PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Estudios Generales Ciencias

CÁLCULO APLICADO

Práctica Dirigida 1

Ciclo de Verano 2021-0

Para justificar la asistencia a la Práctica Dirigida 1, resolver el problema 1.

1. Calcule las siguientes integrales de línea.

   a) $\displaystyle\int_\Gamma \left(e^x - \frac{y}{2\sqrt{2z}}\right) ds$ donde Γ la intersección de las superficies $z = \dfrac{y^2}{4}$ y $x = \ln\left(\dfrac{y}{\sqrt{2}}\right)$ con $\sqrt{2} \leq y \leq 5\sqrt{2}$.

   b) $\displaystyle\int_\Gamma y^2 dx + x^2 dy + x^3y^3z^3 dz$, siendo Γ la intersección del paraboloide $x^2 + 2y^2 + z = 4$ con los planos coordenados, recorrida en sentido antihorario si se observa desde el origen, partiendo del punto $(0, 0, 4)$.

2. Un alambre tiene la forma de la intersección del cilindro parabólico $z = 4 - y^2$, $z \geq 0$, con el plano $x = 2 - y$. Calcule la abscisa del centro de masa del alambre, si la densidad en cada punto es $\rho(x, y, z) = |x|$.

3. Calcule el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y, z) = \left(6xy^3 + 2z^2, 9x^2y^2, 4xz + 1\right)$ para mover una partícula desde el punto $P(2, 0, 0)$ hasta el punto $Q(0, 0, 2)$ siguiendo la curva Γ, que es la intersección de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, recorrida en sentido horario si se observa desde el origen de coordenadas.

4. Dados el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y, z) = \left(\dfrac{2x^3y^2}{1 + x^4 + z^2}, y\ln\left(1 + x^4 + z^2\right), \dfrac{y^2 z}{1 + x^4 + z^2}\right)$ y la curva Γ es la intersección de las superficies $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1$ y $x = y$ con $x, y, z \geq 0$,

   a) demuestre que $\vec{F}$ es un campo conservativo en $\mathbb{R}^3$, y

   b) halle el trabajo que realiza el campo $\vec{F}$ para desplazar una partícula sobre la curva Γ desde el punto $A(0, 0, 3)$ hasta el punto $B\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right)$.

5. Se sabe que el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\right)$ es conservativo en $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}$. **Use el primer teorema fundamental de la integral de línea** para determinar una función potencial para $\vec{F}$.

6. Calcule $\displaystyle\int_\Gamma \left(x + \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{3}\right) dx + \left(2x + \ln\left(y^2 + 3\right)\right) dy$ si $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es recorrida en sentido antihorario, donde Γ_1 y Γ_2 son los arcos de las parábolas $y = 4 - x^2$ e $y = 1 - \dfrac{x^2}{4}$, respectivamente, comprendidos entre $A(2, 0)$ y $B(-2, 0)$.

7. Sea la curva $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ donde $\Gamma_1 : x^2 + y^2 = 16$ y $\Gamma_2 : (x - 6)^2 + y^2 = 4$. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{xy^4}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y}{(x - 6)^2 + y^2}, \frac{x^4 y}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x - 6}{(x - 6)^2 + y^2}\right)$$

   al mover una partícula que parte desde el punto $(4, 0)$, recorre una vez Γ_1 en sentido antihorario y luego recorre una vez Γ_2 en sentido horario.

Profesores de Cálculo Aplicado — Lima, 25 de enero de 2021.