

## 2008 级可计算性与计算复杂性试题

一、(15 分) 简要叙述可计算性与计算复杂性的发展历程并谈谈你对这门课程的认识。

二、(15 分) 判断对错 (对的在括号内打√, 错的在括号内打×, 前 1-5 小题 2 分, 6-10 小题 1 分)。

1. 全函数都是可计算函数 ( );
2. 可计算函数都是原始递归函数 ( );
3. 设谓词  $P(x), Q(x)$  都不是可计算的, 则  $P(x) \vee Q(x)$  也不是可计算的 ( );
4.  $S_2 S_3 S_1 S_0 S_2 \rightarrow [3, 4, 1, 1, 2] = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 11^2$  ( );
5. 评价算法时要考虑时间复杂度, 但可以不考虑空间复杂度 ( );
6. 半可计算性封闭于全称量词 ( );
7. 由初始函数出发, 使用复合、递归和取极小算子得到的函数为原始递归函数 ( );
8. 广义 P-T 图灵机上可以只有  $S_0$  和  $S_1$  两个符号 ( );
9. 半可计算集之集是可数的 ( );
10.  $DTIME(T(n)) \subseteq NTIME(T(n))$  ( )。

三、(20 分) 只用元语言五条基本指令给出计算  $y = [x/n]$  的程序。

四、(10 分) 设  $F(0)=1, F(1)=2, F(n+2)=F(n)+F(n+1)$ , 证明  $F(n)$  是原始递归函数。

提示: 令  $h(n) = \langle F(n), F(n+1) \rangle$ , 先证  $h(n)$  是原始递归的, 其中  $\langle \rangle$  是配对函数。

五、(15 分) 用四元组 TM 给出计算函数  $f(x) = \log_2 x$  的 TM。

六、(15 分) 设语言  $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, \text{并且 } w \text{ 中任何相连的三个字符中必有 } b\}$ , 给出图厄系统  $\pi$  使得  $L = T(\pi) \cap \{a, b\}^*$ 。

七、(10 分) 证明  $\log_2(n+1)$  是空间可构造的。

## 2009 级研究生可计算性与计算复杂性试题

(程序设计或证明题要求写出算法思想并进行必要的注释, 时间 3 个小时)

一、(15 分) 简要叙述可计算性与计算复杂性的发展历程并谈谈你对这门课程的认识。

二、(15 分) 判断对错(对的打√, 错的打×, 前 1-5 小题 1 分, 6-10 小题 2 分)

1 全函数不都是可计算函数;

2 递归函数不都是可计算函数;

3 设谓词  $P(x), Q(x)$  都是可计算的, 则  $P(x) \vee Q(x)$  也是可计算的;

4  $S_2 S_3 S_1 S_0 S_2 \rightarrow [3, 4, 1, 1, 3] = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 11^3$ ;

5 评价算法时要考虑时间复杂度, 但也要考虑空间复杂度;

6 半可计算性封闭于存在量词;

7 设  $S_1$  和  $S_2$  是半可计算集, 则  $S_1 \cap S_2$  是可计算集;

8 广义 P-T 图灵机带上只能有两个符号;

9  $K(x)$  是半可计算的,  $\sim K(x)$  也是半可计算的;

10  $DSPACE(P(n)) \supseteq NSPACE(P(n))$ 。

三、(20 分) 只用  $\pi$  语言五条基本指令给出计算  $y = [\sqrt{x}] + 3$  的程序。

四、(10 分) 设  $g(x)$  是原始递归函数, 又设  $f(0, x) = g(x), f(n+1, x) = f(n, f(n, x))$ , 证明  $f(n, x)$  是原始递归函数。

五、(15 分) 给出计算函数  $f(x) = [x/n]$  的四元组 TM。

六、(15 分) 设  $S$  表示所有能够被 6 整除的二进制数组成的集合, 给出半图厄系统  $\pi$  使得  $T(\pi) \cap \{0, 1\}^* = S$ 。

七、(10 分) 证明  $f(x) = 2^x$  是时间可构造的。

## 2010 级研究生可计算性与计算复杂性试题

(程序设计或证明题要求写出算法思想并进行必要的注释, 时间 3 个小时)

一、(20 分) 简要叙述可计算性与计算复杂性的发展历程, 并谈谈你对这门课程的认识。

二、(10 分) 判断对错(对的打√, 错的打×, 每小题 1 分)

1 递归函数都是可计算函数;

2 全函数不都是可计算函数;

3  $S_2 S_3 S_1 S_0 S_2 \rightarrow [3, 3, 1, 1, 3] = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 11^3$

4 设谓词  $P(x), Q(x)$  都是可计算的, 则  $P(x) \wedge Q(x)$  也是可计算的;

5 半可计算性封闭于全称量词

6 评价算法时要考虑时间复杂度 但也要考虑空间复杂度

7 广义 P-T 图灵机带上一一般有 **两个** 符号

8 设  $S_1$  和  $S_2$  是半可计算集, 则  $S_1 \cup S_2$  是可计算集.

9  $K(x)$  是半可计算的,  $\sim K(x)$  也是半可计算的

10  $DSPACE(P(n)) \supseteq NSPACE(P(n))$

三、(20 分) 只用元语言五条基本指令给出计算  $y = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$  的程序。

四、(10 分) 设  $f(0)=0, f(1)=1, f(2)=2^2, f(3)=3^3=3^{2^2}, \dots$  等, 一般把  $f(n)$  写成高度为  $n$  的一叠  $n$ , 这些  $n$  作为指数。试证明  $f(n)$  是原始递归函数。

五、(15 分) 给出计算整数  $x_1$  和  $x_2$  最大公约数的多带图灵机。

六、(15 分) 设  $S$  表示所有能够被 3 整除的二进制数组成的集合, 请给出半图厄系统  $\pi$  使得  $S = T(\pi) \cap \{0, 1\}^*$

七、(10 分) 设语言  $L = \{wcw^R \mid w \in \{0, 1\}^*, w^R \text{ 是 } w \text{ 的逆字}\}$ , 设计接受  $L$  的图灵机并确定其时间复杂度

## 2011 级研究生可计算性与计算复杂性试题

(程序设计或证明题要求写出算法思想并进行必要的注释, 时间 3 个小时)

一、(20 分) 简要叙述可计算性与计算复杂性的发展历程, 并谈谈你对这门课程的认识。

二、(10 分) 判断对错(对的打√, 错的打×, 每小题 1 分)

1 递归函数都是可计算函数; ( )

2 可计算函数都是原始递归函数; ( )

3  $S_2 S_3 S_1 S_0 S_2 \rightarrow [3, 4, 2, 1, 3] = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \cdot 11^3$ ; ( )

4 设谓词  $P(V, \bar{X})$  是半可计算的, 则  $(\exists V)P(V, \bar{X})$  也是半可计算的; ( )

5 半可计算性封闭于受限全称量词; ( )

6 评价算法时要考虑时间复杂度, 但可以不考虑空间复杂度; ( )

7 广义 P-T 图灵机带上一一般有 两个 符号; ( )

8 设  $S_1$  和  $S_2$  是半可计算集, 则  $S_1 \cap S_2$  是可计算集; ( )

9  $K(x)$  是半可计算的,  $\sim K(x)$  也是半可计算的; ( )

10  $DTIME(T(n)) \subset NTIME(T(n))$ 。 ( )

三、(20 分) 只用元语言五条基本指令给出计算  $y = \lceil \log_2 x \rceil$  的程序。

四、(10 分) 设  $R(x, t)$  是原始递归谓词, 又设  $g(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{t \leq y} R(x, t)$ , 即  $g(x, y)$  是使得  $R(x, t)$  为真的  $t \leq y$  的最大值; 如果没有这样的  $t$  存在, 则  $g(x, y) = 0$ 。试证明  $g(x, y)$  是原始递归的。

五、(15 分) 给出计算整数  $x_1$  和  $x_2$  最大公约数的多带图灵机。

六、(15 分) 设  $S$  表示所有能够被 3 整除并且是奇数的二进制数组成的集合, 请给出半图厄系统  $\pi$  使得  $S = T(\pi) \cap \{0, 1\}^*$ 。

七、(10 分) 设语言  $L = \{wcw^R \mid w \in \{0, 1\}^*, w^R \text{ 是 } w \text{ 的逆字}\}$ , 设计接受  $L$  的图灵机  $M_1$  使其时间复杂度为  $n+1$ ; 再设计接受  $L$  的图灵机  $M_2$  使其空间复杂度是  $\log_2 n$ 。

## 2013 级研究生可计算性与计算复杂性试题

(程序设计题需写出算法思想并进行必要的注释, 否则扣分, 时间 2 个半小时)

- 一、 简要叙述可计算性与计算复杂性理论的发展历程, 并谈谈你对这门课程的认识 (20 分)。
- 二、 设计原语言程序. (限用五条基本指令) 计算  $f(x) = x + \lfloor x/2 \rfloor$  (15 分)。
- 三、 设  $\lambda(x)$  是小于等于  $x$  且与  $x$  互质的正整数的个数, 例如  $\lambda(0)=0$ ,  $\lambda(1)=1$ ,  $\lambda(2)=1$ ,  $\lambda(3)=2$ ,  $\lambda(4)=2$ 。试证  $\lambda(x)$  是原始递归函数 (8 分)。
- 四、 设计计算  $\lfloor \log_3(x+1) \rfloor$  四元组图灵机 (20 分)。
- 五、 请设计半图厄系统  $\pi$ , 使得  $N(\pi) = \{x \mid (\exists n)(x = 2^{3^n})\}$  (12 分)。
- 六、 设计计算整数  $x_1, x_2$  最大公约数的多带图灵机  $M$ , 并确定其时间复杂性 (25 分)。

## 2015 级研究生可计算性与计算复杂性试题

(程序设计题需写出算法思想并进行必要的注释, 否则扣分, 时间 3 小时)

- 一、 简述计算理论发展历程并谈谈你对这门课程可能对你今后研究工作的作用。(20 分)。
- 二、 设计原语言程序计算函数  $f(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor + x$  (15 分)。
- 三、 证明:  $x$  和  $y$  的最大公约数  $\gcd(x, y)$  是原始递归函数 (10 分)。
- 四、 设计计算  $f(x) = x + \lfloor x/2 \rfloor$  的四元组图灵机 (15 分)。
- 五、 试证明  $S_1$  和  $S_2$  是半可计算集, 则  $S_1 \cap S_2, S_1 \cup S_2$  亦是半可计算的。(10 分)
- 六、 请设计半图厄系统  $\pi$ , 使得  $N(\pi) = \{x \mid (\exists n)(x = n \lfloor \log_2 n \rfloor)\}$  (10 分)。
- 七、 设计接受  $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$  的图灵机, 要求满足下述条件:
  - (1) 单带, 要求时间复杂度为  $O(n \log n)$ ;
  - (2) 两带, 时间复杂度为  $O(n)$ ;
  - (3) 离线, 空间复杂度为  $O(\log n)$  (20 分)。

软件学院2017年考题

- 一、简要叙述可计算性与计算复杂性理论的发展历程, 并谈谈现代信息技术对这门课程的影响。(20 分)
- 二、只用元语言五条基本指令给出计算 $y = x_1^{x_2}$ 的程序。(20 分)
- 三、设 $\varphi(x)$  是小于等于  $x$  且与  $x$  互质的整数的个数, 例如  
 $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1, \varphi(2) = 1, \varphi(3) = 2, \varphi(4) = 2$ . 试证 $\varphi(x)$  是原始递归函数。(8 分)
- 四、给出计算函数 $[x_1/x_2] + x_2$ 的四元组图灵机。(15 分)
- 五、给出计算谓词 $\Delta$  特征函数的离线 TM M。(这里输入带上不是  $x$ , 而是  $x$  的二进制表示) (15 分)
- 六、设计计算整数  $x_1$  和  $x_2$  最小公倍数的多带图灵机, 并讨论分析其时间与空间复杂性。(双

1. 请叙述计算理论的发展历史,并谈谈在大数据背景下,可计算性理论和计算复杂性理论的实际意义.
2. 判断对错
  - a) 递归函数都是可计算函数.
  - b) 全函数都是可计算函数
  - c) 两个可计算谓词的合取式是可计算的.
  - d) 两个半可计算的集合的并集是计算的
  - e) 半可计算性封闭于全称量词
  - f) 若  $K(x)$  是半可判定的,则  $\sim K(x)$  也是半可判定的.
  - g)  $DTIME(X) \supseteq NTIME(X)$
  - h) 评价算法不仅需要考虑时间复杂度,也需要考虑空间复杂度
  - i)  $S_2 S_3 S_1 S_0 S_2 \rightarrow [3, 3, 2, 1, 3] = 2^3 3^3 5^2 7^1 11^3$
  - j) 广义 P-T 图灵机上一般只有两个符号.
3. 使用元语言五条基本指令计算  $F(x) = 2[x_1/x_2]$ .
4. 使用四元组图灵机计算  $F(x) = 2x$ ,并说明如果改成计算  $3x$ ,需要如何修改.
5. 构造半图厄系统  $\pi$ ,使得  $N(\pi) = \{2^{3^n}\}$ ,并说明如果把  $n$  改成  $\frac{n}{4}$ ,需要如何修改.
6. 现有函数  $f(x)$ ,他的函数值依次为:0,1,0,2,1,0,3,2,1,0,4,3,2,1,0,...请证明  $f(x)$  是原始递归函数.
7. 证明  $(n+1)^2$  是空间可构造的.