1. **F(x)=”x 的所有因子之和”,X≠0,例如,F(6)=1+2+3+6=12,试证明 F(X)是原始递归函数.**

   F(0)=0;

   F(n)=$\sum_{i=1}^{n} i \times (i|n)$;

2. **F(x)=”所有小于 x 的质数之和”,试证明这个函数是原始递归函数.**

   F(0)=0;

   F(n)=$\sum_{i=1}^{n} Prim(i) \times i$;

3. **如果 p 和 p-2 都为质数,则称 p 和 p-2 为孪生质数,例如 11 和 13.设有函数**

   T(n)=”第 n 个较大的孪生质数”

   T(0)=0,已知有无穷多的孪生质数,请证明 T(n)为原始递归函数.

   T(0)=0;

   T(n+1)=$\min_{t<?}\{t|Prim(t) \wedge Prim(t-2) \wedge (t > T(n))\}$

4. **当某数能写成两个数的平方之和时,则称之为”完全平方数”.现将所有的完全平方数从小到大排列成一个数列,设 U(n)=”第 n 个完全平方数”,试证明 U(n)为原始递归函数.**

   U(0)=0^2+0^2=0;

   U(1)=0^2+1^2=1;

   U(n+1)=$\min_{t<2U(n)+1}\{t|(t > U(n) \wedge (\exists a \le t, \exists b \le t, t = a^2 + b^2)\}$;

5. **将任意两个不同的质数相乘之积按照从小到大排列,令此数列中的第 n 项为 f(n),试证明 f(n)为原始递归函数.**

   f(1)=2×3=6;

   f(n+1)=$\min_{t<[P(n+1)]^2}\{t|(t = a \times b) \wedge (?) \wedge Prim(a) \wedge Prim(b) \wedge (t > f(n))\}$

6. **设π(x)是小于等于 x 的质数的个数,证明π(x)为原始递归函数.**

   π(1)=0;

   π(x+1)=π(x)+Prim(x+1)

   或者: π(x)=$\sum_{i=1}^{x} Prim(i)$

7. **设 h(x)是使 n≤$\sqrt{2}x$<n+1 成立的整数 n,证明 h(x)是原始递归函数.**

   h(x)=$\min_{n \le 2x}\{n|2x^2 < (n+1)^2\}$

8. **设 h(x)=$\{\mathbf{n}|\mathbf{n} \le (\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{2}})\mathbf{x} < \mathbf{n}+\mathbf{1}, \mathbf{n} \in N^*\}$，证明 h(x)是原始递归函数.**

9. 用源语言程序计算 $f(x_1,x_2)=[x_1/x_2]+x_2$,初始时 $X_2\neq0$.

解:

10. 设计半图厄系统π,使得π能接受语言:

$$L=\{\omega|\omega\in(a,b)^*, 且\omega 中任意3个相连的符号中必有b\}$$

11. 设计半图厄系统π,使 N(π)={x|(∃n,x=2^n)}

12. 设计半图厄系统π,使 N(π)={x|(∃n,x=2^{3^n})}

13. (教材 104 页 3 题)设 S 是“所有能被 3 整除的奇数的二进制表示”的集合.给出半图厄系统σ,使得:S=T(σ)$\cap\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^*$,要求用尽量少的产生式.

14. 用四元组图灵机计算 **f(x,y)=[x/y].**

字母表 = {1,B,a,b,c}

状态集 Q = {q0 , q01 , q02 , q1 , q2 , q3 , q4 , q5 , q6 , q7 , q8 , q9 , q10 , q11 , q12 , q}

算法基本思想：扫描除数和被除数，其中在纸带上左端代表 y，右端代表 x。扫描过程是，先扫描除数上的一个 1，在扫描被除数上的一个 1。循环这个过程。当除数被扫描完毕时，证明被除数中包含了一个除数，则 [x/y] 的商加 1。如此循环，当被除数被扫描完毕时，算法结束。

步骤：①初始化：将除数 y 和被除数 x 分别去掉一个 1，并把 y 和 x 的分界处用 a 表示（为了便于区分界限）。

②在 y 的左端，将一个 B 改为 b（最后纸带上 b 的个数即为答案）。接着，将 y 最左端的 1 改为 c，再将 x 最左端的 1 改为 d。循环这个过程。

如果 y 上的 1 全部变为 c，则将 c 全部恢复成 1，并重新进入步骤②。

如果 x 上的 1 全部变为 d，则进入步骤③。

③将纸带上的 a，c，d，1 恢复成 B。将 b 恢复成 1。

q0 1 B q01 q01 B R q02 //前两步完成初始化，去掉 y 上的一个 1。 q02 B B q // y = 0 ， 程序结束 q02 1 R q1 //y 不等于 0 q1 1 R q1 q1 B a q2 //将 x 和 y 的分界改为 a q2 a R q2 q2 1 R q2 q2 B L q3 q3 1 B q4 //指针右移，将 x 最右端的 1 改为 B q4 B L q5 q5 1 L q5 q5 a L q5 q5 B b q6 //指针左移到 y 的左端，将第一个 B 改为 b q6 b R q6 q6 1 c q7 q7 c R q8 q8 1 R q8 q8 a R q9 q9 1 d q10 q9 d R q9 //将 x 段的 1 改为 d	q10 d L q10 q10 a L q10 q10 1 L q10 q10 c R q6 //指针左移，找到 y 段的左边第一个 1 q6 a R q5 q5 c 1 q5 q5 b L q5 //y 段扫描完毕，把 y 段的 c 恢复成 1，同时在纸带的左端加一个 b q9 B L q11 q11 d B q12 q11 1 B q12 q11 c B q12 q11 a B q12 q12 B L q11 q11 b 1 q12 q12 1 L q11 q11 B R q //将纸带上的 a，c，d 恢复成 B，将 b 恢复成 1

15. 用四元组计算 $f(x) = [\log_3 x]$

字母表 Σ={1，B，a，b，c，d}

状态集 Q={q1，q2，q3，q4，q41，q5，q6，q7，q}

算法基本思想：

带上 1 的个数比 x 值多 1, 应该先抹去一个 1。十进制数 x 的三进制位数为 $[\log_3 x]+1$。用 a、b、c 分别表示三进制的 0、1、2.。在左端多 0 开始，做加 1 的三进制加法，高位在右，低位在左，每做一次三进制加法，就用一个 d 替换一个 1。当所有 1 被替换时，带上 a、b、c 的总数就是 $[\log_3 x]+1$，最后把 d 改为 B，把 a、b、c 改为 1。

q_1 1 a q_4 从左开始，写一位三进制 0 a, 抹去一个 1 q_4 a R q_4 q_4 b R q_4 q_4 c R q_4 q_4 d R q_4 q_4 1 d q_2 右移至 1 改为 d q_4 B L q_{41} q_{41} a R q_4 x=0 情况，永不停机 q_2 c L q_2 q_2 b L q_2 q_2 a L q_2 q_2 d L q_2 q_2 B R q_3 左移至最左端，将改为 d 的 1 加到三进制上 q_3 a b q_4 最低位为 0，改为 1 q_3 b c q_4 最低位为 1，改为 2 q_3 c a q_5 最低位为 2, 则向右进位 q_5 a R q_3 q_3 d b q_4 现有位数不够，则最高位进位 q_4 B L q_6 q_6 d B q_7 q_7 B L q_6 q_6 c 1 q_6 q_6 b 1 q_6 q_6 a 1 q_6 q_6 1 L q_6	q_6 B R q d 改为 B，a、b 和 c 改为 1

16. 设计五元组图灵机,计算谓词 P(x,y)⇔(3x=2y)的特征函数.

解：令谓词 P 的特征函数为 $\delta_P(x,y)=\begin{cases}0,\frac{x}{2}=\frac{y}{3}\\1,\frac{x}{2}\neq\frac{y}{3}\end{cases}$

方法 1:

1. $q_{1}1aLq_{2}$//把 x 串最左边的“1”改写为“a”
2. $q_{2}11Rq_{2}$//指针右移
3. $q_{2}BBRq_{3}$//指针移到 x 串与 y 串交界
4. $q_{3}11Rq_{3}$//指针右移
5. $q_{3}BbLq_{4}$//指针移到 y 串最右端，将"B"改为"b"
6. $q_{4}11Lq_{4}$
7. $q_{4}BBLq_{5}$//指针移到 x 串尾部
8. $q_{5}1BLq_{6}$
9. $q_{6}1BLq_{7}$
10. $q_{6}aBRq'_{7}$
11. $q'_{7}BBR\,q'_{7}$
12. $q'_{7}1BR\,q'_{8}$
13. $q'_{8}b1Rq$//情况 1：x 串消去一个“1”后遇到“a”右移到 y 串消去一个“1”后遇到“b”，则接受停机
14. $q'_{8}1BR\,q'_{9}$
15. $q'_{9}1BR\,q'_{9}$
16. $q'_{9}b1R\,q'$//情况 2：x 串消去一个“1”后遇到“a”右移到 y 串消去一个“1”后未遇到“b”，则不接受停机
17. $q'B1Rq$//不接受状态时多写一个“1”
18. $q_{7}11Rq_{9}$//x 串消去两个“1”后遇到 1
19. $q_{7}aBRq_{8}$//X 串消去两个“1”遇到"a"
20. $q_{8}BBRq''_{8}$
21. $q''_{8}1BR\,q''_{8}$
22. $q''_{8}b1Rq'$//情况 3：x 串消去 2 个“1”后遇到“a”，不接受停机
23. $q_{9}BBRq_{9}$
24. $q_{9}1BRq_{10}$
25. $q_{10}1BRq_{11}$
26. $q_{10}b1Rq'$//情况 4：x 串消去 2 个“1”后遇到“1”，y 串消去一个“1”后遇到“b”，则不接受停机
27. $q_{11}1BRq_{12}$
28. $q_{11}b1Rq'$//情况 5：x 串消去 2 个“1”后遇到“1”，y 串消去 2 个“1”后遇到“b”，则不接受停机
29. $q_{12}11Lq_{13}$
30. $q_{13}BBLq_{13}$
31. $q_{13}11Rq_{4}$//情况 6：x 串消去 2 个"1"后遇到“1”，y 串消去 3 个"1"后遇到"1",循环
32. $q_{12}b1Rq'$//情况 7：x 串消去 2 个“1”后遇到“1”，y 串消去 3 个“1”后遇到“b”，则不接受停机

结束情况共为 7 种，一种接受停机，6 种不接受停机。

方法 2:算法基本思想是:

① 把 x 最左侧的"1"改为 a,y 最右侧的"1"改为 b;

② 从 x 和 y 中间的 B 开始扫描，每遇到表示 x 的“1”段减去两个，遇到表示 y 的“1”段减去 3 个；

③ 重复 2，直到如果某次扫描 x 段遇到 a 且扫描 y 段遇到 b，在带尾 b 右侧写一个“1”；否则在带上写两个" 1 ".

1. q1 1 a R q2//把 x 最左侧的 1 改成 a
2. q2 1 1 R q2
3. q2 B B R q3
4. q3 1 1 R q3
5. q3 B B L q4
6. q4 1 b L q5//把 y 最右侧的 1 改成 b
7. q5 1 1 L q5
8. q5 B B L q6
//越过 x 和 y 中间的 B 进入 q6
9. q6 B B L q6
10. q6 1 B L q6’
11. q6’ 1 B R q7//删去 x 段两个 1
12. q7 B B R q7
13. q7 1 B R q8
14. q8 1 B R q9
15. q9 1 B L q6//删去 y 段 3 个 1
16. q6 a a R q6’//x 段已经没有 1
17. q6’ B B R q6’
18. q6’ 1 1 R q6’’
//y 段还有 1,非接受状态 q6’’
19. q6’’ 1 1 R q6’’
20. q6’’ b b R q6’’
21. q6’’ B 1 R q7’’
22. q7’’ B 1 R q//非接收停机
23. q6’ b b R q6’’’
//y 段也无 1,谓词为真,接受状态 q6’’’
24. q6’’’ B 1 R q//接受停机
25. q6’ a a R q6’’//x 不是 2 的倍数,进入 q6’’
26. q7 b b R q6’’
27. q8 b b R q6’’
28. q9 b b R q6’’//y 不是 3 的倍数,进入 q6’’	

17. (教材 113 页例 7.3.1)语言$\{\omega\omega^R|\omega在\{0,1\}^*中\}$能够被一个单带图灵机识别,设计这个图灵机.

(这道例题的意义在于他有一个画出来的图灵机)

设计思路:将带头在输入上移动,从两端检查符号,并比较他们.

18. 设计四元组图灵机计算函数 f(x,y)=?

解：算法思想是 x=0 时直接结束，x≠0 时进入主计算过程。

1 带上 y 在左，x 在右，去掉 y 段的最左侧一个“1”和 x 段最右侧的一个“1”，并把 x,y 分界的 B 改为 b；

2 在 y 段最左端写一个 c，把 y 段的“1”逐步改成 a，把 x 段“1”逐步改成为 d，如果 y 段扫描完毕把 a 全部改回为 1，转重复上述过程 2，如果 x 段扫描完毕，转 3；

3 把带上 a,1,b,d 改为 B,c 改为 1。

1. q1 1 B q2 //去掉 y 最左侧一个”1”
2. q2 B R q3
3. q3 1 R q5
4. q3 B L q4
5. q4 B R q3//4 和 5:y=0,不停机
6. q5 1 R q5
7. q5 B b q6//x 和 y 的分界改为 b
8. q6 b R q6
9. q6 1 R q6
10. q6 B L q7
11. q7 1 B q8//去掉 x 最右侧的一个”1”
12. q8 B L q9
13. q9 1 L q9’
14. q9 B L q//x=0
15. q9’ 1 L q9’
16. q9’ b L q9’
17. q9’ B c q10//在最左端写一个”c”
18. q 1 B q’
19. q’ B L q
20. q B 1 q’’//在带上留下一个”1”,停机
21. q10 c R q10
22. q10 1 a q11//把 y 段的一个”1”改成”a”
23. q11 a R q11
24. q11 1 R q11
25. q11 b R q12
26. q12 d R q12//23-26:指针右移到 x 段
27. q12 1 d q13//把 x 段的一个”1”改为”d”
28. q13 d L q13
29. q13 b L q13
30. q13 1 L q13
31. q13 a R q10//28-31:左移到 y 段”1”处
32. q10 b L q9’
33. q9’ a 1 q9’
34. q9’ c L q9’
    //32-34:y 扫描完,把”a”全部改回”1”,在带的最左端写一个”c”
35. q10 B L q14
36. q14 d B q15
37. q14 b B q15
38. q14 1 B q15
39. q14 a B q15
40. q15 B L q14
41. q14 c 1 q16
42. q16 1 L q14
    //35-42:x 扫描完,把带上 a,1,b,d 改成 B,把 c 改成”1”
43. q14 B R q’’//停机

19. **利用多带图灵机计算数列 1,2,4,7,11,⋯,$\frac{n(n-1)}{2}+1$的前 n 项和,并分析时间复杂度.**

思想：首先分析数列 1、2、4、7、11·n/2(n-1)+1 则第 n 项与 n-1 项的差为 d=n-1.
具体算法如下：
1、首先将带 1 中的第一个 1 存放在带 2 上，同时将带 3 也存一个 1.将带 1 的第一个 1 改为 a，并将带 1 和带 3 的带头移动到下一格进行下一步。(修改的地方是让带 3 也向右移动一格用于判断带 1 中的 1 是否全部改为 a)
2、判断带 1 的 1 是否全部修改为 a，若是则结束程序。若不是带 1 的带头左移 1 格，进入下一步。
3、然后每次循环（第 i 个数， i>=2）做如下工作

  3.1、将带 2 和带 1 的指针左移至带头，需要 0.5(i-1)(i-2)+1 步
  3.2、将带 2 上的“1”复制到带 3 上，需要 0.5(i-1)(i-2)+1 步
  3.3、带 2 指针到带尾后，扫描带 1 上的 a，同时在带 2,3 上写 1，i-1 步
  3.4、将带 1 上的 a 右侧第一个“1”改为 a，1 步
  3.5、判断带 1 上的 1 是否全部变为 a， 1 步（添加一步判断）

一直循环到带 1 上无 1 为止
总共需要：2*0.5*(i-1)(i-2)+2+i-1+1+1 = $(i-1)^2$+4
时间复杂度$\sum_{i=2}^{n}((i-1)^2+4)$

1.$\delta\left(q_0\begin{bmatrix}1\\B\\B\end{bmatrix}\right)=(q_4\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R\\R\\R\end{bmatrix})$//q4 用于判断带 1 中的 1 是否全部变为 a(原文不清晰)

2.$\delta\left(q_4\begin{bmatrix}1\\B\\B\end{bmatrix}\right)=(q_1\begin{bmatrix}1\\B\\B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L\\L\\D\end{bmatrix})$

3.$\delta\left(q_4\begin{bmatrix}B\\B\\B\end{bmatrix}\right)=(q\begin{bmatrix}B\\B\\B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D\\D\\D\end{bmatrix})$//当带 1 中的 1 全变为 a 时退出

4.$\delta\left(q_1\begin{bmatrix}a\\1\\B\end{bmatrix}\right)=(q_1\begin{bmatrix}a\\1\\B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L\\L\\D\end{bmatrix})$//带 1 和带 2 左移到带头

5.$\delta\left(q_1\begin{bmatrix}B\\1\\B\end{bmatrix}\right)=\left(q_1\begin{bmatrix}B\\1\\B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D\\L\\D\end{bmatrix}\right)$//带 1 左移到带头时,带 2 继续左移至带头

6.$\delta\left(q_1\begin{bmatrix}B\\B\\B\end{bmatrix}\right)=(q_2\begin{bmatrix}B\\B\\B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D\\R\\D\end{bmatrix})$//带 1 带 2 均左移到带头

7.$\delta\left(q_2\begin{bmatrix}B\\1\\B\end{bmatrix}\right)=(q_2\begin{bmatrix}B\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D\\R\\R\end{bmatrix})$//带 2 的值复制到带 3 中

8.$\delta\left(q_2\begin{bmatrix}B\\B\\B\end{bmatrix}\right)=(q_3\begin{bmatrix}B\\B\\B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R\\D\\D\end{bmatrix})$

9.$\delta\left(q_3\begin{bmatrix}a\\B\\B\end{bmatrix}\right)=(q_3\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R\\R\\R\end{bmatrix})$//把带 1 中 a 的个数复制带 2 和带 3 上

10.$\delta\left(q_3\begin{bmatrix}1\\B\\B\end{bmatrix}\right)=(q_4\begin{bmatrix}a\\B\\B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R\\R\\R\end{bmatrix})$//一次循环完,进入下一次循环

(原题中的算法思想是第 n 项的值加到带 3 中之后才会去修改带 1 的值，这样当程序结束的时候会多加一项的值（即当求前 n 项的和的时候结果输出的是前 n+1 项的值）)

20. 用离线图灵机证明$[\sqrt{n}]+2$是空间可构造的,该离线图灵机只有一条存储带,输入和存储带都是单道的,存储带上可用的符号只有 B 和 1.

解法 1:首先分析一下

输入带　　　　　　$1\to4\to9\to16\to25\to\ldots\to m^2\to(m+1)^2$

存储带(工作带)　　$1\to2\to3\to4\to5\to\ldots\to m\to m+1$

m^2 与$(m+1)^2$之间的数开根号取整即为 m。

算法思想：存储带上每增加一个 1，在输入带上扫描 2m+1(m 为存储带上 1 的个数）的 1，输入带扫描完，存储带上为[根号n]。再补上要加的二个 1 正好是答案，注意为了简化问题规定输入带上正好是 n 个 1。

1. $\delta(q_0,\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix})=(q_1,\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}R\\R\end{bmatrix})$	9. $\delta(q_2,\begin{bmatrix}\$\\1\end{bmatrix})=(q',\begin{bmatrix}\$\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\D\end{bmatrix})$
//在存储带上加“1”	//说明输入带上剩余“1”的个数$<m$
2. $\delta(q_0,\begin{bmatrix}\$\\B\end{bmatrix})=(q',\begin{bmatrix}\$\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\D\end{bmatrix})$	10. $\delta(q_2,\begin{bmatrix}\$\\\Phi\end{bmatrix})=(q',\begin{bmatrix}\$\\\Phi\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\D\end{bmatrix})$
//$x=0$，此时存储带上为 0，无需改动	//说明输入带上剩余“1”的个数$=m$
3. $\delta(q_1,\begin{bmatrix}\$\\B\end{bmatrix})=(q',\begin{bmatrix}\$\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\D\end{bmatrix})$	11. $\delta(q_3,\begin{bmatrix}\$\\1\end{bmatrix})=(q',\begin{bmatrix}\$\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\D\end{bmatrix})$
//$x=1$，此时存储带上为 1，无需改动	//说明$m+1<$输入带上剩余“1”的个数$<2m+1$
4. $\delta(q_1,\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix})=(q_2,\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\L\end{bmatrix})$	12. $\delta(q_3,\begin{bmatrix}\$\\B\end{bmatrix})=(q'',\begin{bmatrix}\$\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\D\end{bmatrix})$
5. $\delta(q_2,\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix})=(q_2,\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}R\\L\end{bmatrix})$	//说明输入带上剩余“1”的个数$=2m+1$
//5-7 步为在输入带上扫描$2m+1$个“1”（其中m为存储带上“1”的个数）	13. $\delta(q'',\begin{bmatrix}\$\\B\end{bmatrix})=(q',\begin{bmatrix}\$\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\D\end{bmatrix})$
	//输入带剩余“1”的个数$=2m+1$,对存储带加“1”
6. $\delta(q_2,\begin{bmatrix}1\\\Phi\end{bmatrix})=(q_3,\begin{bmatrix}1\\\Phi\end{bmatrix},\begin{bmatrix}R\\R\end{bmatrix})$	14. $\delta(q',\begin{bmatrix}\$\\1\end{bmatrix})=(q_5,\begin{bmatrix}\$\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\R\end{bmatrix})$
7. $\delta(q_3,\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix})=(q_3,\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}R\\R\end{bmatrix})$	15. $\delta(q_5,\begin{bmatrix}\$\\B\end{bmatrix})=(q_6,\begin{bmatrix}\$\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\R\end{bmatrix})$
8. $\delta(q_3,\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix})=(q_2,\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\D\end{bmatrix})$	//15-16 为向存储带进行加“2”操作
//继续下一次在输入带上的$2(m+1)+1$次向右扫描	16. $\delta(q_6,\begin{bmatrix}\$\\B\end{bmatrix})=(q,\begin{bmatrix}\$\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\D\end{bmatrix})$ //停机

解法 2:

设$y=\left[\sqrt{x}\right]+2$,则$(y-2)^2=x$,设 $z=y-2$,则 $z^2=x$,$z_{m+1}^2-z_m^2=(m+1)^2-m^2=2m+1$,

故先计算$\max\limits_m\{m|m^2\le x\le(m+1)^2\}$,再加 2,即得到所求.

初始化时,在存储带上放置 1,存储带上保存 m 的值,此时存储带上读写头在最右侧,输入带读写头在最左侧.

① 输入带读写头向右移动,同时存储带读写头向左移动,直到存储带到达最左侧,执行"+m"操作.若输入带先遇到"$",即不够减,m 值已确定,否则执行②

② 输入带与存储带读写头同时向右移动,直到存储带碰到最右侧第一个 B,执行第 2 个"+m"操作,若输入带不够,此时 m 已经确定,否则执行③;

③ 输入带向右移动一位,若没有"1",则 m 已经确定,否则执行④;

④ M 值增加 1,转向①.

⑤ 经过前四步,已经确定下 m 的值,再加上 2,即为所求.

空间复杂度:S(n)=O($\sqrt{n}$)

1. $\delta\left(q_0\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix}\right)=(q_1\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R\\0\end{bmatrix})$//将 x 的带上表示去掉一个 1,得到真正的 x
2. $\delta\left(q_1\begin{bmatrix}\$\\B\end{bmatrix}\right)=(q'_1\begin{bmatrix}\$\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\R\end{bmatrix})$//求[$\sqrt{x}$]的带上表示
3. .$\delta\left(q'_1\begin{bmatrix}\$\\B\end{bmatrix}\right)=(q'_2\begin{bmatrix}\$\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D\\R\end{bmatrix})$//q1'->q2.->q 得到[根号 x]+2 的带上表示,q 为终止状态
4. .$\delta\left(q'_2\begin{bmatrix}\$\\B\end{bmatrix}\right)=(q\ \begin{bmatrix}\$\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\D\end{bmatrix})$
5. .$\delta\left(q_1\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix}\right)=(q_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R\\R\end{bmatrix})$
6. .$\delta\left(q_2\begin{bmatrix}\$\\B\end{bmatrix}\right)=(q'_1\begin{bmatrix}\$\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D\\R\end{bmatrix})$//正好开平方的情况
7. .$\delta\left(q_2\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix}\right)=(q_3\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D\\L\end{bmatrix})$
8. .$\delta\left(q_3\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=(q_3\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R\\L\end{bmatrix})$//加第一个 m
9. .$\delta\left(q_3\begin{bmatrix}1\\\emptyset\end{bmatrix}\right)=(q_4\begin{bmatrix}1\\\emptyset\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D\\R\end{bmatrix})$//存储带已经碰到头,返回
10. .$\delta\left(q_3\begin{bmatrix}\$\\1\end{bmatrix}\right)=(q_4\begin{bmatrix}\$\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D\\R\end{bmatrix})$ //10 和 11 处理输入带已不够的情况
11. .$\delta\left(q_3\begin{bmatrix}\$\\\emptyset\end{bmatrix}\right)=(q_4\begin{bmatrix}\$\\\emptyset\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D\\R\end{bmatrix})$
12. .$\delta\left(q_4\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=(q_4\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R\\R\end{bmatrix})$//加第二个 m
13. .$\delta\left(q_4\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix}\right)=(q_5\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R\\D\end{bmatrix})$//加一个"1"
14. .$\delta\left(q_4\begin{bmatrix}\$\\B\end{bmatrix}\right)=(q'_1\begin{bmatrix}\$\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D\\R\end{bmatrix})$//14,15,16 处理输入带不够的情况
15. .$\delta\left(q_4\begin{bmatrix}\$\\1\end{bmatrix}\right)=(q_4\begin{bmatrix}\$\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D\\R\end{bmatrix})$//将存储带读写头移至最右侧
16. .$\delta\left(q_5\begin{bmatrix}\$\\B\end{bmatrix}\right)=(q'_1\begin{bmatrix}\$\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D\\R\end{bmatrix})$
17. .$\delta\left(q_5\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix}\right)=(q_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R\\R\end{bmatrix})$//m 值加 1,继续循环

注：原答案考虑的情况不完全，而且本算法由于采取了往复扫描存储带，所以时间所用较少，但是并没有降低时间复杂度。

21. 证明$(n+1)^2$是时间可构造的.

1. $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{q0}, \begin{bmatrix} 1 \\ B \end{bmatrix}) = (\mathbf{q1}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} R \\ R \end{bmatrix})$
2. $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{q1}, \begin{bmatrix} 1 \\ B \end{bmatrix}) = (\mathbf{q1}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} R \\ R \end{bmatrix})$
3. $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{q1}, \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}) = (\mathbf{q2}, \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} L \\ L \end{bmatrix})$
4. $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{q2}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = (\mathbf{q2}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D \\ L \end{bmatrix})$
5. $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{q2}, \begin{bmatrix} 1 \\ B \end{bmatrix}) = (\mathbf{q3}, \begin{bmatrix} 1 \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} L \\ R \end{bmatrix})$
6. $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{q3}, \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix}) = (\mathbf{q}, \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D \\ D \end{bmatrix})$
7. $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{q3}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = (\mathbf{q4}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D \\ D \end{bmatrix})$
8. $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{q4}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = (\mathbf{q4}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D \\ R \end{bmatrix})$
9. $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{q4}, \begin{bmatrix} 1 \\ B \end{bmatrix}) = (\mathbf{q5}, \begin{bmatrix} 1 \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} L \\ L \end{bmatrix})$
10. $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{q5}, \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix}) = (\mathbf{q}, \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D \\ D \end{bmatrix})$
11. $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{q5}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = (\mathbf{q2}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D \\ D \end{bmatrix})$

22. 考试题型:
    a) 简述可计算性理论的发展历程.
    b) 结合目前计算机软硬件和算法的发展,谈谈你对…的认识
    c) 使用元语言计算某函数
    d) 证明某函数是原始递归的函数.(8-10’)
    e) 四元组/五元组图灵机.
    f) 第五章可能会考一些概念.
    g) 设计半图厄系统
    h) 设计图灵机并分析时间和空间复杂度.(20’)