Guía Práctica Transformada Z y aplicaciones en tiempo discreto

Michael Rojas
División de Ingeniería eléctrica

November 8, 2020

Fundamento teórico.

La transformada Z es una herramienta matemática que nos ayuda a caracterizar y obtener propiedades de los sistemas discretos.

En la naturaleza, las señales que interactúan con los diferentes sistemas son continuas, para poder analizar y operar con estas señales usualmente se emplean técnicas basadas en computación, para que las señales sean compatibles con los diversos métodos de análisis o control es necesario realizar una transformación de dominio, esta transformación tiene características dinámicas propias asociadas a dicha transformación.

Un sistema discreto es un operador matemático que transforma una señal en otra por medio de un grupo fijo de reglas y funciones. El dominio de los sistemas discretos es el conjunto de números enteros. Un sistema discreto en el tiempo se define como la transformación o el operador que traza la secuencia de entrada con valores $x[n]$, en una secuencia de salida con valores $y[n]$ denotado

$$y[n] = T\{x[n]\} \tag{1}$$

enfatizando que el valor de la secuencia de salida en cualquier punto del índice n debe ser una función $x[n]$ para toda n.

Mientras que los sistemas continuos son representados por medio de ecuaciones diferenciales, los sistemas discretos son representados por medio de ecuaciones en diferencias, considere la transformación dada por la ecuación (1), dicha transformación queda representada por la siguiente ecuación

$$y[n] + \sum_{k=1}^{N-1} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M-1} b_m x[n-m], \quad n \geq 0 \tag{2}$$

con condiciones iniciales $y[-k]$ donde $k = 1, 2, ..., N-1$ y en donde el orden del sistema discreto es $N-1$. Si la ecuación (2) en una ecuación lineal de parámetros concentrados en donde los coeficientes de la ecuación en diferencias a_k son constantes, entonces la ecuación (2) representa a un sistema lineal invariante en el dominio discreto.

Al igual los sistemas continuos, es posible establecer una relación entre la entrada discreta $x[n]$ y la salida discreta $y[n]$; dicha relación es la función de transferencia. Considere la convolución entre la señal de entrada y la respuesta impulso del sistema discreto

$$x[n] * h[n] = y[n] \tag{3}$$

si se aplica la transformada Z a la ecuación anterior se tiene lo siguiente

$$\mathcal{Z}\{x[n] * h[n] = y[n]\} \tag{4}$$
$$\mathcal{Z}\{x[n] * h[n]\} = \mathcal{Z}\{y[n]\} \tag{5}$$
$$X(z)H(z) = Y(z) \tag{6}$$

Entonces la función de transferencia se encuentra dada por la siguiente expresión

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \tag{7}$$

Observaciones:

1. La función de transferencia caracteriza la respuesta impulso de un sistema a través de la relación que existe en el dominio Z de la salida y la entrada.

Observaciones

1. La función de transferencia corresponde a una tipo de respuesta específico que es denominado RESPUESTA ESTADO CERO.

2. La RESPUESTA ESTADO CERO se obtiene cuando las condiciones iniciales de un sistema son iguales cero. Por eso al obtener la función de transferencia con la transformada de Laplace de la ecuación diferencial las condiciones iniciales son cero[1].

Es posible, dado un sistema dinámico expresado con ecuaciones diferenciales transformarlo a ecuaciones en diferencias a través de diferencias finitas. Considere la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d}{dt}y^2(t) + a_1\frac{d}{dt}y(t) + a_0y(t) = b_0x(t) \tag{8}$$

con las siguientes condiciones iniciales $y(0) = y_0$ y $\frac{d}{dt}y(0) = y'(0)$.

La definición de derivada se encuentra representada por la siguiente expresión

$$\frac{d}{dt}y(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t) - y(t - \Delta t)}{\Delta t} \tag{9}$$

para poder realizar una aproximación de la ecuación diferencial a la ecuación en diferencias en lugar de considerar que el límite del incremento del tiempo tiende a cero, se

[1]Existe otro tipo de respuesta que es RESPUESTA ENTRADA CERO, en este caso las condiciones iniciales del sistema son diferentes de cero mientras que se considera la entrada igual a cero.

considerará que el límite tenderá a un valor del tiempo muy pequeño dado por Ts, es decir $\Delta t \to T_s$, por lo tanto es posible expresar la definición de la derivada de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt}y(t) \approx \frac{y(t) - y(t-T_s)}{T_s}. \tag{10}$$

En el caso de que la ecuación diferencia sea una ecuación de segundo orden entonces se tiene lo siguiente

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}y(t) \tag{11}$$

sustituyendo la aproximación de la derivada $\frac{d}{dt}y(t)$ se tiene lo siguiente

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) \approx \frac{d}{dt}\left(\frac{y(t) - y(t-T_s)}{T_s}\right) \tag{12}$$

debido a que le operador derivada es un operador lineal, la definición anterior toma la siguiente forma

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) \approx \frac{\frac{d}{dt}y(t) - \frac{d}{dt}y(t-T_s)}{T_s} \tag{13}$$

en donde $\frac{d}{dt}y(t-T_s)$ se define de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}y(t-T_s) &= \frac{y(t-T_s) - y(t-T_s-T_s)}{T_s} \\
\frac{d}{dt}y(t-T_s) &= \frac{y(t-T_s) - y(t-2T_s)}{T_s}
\end{aligned} \tag{14}$$

sustituyendo la ecuación (10) y (14) en la ecuación (13) se tiene la siguiente expresión

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) \approx \frac{y(t) - y(t-T_s) - y(t-T_s) - y(t-2T_s)}{T_s^2} \tag{15}$$

la aproximación de la segunda derivada es la siguiente

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) \approx \frac{y(t) - 2y(t-T_s) - y(t-2T_s)}{T_s^2} \tag{16}$$

Observación: De esta manera se hace la aproximación de derivadas de orden mayor, se toma la derivada de orden anterior y se sustituyen las derivadas ya definidas.

Ahora considere que desea obtener la representación discreta del sistema de segundo orden dado por la ecuación (8), con las aproximaciones dadas por las ecuaciones (10) y 16 da como resultado la siguiente ecuación

$$\frac{y(t) - 2y(t-T_s) - y(t-2T_s)}{T_s^2} + a_1\left(\frac{y(t) - y(t-T_s)}{T_s}\right) + a_0 y(t) = b_0 x(t)$$

ahora considerando que $t = nT_s$ se tiene lo siguiente

$$\frac{y(nT_s) - 2y(nT_s - T_s) - y(nT_s - 2T_s)}{T_s^2} + a_1 \left(\frac{y(nT_s) - y(nT_s - T_s)}{T_s} \right) + a_0 y(nT_s) = b_0 x(nT_s)$$

A partir de este momento se llamar la tiempo T_s tiempo de muestreo.

factorizando el tiempo de muestreo se tiene lo siguiente

$$\frac{y(nT_s) - 2y((n-1)T_s) - y((n-2)T_s)}{T_s^2} + a_1 \left(\frac{y(nT_s) - y((n-1)T_s)}{T_s} \right) + a_0 y(nT_s) = b_0 x(nT_s)$$

Dada que todos los argumentos las funciones que representan a las señales dependen de Ts es posible omitir dicho valor del argumento de las funciones, por lo tanto se obtiene el siguiente sistema discreto respresentado por medio de una ecuación en diferencias

$$\frac{y[n] - 2y[n-1] - y[n-2]}{T_s^2} + a_1 \left(\frac{y[n] - y[n-1]}{T_s} \right) + a_0 y[n] = b_0 x[n]$$

Observe como el orden de la ecuación diferencial esta dado por el valor del argumento de las señales de la ecuación en diferencias, es decir, si el sistema es de primer orden el argumento de la señal de salida es $n-1$, si el sistema es de segundo orden, el argumento del sistema es $n-2$, si el sistema es de orden ocho, el argumento de las señales de salida será $n-8$.

Ordenando la ecuación en diferencias, se tiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned} \frac{y[n]}{T_s^2} - \frac{2y[n-1]}{T_s^2} - \frac{y[n-2]}{T_s^2} + a_1 \frac{y[n]}{Ts} - a_1 \frac{y[n-1]}{T_s} + a_0 y[n] &= b_0 x[n] \\ \frac{1}{T_s^2} y[n-2] - \left(\frac{2}{T_s^2} + \frac{a_1}{T_s} \right) y[n-1] + \left(\frac{1}{T_s^2} + \frac{a_1}{T_s} + a_0 \right) y[n] &= b_0 x[n] \qquad (17) \end{aligned}$$

en donde la ecuación (17) es la forma general de una representación por medio de ecuaciones en diferencias de un sistema discreto de segundo orden con un tiempo de muestro dado por T_s.

1 Desarrollo de la práctica

Esta práctica se conforma de dos partes principales, la primera de ella consiste en realizar un análisis a detalle de un sistema continuo para poder abordarlo de manera discreta y observar diferencias o similitudes en el análisis dinámico de ambas versiones.

La segunda parte consiste en aplicar un ejemplo práctico de desratización en un caso común en la industria que es un lazo de control.

1. Para la actividad **Aproximación de sistemas continuos por sistemas discretos** piden realizar diferente tipo de análisis con una ecuación diferencial que representa el comportamiento dinámico de un circuito eléctrico de un sistema de segundo orden. Para ejemplificar el desarrollo de la práctica se considerará el modelo matemático de un sistema de segundo orden dado por la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 25\frac{d}{dt}x(t) + 0.5x(t) = 1.5F(t); \tag{18}$$

con las condiciones iniciales como $x(0) = x_0$ y $x'(0) = x'_0$.

   (a) El primer punto de la práctica es que encuentren la sol,ución de la ecuación diferencial por medio de técnicas analíticas brindadas por el software especializado. Escriba la solución y grafíquela.

   Para encontrar la solución de la ecuación (18) se abordaran diferentes casos.

      i. Caso número (1). Condiciones iniciales nulas y la entrada igual a un escalón unitario, es decir $F(t) = u(t)$. La solución de la ecuación (18) para este primer caso se obtiene con el siguiente código.

```
%%%%Solucion de la ecuacion diferencial.Caso 1
y=dsolve('D2y+25*Dy+0.5*y=1.5','Dy(0)=0','y(0)=0');
```

Observación: La función **dsolve** sirve para obtener la solución análitica de ecuaciones diferenciales ordinarias tanto lineales como no lineales, dicha función se conforma de las siguientes partes

$$dsolve = ('\text{ecuacion diferencial}', '\text{condciones inciales}'); \tag{19}$$

La forma en la que se tiene que colocar la ecuación diferencial es la siguiente

$$a_n{*}DNy + a_{n-1}{*}DN-1y + ... + a_2{*}D2y + a_1{*}Dy + a_0{*}y = b_0{*}\text{La entrada}. \tag{20}$$

En donde la entrada puede ser cualquier función del tiempo.

Para continuar con el caso 1, emplearemos una función que permita acomodar el resultado, de tal manera que se pueda observar mejor en el espacio de trabajo del software especializado.

```
%%%Solucion de la ecuacion diferencial. Caso 1
y=dsolve('D2y+25*Dy+0.5*y=1.5','Dy(0)=0','y(0)=0');
pretty(y)
```

Observación: La función **pretty** recibe como argumento una función, ya se en cadena (símbolica) o flotante.

Para terminar con el caso 1, se necesita graficar la solución de la ecuación diferencial, para eso se necesita el siguiente código

```
%%Solucion de la ecuacion diferencial. Caso 1
y=dsolve('D2y+25*Dy+0.5*y=1.5','Dy(0)=0','y(0)=0');
pretty(y)
ezplot(y,[0,500])
```

La función **ezplot** sirve para obtener la representación gráfica de funciones expresadas de manera símbolica por el software especializado. La función ezplot necesita como argumento principalmente dos características

$$\textit{ezplot}(\text{ecuación}, [\text{valor mínimo,valor máximo}]) \tag{21}$$

El **valor mínimo** y el **valor máximo** corresponde a un intervalo en que el software evalúa la función símbolica para obtener un resultado gráfico

NOTA: Para el desarrollo de la práctica con la ecuación diferencial que viene el manual, adecuar los intervalos mencionados anteriormente para obtener una gráfica adecuada de acuerdo a la respuesta.

ii. Caso número (2). Condiciones iniciales diferentes de cero, $x(0) = 2.5$ y $x'(0) = 10$ y entrada escalón unitario, es decir, $F(t) = u(t)$.

NOTA: Para el desarrollo de la práctica emplear las mismas condiciones iniciales.

```
%%Solucion de la ecuacion diferencial. Caso 2
y=dsolve('D2y+25*Dy+0.5*y=1.5','Dy(0)=10','y(0)=10');
```

De igual manera que en el caso 1, para este caso se emplearan las funciones pretty y ezplot para completar el ejercicio, quedando el código de la siguiente manera

```
%%Solucion de la ecuacion diferencial. Caso 2
y=dsolve('D2y+25*Dy+0.5*y=1.5','Dy(0)=10','y(0)=10');
pretty(y)
ezplot(y,[0,500])
```

iii. Caso 3. Sólo para completar el análisis de la solución de la ecuación diferencial se considera el escenario en donde las condiciones inciales son nulas y la entrada es una señal senoidal de amplitud 5 y frecuencia de $10[Hz]$ es decir, $F(t) = 5sen(20\pi t)$. De igual forma se gráfica la respuesta del sistema.

NOTA: Emplear la misma entrada para el ejercicio del manual.

```
%%Solucion de la ecuacion diferencial. Caso 3
y=dsolve('D2y+25*Dy+0.5*y=1.5*(5*sin(20*pi*t))',
'Dy(0)=0','y(0)=0');
pretty(y)
ezplot(y,[0,500])
```

(b) El objetivo de esta sección de la práctica es obtener la equivalencia discreta de un sistema continuo a través de la metodología mostrada en la parte teórica de este documento.

Para poder encontrar la equivalencia en ecuaciones en diferencias a partir de una ecuación diferencial para un sistema de segundo orden, se empleará la expresión dada por la ecuación (17), es decir

$$\frac{1}{T_s^2}y[n-2] - \left(\frac{2}{T_s^2} + \frac{a_1}{T_s}\right)y[n-1] + \left(\frac{1}{T_s^2} + \frac{a_1}{T_s} + a_0\right)y[n] = b_0x[n] \tag{22}$$

Para esta actividad se consideran cinco casos. Siguiendo la ecuación (22), para cada uno de los tiempos de muestreo dados y para la ecuación diferencial que se esta trabajando en este ejemplo, es decir, la ecuación diferencial dada por la expresión (18), encuentre cada una de las ecuaciones en diferencias.

Observación: En el caso del ejemplo con el que se está trabajando, la entrada del sistema es $F(t)$ mientras que la salida del sistema es $x(t)$, entonces los argumentos de la ecuación en diferencias sera $x[n]$ y $F[n]$.

i. Caso 1, $T_s = 1$. El sistema expresado mediante ecuación en diferencias es el siguiente

$$x[n-2] - 27x[n-1] + 26.5x[n] = 1.5F[n] \tag{23}$$

ii. Caso 2, $T_s = 0.1$. El sistema expresado mediante ecuación en diferencias es el siguiente

$$100x[n-2] - 450x[n-1] + 350.5x[n] = 1.5F[n] \tag{24}$$

iii. Caso 3, $T_s = 0.01$. El sistema expresado mediante ecuaciones en diferencias es el siguiente

$$10000x[n-2] - 22500x[n-1] + 1.2501 \times 10^4 x[n] = 1.5F[n] \tag{25}$$

iv. Caso 4, $T_s = 0.001$. El sistema expresado mediante ecuaciones en diferencias es el siguiente.

$$1000000x[n-2] - 2025000x[n-1] + 1.0250 \times 10^6 x[n] = 1.5F[n] \tag{26}$$

v. Caso 5, $T_s = 0.0001$. El sistema expresado mediante ecuaciones en diferencias es el siguiente.

$$100000000x[n-2] - 200250000x[n-1] + 1.0250 \times 10^8 x[n] = 1.5F[n] \tag{27}$$

Observación: Para poder emplear la forma general dada por la ecuación (17) la ecuación diferencial que se desee aproximar debe estar normalizada, es decir, el coeficiente asociado a la derivada de segundo orden debe ser igual a uno, si no se cumple esta condición no será posible emplear la forma obtenida en la sección teórica.

En esta actividad se pide que resuelvan empleando el método de recurrencias las ecuaciones en diferencias obtenidas para los diferentes tiempos de muestreo planteados en los casos anteriores. La metodología para resolver ecuaciones es diferencias por medio del método de recurrencia se sigue el siguiente algoritmo.

Considere la ecuación en diferencias dada por la expresión (27), además considere que el dominio es $n = [0, 1, 2, 3, 4, 5]$, el resultado de la respuesta se obtendrá cuando el sistema es excitado con un escalón unitario. Entonces el algoritmo para las características dadas es la siguiente

Para $n = 0$

$$\begin{aligned} 26.5x[0] - 27x[0-1] + x[0-2] &= 1.5F[0] \\ 26.5x[0] - 27x[-1] + x[-2] &= 1.5F[0] \end{aligned}$$

en donde $x[-1]$ y $x[-2]$ son las condiciones iniciales , en este caso $x[0]$ se puede obtener con la siguiente expresión

$$x[0] = \frac{1.5F[0] + 27x[-1] - x[-2]}{26.5} \tag{28}$$

Para $n = 1$

$$\begin{aligned} 26.5x[1] - 27x[1-1] + x[1-2] &= 1.5F[1] \\ 26.5x[1] - 27x[0] + x[-1] &= 1.5F[1] \end{aligned}$$

en donde $x[-1]$ es una condición inicial y $x[0]$ se obtiene de la ecuación (28), en este caso $x[1]$ se puede obtener con la siguiente expresión

$$x[1] = \frac{1.5F[1] + 27x[0] - x[-1]}{26.5} \tag{29}$$

Para $n = 2$

$$\begin{aligned} 26.5x[2] - 27x[2-1] + x[2-2] &= 1.5F[2] \\ 26.5x[2] - 27x[1] + x[0] &= 1.5F[2] \end{aligned}$$

en donde $x[1]$ se puede obtener de la ecuación (33) y $x[0]$ se obtiene de la ecuación (28), en este caso $x[2]$ se puede obtener con la siguiente expresión

$$x[2] = \frac{1.5F[2] + 27x[1] - x[0]}{26.5} \tag{30}$$

Para $n = 3$

$$\begin{aligned} 26.5x[3] - 27x[3-1] + x[3-2] &= 1.5F[3] \\ 26.5x[3] - 27x[2] + x[1] &= 1.5F[1] \end{aligned}$$

en donde $x[2]$ se puede obtener de la ecuación (30) y $x[1]$ se obtiene de la ecuación (33), en este caso $x[3]$ se puede obtener con la siguiente expresión

$$x[3] = \frac{1.5F[3] + 27x[2] - x[1]}{26.5} \tag{31}$$

Para $n = 4$

$$\begin{aligned} 26.5x[4] - 27x[4-1] + x[4-2] &= 1.5F[4] \\ 26.5x[4] - 27x[3] + x[2] &= 1.5F[4] \end{aligned}$$

en donde $x[3]$ se puede obtener de la ecuación (31) y $x[2]$ se obtiene de la ecuación (30), en este caso $x[4]$ se puede obtener con la siguiente expresión

$$x[4] = \frac{1.5F[4] + 27x[3] - x[2]}{26.5} \tag{32}$$

Para $n = 5$

$$\begin{aligned} 26.5x[5] - 27x[5-1] + x[5-2] &= 1.5F[5] \\ 26.5x[5] - 27x[4] + x[3] &= 1.5F[5] \end{aligned}$$

en donde $x[4]$ se puede obtener de la ecuación (32) y $x[3]$ se obtiene de la ecuación (32), en este caso $x[5]$ se puede obtener con la siguiente expresión

$$x[5] = \frac{1.5F[5] + 27x[4] - x[3]}{26.5} \tag{33}$$

en donde la solución de la ecuación en diferencias para $n = 5$ es el siguiente vector

$$\begin{aligned} x_s = & \frac{1.5F[0] + 27x[-1] - x[-2]}{26.5} \quad \frac{1.5F[1] + 27x[0] - x[-1]}{26.5} \\ & \frac{1.5F[2] + 27x[1] - x[0]}{26.5} \quad \frac{1.5F[3] + 27x[2] - x[1]}{26.5} \\ & \frac{1.5F[4] + 27x[3] - x[2]}{26.5} \quad \frac{1.5F[5] + 27x[4] - x[3]}{26.5}. \end{aligned}$$

NOTA: EL ALGORITMO DE SOLUCIÓN SÓLO SE PRESENTA PARA EL CASO EN EL QUE $T_s = 1$, EL OBJETIVO DE ESTA SECCIÓN ES QUE ENCUENTREN LA SOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS REPRESENTADOS EN ECUACIONES EN DIFERENCIAS PARA TODOS LOS CASOS EXPUESTOS EN ESTA SECCIÓN, ES DECIR, $T_s = 1$, $T_s = 0.1$, $T_s = 0.001$, $T_s = 0.0001$ Y $T_s = 0.00001$ PARA ESO HAGA CASO A LA SIGUIENTE OBSERVACIÓN.

Observación: Para poder obtener la solución de las ecuaciones en diferencias es necesario que programe el algoritmo en el software especializado. Como ejemplo consulte el archivo .m enviado junto con esta guía.

2. El siguiente ejercicio dentro del manual es encontrar la función de transferencia del sistema en tiempo continuo dado por la ecuación (18). La función de transferencia que caracteriza al sistema es la siguiente

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1.5}{s^2 + 25s + 0.5} \tag{34}$$

3. Empleando $T_s = 1$

   (a) Obtenga la función de transferencia a partir de la ecuación en diferencias dada para $T_s = 1$.

   En el caso del ejemplo, la ecuación en diferencias para $T_s = 1$ esta dada por la siguiente expresión

$$x[n-2] - 27x[n-1] + 26.5x[n] = 1.5F[n] \tag{35}$$

   para obtener la función de transferencia con base en la ecuación en diferencias se aplica la transformada Z, al aplicarla en dicha ecuación se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} X(z)z^{-2} - 27X(z)z^{-1} + 26.5X(z) &= 1.5F(z) & (36)\\ X(z)(z^{-2} - 27z^{-1} + 26.5) &= 1.5F(z) & (37)\\ \frac{X(z)}{F(z)} &= \frac{1.5}{z^{-2} - 27z^{-1} + 26.5} & (38) \end{aligned}$$

   por lo tanto, la función de transferencia en el dominio de Z es la siguiente

$$\frac{X(z)}{F(z)} = \frac{1.5}{z^{-2} - 27z^{-1} + 26.5} \tag{39}$$

   normalizando la función de transferencia anterior es la siguiente

$$\frac{X(z)}{F(z)} = \frac{1.5z^2}{1 - 27z + 26.5z^2} \tag{40}$$

   (b) Obtener la función de transferencia en el dominio Z a través de la función de transferencia de tiempo continuo. Para este punto es necesario emplear la función c2d, para conseguir dicha aproximación es necesario emplear el siguiente código de Matlab

```
num=[1.5];
den=[1 25 0.5];
G=tf(num,den);
Gd=c2d(G,1);
```

donde las tres primeras líneas corresponden a la programación de la función de transferencia en tiempo continuo, mientras que la cuarta línea corresponde a la obtención de la función de transferencia en el dominio discreto.

(c) En este punto, se pide que se grafique la respuesta impulso del sistema continuo, y de las dos representaciones discretas, para eso, es necesario emplear el siguiente código en Matlab

```
num=[1.5];
den=[1 25 0.5];
G=tf(num,den);%Funcion de transferencia Continua
G1d=c2d(G,1);% Funcion de transferencia discreta por diferenciador
numd=[1.5 0 0];%numerador de la funcion basada en transformada Z
dend=[26 -27 1];%denominador de la funcion basada en transformada Z
G2d=tf(numd,dend,1)%Funcion de tranferencia basada en transformada Z

impulse(G) %Impulso del sistema continuo
hold on
impulse(G1d)%Impulso de sistema discreto 1
impulse(G2d)%Impulso de sistema disctreto 2
```

Observación, la función **c2d** recibe dos valores como argumentos, el primero es la función de transferencia en el dominio de Laplace, y como segundo argumento el tiempo de muestreo, la sintaxis se puede expresar de la siguiente forma

$$G_D = c2d(\text{Funcion de transferencia continua}, \text{Tiempo de muestreo}(T_s)) \quad (41)$$

4. El siguiente ejercicio consiste en realizar un control discreto para un sistema continuo. En el manual se propone una función de transferencia en el dominio de Laplace, para poder realizar esta actividad se propone la siguiente función de transferencia

$$G(s) = \frac{5}{s(s + 15.75)} \quad (42)$$

(a) Defina la estabilidad del sistema. Para la función de transferencia dada en la ecuación (42) el sistema tiene dos polos; el primero en cero y el segundo en -15.75, por lo tanto la estabilidad del sistema es del tipo marginal.

(b) En este punto, se pide que la respuesta escalón del sistema para eso es necesario implementar el siguiente código

```
num=[5];
den=[1 15.75 0];
G=tf(num,den);
step(G)
```

En este punto debe analizar la respuesta en función del tipo de estabilidad del sistema que se definió en el punto anterior.

(c) Cuando se desea cambiar el comportamiento de un sistema se debe implementar un controlador de lazo cerrado, el cual compara la señal de salida del sistema con la señal de referencia y con base en esta señal de error calcula la entrada del sistema para que se obtenga el comportamiento deseado, de acuerdo con el diagrama de bloques mostrado en Figura 34 del manual de laboratorio. El modo más simple de control consiste en el control proporcional, el cual realimenta un término proporcional del error de salida, es decir,

$$u_c = K(r - y) \tag{43}$$

La conexión de la Figura 34 del manual del laboratorio se denomina conexión en retroalimentación negativa, y es posible determinar la función de transferencia correspondiente mediante software especializado, para lo cual se deben definir previamente las funciones de transferencia del controlador, del sistema y del sensor. Considerando la función de transferencia del sistema, la del controlador como $C(s) = K$ y la del sensor $H(s) = 1$, determine la función de transferencia de lazo cerrado $G_c(s)$ correspondiente. ¿Cómo son los polos del sistema? ¿Qué puede decir de la estabilidad del mismo?

La función de transferencia en lazo cerrado se obtiene a través de la siguiente expresión

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G(s)K}{1 + G(s)K} \tag{44}$$

Para la función de transferencia planteada en este ejemplo, la función de transferencia en lazo cerrado es la siguiente

$$G_c(s) = \frac{\frac{5K}{s(s+15.75)}}{1 + \frac{5K}{s(s+15.75)}} \tag{45}$$

$$G_c(s) = \frac{\frac{5K}{s(s+15.75)}}{\frac{s(s+15.75)+5K}{s(s+15.75)}} \tag{46}$$

$$G_c(s) = \frac{5K}{s(s + 15.75) + 5K} \tag{47}$$

$$G_c(s) = \frac{5K}{s^2 + 15.75s + 5s^2 + 15.75s + 5KK} \tag{48}$$

En donde los polos de la función de transferencia en lazo cerrado son las raíces del polinomio $s^2 + 15.75s + 5K$

Observación: Los polos de la función de transferencia en lazo cerrado dependen del valor de K

NOTA: ¿PARA QUE VALORES DE K EL SISTEMA TIENE PROPIEDADES DE ESTABILIDAD?

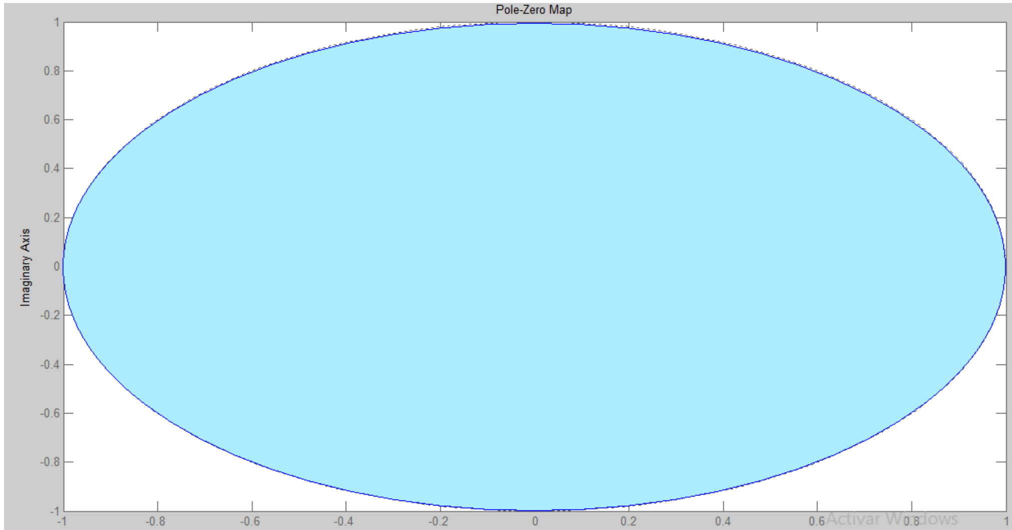

Figure 1: Región de estabilidad de sistemas discretos

(d) La función de transferencia en lazo cerrado es la función dada por la expresión (48), la función de transferencia en lazo abierto es la siguiente

$$G_l(s) = KG(s) \tag{49}$$

$$G_l(s) = \frac{5k}{s(s+15.75)} \tag{50}$$

En este punto pide obtener la función de transferencia en el dominio de Z, tanto para la función de transferencia en lazo cerrado (48) y la función de transferencia en lazo abierto (50). Para realizar este punto es necesario emplear la función $c2d$ como en las secciones anteriores.

NOTA: PARA DETERMINAR LA ESTABILIDAD DE UN SISTEMA DISCRETO RESPRESENTADO POR MEDIO DE FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA SE ENCUENTRA ASOCIADO A LAS RAÍCES DEL POLINOMIO DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA. SI LOS POLOS DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DEL SISTEMA DISCRETO SE ENCUENTRA DENTRO DEL CIRCULO UNITARIO, ES DECIR , SI EL VALOR ABSOLUTO DE LOS POLOS ES MENOR QUE UNO ENTONCES EL SISTEMA DISCRETO ES ESTABLE, SI LOS POLOS SE ENCUENTRAN FUERA DEL CIRCULO UNITARIO, ES DECIR SI EL VALOR ABSOLUTO DE LA PARTE REAL DEL POLO ES MAYOR QUE 1 EL SISTEMA ES INESTABLE

en donde la zona azul es la zona de estabilidad de los sistemas discretos, es decir si los polos se encuentran dentro de la zona azul el sistema es estable, mientras que la zona blanca es la región inestable, como se muestra en la Figura 1.