ДАА

- КН 2 поток / 4 инф.
  4 домашни – 2.5 %
  сем. контр 45 %] присъствия
  изпит 45 %
  Студенти от мин. год. – само изпит (100%)

- КН 1 поток – информация на лекция

Когато анализираме алгоритъм се интересуваме от:

- Простота
- Коректност
- Бързодействие

Сложност на алгоритъм:

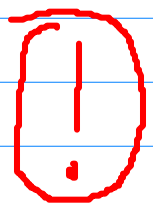
функция по големина на входа

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

големина на входа — брой стъпки

Пример за големина на входа:

- сортиране на масив — големина на масив
- пресмятане $n!$ — n



Големината на входа е свързана с цяло!

Интересува ни

как се държи алгоритъма

при $n \to \infty$!

[Не ни интересува
конкретната ф-я !!!] !

[Интересува ни само
как нараства ф-ята]

Кой алгоритъм да използваме?

Алг 1: n

Алг 2: n^2

Алг 3: $n \cdot \log(n)$

Алг 4: n^n

Алг 5: n

Алг 6: $n!$

Кой ф-я нараства най-бавно??

Анализ на асимптотичното
нарастване на ф-ите

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$O(f) = \{ g \mid g$ не нарастват по-бързо от $f \}$

$\Omega(f) = \{ g \mid g$ не нарастват по-бавно от $f \}$

$\Theta(f) = \{ g \mid g$ нарастват горе-долу с еднаква скорост като $f \}$

$\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$

$o(f) = \{ g \mid g$ нарастват по-бавно от $f \}$

$\omega(f) = \{ g \mid g$ нарастват по-бързо от $f \}$

n не нарастват по-бързо от n^2 $\quad n \in O(n^2)$

Запис чрез граници:

$n^2 + n \in \Theta(n^2)$ $\quad$ $n^2 + n = \Theta(n^2)$

На контролна:

Дадено е множество от ф-ции и трябва да се подредят по асимптотични характеристики

$f \underline{\prec} g \iff f \in O(g)$

$f \underline{\succ} g \iff f \in \Omega(g)$

$f \asymp g \iff f \in \Theta(g)$

$f \succ g \iff f \in \omega(g)$

$f \prec g \iff f \in o(g)$

$\Omega(1), \{\}, \{\}, \{\}, \simeq$

Са транзитивни

$f \in g \wedge g \in \kappa \Rightarrow f \in \kappa$

Зад Подредете по асимптотично нарастване

Следните функции:

- $7n^3\sqrt{\log(n)}$
- $a^n \cdot n$
- $n!$
- n^n
- $4^n n^2$
- $(10+\sin(n)) \cdot g^n \cdot n$

- $\log(\log(n))$
- $5 n^3 \sqrt{\log(n)}$
- $\log(n)$
- 2^{n^3}
- 3^{n^2}

Правила:

⚠ $\log(n) \prec n^d \prec a^n \prec n! \prec n^n \prec 2^{n^2}$

- $f \asymp g \rightarrow \log(f) \asymp \log(g)$
- $\log(f) \prec \log(g) \Rightarrow f \prec g$

⚠ $f \succ g \not\Rightarrow \log(f) \succ \log(g)$

⚠ $\log(f) \asymp \log(g) \not\Leftarrow f \asymp g$

f vs g

⚠ $\lim_{n\to\infty} \frac{f}{g} \rightarrow \infty \Rightarrow f \succ g$

$\lim_{n\to\infty} \frac{f}{g} \rightarrow \text{const} \neq 0 \Rightarrow f \asymp g$

$\lim_{n\to\infty} \frac{f}{g} \rightarrow 0 \Rightarrow f \prec g$

$(f) = g + k$

$f \simeq \max(g, k)$

$n^2 + \log(n) + n \simeq n^2$

Един силен 11 функции трябва да направим точно 10 директни сравнения

$f_1 \underline{\in} f_2 \underline{\in} f_3 \underline{\in} f_4 \dots \underline{\in} f_{10}$

правим 10 [лс 55] сравнения, благодарение на транзитивността на $\underline{\in}$

Решение:

1) $\log(\log(n))$ vs $\log(n)$

Не! $\log(n) \underline{\in} n \not\underline{\in} \log(\log(n)) \underline{\in} \log(n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{\log(\log(n))} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n.\log(n)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \log(n)}{\sqrt{n}} = \infty$$

$$\Rightarrow \log(\log(n)) < \log(n)$$

② $\log(n)$ vs $5n^3\sqrt{\log(n)}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3\sqrt{\log(n)}}{\log(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3\sqrt{\log(n)}}{\sqrt{\log(n)}\cdot\sqrt{\log(n)}}$$

$$= \frac{5n^3}{\sqrt{\log(n)}} = \infty$$

$$\Rightarrow \log(n) < 5n^3\sqrt{\log(n)}$$

③ $5n^3\sqrt{\log(n)}$ vs $7n^3\sqrt{\log(n)}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^3\sqrt{\log(n)}}{5n^3\sqrt{\log(n)}} = \frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow 5n^3\sqrt{\log(n)} \simeq 7n^3\sqrt{\log(n)}$$

(4) $7n^3\sqrt{\log(n)}$ vs $4^n n^2$

notaputingbase

$\log(7n^3\sqrt{\log(n)})$ $\log(4^n n^2)$

$\log(7) + 3\log(n) + \log(\sqrt{\log(n)})$ $n\cdot\log(4) + 2\log(n)$

$\Theta(\log(n))$ $\Theta(n)$

$\Theta(\log(n))$

$\Rightarrow 7n^3\sqrt{\log(n)}$ $4^n n^2$

(5) $4^n n^2$ vs $9^n n$

notaputingbase

$n\log(4) + 2\log(n)$ $n\cdot\log(9) + \log(n)$

$\Theta(n)$ $\Theta(n)$

$\Rightarrow$ ✗

they are equal!

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9^n \cdot n}{4^n \cdot n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{9^n}{n \cdot 4^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2.5^n}{n} = \infty \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow 4^n \cdot n^2 \;\not\prec\; 9^n \cdot n$$

(6) $9^n \cdot n$ vs $(10 + \sin(n)) \cdot 9^n \cdot n$

$\sin(n) \in [-1, 1]$

$10 + \sin(n) \in [9, 11]$

Λόγω της $10 + \sin(n)$ είναι > 0.

$$\Rightarrow 9^n n \prec (10 + \sin(n)) \cdot 9^n \cdot n$$

(7) $(10+\sin(n)) \cdot 9^n \cdot n$ vs $n!$

ще разглеждаме:

$9^n \cdot n$ vs $n!$

(!) $\log(n!) \asymp n \cdot \log(n)$

1) с формулата на Стирлинг

Д-во: 2) със свеждане на сбор до интеграл

логаритмуваме

$n \cdot \log(9) + \log(n) \prec n \cdot \log(n)$

$\asymp$

$\Theta(n)$

$\Rightarrow 9^n \cdot n \prec n!$

....

(3) $n!$ vs n^n

1) логаритмуване

$\log(n!)$ $\log(n^n)$

$n \cdot \log(n) \preceq n \log(n)$

$\Rightarrow$ Ниско !!

2) формално: $n! \preceq n^n \cdot \frac{\sqrt{n}}{e^n}$

$\Rightarrow n! \prec n^n$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n^n \cdot \frac{\sqrt{n}}{e^n}} = \frac{e^n}{\sqrt{n}} = \infty$

(4) n^n vs 3^{n^2}

логаритмуване

$\log(n^n)$ $\log(3^{n^2})$

$n \cdot \log(n)$ $\prec$ $n^2 \log(3)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot \log(3)}{n \cdot \log(n)} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{n \cdot \log(3)}{n \cdot \log(n)}$$

$$= \infty$$

(10) 3^{n^2} vs 2^{n^3}

параметризовать

$n^2 \cdot \log(3) < n^3 \cdot \log(2)$ ✓

ОТВ:

$\log(\log(n)) < \log(n) < \sqrt[3]{n} \cdot \log(n) = n^3 \cdot \log(n)$

$< n^n \cdot n^2 < 9^n \cdot n = (5 \cdot n(n) + 10) \cdot 9^n \cdot n < n!$

$< n^n < 3^{n^2} < 2^{n^3}$ ✓