

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
Estudios Generales Ciencias
CÁLCULO APLICADO
Práctica Dirigida 1
Ciclo de Verano 2021-0

Para justificar la asistencia a la Práctica Dirigida 1, resolver el problema 1.

1. Calcule las siguientes integrales de línea.

a) $\int_{\Gamma} \left(e^x - \frac{y}{2\sqrt{2}z} \right) ds$ donde Γ la intersección de las superficies $z = \frac{y^2}{4}$ y $x = \ln \left(\frac{y}{\sqrt{2}} \right)$ con $\sqrt{2} \leq y \leq 5\sqrt{2}$.

b) $\int_{\Gamma} y^2 dx + x^2 dy + x^3 y^3 z^3 dz$, siendo Γ la intersección del paraboloide $x^2 + 2y^2 + z = 4$ con los planos coordenados en el primer octante, recorrida en sentido antihorario si se observa desde el origen, partiendo del punto $(0, 0, 4)$.

2. Un alambre tiene la forma de la intersección del cilindro parabólico $z = 4 - y^2$, $z \geq 0$, con el plano $x = 2 - y$. Calcule la abscisa del centro de masa del alambre, si la densidad en cada punto es $\rho(x, y, z) = |x|$.

3. Calcule el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y, z) = (6xy^3 + 2z^2, 9x^2y^2, 4xz + 1)$ para mover una partícula desde el punto $P(2, 0, 0)$ hasta el punto $Q(0, 0, 2)$ siguiendo la curva Γ , que es la intersección de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, recorrida en sentido horario si se observa desde el origen de coordenadas.

4. Dados el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{2x^3y^2}{1+x^4+z^2}, y \ln(1+x^4+z^2), \frac{y^2z}{1+x^4+z^2} \right)$ y la curva Γ es la intersección de las superficies $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ y $x = y$ con $x, y, z \geq 0$,

a) demuestre que \vec{F} es un campo conservativo en \mathbb{R}^3 , y

b) halle el trabajo que realiza el campo \vec{F} para desplazar una partícula sobre la curva Γ desde el punto $A(0, 0, 3)$ hasta el punto $B(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$.

5. Se sabe que el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right)$ es conservativo en $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Use el **primer teorema fundamental de la integral de línea** para determinar una función potencial para \vec{F} .

6. Calcule $\int_{\Gamma} \left(x + \arcsen \frac{x}{3} \right) dx + (2x + \ln(y^2 + 3)) dy$ si $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es recorrida en sentido antihorario, donde Γ_1 y Γ_2 son los arcos de las parábolas $y = 4 - x^2$ e $y = 1 - \frac{x^2}{4}$, respectivamente, comprendidos entre $A(2, 0)$ y $B(-2, 0)$.

7. Sea la curva $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ donde $\Gamma_1 : x^2 + y^2 = 16$ y $\Gamma_2 : (x - 6)^2 + y^2 = 4$. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{xy^4}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y}{(x - 6)^2 + y^2}, \frac{x^4y}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x - 6}{(x - 6)^2 + y^2} \right)$$

al mover una partícula que parte desde el punto $(4, 0)$, recorre una vez Γ_1 en sentido antihorario y luego recorre una vez Γ_2 en sentido horario.