ДАА

1. Оценяване

- КН 2 поток / 4 инф.

    4 домашни 4 x 2.5 %

    Сем. контролно 45 %] присъствия

    изпит 45 %

- студенти от мин. год - 100% изпит

- КН 1 поток - информация за оценяването на лекции

1) Които разглеждаме алгоритми се интересуваме от:

- простота
- коректност
- бързодействие

Сложност на алгоритъм:

функция по големина на входа

$$\underbrace{f:\mathbb{N}}_{\text{големина на входа}} \to \underbrace{\mathbb{N}}_{\text{брой стъпки}}$$

Пример за големина на входа:

- сортиране на масив – големина на масив
- пресмятане $n!$ – n

! Големината на входа я свеждаме до число!

Интересува ни как се държи алгоритъма при $n \to \infty$!

[Не ни интересува конкретната ф-я !!!] !

[Интересува ни само как нараства ф-ята]

Кой алгоритъм да изберем?

Alg 1: n

Alg 2: n^2

Alg 3: $n \cdot \log(n)$

Alg 4: n^n

Alg 5: n^n

Alg 6: $n!$

коя ф-я нараства най-бавно??

Анализ на асимптотичното нарастване на ф-иите

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\qquad$ $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$O(f)$ — $\{g \mid g$ не нараства по-бързо от $f\}$

$\Omega(f)$ — $\{g \mid g$ не нараства по-бавно от $f\}$

$\theta(f)$ — $\{g \mid g$ нараства толкова бързо, колкото $f\}$

$\theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$

$o(f) = \{g \mid g$ нараства по-бавно от $f\}$

$\omega(f) = \{g \mid g$ нараства по-бързо от $f\}$

n не нараства по-бързо от n^2 $\qquad$ $n \in O(n^2)$

Записване
тача:

$n^2+n \in \Theta(n^2)$ $\qquad$ $n^2+n = \Theta(n^2)$

На контролно/изпит:

Дадено е м-во от ф-ии.
Трябва да ги подредим
по асимптотично нарастване

!

$f \preceq g \iff f \in O(g)$

$f \succeq g \iff f \in \Omega(g)$

$f \asymp g \iff f \in \Theta(g)$

$f \succ g \iff f \in \omega(g)$

$f \prec g \iff f \in o(g)$

D $\prec, \succ, \preceq, \succeq, \asymp$

са транзитивни

$$f \preceq g \wedge g \preceq k \Rightarrow f \preceq k$$

зад. Подредете по асимптотично нарастване следните ф-ии.

1) $7n^3\sqrt{\log(n)}$, 2) $\log(\log(n))$

3) $9^n \cdot n$, 4) $5n^3\sqrt{\log(n)}$

5) $n!$, 6) $\log(n)$

7) n^n, 8) 2^{n^3}

9) $4^n n^2$, 10) 3^{n^2}

11) $(10+\sin(n)) \cdot 9^n \cdot n$

ПРАВИЛА:

$$\log(n) < n^2 < a^n < n! < n^n < 2^{n^2}$$

- $f \simeq g \rightarrow \log(f) \simeq \log(g)$
- $\log(f) < \log(g) \Rightarrow f < g$

$\log(f) > \log(g) \Rightarrow f > g$

$\log(f) \leq \log(g) \Rightarrow f \leq g$

$\log(f) \geq \log(g) \Rightarrow f \geq g$

$\log(f) \simeq \log(g) \not\Rightarrow f \simeq g$

$f > g \not\Rightarrow \log(f) > \log(g)$

$f < g \not\Rightarrow \log(f) < \log(g)$

Метод с граница на частното

f vs g

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f}{g} = \begin{cases} \infty & (f > g) \\ const & (f \simeq g) \\ 0 & (f < g) \end{cases}$$

(7) $= g + k$

$f \asymp \max(g, k)$

$n^2 + \log(n) + n \asymp n^2$

Имаме точно $\boxed{11}$ функции

$\Rightarrow$ трябва да извършим точно 10 сравнения на непосредствени съседи в подредбата

$f_1 < f_2 < f_3 \ldots < f_{11}$

извършваме 10 (а не 55) сравнения благодарение на транзитивността на <

РЕШЕНИЕ:

(1) $\log(\log(n))$ vs $\log(n)$

Не! $\log(n) < n \not\Rightarrow \log(\log(n)) < \log(n)$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log(n)}{\log(\log(n))} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n \cdot \log(n)}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n} \cdot \log(n)}{\cancel{n}} = \infty$$

$$\Rightarrow \log(\log(n)) < \log(n)$$

2. $\log(n)$ vs $5n^3\sqrt{\log(n)}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{5n^3\sqrt{\log(n)}}{\log(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{5n^3\cancel{\sqrt{\log(n)}}}{\sqrt{\log(n)} \cdot \cancel{\sqrt{\log(n)}}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{5n^3}{\sqrt{\log(n)}} = \lim_{n \to \infty} \frac{15n^2}{\frac{1}{2n\sqrt{\log(n)}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{30n^3\sqrt{\log(n)}}{1} = \infty$$

$$\boxed{\Rightarrow \log(n) < 5n^3\sqrt{\log(n)}}$$

3. $5n^3\sqrt{\log(n)}$ vs $7n^3\sqrt{\log(n)}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{7\cancel{n^3\sqrt{\log(n)}}}{5\cancel{n^3\sqrt{\log(n)}}} = \frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow 5n^3\sqrt{\log(n)} \simeq 7n^3\sqrt{\log(n)}$$

(4) $7n^3\sqrt{\log(n)}$ vs $4^n n^2$

• ЛОГАРИТМУВАМЕ

$\log(7n^3\sqrt{\log(n)})$ $\quad$ $\log(4^n n^2)$

$\|$ $\quad$ $\downarrow$

$\log(7)+3.\log(n)+\log(\sqrt{\log(n)})$ $\quad$ $n.\log(4)+2\log(n)$

$\Theta(\log(n))$ $\quad$ $\Theta(n)$

$\Rightarrow 7n^3\sqrt{\log(n)} \prec 4^n n^2$

(5) $4^n n^2$ vs $9^n n$

логаритмуваме

$n\log(4)+2\log(n)$ $\quad$ $n.\log(9)+\log(n)$

$\Theta(n)$ $\quad$ $\Theta(n)$

$\cancel{\Rightarrow}\ 4^n n^2 \asymp 9^n n$

този метод не става!

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9^n \cdot \cancel{n}}{4^n \cdot n^{\cancel{2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{9^n}{n \cdot 4^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2.5^n}{n} = \infty$$

$$\Rightarrow \quad 4^n \cdot n^2 < 9^n \cdot n$$

6) $\quad 9^n \cdot n \quad \text{vs} \quad \underbrace{(10 + \underbrace{\sin(n)}_{[-1,1]})}_{[9,11]} \; 9^n \cdot n$

! Порядъкът на $10 + \sin(n)$ е 0

$$\Rightarrow \quad 9^n n \asymp (10 + \sin(n)) \cdot 9^n \cdot n$$

(7) $(10+\sin(n))^n \cdot n$ vs $n!$

разглеждаме:

$9^n \cdot n$ vs $n!$

(!) $\log(n!) \asymp n \cdot \log(n)$

Д-во: 1) с формулата на Стирлинг

2) със свеждане на сбор до интеграл

Логаритмуваме:

$$\underbrace{n \cdot \log(9) + \log(n)}_{g(n)} < n \cdot \log(n)$$

$$\Rightarrow 9^n \cdot n < n!$$

....

8 $n!$ vs n^n

Опитваме с логаритмуване

$\log(n!)$ $\log(n^n)$

$n \cdot \log(n) \simeq n \log(n)$

$\Rightarrow$ Нищо !!

! $n! \simeq n^n \cdot \frac{\sqrt{n}}{e^n}$!

$\Rightarrow n! < n^n$ $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\cancel{n^n}}{\cancel{n^n} \frac{\sqrt{n}}{e^n}} = \frac{e^n}{\sqrt{n}} = \infty$

9 n^n vs 3^{n^2}

Логаритмуваме:

$\log(n^n)$ $\log(3^{n^2})$

$n \cdot \log(n) < n^2 \log(3)$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 \cdot \log(3)}{n \cdot \log(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n} \cdot n \cdot \log(3)}{\cancel{n} \cdot \log(n)}$$

$$= \infty$$

10

$$3^{n^2} \quad vs \quad 2^{n^3}$$

Логаритмуваме

$$n^2 \cdot \underline{\log(3)} < n^3 \cdot \underline{\log(2)} \checkmark$$

Отг:

$$\log(\log(n)) < \log(n) < 5n^3 \sqrt{\log(n)} \asymp n^3 \sqrt{\log(n)}$$

$$< 4^n n^2 < 9^n \cdot n \asymp (\sin(n)+10) \cdot 9^n \cdot n < n!$$

$$< n^n < 3^{n^2} < 2^{n^3} \checkmark$$