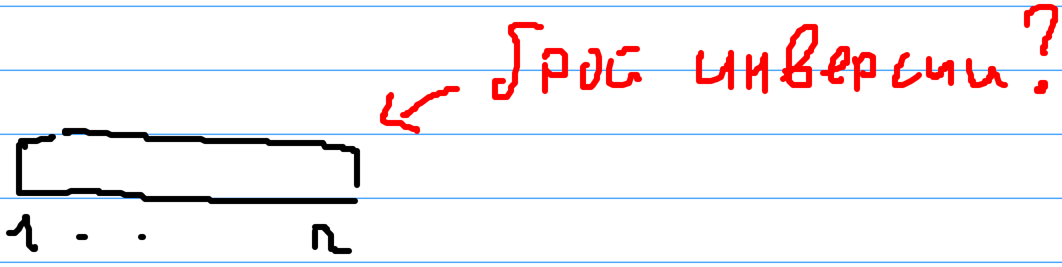
4

зад. Алгоритми за броене на инверсии



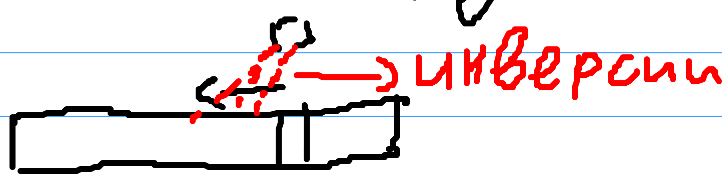
- $\forall i \forall j \in \{1 \ldots n\}$ $i<j \wedge arr[i] > arr[j]$.

  ↳ инверсия

- чрез метода на мехурчето,

  ↳ броим swap-овете

- чрез сортиране чрез вмъкване



- Макс. брой инверсии

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

- Даден е произволен масив с елементи от $\{1, 2 \ldots n\}$ без повторение

Среден брой инверсии:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

вероятност за инверсия

Домашно: Сложността на AICAP?

Анализ на сложността на рекурсивни алгоритми (част 2)

- Алгоритми изградени по по схемата "раздели и владей"

Алгоритмите изградени по схемата Р.В. се състоят в 3 фази:

- Раздели

- Ако входът е достатъчно голям, то той се разбива на малки части

- Ако входът е малък, то задачата се решава по тривиален начин.

- Владей
  - ↳ решаваме задачата за малките части
- Комбинирай
  - ↳ комбинираме решенията на малките части в решение за целия вход

Master theorem

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

$a \geq 1$, $b \geq 1$ и $f(n)$

асимптотично положителна ф-я

$$K = \log_b a$$

n^K $f(n)$

- 1сл $n^{K-\varepsilon} > f(n) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^K)$
- 2сл $n^K \asymp f(n) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^K \cdot \log(n))$
- 3сл $n^{K+\varepsilon} < f(n)$
  - Проверка за регулярност

$\exists c \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geq n_0$

$$a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \cdot f(n)$$

$\Rightarrow T(n) = \Theta(f(n))$

! 3-те сл. на М.Т **НЕ** СА разбиване на всички сл.

! Сравняваме броя на листата в дървото на рек. с $f(n)$

Зад

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

$a = 2 \quad b = 2$

$k = \log_b a = \log_2 2 = 1$

$n \qquad 1$

$\varepsilon = 0,1$

$n^{1 \cdot 0.1} > 1$

$\Rightarrow$ 1-ви случай на М.Т.

$$T(n) = \theta(n)$$

Зад $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$

$a = 1 \quad b = 2$

$k = \log_2 1 = 0$

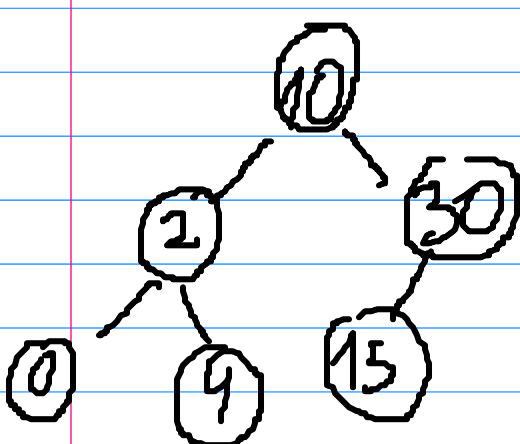
$n^0 = 1$

$n^k = n^0 = 1 \asymp f(n) = 1$

$\Rightarrow$ 2-ри сл на М.Т.

$$\Rightarrow T(n) = \theta(\log(n))$$

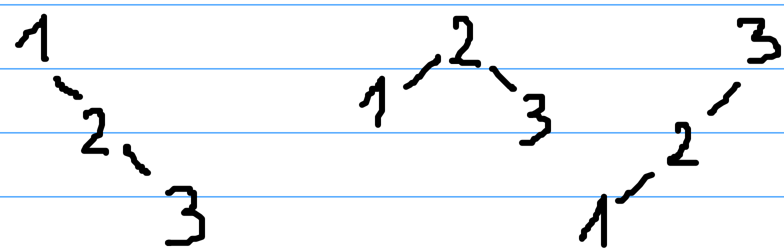
Зад 3 Търсене в BST



! Не знаем как изглежда дървото

Колко са всички BST-а с числата 1...n

При $n=3$

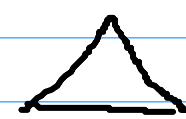


Броят им е C_n (n-тото число на Каталан)

- $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

$$\begin{cases} C_0 = 1 \\ C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} \end{cases}$$

- Най-добрият сл.



Ако дървото е балансирано

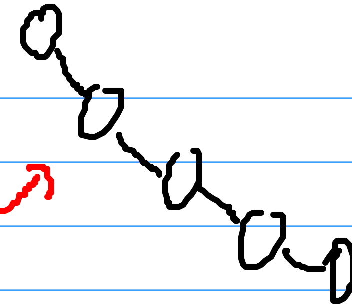
$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

Вече го решихме:

$$T(n) = \Theta(\log(n))$$

• Най-лош сл.

Ако дървото е "изродено"



$T(n) = T(n-1) + 1$

$T(n) = T(n-1) + 1 = T(n-2) + 1 + 1$

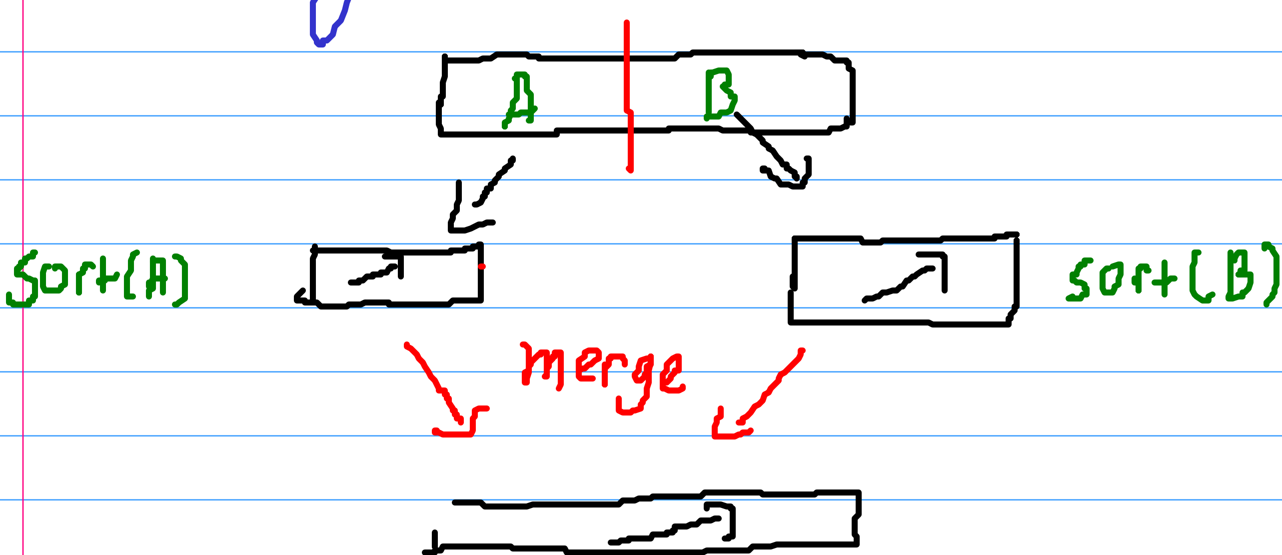
$\dots = \underbrace{T(0)}_{\Theta(1)} + \underbrace{1 + 1 + 1 + 1 \dots 1}_{n}$

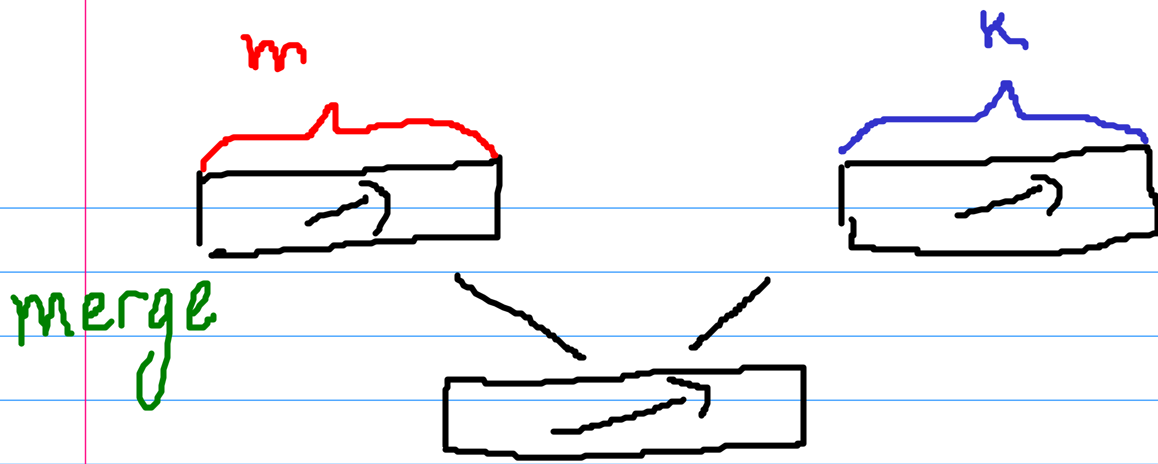
$T(n) = \Theta(n)$

Алгоритми за сортиране изградени по схемата Р.В.

1) Сортиране чрез сливане

Merge sort





$$merge = \Theta(m+k)$$

Анализ на Merge sort.

- $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$ → merge

$$a=2,\ b=2$$

$$k = \log_2 2 = 1$$

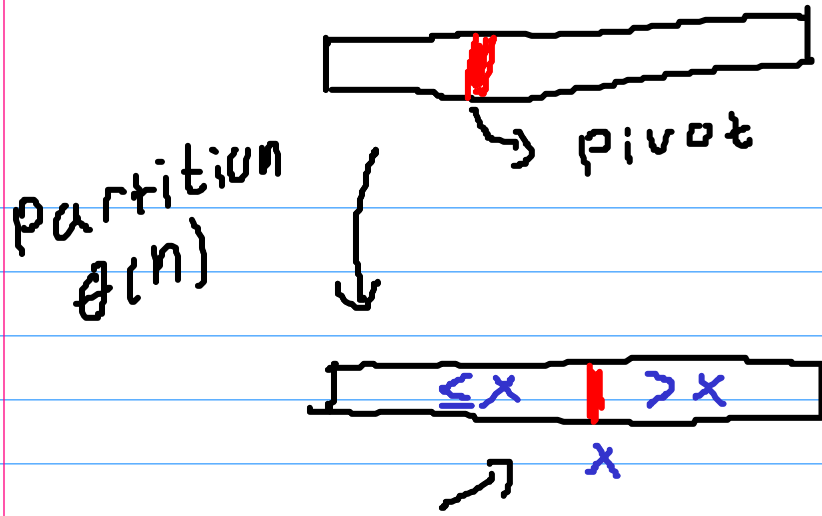
$$n^k = n \simeq n$$

- 2-ри сл. на М.Т

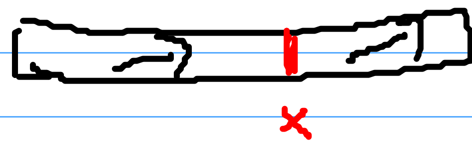
$$T(n) = \Theta(n \cdot \log(n))$$

- зад Бързо сортиране

Quick sort



X е на мястото си в сортираната редица.



$\Rightarrow$ масивът е сортиран

Анализ:

Най-добър сл.

- Ако разделителят (pivot-a) винаги е средният по големина

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

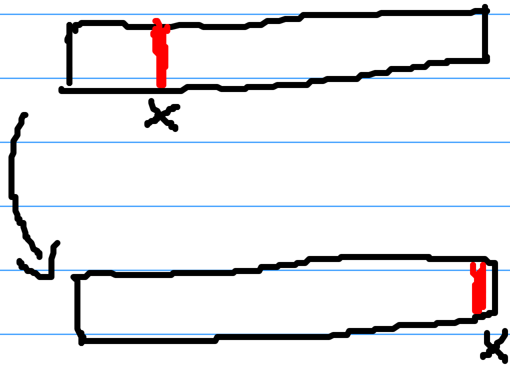
това рек. ур-е го решихме

$$T(n) = \Theta(n.\log(n))$$

- Най-лош сл.

Ако разделителят винаги

е най-големият / най-малкият елемент в масива



- $T(n) = T(n-1) + n$

$T(n) = T(n-1) + n = T(n-2) + (n-1) + n$

$= \underbrace{T(0)}_{\Theta(1)} + \underbrace{1+2+3+\dots+n}_{\Theta(n^2)}$

$\Rightarrow \Theta(n^2)$

зад

$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

$k = \log_2 4 = 2$

$n^k = n^2$

- 1сл. на М.Т. $\quad n^{2-0,1} > n$

$\Rightarrow \Theta(n^2)$

• зад $T(n) = T\left(\frac{5n}{6}\right) + 1$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{\frac{6}{5}}\right) + 1$$

$$k = \log_{\frac{6}{5}} 1 = 0$$

$$n^k = n^0 = 1 \asymp f(n) = 1$$

$\Rightarrow$ 2-ри сл. на М.Т.

$$\Theta(\log(n))$$

зад $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + \sqrt{n}\cdot n^2$

$$k = \log_2 4 = 2$$

$$n^k = n^2 \qquad \sqrt{n}\cdot n^2$$

• 3сл. $n^{k+\varepsilon} \prec n^2\sqrt{n}$ $\qquad \varepsilon = 0.1$

$\Rightarrow$ 3-ти сл. на М.Т.

• Проверка за регулярност

$$4\left(\frac{n}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{n}{2}} \le c \cdot n^2 \sqrt{n}$$

$$\cancel{4}\,\frac{n^2 \sqrt{n}}{\cancel{4}\,\sqrt{2}} \le c \cdot n^2 \cdot \sqrt{n}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad n_0 = 1$$

$$\Rightarrow \Theta(n^2 \sqrt{n})$$

~~Зад~~ $T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{n}{6}\right) + n^2$

- М. Т. не става
- развиване
- долна граница: n^2

$$n^2$$

$$\left(\frac{n}{3}\right)^2 \qquad \left(\frac{n}{6}\right)^2$$

$$\left(\frac{n}{9}\right)^2 \qquad \left(\frac{n}{18}\right)^2 \qquad \left(\frac{n}{18}\right)^2 \qquad \left(\frac{n}{36}\right)^2$$

$$n^2 \cdot \frac{5}{36}$$

$$n^2$$

$$\frac{n^2}{9} + \frac{n^2}{36} = \frac{5n^2}{36} \cdot \frac{5}{36}$$

$$\frac{n^2}{81} + \frac{n^2}{326} + \frac{n^2}{326} + \frac{n^2}{129} = \frac{25n^2}{1296}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} n^2 \left(\frac{5}{36}\right)^i = \frac{n^2}{1-\frac{5}{36}} = \boxed{\frac{36n^2}{31}}$$

горна граница

разглеждаме безкрайна сума

$$\sum_{i=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

$$\Rightarrow \Theta(n^2)$$

дървото има краен брой върхове

Зад $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n.\log(n)$

$$k = \log_4 3 = 0{,}79..$$

$$n^{0{,}79+\varepsilon} < n.\log(n) \qquad \varepsilon = 0{,}1$$

=> 3-ти сл. на М.Т.

- Проверка за регулярност.

$$\underbrace{3 . \frac{n}{4} . \log\left(\frac{n}{4}\right)}_{f\left(\frac{n}{4}\right)} \leq c . n . \log(n)$$

$c = \frac{3}{4}$ (за достатъчно голямо n)

=> $\Theta(n.\log(n))$

Зад $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \log(n)$

$$k = \log_2 1 = 0$$

$$n^k = n^0$$

- 1 сл. $n^{0-\varepsilon} > \log(n)$ ✗
- 2 сл $n^0 \asymp \log(n)$ ✗
- 3 сл $n^{0+\varepsilon} < \log(n)$ ✗

$\Rightarrow$ С М.Т. НЕ СТАВА!

- С ПОЛАГАНЕ:

$$n = 2^m$$

$$\underbrace{T(2^m)}_{S(m)} = T(2^{m-1}) + m$$

$$S(m) = S(m-1) + m$$

$$S(m) = \theta(m^2)$$

$$T(2^m) = \theta(m^2)$$

$$T(n) = \theta(\log^2(n))$$

! . Разширение на М.Т. !

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

!

$$f(n) = \theta(n^k \log^{t}(n))$$

$t \in \mathbb{N}^+$

$$\Rightarrow T(n) = \theta(n^k \log^{t+1}(n))$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \log(n)$$

$k = 0$

$n^k = n^0$ $\qquad n^0 \log^1(n)$

от разширението на М.Т.

$$T(n) = \theta(\log^2(n))$$

Зад

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n.\log(n)$$

$$K = \log_2 2 = 1$$

$$n^1 \log^1(n)$$

=> От разширението на М.Т.

$$\Rightarrow \theta(n.\log^2(n))$$