# ДАА

КН 2 поток / 4 инф.

4 домашни - 2.5 %

оценки: сем. контр 45 %

изпит 45 %

присъствие

Студенти от мин. год - 100 %

КН 1 поток - информация на лекция

Разглеждаме АЛГ:

- простота
- коректност
- бързодействие

Сложност на алгоритъм – функция по големина на входа

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

големина на входа — брой стъпки

Пример за големина на входа:

- сортиране на масив – големина на масив
- пресмятане $n!$ – $n$

Големината на входа я свеждаме до число!

Интересува ни как се държи алгоритъма при $\boxed{n \to \infty}$ (!)

[ Не ни интересува конкретната ф-я !!! ] (!)

[ Интересува ни само как нараства ф-ята ]

Кой алгоритъм да изберем?

Alg 1: $n$
Alg 2: $n^2$
Alg 3: $n \log(n)$
Alg 4: $n^n$
Alg 5: $n!$

коя ф-я нараства най-бавно??

Анализ на асимптотичното нарастване на ф-иите

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\qquad$ $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$O(f)$ — $\{g \mid g$ не нараства по-бързо от $f\}$

$\Omega(f)$ — $\{g \mid g$ не нараства по-бавно от $f\}$

$\Theta(f)$ — $\{g \mid g$ нараства толкова бързо, колкото $f\}$

$\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$

$o(f) = \{g \mid g$ нараства по-бавно от $f\}$

$\omega(f) = \{g \mid g$ нараства по-бързо от $f\}$

$n$ не нараства по-бързо от $n^2$ $\qquad$ $n \in O(n^2)$

! Има да записваме

$n^2+n \in \Theta(n^2)$ $\quad$ $n^2+n = O(n^2)$

На контролни:
дадено е множество от ф-ции и трябва да ги подредим по асимптотично нарастване.

$$f \preceq g \iff f \in O(g)$$

$$f \succeq g \iff f \in \Omega(g)$$

$$f \asymp g \iff f \in \Theta(g)$$

$$f \succ g \iff f \in \omega(g)$$

$$f \prec g \iff f \in o(g)$$

1) $\prec, \succ, \preceq, \succeq, \asymp$

са рефлексивни и транзитивни

$$f \preceq g \wedge g \preceq h \Rightarrow f \preceq h$$

Зад. Подредете по асимптотично нарастване следните функции:

- $7n^3\sqrt{\log(n)}$
- $9^n \cdot n$
- $n!$
- $n^n$
- $4^n n^2$
- $(10+\sin(n)) \cdot 9^n \cdot n$

- $\log(\log(n))$
- $5n^3\sqrt{\log(n)}$
- $\log(n)$
- $2^{n^3}$
- $3^{n^2}$

Правила:

$$\log(n) \prec n^{\alpha} \prec a^{n} \prec n! \prec n^{n} \prec 2^{n^{2}}$$

- $f \asymp g \rightarrow \log(f) \asymp \log(g)$
- $\log(f) \prec \log(g) \Rightarrow f \prec g$

$$\log(f) \succ \log(g) \Rightarrow f \succ g$$

$$\log(f) \preceq \log(g) \Rightarrow f \preceq g$$

$$\log(f) \succeq \log(g) \Rightarrow f \succeq g$$

$$f \succeq g \not\Rightarrow \log(f) \succeq \log(g)$$

$$f \preceq g \not\Rightarrow \log(f) \preceq \log(g)$$

$$\log(f) \asymp \log(g) \cancel{\Rightarrow} f \asymp g$$

$$f \text{ vs } g$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f}{g} \begin{cases} \to \infty & f \succ g \\ \to \text{const} \neq 0 & f \asymp g \\ \to 0 & f \prec g \end{cases}$$

$(7) = g + k$

$f \asymp \max(g, k)$

$n^2 + \log(n) + n \asymp n^2$

Нека имаме 11 функции трябва да направим точно 10 директни.

$f_1 \preceq f_2 \preceq f_3 \preceq f_4 \; --- \preceq f_{10}$

$\preceq$ – транзитивна

решение:

1) $\log(\log(n))$ vs $\log(n)$

Не! $\log(n) \preceq n \not\Rightarrow \log(\log(n)) \preceq \log(n)$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log(n)}{\log(\log(n))} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n \cdot \log(n)}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n} \cdot \log(n)}{\cancel{n}} = \infty$$

$$\Rightarrow \log(\log(n)) \prec \log(n)$$

2

$$\log(n) \quad vs \quad 5n^3 \sqrt{\log(n)}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{5n^3 \sqrt{\log(n)}}{\log(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{5n^3 \cancel{\sqrt{\log(n)}}}{\sqrt{\log(n)} \cdot \cancel{\sqrt{\log(n)}}}$$

$$= \frac{5n^3}{\sqrt{\log(n)}} = \infty$$

$$\Rightarrow \log(n) \prec 5n^3 \sqrt{\log(n)}$$

3

$$5n^3 \sqrt{\log(n)} \quad vs \quad 7n^3 \sqrt{\log(n)}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{7\cancel{n^3 \sqrt{\log(n)}}}{5\cancel{n^3 \sqrt{\log(n)}}} = \frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow 5n^3 \sqrt{\log(n)} \simeq 7n^3 \sqrt{\log(n)}$$

(4) $7n^3\sqrt{\log(n)}$ vs $4^n n^2$

логаритмуваме

$\log(7n^3\sqrt{\log(n)})$ $\qquad$ $\log(4^n n^2)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\underline{n.\log(4)}+2\log(n)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\Theta(n)$

$\log(7)+3\underline{\log(n)}+\log(\sqrt{\log(n)})$

$\Theta(\log(n))$

$\Rightarrow 7n^3\sqrt{\log(n)} \prec 4^n n^2$

(5) $4^n n^2$ vs $9^n n$

логаритмуваме

$n\log(4)+2\log(n)$ $\qquad$ $n.\log(9)+\log(n)$

$\Theta(n)$ $\qquad$ $\Theta(n)$

$\Rightarrow \cancel{\prec}$

този метод не стана

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9^n \cdot n}{4^n \cdot n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{9^n}{n \cdot 4^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2.5^n}{n} = \infty \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow 4^n \cdot n^2 < 9^n \cdot n$$

(b) $\quad 9^n \cdot n \quad vs \quad (10 + \sin(n)) \, 9^n \cdot n$

$$\underbrace{10 + \underbrace{\sin(n)}_{[-1,\ 1]}}_{[9,\ 11]}$$

Поради това на $10 + \sin(n)$ е $\Theta$.

$$\Rightarrow 9^n n \asymp (10 + \sin(n)) \cdot 9^n \cdot n$$

(7) $(10+\sin(n))\cdot 9^n \cdot n$ vs $n!$

ще разглеждаме:

$9^n \cdot n$ vs $n!$

(!) $\log(n!) \asymp n\cdot\log(n)$

Д-во: 1) с формулата на Стирлинг

2) със сведение на сбор до интеграл

логаритмуваме

$n\cdot\log(9)+\log(n) \prec n\cdot\log(n)$

$\Theta(n)$

$\Rightarrow 9^n \cdot n \prec n!$

(8) $n!$ vs $n^n$

1) логаритмуване

$\log(n!)$ $\log(n^n)$

$n \cdot \log(n) \simeq n \log(n)$

$\not\Rightarrow$ нищо!

формално: $n! \simeq n^n \cdot \frac{\sqrt{n}}{e^n}$ !

$\Rightarrow n! < n^n$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^n}}{\cancel{n^n} \cdot \frac{\sqrt{n}}{e^n}} = \frac{e^n}{\sqrt{n}} = \infty$

(9) $n^n$ vs $3^{n^2}$

логаритмуване

$\log(n^n)$ $\log(3^{n^2})$

$n \cdot \log(n) < n^2 \log(3)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot\log(3)}{n\cdot\log(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\cdot n\cdot\cancel{\log(3)}}{\cancel{n}\cdot\log(n)}$$

$$= \infty$$

10) $3^{n^2}$ vs $2^{n^3}$

логаритмуване

$$n^2\cdot\underline{\log(3)} \prec n^3\cdot\underline{\log(2)}$$ ✓

Отг:

$$\log(\log(n)) \prec \log(n) \prec 5n^3\sqrt{\log(n)} \asymp n^3\sqrt{\log(n)}$$

$$\prec 4^n n^2 \prec 9^n\cdot n \asymp (5\cdot\sin(n)+10)\cdot 9^n\cdot n \prec n!$$

$$\prec n^n \prec 3^{n^2} \prec 2^{n^3}$$ ✓