

Actividad 11: Oscilador de Duffing y Secciones de Poincaré

Ángela Morales Zamudio

Lun-Mié 10-11. Jue 4-6

Mayo, 2019

1 Introducción

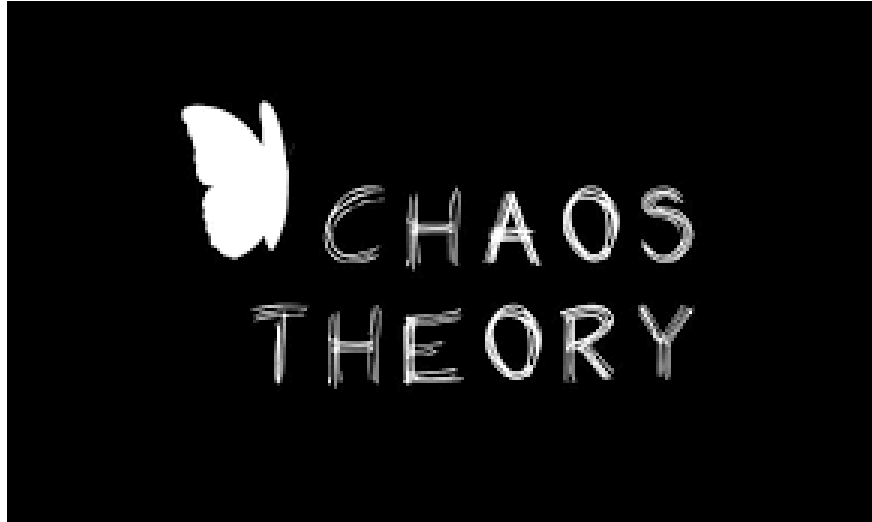
Recordando de la Actividad 10, la ecuación de Duffing describe un oscilador amortiguado con un potencial más complejo que el del oscilador armónico simple. Dicha ecuación representa un oscilador de resorte rígido que no obedece la Ley de Hooke, y es un ejemplo de un sistema dinámico con un comportamiento caótico. En esta actividad, se ahondará acerca de la diversidad de tipos de movimientos que posee el oscilador de Duffing, dada la combinación de fenómenos de oscilación, forzamiento periódico y amortiguamiento.

Se creará una colección de movimientos posibles con sus respectivas gráficas de la solución del oscilador de Duffing $x(t)$ como función del tiempo y su Retrato fase (x, \dot{x}) , que describen los posibles estados del sistema dinámico, dadas las condiciones iniciales $(x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 0)$. Se trabajará con casos de forzamiento de $\gamma = 0.20$ a $\gamma = 0.65$, con valores para los parámetros $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\delta = 0.3$ y $\omega = 1.2$.

2 Teoría del Caos

La Teoría del Caos es la rama de las matemáticas, la física y otras ciencias que trata ciertos tipos de sistemas complejos y sistemas dinámicos no lineales muy sensibles a las variaciones en las condiciones iniciales. Estas pequeñas variaciones pueden implicar un gran cambio o una diferencia notable en el comportamiento futuro del sistema, imposibilitando la predicción a largo plazo (lo que muchos conocen como el Efecto Mariposa). Sin embargo, puede determinarse su comportamiento conociendo sus condiciones iniciales.

Desde mediados de 1600, cuando Newton descubrió las ecuaciones diferenciales, las leyes de movimiento y la gravitación general, el caos se ha vuelto un tema cada vez más amplio, incluyendo también los conocidos fractales. A Newton le llamaba mucho la atención el problema de dos cuerpos interactuando por medio de la gravedad, pero cuando quiso generalizarlo al problema de los tres cuerpos, se dio cuenta de que era un movimiento impredecible. Este



cuestionamiento continuó por generaciones, dándose cuenta los científicos de que dicho problema resultaba prácticamente imposible de resolver.

En 1776, el matemático Pierre Simon de Laplace afirmaba que, si se conocieran las condiciones iniciales de la velocidad y la posición de todas las partículas del universo en un instante, se podría predecir su pasado y futuro, pensamiento que perduró como correcto por más de 100 años. A esto se le conoce como el determinismo laplaciano.

Para finales del siglo *XIX*, Henri Poincaré, un matemático francés, introdujo un nuevo punto de vista al preguntarse si el Sistema Solar sería estable para siempre. Este matemático fue el primero en recurrir a la posibilidad del caos, refiriéndose a que un comportamiento dependiente de sus condiciones iniciales es muy sensible. En 1903 postuló que *"El azar no es más que la medida de la ignorancia del hombre"*, reconociendo la existencia de fenómenos con una dinámica no lineal (pequeñas variaciones en las condiciones iniciales conducían a grandes cambios en el futuro).

3 Resultados y Conclusiones

Por medio de la ecuación de Duffing y con las herramientas de Python para el análisis numérico de este tipo de movimientos, fue posible recrear varias situaciones variando un solo parámetro (γ). Dando los valores de 0.20, 0.30, 0.31, 0.32, 0.40, 0.50 y 0.65, se puede observar una diferencia notable entre cada uno de ellos. También se puede observar que para las variaciones de 0.30 a 0.32, siendo éstas muy pequeñas, se obtienen gráficas muy distintas, mostrando así lo que se denomina caos.

A continuación se muestran las gráficas correspondientes a cada valor de γ .

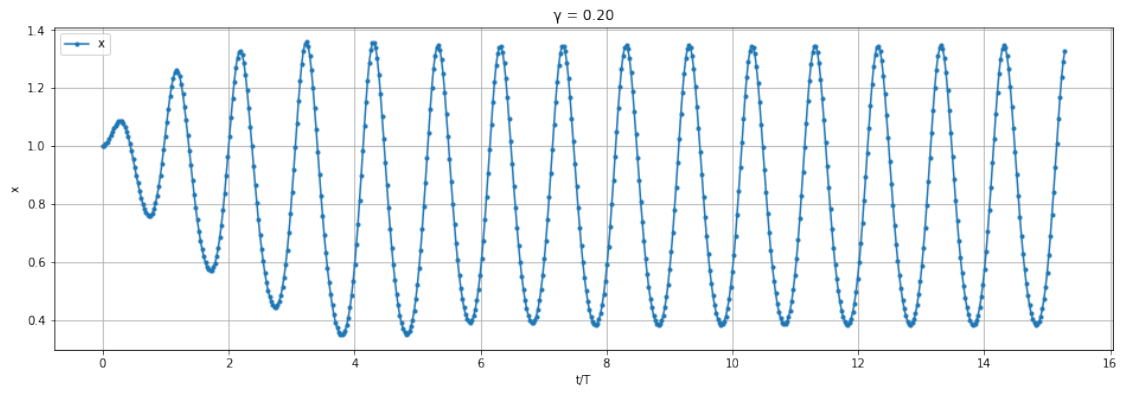


Figure 1: Solución a la Ecuación de Duffing en función del tiempo para $\gamma = 0.20$

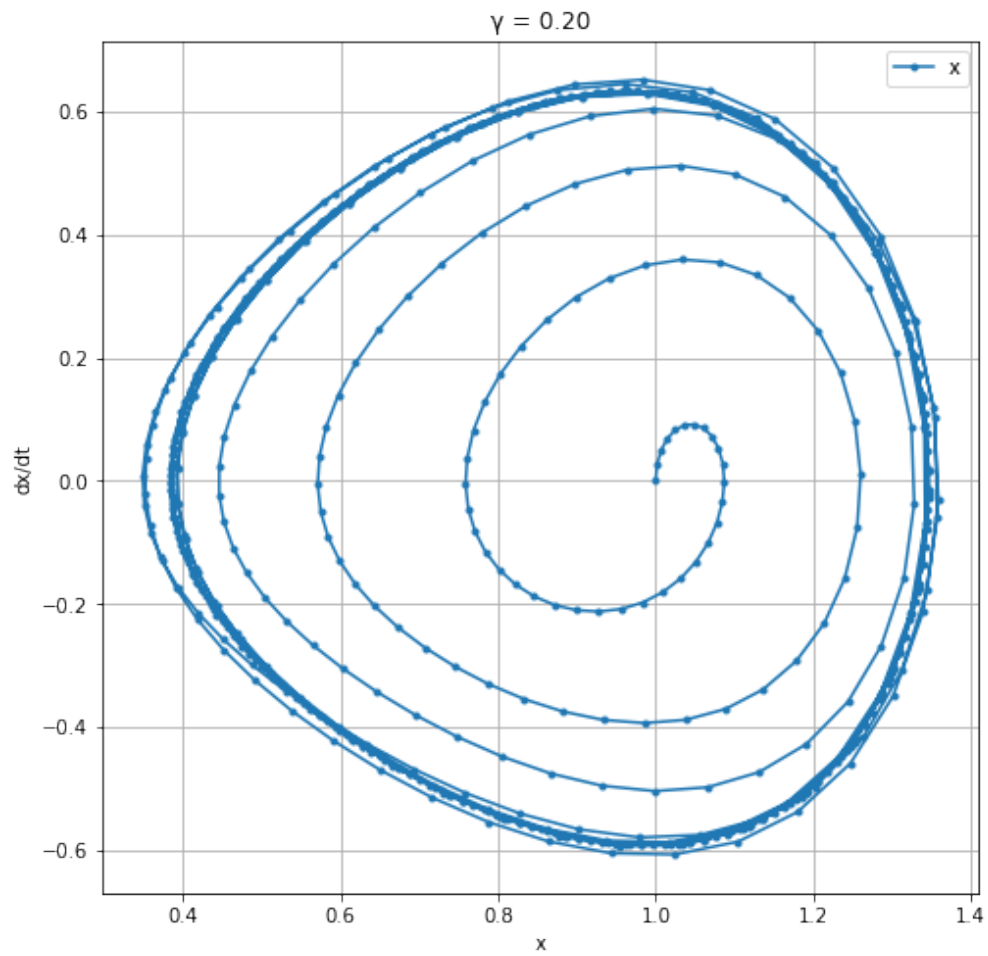


Figure 2: Retrato fase $\gamma = 0.20$

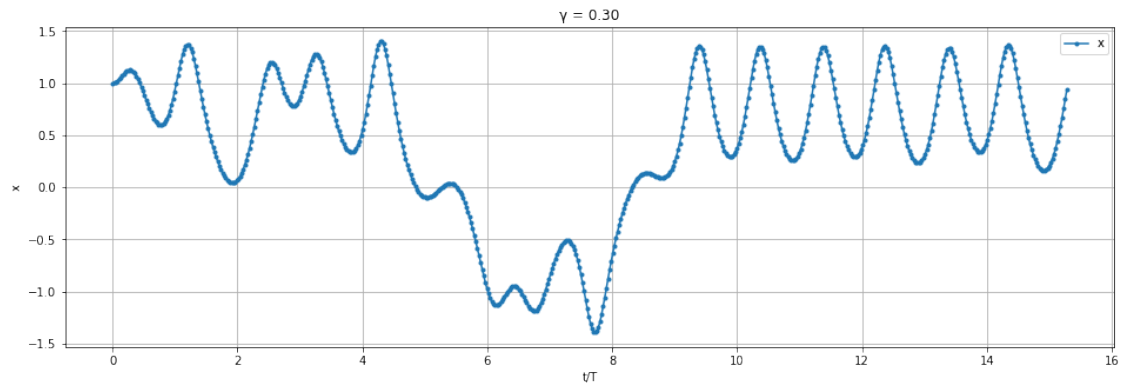


Figure 3: Solución a la Ecuación de Duffing en función del tiempo para $\gamma = 0.30$

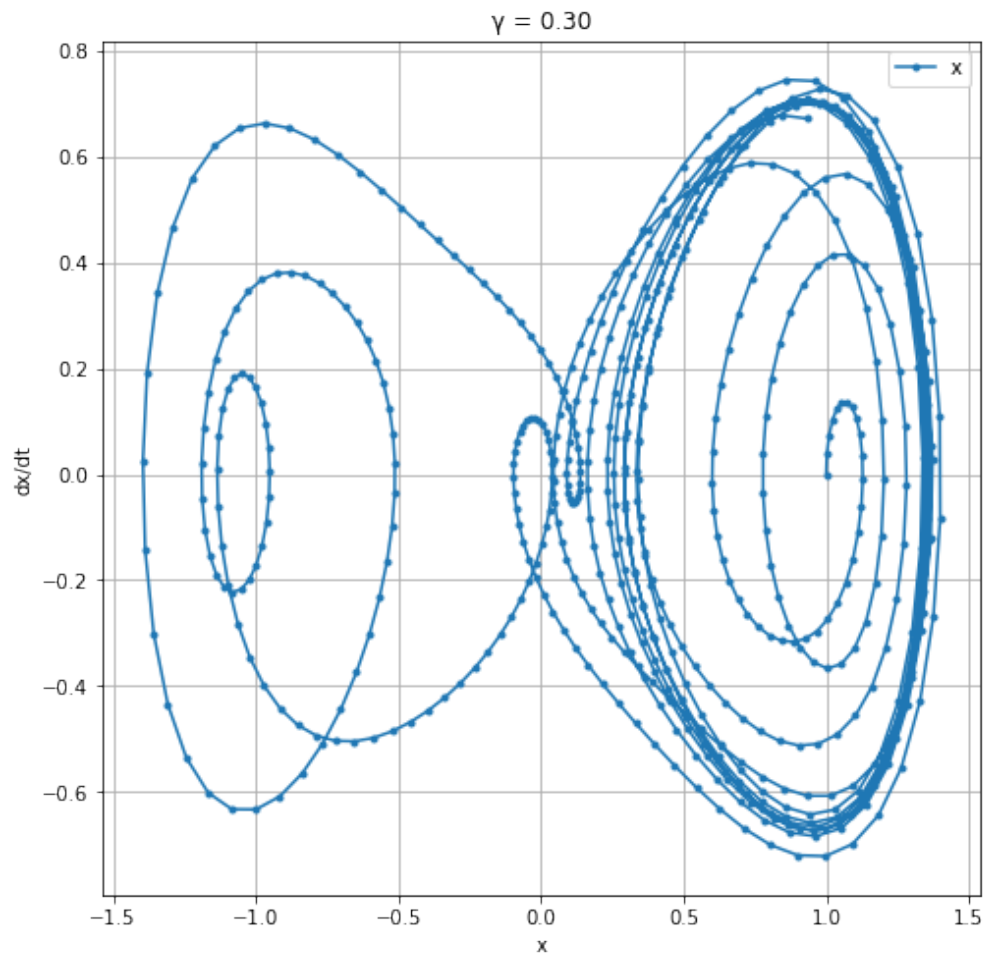


Figure 4: Retrato fase $\gamma = 0.30$

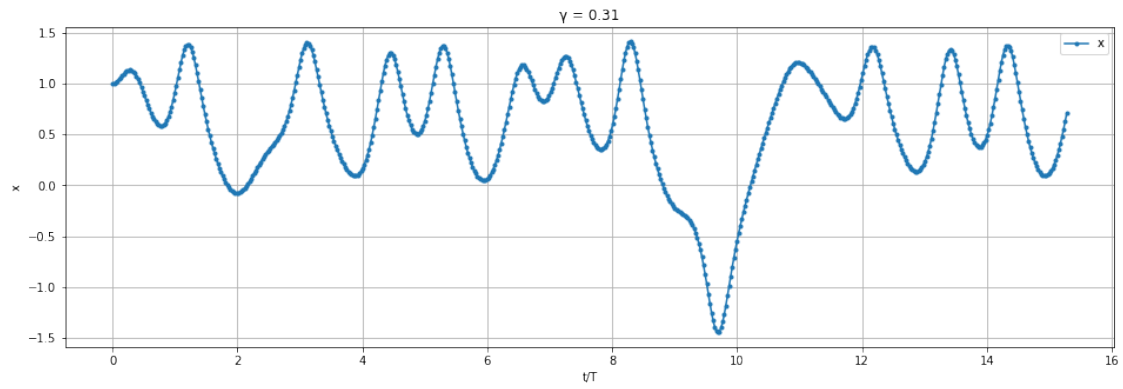


Figure 5: Solución a la Ecuación de Duffing en función del tiempo para $\gamma = 0.31$

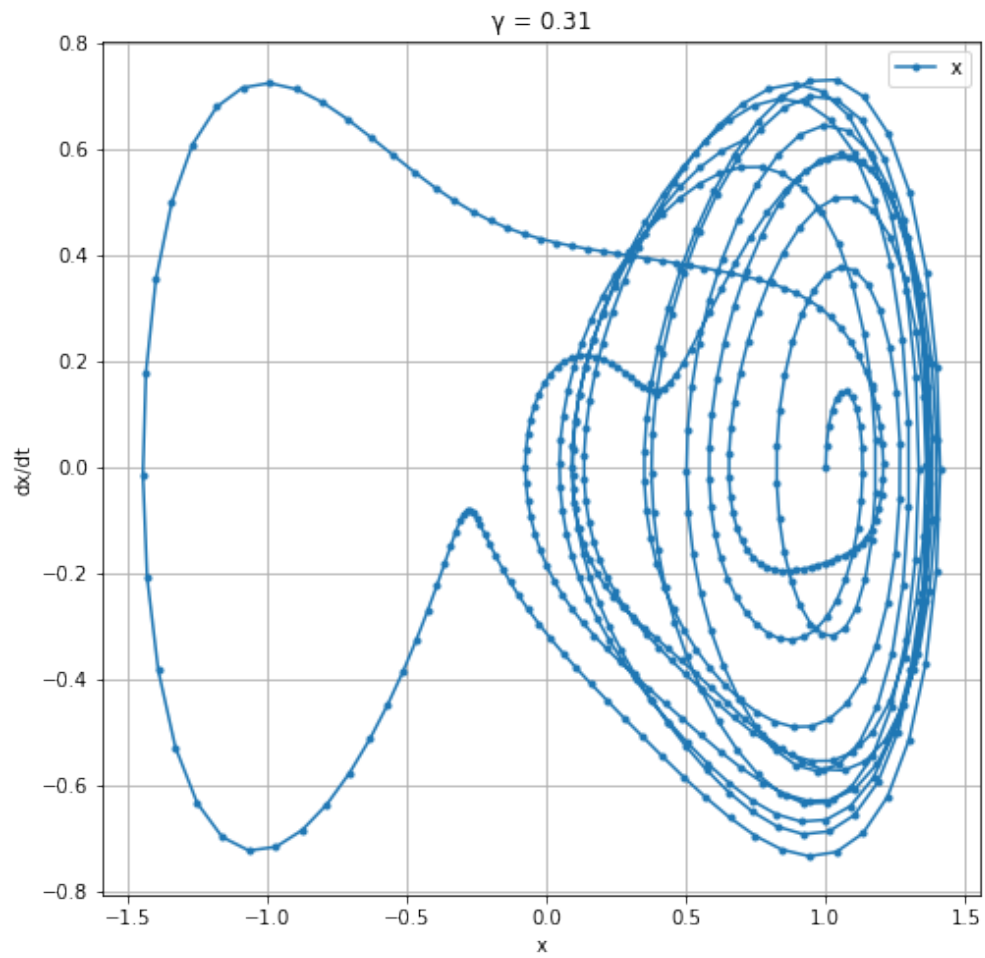


Figure 6: Retrato fase $\gamma = 0.31$

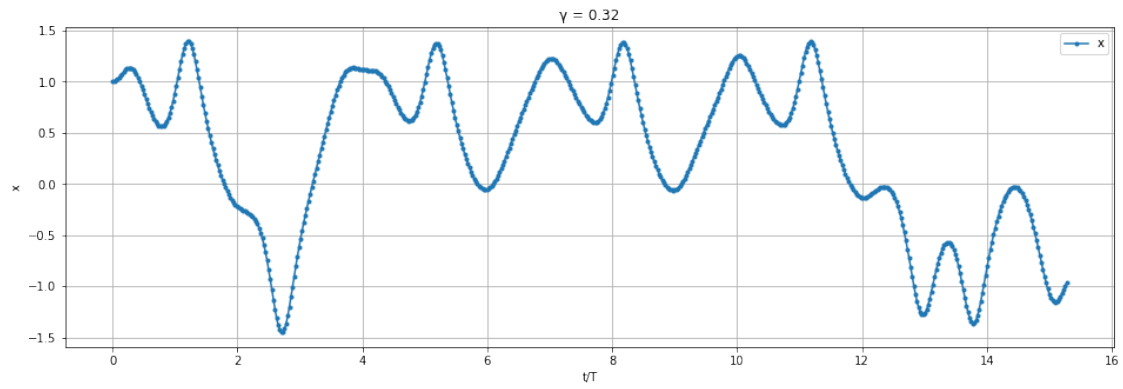


Figure 7: Solución a la Ecuación de Duffing en función del tiempo para $\gamma = 0.32$

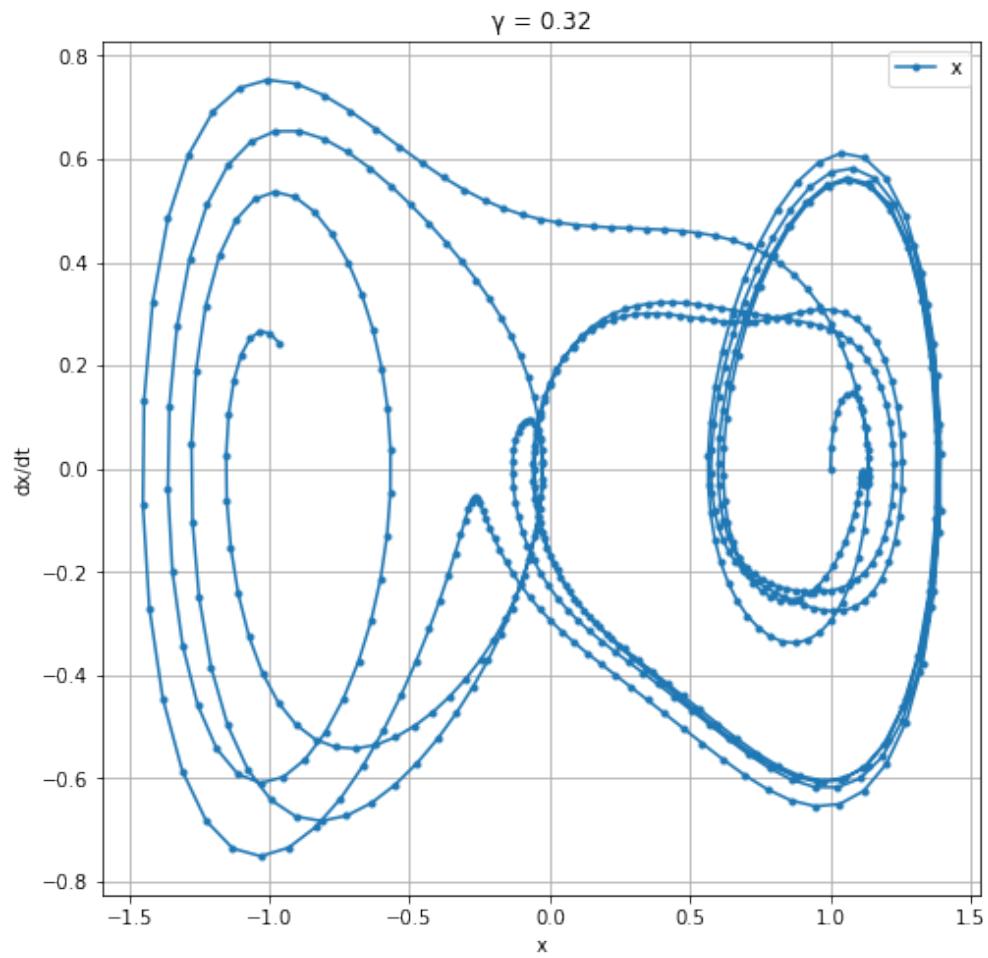


Figure 8: Retrato fase $\gamma = 0.32$

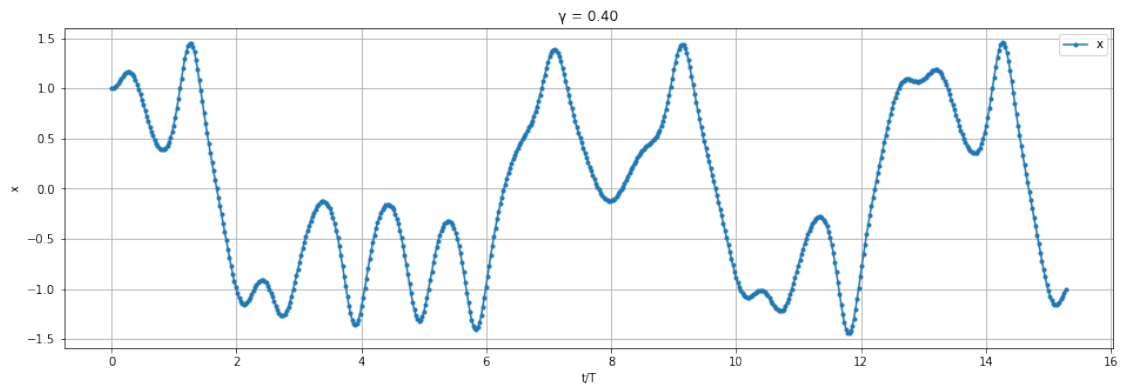


Figure 9: Solución a la Ecuación de Duffing en función del tiempo para $\gamma = 0.40$

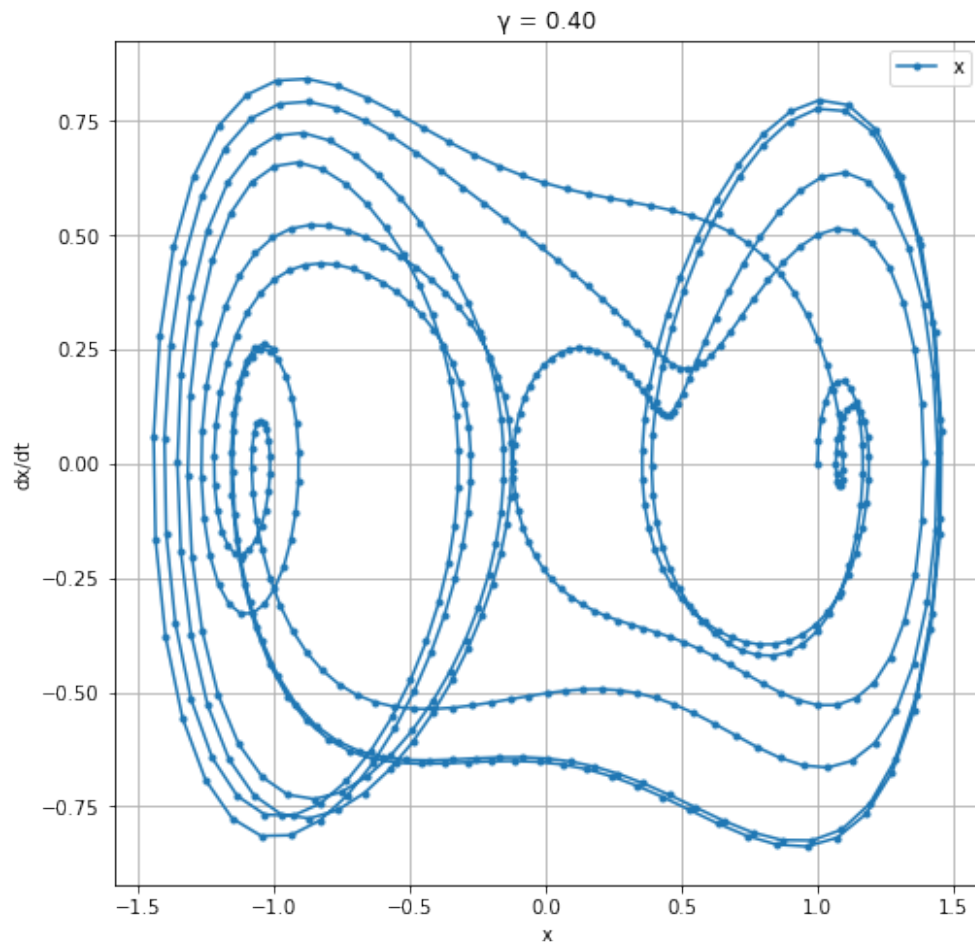


Figure 10: Retrato fase $\gamma = 0.40$

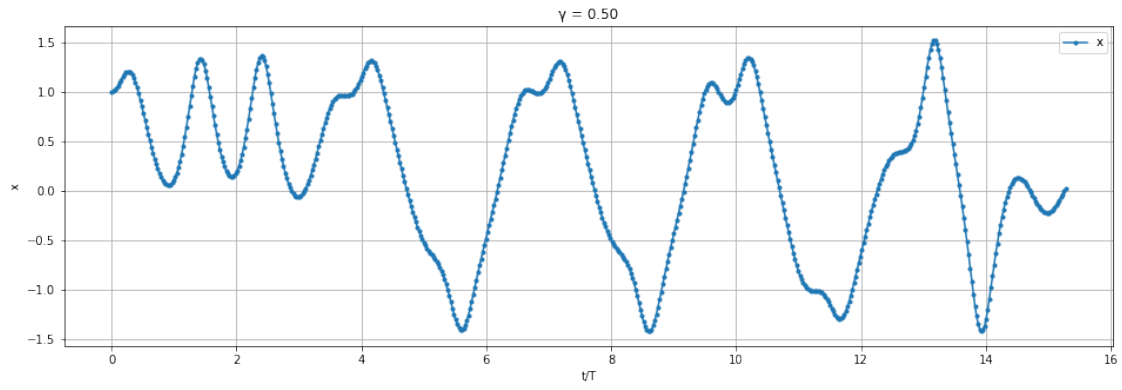


Figure 11: Solución a la Ecuación de Duffing en función del tiempo para $\gamma = 0.50$

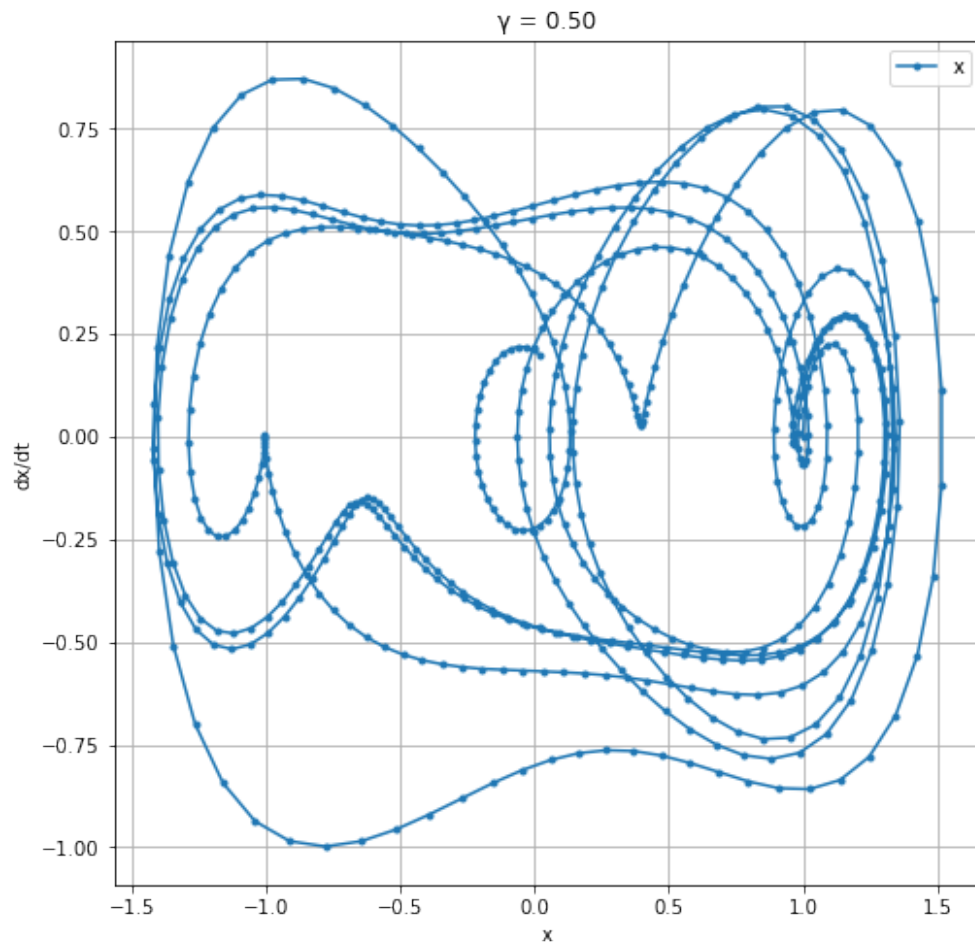


Figure 12: Retrato fase $\gamma = 0.50$

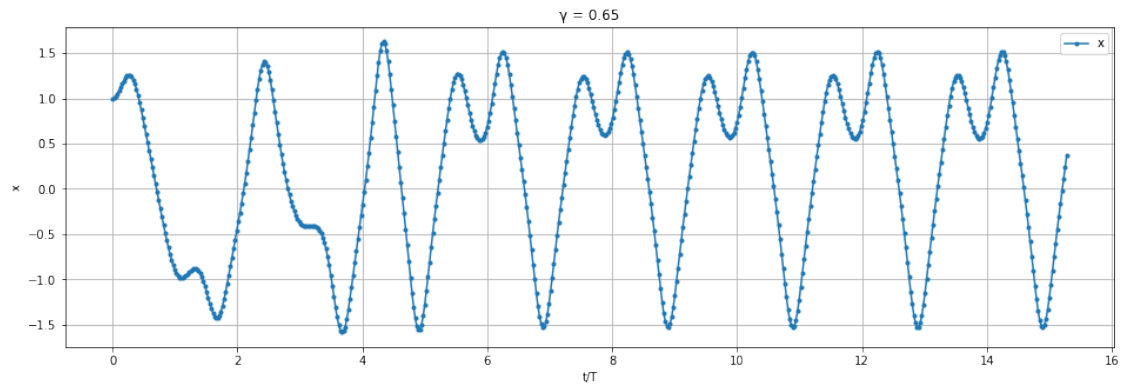


Figure 13: Solución a la Ecuación de Duffing en función del tiempo para $\gamma = 0.65$

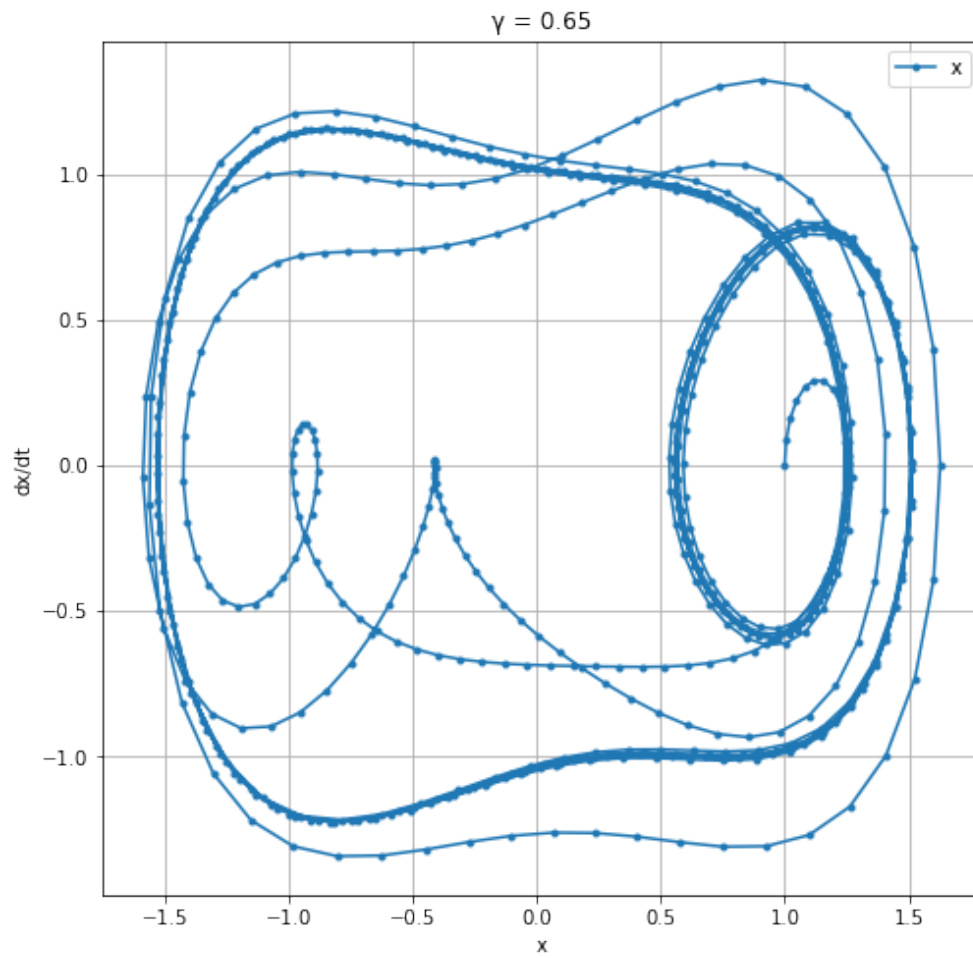


Figure 14: Retrato fase $\gamma = 0.65$