ДАА

- КН 2 поток / Инф.
  4 домашни – 2.5 %
  сем. контр 45 % } присъствени
  изпит 45 %
  Студенти от мин. год. – само изпит (100%)
- КН 1 поток – информация на лекция

1) Когато разглеждаме алгоритми се интересуваме от:

- простота
- коректност
- бързодействие

Сложност на алгоритъм:

функция по големина на входа

$f: \underbrace{\mathbb{N}}_{\text{големина на входа}} \to \underbrace{\mathbb{N}}_{\text{брой стъпки}}$

Пример за големина на входа:

- сортиране на масив – големина на масив
- пресмятане $n!$ – n

! Големината на входа я свеждаме до число!

Интересува ни
как се държи алгоритъма
при $\boxed{n \to \infty}$

[Не ни интересува
конкретната ф-я !!!]

[Интересува ни само
как нараства ф-ята]

Кой алгоритъм да изберем?

Alg 1:	n	
Alg 2:	n^2	
Alg 3:	$n \cdot \log(n)$	
Alg 4:	n^n	
Alg 5:		
Alg 6:	$n!$	

Коя ф-я нараства най-бавно??

Анализ на асимптотичното
нарастване на ф-ите

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\qquad$ $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$O(f)$ – $\{g \mid g$ не нараства по-бързо от $f\}$

$\Omega(f)$ – $\{g \mid g$ не нараства по-бавно от $f\}$

$\Theta(f)$ – $\{g \mid g$ нараства толкова бързо, колкото $f\}$

$$\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$$

$o(f)$ = $\{g \mid g$ нараства по-бавно от $f\}$

$\omega(f)$ = $\{g \mid g$ нараства по-бързо от $f\}$

n не нараства по-бързо от n^2 $\qquad$ $n \in O(n^2)$

$n^2+n \in \Theta(n^2)$

записване
тъй:

$n^2+n = O(n^2)$

на контролни:
дадено е множество от ф-ции
и трябва да ги подредим
по асимптотично нарастване

$f \preceq g \iff f \in O(g)$

$f \succeq g \iff f \in \Omega(g)$

$f \asymp g \iff f \in \Theta(g)$

$f \succ g \iff f \in \omega(g)$

$f \prec g \iff f \in o(g)$

Θ, Ω, O, $\leq$, $\succeq$, $\asymp$

са транзитивни

$f \preceq g \;\wedge\; g \preceq k \Rightarrow f \preceq k$

зад. Подредете по асимптотично нарастване следните функции:

- $\boxed{7n^3\sqrt{\log(n)}}$
- $\boxed{9^n \cdot n}$
- $\boxed{n!}$
- $\boxed{n^n}$
- $\boxed{4^n n^2}$
- $\boxed{(10+\sin(n)) \cdot 9^n \cdot n}$

- $\boxed{\log(\log(n))}$
- $\boxed{5n^3\sqrt{\log(n)}}$
- $\boxed{\log(n)}$
- $\boxed{2^{n^3}}$
- $\boxed{3^{n^2}}$

Правила:

$$\log(n) \prec n^{\alpha} \prec a^{n} \prec n! \prec n^{n} \prec 2^{n^{2}}$$

- $f \asymp g \rightarrow \log(f) \asymp \log(g)$
- $\log(f) \prec \log(g) \Rightarrow f \prec g$

$$\log(f) \succ \log(g) \Rightarrow f \succ g$$

$$\log(f) \preceq \log(g) \Rightarrow f \preceq g$$

$$\log(f) \succeq \log(g) \Rightarrow f \succeq g$$

$$f \succ g \not\Rightarrow \log(f) \succ \log(g)$$

$$f \prec g \not\Rightarrow \log(f) \prec \log(g)$$

$$\log(f) \asymp \log(g) \not\Rightarrow f \asymp g$$

$$f \text{ vs } g$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f}{g} \to \infty \quad f \succ g$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f}{g} \to \text{const} \neq 0 \quad f \asymp g$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f}{g} \to 0 \quad f \prec g$$

$\textcircled{f} = g + k$

$f \asymp \max(g, k)$

$n^2 + \log(n) + n \asymp n^2$

Ако имаме $\boxed{11}$ функции трябва да направим точно $\boxed{10}$ директни . .

$f_1 \preceq f_2 \preceq f_3 \preceq f_4 \dots \preceq f_{10}$

правим 10 (не 55) сравнения, благодарение на транзитивността на $\preceq$

$\boxed{\text{Решение}}$:

1) $\log(\log(n))$ vs $\log(n)$

Не! $\log(n) \preceq n \not\Rightarrow \log(\log(n)) \preceq \log(n$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log(n)}{\log(\log(n))} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n \cdot \log(n)}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n} \cdot \log(n)}{\cancel{n}} = \infty$$

$$\Rightarrow \log(\log(n)) < \log(n)$$

② $\log(n)$ vs $5n^3\sqrt{\log(n)}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{5n^3\sqrt{\log(n)}}{\log(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{5n^3\cancel{\sqrt{\log(n)}}}{\sqrt{\log(n)} \cdot \cancel{\sqrt{\log(n)}}}$$

$$= \frac{5n^3}{\sqrt{\log(n)}} = \infty$$

$$\Rightarrow \log(n) < 5n^3\sqrt{\log(n)}$$

③ $5n^3\sqrt{\log(n)}$ vs $7n^3\sqrt{\log(n)}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{7\cancel{n^3\sqrt{\log(n)}}}{5\cancel{n^3\sqrt{\log(n)}}} = \frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow 5n^3\sqrt{\log(n)} \simeq 7n^3\sqrt{\log(n)}$$

4) $7n^3\sqrt{\log(n)}$ vs $4^n n^2$

логаритмуваме

$\log(7n^3\sqrt{\log(n)})$ $\qquad$ $\log(4^n n^2)$

$\| \qquad\qquad\qquad \downarrow$

$\log(7) + 3\underline{\log(n)} + \log(\sqrt{\log(n)})$ $\qquad$ $\underline{n\cdot\log(4)} + 2\log(n)$

$\| \qquad\qquad\qquad \|$

$\Theta(\log(n))$ $\qquad$ $\Theta(n)$

$\Rightarrow 7n^3\sqrt{\log(n)} \prec 4^n n^2$

5) $4^n n^2$ vs $9^n n$

логаритмуваме

$n\log(4) + 2\log(n)$ $\qquad$ $n\cdot\log(9) + \log(n)$

$\Theta(n)$ $\qquad$ $\Theta(n)$

$\Rightarrow \cancel{\prec}$

този метод не стана

$$\lim_{n \to \infty} \frac{9^n \cdot n}{4^n \cdot n^2} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{9^n}{n \cdot 4^n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{9}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2.5^n}{n} = \infty \checkmark$$

$$\Rightarrow 4^n \cdot n^2 \prec 9^n \cdot n$$

б)

$$9^n \cdot n \quad vs \quad \underbrace{\Big(10 + \underbrace{\sin(n)}_{[-1, 1]}\Big)}_{[9, 11]} \, 9^n \cdot n$$

Порядъкът на $10 + \sin(n)$ е O.

$$\Rightarrow 9^n n \asymp (10 + \sin(n)) \cdot 9^n \cdot n$$

7) $(10+\sin(n))\cdot 9^n \cdot n$ vs $n!$

ще разглеждаме:

$9^n \cdot n$ vs $n!$

! $\log(n!) \asymp n\cdot\log(n)$

Д-во: 1) с формулата на Стирлинг

2) със сведение на сбор до интеграл

логаритмуване

$\underbrace{n\cdot\log(9)}_{\asymp\, \Theta(n)} + \log(n) \prec n\cdot\log(n)$

$\Rightarrow 9^n \cdot n \prec n!$

③ $n!$ vs n^n

1) логаритмуване

$\log(n!)$ $\qquad$ $\log(n^n)$

$n.\log(n) \simeq n\log(n)$

$\not\Rightarrow$ нищо!

формално: $n! \simeq n^n \cdot \frac{\sqrt{n}}{e^n}$ (!)

$\Rightarrow n! < n^n$ $\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^n}}{\cancel{n^n} \cdot \frac{\sqrt{n}}{e^n}} = \frac{e^n}{\sqrt{n}} = \infty$

④ n^n vs 3^{n^2}

логаритмуване

$\log(n^n)$ $\qquad$ $\log(3^{n^2})$

$n.\log(n) < n^2\log(3)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot\log(3)}{n\cdot\log(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\cdot n\cdot\log(3)}{\cancel{n}\cdot\log(n)}$$

$$= \infty$$

10) 3^{n^2} vs 2^{n^3}

логаритмуване

$$n^2\cdot\log(3) < n^3\cdot\log(2) \quad ✓$$

Отг:

$$\log(\log(n)) \prec \log(n) \prec 5n^3\sqrt{\log(n)} \asymp n^3\sqrt{\log(n)}$$

$$\prec 4^n n^2 \prec 9^n\cdot n \asymp (5\sin(n)+10)\cdot 9^n\cdot n \prec n!$$

$$\prec n^n \prec 3^{n^2} \prec 2^{n^3} \quad ✓$$