(6)

Терминация

Дали алгоритъмът приключва?

def: Фундирана релация

частична наредба в множество X, такава че всяко непразно подмножество на X има мин. елемент

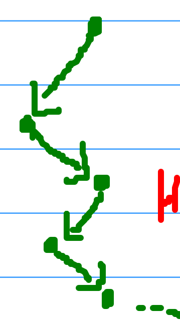
$$(\forall S \subseteq X)\left[S \neq \emptyset \to (\exists m \in S)(\forall s \in S)\neg(sRm)\right]$$

$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ ✓

$\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ ✗

- Във фундирано м-во няма "безкрайни спускания"

$a > b > c > d \dots$



Не!

• evenCount

Терминацията е очевидна!

• taskMystery

t е unsigned

$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ фундирано

Ще покажем, че алгоритъмът терминира

Допускаме противното.

Нека тази безкрайна редица са последователните с-ти на t.

защото допуснахме, че не терминира

1-ва итерация

2-ра итерация

3-та

$t', t'', t''', t'''' \ldots$

Да разгледаме две последователни стойности на t.

$$t^k \text{ и } t^{k+1}$$

1сл. $t^{k+1} = t^k/2$ $\quad \cdot\ t^{k+1} < t^k$

2сл. $t^{k+1} = t^{k} - 1$ $\quad t^{k+1} < t^{k}$

$\Rightarrow$

$t > t' > t'' > t''' > t'''' \dots$

Допуснахме, че алгоритъмът не терминира

$\Rightarrow$ редицата е безкрайно спускане

но $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ е фундирано

т.е. няма безкрайни спускания.

Противоречие $\lightning$

$\Rightarrow$ taskMystery терминира

зад Доказателство за коректност на GCD

Твърдения:

- 1) $НОД(x, y) = НОД(y, x)$
- 2) $НОД(x, 0) = НОД(0, x) = x$
- 3) $y \geq x \Rightarrow НОД(x, y) = НОД(x, y - x)$

1) и 2) - очевидни

Д-во на 3)

Нека $y \geq x$ и НОД$(x,y)=t$

$\Rightarrow t \mid x$ и $t \mid y \Rightarrow t \mid y-x$

Допускаме, че t не е НОД(x,y)

$\Rightarrow \exists r\, (r>t) \left(r \mid x \right.$ и $\left. r \mid y-x \right)$

$x = a.r$ $\qquad$ $y-x = b.r$

$\Rightarrow y = (a+b).r$

$\Rightarrow r \mid y$

$\Rightarrow r \mid x$ и $r \mid y$ и $r > t$ противоречие

$\Rightarrow$ НОД$(x, y-x) = t$

Инварианта: За всяка проверка за край на цикъла **НОД**(a,b) = **НОД**(x,y)

При първата проверка за край:

x = a и y = b **НОД**(a,b) = **НОД**(x,y) **OK!**

Поддръжка:

Допускаме, че инвариантата е изпълнена за някоя проверка за край, **която не е последна**

НОД(a,b) = **НОД**(x,y)

1 сл y >= x.

Нека с y' означим новата стойност на y. **y'** = y - x

Вярно ли е, че **НОД**(a,b) = **НОД**(x,**y'**) ?

НОД(x,**y'**) = **НОД**(x,y-x) (от **тв 3**) = **НОД**(x,y) (от **допускането**) = **НОД**(a,b) **OK!**

2 сл y < x.

Нека с **x'** и **y'** означим новите стойности на x и y. **x'** = y и **y'** = x;

Вярно ли е, че **НОД**(a, b) = **НОД**(**x'**,**y'**) ?

НОД(**x'**, **y'**) = **НОД**(y, x) (от **тв 1**) = **НОД**(x,y) (от **допускането**) = **НОД**(a,b) OK!

Терминация:

Цикълът приключва при x = 0.

НОД(a,b) (от **инвариантата**) = **НОД**(x,y) = **НОД**(0, y) (от **тв2**) = y

На ред 17 връщаме точно y! **OK!**

Дали GCD терминира ?

$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ фундирано

Ще покажем, че алгоритъмът терминира

Допускаме противното:
Нека тази безкрайна редица са последователните с-ти на X

$$X', X'', X''', X'''' \ldots$$

Да разгледаме две последователни стойности на X.

$$X^{K} \qquad X^{K+1}$$

Ако $y < X$, то $X^{K+1} = X$ $\left(\cancel{X^{K} > X^{K+1}}\right)$

Не можем да го докажем така

Друг начин

$$(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq)$$

$$(a,b) \leq (a',b') \Longleftrightarrow (a < a') \vee (a = a' \wedge b \leq b')$$

Пример: $\underbrace{(3, 7) \leq (4, 8)}_{\leq}$

док. за домашно

$(3, 8) \leq (3, 9)$, където $3 = 3$ и $8 \leq 9$

$\leq$ е **фундирана релация**

$\Rightarrow$ Няма безкрайни спускания

Нека тази **безкрайна** редица са последователните с-ти на x и y

$(x', y'), (x'', y''), (x''', y''') \dots$

Да разгледаме две последователни стойности на x и y.

1 сл.

$(x \neq 0)$ $y \geq x$

$$(x^k, y^k) \quad (x^{k+1}, y^{k+1}) = (x^k, y^k - x^k)$$

$$(x^k, y^k) > (x^k, y^k - x^k)$$

където $x^k = x^k$ и $y^k > y^k - x^k$

2 сл. $(x \neq 0)$ $y^k < x^k$ $(x^k, y^k) = \overbrace{(y^k, x^k)}^{(x^{k+1},\, y^{k+1})}$

$$(x^k, y^k) \overset{x^k > y^k}{>} \underbrace{(y^k, x^k)}_{(x^{k+1},\, y^{k+1})}$$

$\Rightarrow (x', y') > (x'', y'') > (x''', y''') \dots$

Допуснахме, че алгоритъмът не терминира

$\Rightarrow$ редицата е безкрайно спускане

Но $\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq \rangle$ е фундирано

Противоречие!

$\Rightarrow$ GCD терминира

Зад Коректност на reverse

Ако n не завършва на 0, то reverse връща n обърнато

- $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \,\%\, 10 = \alpha_n$
- $\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n * 10 + \alpha_i = \beta_1 \ldots \beta_n \alpha_i$
- $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} \alpha_n \,/\, 10 = \alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$

$n = 1234$

temp	result
1234	0
123	4
12	43
1	432
0	4321

$$x \circ y = \begin{cases} y & x = 0 \\ x & y = 0 \\ xy & x \neq 0 \wedge y \neq 0 \end{cases}$$

конкатенираме цифрите.

За всяка проверка за край на цикъла е изпълнено:

n = temp o (result)^rev

База: При първата проверка за край:

temp = n , result = 0.

Вярно ли е, че temp o (result)^rev = n?

n o 0^rev = n o 0 (от дефиницията на операцията) = n **OK**!

Поддръжка: Допускаме, че инвариантата е изпълнена за някоя проверка за край, която **не е последна**. Следователно **temp > 0**.

Допуснали сме: **n = temp o (result)^rev**

temp = a_1 a_2 ... a_k-1 a_k (a_i in {0...9})

result = b_1 b_2 ...b_r-1 b_r (b_i in {0...9})

Тогава от допускането: : **n = temp o (result)^rev** = a_1 a_2 ... a_k-1 a_k b_r b_r-1 ... b_1

Нека с **temp'** и **result'** означим новите стойности на **temp** и **result**.

temp' = a_1 a_2 ... a_k-1

result' = b_1 b_2 ... b_r a_k

result' != 0 (съдържа сме поне 1 цифра)

Вярно ли е, че n = **temp'** o (**result'**)^rev ??

temp' o (**result'**)^rev = a_1 a_2 ... a_k-1 o (b_1 b_2 ... b_r a_k)^rev =

= a_1 a_2 ... a_k-1 a_k b_r b_r-1 ... b_1 = (от допускането) = n **OK!**

Терминация:

Последната проверка е при temp = 0.

От инвариантата знаем:

n = **temp** o (**result**)^rev

Но **temp** = 0. От дефиницията на операцията следва че:

n = (**result**)^rev , но тогава: n^rev = **result**

На ред 19 връщаме точно **result**. **OK!**

Терминацията е очевидна!