ДАА

1. Оценяване

- КН 2 поток / 4 инф.

  4 домашни – 4x2.5%

  сем. контр 45 % } присъствени

  изпит 45 %

  студенти от мин. год – 100% изпит

- КН 1 поток – информация за оценяването на лекции

1 Когато разглеждаме алгоритъм се интересуваме от:

- простота
- коректност
- <u>бързодействие</u>

Сложност на алгоритъм:

функция по големина на входа

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

големина на входа — брой стъпки

Пример за големина на входа:

- сортиране на масив — големина на масив
- пресмятане $n!$ — n

! Големината на входа я свеждаме до число!

интересува ни

как се държи алгоритъма

при $n \to \infty$

[Не ни интересува конкретната ф-я !!!]

[интересува ни само как нараства ф-ята]

Кой алгоритъм да изберем?

Alg 1: n

Alg 2: n^2

Alg 3: $n \cdot \log(n)$

Alg 4: n^n

Alg 5

Alg 6: $n!$

коя ф-я нараства най-бавно??

Анализ на асимптотичното нарастване на ф-иите

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\qquad$ $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$O(f)$ — $\{g \mid g$ не нараства по-бързо от $f\}$

$\Omega(f)$ — $\{g \mid g$ не нараства по-бавно от $f\}$

$\Theta(f)$ — $\{g \mid g$ нараства толкова бързо, колкото $f\}$

$\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$

$o(f) = \{g \mid g$ нараства по-бавно от $f\}$

$\omega(f) = \{g \mid g$ нараства по-бързо от $f\}$

n не нараства по-бързо от n^2 $\qquad$ $n \in O(n^2)$

Записване така:

$n^2+n \in \Theta(n^2)$ $\quad$ $n^2+n = \Theta(n^2)$

На контролни:
дадено е множество от ф-ции и трябва да ги подредим по асимптотично нарастване.

$f \preceq g \iff f \in O(g)$

$f \succeq g \iff f \in \Omega(g)$

$f \asymp g \iff f \in \Theta(g)$

$f \succ g \iff f \in \omega(g)$

$f \prec g \iff f \in o(g)$

1) $\prec, \succ, \preceq, \succeq, \asymp$

са транзитивни

$$f \preceq g \wedge g \preceq k \Rightarrow f \preceq k$$

Зад. Подредете по асимптотично нарастване следните функции:

- $7n^3\sqrt{\log(n)}$
- $9^n \cdot n$
- $n!$
- n^n
- $4^n n^2$
- $(10+\sin(n)) \cdot 9^n \cdot n$

- $\log(\log(n))$
- $5 n^3 \sqrt{\log(n)}$
- $\log(n)$
- 2^{n^3}
- 3^{n^2}

Правила:

$\log(n) \prec n^2 \prec a^n \prec n! \prec n^n \prec 2^{n^2}$

- $f \asymp g \to \log(f) \asymp \log(g)$
- $\log(f) \prec \log(g) \Rightarrow f \prec g$

$\log(f) \succ \log(g) \Rightarrow f \succ g$

$\log(f) \preceq \log(g) \Rightarrow f \preceq g$

$\log(f) \succeq \log(g) \Rightarrow f \succeq g$

$\log(f) \asymp \log(g) \not\Rightarrow f \asymp g$

$f \succ g \not\Rightarrow \log(f) \succ \log(g)$

$f \prec g \not\Rightarrow \log(f) \prec \log(g)$

Метод с граница на частното

f vs g

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f}{g} = \begin{cases} \infty & (f \succ g) \\ const & (f \asymp g) \\ 0 & (f \prec g) \end{cases}$$

$f = g + k$

$f \asymp \max(g, k)$

$n^2 + \log(n) + n \asymp n^2$

Ако имаме $\boxed{11}$ функции трябва да направим точно $\boxed{10}$ директни сравнения

$f_1 \preceq f_2 \preceq f_3 \preceq f_4 \ldots \preceq f_{10}$

правим 10 (не 55) сравнения, благодарение на транзитивността на $\preceq$

Решение:

1) $\log(\log(n))$ vs $\log(n)$

Не! $\log(n) \preceq n \not\Rightarrow \log(\log(n)) \preceq \log(n)$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log(n)}{\log(\log(n))} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n \cdot \log(n)}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n} \cdot \log(n)}{\cancel{n}} = \infty$$

$$\Rightarrow \log(\log(n)) < \log(n)$$

② $\log(n)$ vs $5n^3\sqrt{\log(n)}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{5n^3\sqrt{\log(n)}}{\log(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{5n^3 \cancel{\sqrt{\log(n)}}}{\sqrt{\log(n)} \cdot \cancel{\sqrt{\log(n)}}}$$

$$= \frac{5n^3}{\sqrt{\log(n)}} = \infty$$

$$\Rightarrow \log(n) < 5n^3\sqrt{\log(n)}$$

③ $5n^3\sqrt{\log(n)}$ vs $7n^3\sqrt{\log(n)}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{7\cancel{n^3\sqrt{\log(n)}}}{5\cancel{n^3\sqrt{\log(n)}}} = \frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow 5n^3\sqrt{\log(n)} \simeq 7n^3\sqrt{\log(n)}$$

4) $7n^3\sqrt{\log(n)}$ vs $4^n n^2$

логаритмуване

$\log(7n^3\sqrt{\log(n)})$ $\quad\quad$ $\log(4^n n^2)$

$\log(7n^3\sqrt{\log(n)}) = \log(7) + 3\log(n) + \log(\sqrt{\log(n)}) = \Theta(\log(n))$

$\log(4^n n^2) = n.\log(4) + 2\log(n) = \Theta(n)$

$\Rightarrow 7n^3\sqrt{\log(n)} \prec 4^n n^2$

5) $4^n n^2$ vs $9^n n$

логаритмуване

$n\log(4) + 2\log(n)$ $\quad\quad$ $n.\log(9) + \log(n)$

$\Theta(n)$ $\quad\quad$ $\Theta(n)$

$\Rightarrow \cancel{\prec}$

този метод не става!

$$\lim_{n \to \infty} \frac{9^n \cdot n}{4^n \cdot n^2} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{9^n}{n \cdot 4^n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{9}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2{,}5^n}{n} = \infty \checkmark$$

$$\Rightarrow 4^n \cdot n^2 < 9^n \cdot n$$

6

$$9^n \cdot n \quad \text{vs} \quad \underbrace{\left(10 + \underbrace{\sin(n)}_{[-1,\ 1]}\right)}_{[9,\ 11]} 9^n \cdot n$$

Порядъкът на $10 + \sin(n)$ е O.

$$\Rightarrow 9^n n \asymp (10 + \sin(n)) \cdot 9^n \cdot n$$

7) $(10+\sin(n))\cdot 9^n\cdot n$ vs $n!$

ще разглеждаме:

$9^n\cdot n$ vs $n!$

! $\log(n!) \asymp n\cdot\log(n)$

Д-во: 1) с формулата на Стирлинг

2) със свеждане на сбор до интеграл

логаритмуване

$$n\cdot\log(9)+\log(n) \prec n\cdot\log(n)$$

$\asymp$

$\Theta(n)$

$\Rightarrow 9^n\cdot n \prec n!$

....

(3) $n!$ vs n^n

1) логаритмуване

$\log(n!)$ $\qquad$ $\log(n^n)$

$n \cdot \log(n) \simeq n \log(n)$

$\Rightarrow$ Нищо!!

Формално: $n! \simeq n^n \cdot \frac{\sqrt{n}}{e^n}$

$\Rightarrow n! < n^n$ $\qquad$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^n}}{\cancel{n^n} \cdot \frac{\sqrt{n}}{e^n}} = \frac{e^n}{\sqrt{n}} = \infty$

(4) n^n vs 3^{n^2}

логаритмуване

$\log(n^n)$ $\qquad$ $\log(3^{n^2})$

$n \cdot \log(n) < n^2 \log(3)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot \log(3)}{n \cdot \log(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n} \cdot n \cdot \log(3)}{\cancel{n} \cdot \log(n)}$$

$$= \infty$$

10) 3^{n^2} vs 2^{n^3}

логаритмуване

$$n^2 \cdot \log(3) < n^3 \cdot \log(2) \quad ✓$$

Отг:

$$\log(\log(n)) \prec \log(n) \prec 5n^3\sqrt{\log(n)} \asymp 7 \cdot n^3\sqrt{\log(n)}$$

$$\prec 4^n n^2 \prec 9^n \cdot n \asymp (5\sin(n)+10) \cdot 9^n \cdot n \prec n!$$

$$\prec n^n \prec 3^{n^2} \prec 2^{n^3} \quad ✓$$