

А А А

# 1. Оценяване

- КН 2 поток / Информатика

4 домашни 4x2.5%

Сем. Контрол

45

90

Изпит

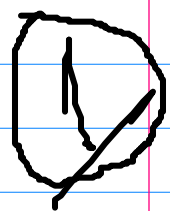
45

90

при изпит

- Студент от Мин. Зор - 100% изпит

- КН 1 поток - Информатика  
за оценяването  
на лекция



Когато разглеждаме алгоритми се интересуваме от:

- Простота
- Коректност
- Бърздействие



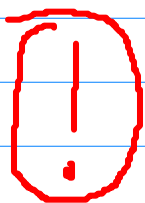
Сложност на алгоритъм:

Ф-я по големината на входа

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$   
↑  
големина на входа  
← "брой стъпки"

Пример за големина на входа:

- Сортиране на масив – размерът на масива
- Пресмятане на  $n!$  –  $n$



Големината на входа

я свързваме до число / числа

ИНТЕРЕСУВА НИ !  
КАК СЕ ВЪРНИ АЛГОРИТЪМА  
ПРЧ  $n \rightarrow \infty$

[ НЕ НИ ИНТЕРЕСУВА  
КОНКРЕТНАТА ФУНКЦИЯ ] !

[ ИНТЕРЕСУВА НИ САМО  
КАК НАРАСТВА Ф-ЯТА ]

КОЙ АЛГОРИТЪМ ДА ИЗБЕРЕМ?

Alg1:  $n \cdot \log(n)$

Alg2:  $n^2$

Alg3:  $n!$

КОЯ Ф-Я

НАРАСТВА  
НАЙ-БЪЗКО?

АНАЛИЗ НА АСИМПТОТИЧНО  
НАРАСТВАНИЕ НА Ф-ИТЕ

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

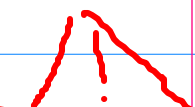
$$O(f) = \{g \mid g \text{ не нараства по-бързо от } f\}$$

$$\hookrightarrow O(f) = \{g \mid \exists c (c > 0) \exists n_0 \forall n > n_0: 0 \leq g(n) \leq c f(n)\}$$

$$\Omega(f) = \{g \mid g \text{ не нараства по-бавно от } f\}$$

$$\Omega(f) = \{g \mid \exists c (c > 0) \exists n_0 \forall n > n_0: 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)\}$$

$$\Theta(f) = \left\{ g \mid g \text{ нараства } \begin{matrix} \text{точно} \\ \text{колко } f \end{matrix} \right\}$$



$$\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$$

$$o(f) = \{g \mid g \text{ нараства по-бавно от } f\}$$

$$\omega(f) = \{g \mid g \text{ нараства по-бързо от } f\}$$

⊛ с точност до константен множител

$n$  не нараства по-бързо от  $n^2$

$$\Rightarrow n \in O(n^2)$$

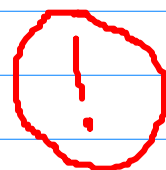
записване.  
Така.

$$n^2 + n \in \Theta(n^2)$$

$$n^2 + n = \Theta(n^2)$$

НА КОНТРОЛНО/ИЗПИТ:

Дадено е м-во от ф-ки



Да ги подредите по

асимптотично нарастване

$$f \leq g \Leftrightarrow f \in O(g)$$

$$f \leq g \Leftrightarrow f \in \Omega(g)$$

$$f \sim g \Leftrightarrow f \in \Theta(g)$$

$$f \leq g \Leftrightarrow f \in \omega(g)$$

$$f \ll g \Leftrightarrow f \in o(g)$$



$\{, \}, \{, \}, \{, \}, \{, \}$

СА ТРАНЗИТИВНИ

$$f \leq g \wedge g \leq k \Rightarrow f \leq k$$

заг. Порежете по асимптотично  
нарастване следните ф-ии.

1)  $7n^3 \sqrt{\log(n)}$ , 2)  $\log(\log(n))$

3)  $9^n \cdot n$ , 4)  $5n^3 \sqrt{\log(n)}$

5)  $n!$ , 6)  $\log(n)$

7)  $n^n$ , 8)  $2^{n^3}$

9)  $4^{n^2}$ , 10)  $3^{n^2}$

11)  $(10 + \sin(n)) \cdot 9^n \cdot n$

ПРАВИЛА:

⚠  $\log(n) \prec n^2 \prec a^n \prec n! \prec n^n \prec 2^{n^2}$

⚠  $f \sim g \rightarrow \log(f) \sim \log(g)$

$\log(f) \prec \log(g) \Rightarrow f \prec g$

⚠  $\log(f) \succ \log(g) \Rightarrow f \succ g$

$\log(f) \leq \log(g) \Rightarrow f \leq g$

$\log(f) \geq \log(g) \Rightarrow f \geq g$

⚠  $\log(f) \sim \log(g) \not\Rightarrow f \sim g$

⚠  $f \succ g \not\Rightarrow \log(f) > \log(g)$

⚠  $f \prec g \not\Rightarrow \log(f) \prec \log(g)$

Метод с ЛПННУА на частото  
 $f$  vs  $g$

ⓘ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f}{g} = \begin{cases} \infty & (f \succ g) \\ \text{const} & (f \sim g) \\ 0 & (f \prec g) \end{cases}$

$$f = g + k$$

$$f \approx \max(g, k)$$

$$n^2 + \log(n) + n \approx n^2$$

Имеем точно 11 функций

$\Rightarrow$  требуется до извращения точно

10 сравнения на непосредственные  
связи в поурядках.

$$f_1 \mid f_2 \mid f_3 \dots \mid f_{11}$$

извращаем 10 (а не 55) сравнения

благодарение на транзитивности

РЕШЕНИЕ:

①  $\log(\log(n))$  vs  $\log(n)$

НЕ!  $\log(n) \mid n \not\approx \log(\log(n)) \mid \log(n)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{\log(\log(n))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n \cdot \log(n)}} =$$



$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \log(n)}{n} = \infty$$

$$\Rightarrow \log(\log(n)) \prec \log(n)$$

②  $\log(n)$  vs  $5n^3 \sqrt{\log(n)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 \sqrt{\log(n)}}{\log(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 \sqrt{\log(n)}}{\sqrt{\log(n)} \cdot \sqrt{\log(n)}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3}{\sqrt{\log(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n^2}{\frac{1}{2n \sqrt{\log(n)}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{30n^3 \sqrt{\log(n)}}{1} = \infty$$

$$\Rightarrow \log(n) \prec 5n^3 \sqrt{\log(n)}$$

③  $5n^3 \sqrt{\log(n)}$  vs  $7n^3 \sqrt{\log(n)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 \sqrt{\log(n)}}{5n^3 \sqrt{\log(n)}} = \frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow 5n^3 \sqrt{\log(n)} \sim 7n^3 \sqrt{\log(n)}$$

④

$7n^3 \sqrt{\log(n)}$  vs  
ЛОГАРИТМИЗУЕМЕ

$$\log(7n^3 \sqrt{\log(n)})$$

$$\log(7) + 3 \cdot \log(n) + \log(\sqrt{\log(n)})$$

$$\Rightarrow 7n^3 \sqrt{\log(n)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta(\log(n)) \\ 4^n n^2 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 4^n n^2 \\ \downarrow \\ \log(4^n n^2) \\ \downarrow \\ n \cdot \log(4) + 2 \log(n) \\ \sim \Theta(n) \end{array}$$

⑤

$4^n n^2$  vs  $9^n n$

ЛОГАРИТМИЗУЕМЕ

$$n \log(4) + 2 \log(n)$$

$$\Theta(n)$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ n \cdot \log(9) + \log(n) \\ \Theta(n) \end{array}$$

$$\Rightarrow 4^n n^2 \approx 9^n n$$

С ТОЗУ МЕТОД НЕ СТАВА!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n \cdot n}{4^n \cdot n^2} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n}{n \cdot 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{9}{4} \right)^n \frac{1}{n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2.5^n}{n} = \infty$$

$$\Rightarrow 4^n \cdot n^2 \{ 9^n \cdot n$$

⑥

$$9^n \cdot n \quad \vee \quad \underbrace{10 + \sin(n)}_{[-1, 1]} \cdot 9^n \cdot n$$

$[0, 11]$

①

порядок на  $10 + \sin(n) \in 0$

$$\Rightarrow 9^n n \sim (10 + \sin(n)) \cdot 9^n \cdot n$$

7

$$(10 + \sin(n)) \cdot 9^n \cdot n \quad \text{vs} \quad n!$$

различаваме:

$$9^n \cdot n \quad \text{vs} \quad n!$$

!

$$\log(n!) \sim n \cdot \log(n)$$

До-во: 1) с формулата на Стирлинг  
2) със свиване на сбора интеграл

получаваме:

$$\underbrace{n \cdot \log(9) + \log(n)}_{\Theta(n)} \sim n \cdot \log(n)$$

$$\Rightarrow 9^n \cdot n \sim n!$$

8

$n!$  vs  $n^n$

Опытание с логарифмированием

$$\log(n!) \quad \log(n^n)$$

$$n \cdot \log(n) \approx n \log(n)$$

$\Rightarrow$  Нука!!

!

$$n! \approx n^n \cdot \frac{\sqrt{n}}{e^n}$$

!

$$\Rightarrow n! \prec n^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = \frac{e^n}{\sqrt{n}} = \infty$$

9

$n^n$  vs  $3^{n^2}$

ЛОГАРИФИЗМОВАНИЕ:

$$\log(n^n)$$

$$\log(3^{n^2})$$

$$n \cdot \log(n) \prec n^2 \log(3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot \log(3)}{n \cdot \log(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \log(3)}{n \cdot \log(n)}$$

= ∞

10

$$3^{n^2} \text{ vs } 2^{n^3}$$

ПОПРАВКА

$$n^2 \cdot \log(3) < n^3 \cdot \log(2)$$

или:

$$\log(\log(n)) < \log(n) < 5n^3 \sqrt{\log(n)} \approx 7n^3 \sqrt{\log(n)}$$

$$4^n n^2 < 9^n \cdot n \approx (5 \cdot 10^7 + 10) \cdot 9^n \cdot n < n!$$

$$n^n < 3^{n^2} < 2^{n^3} \quad \checkmark$$