065, la respuesta proporcional es igual a 1154.3384 y la respuesta derivativa es igual a 5.3855.

$$\begin{aligned} k_I &= \frac{1}{R_e C_r} = 54974.1065 \\ k_P &= \frac{R_r}{R_e} = 1154.3384 \\ k_D &= R_r C_e = 5.3855 \end{aligned}$$

Para obtener los valores de los componentes, se propone un valor del capacitor C_r de $0.1\mu F$

$$C_r = 0.1 \times 10^{-6}$$

Con este valor, se despejan los valores de las resistencias R_e y R_r junto con el valor del capacitor C_e.

$$\begin{aligned} R_e &= \frac{1}{k_I C_r} = \frac{1}{\left(54974.1065\right)\left(0.1\times10^{-6}\right)} = 181.9 \\ R_r &= k_P R_e = \left(1154.3384\right)\left(181.9\right) = 209.97\times10^{3} \\ C_e &= \frac{k_D}{R_r} = \frac{5.3855}{209.97\times10^{3}} = 0.25649\times10^{-6} \end{aligned}$$