ДАА

1. Оценяване

- КН 2 поток / информатика

  4 домашни   4x2.5%

  Сем. контролно   45 %
  изпит   45 %   присъствен

- студенти от мин. год. - 100% изпит

- КН 1 поток — информация за оценяването на лекции

1) Когато разглеждаме алгоритми се интересуваме от:

- простота
- коректност
- бързодействие

! Сложност на алгоритми:

ф-я по големината на входа

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ← # брой стъпки

големина на входа

Пример за големина на входа:

- Сортиране на масив – размерът на масива
- Пресмятане на n! – n

! Големината на входа я свеждаме до число / числа

Интересува ни !

как се държи алгоритъма

при $\boxed{n \to \infty}$

[Не ни интересува конкретната функция] !

[Интересува ни само как нараства ф-ята]

Кой алгоритъм да изберем?

Alg1: $n \cdot \log(n)$

Alg2: n^2

Alg3: $n!$

Коя ф-я нараства най-бавно?

Анализ на асимптотично

Нарастване на ф-ците

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\qquad\qquad$ $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$O(f) = \{ g \mid g$ не нараства по-бързо от $f \}$

↳ $O(f) = \{ g \mid \exists c\, (c > 0)\ \exists n_0\ \forall n > n_0 : 0 \leq g(n) \leq c f(n) \}$

$\Omega(f) = \{ g \mid g$ не нараства по-бавно от $g \}$

$\Omega(f) = \{ g \mid \exists c\, (c > 0)\ \exists n_0\ \forall n > n_0 : 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n) \}$

$\Theta(f) = \{ g \mid g$ нараства (*) толкова бързо колкото $f \}$

$$\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$$

$o(f) = \{ g \mid g$ нараства (*) по-бавно от $f \}$

$\omega(f) = \{ g \mid g$ нараства (*) по-бързо от $f \}$

(*) с точност до константен множител

n не нараства по-бързо от n^2

$\Rightarrow \quad n \in O(n^2)$

Записване така:

$n^2+n \in \Theta(n^2)$ $\qquad$ $n^2+n = \Theta(n^2)$

НА КОНТРОЛНО/ИЗПИТ:

Дадено е м-во от ф-ци

!

Да ги подредите по асимптотично нарастване

$f \preceq g \leftrightarrow f \in O(g)$

$f \succeq g \leftrightarrow f \in \Omega(g)$

$f \asymp g \leftrightarrow f \in \Theta(g)$

$f \succ g \leftrightarrow f \in \omega(g)$

$f \prec g \leftrightarrow f \in o(g)$

⚠ $\prec, \succ, \preceq, \succeq, \asymp$

са транзитивни

$$f \preceq g \wedge g \preceq k \Rightarrow f \preceq k$$

зад Подредете по асимптотично нарастване следните ф-ии.

1) $7n^3\sqrt{\log(n)}$, 2) $\log(\log(n))$

3) $9^n \cdot n$, 4) $5n^3\sqrt{\log(n)}$

5) $n!$, 6) $\log(n)$

7) n^n, 8) 2^{n^3}

9) $4^n n^2$, 10) 3^{n^2}

11) $(10+\sin(n)) \cdot 9^n \cdot n$

ПРАВИЛА:

$$\log(n) \prec n^2 \prec a^n \prec n! \prec n^n \prec 2^{n^2}$$

- $f \asymp g \to \log(f) \asymp \log(g)$
- $\log(f) \prec \log(g) \Rightarrow f \prec g$

$\log(f) \succ \log(g) \Rightarrow f \succ g$

$\log(f) \preceq \log(g) \Rightarrow f \preceq g$

$\log(f) \succeq \log(g) \Rightarrow f \succeq g$

$\log(f) \asymp \log(g) \not\Rightarrow f \asymp g$

$f \succ g \not\Rightarrow \log(f) \succ \log(g)$

$f \prec g \not\Rightarrow \log(f) \prec \log(g)$

Метод с границата на частното

f vs g

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f}{g} = \begin{cases} \infty & (f \succ g) \\ const & (f \asymp g) \\ 0 & (f \prec g) \end{cases}$$

$f = g + k$

$f \asymp \max(g, k)$

$n^2 + \log(n) + n \asymp n^2$

Имаме точно $\boxed{11}$ функции

$\Rightarrow$ трябва да извършим точно 10 сравнения на непосредствени съседи в подредбата.

$f_1 < f_2 < f_3 \ldots < f_{11}$

извършваме 10 (а не 55) сравнения благодарение на транзитивността на $\preceq$

РЕШЕНИЕ:

1. $\log(\log(n))$ vs $\log(n)$

Не! $\log(n) < n \not\Rightarrow \log(\log(n)) < \log(n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{\log(\log(n))} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n.\log(n)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}.\log(n)}{\cancel{n}} = \infty$$

$$\Rightarrow \log(\log(n)) < \log(n)$$

2 $\log(n)$ vs $5n^3\sqrt{\log(n)}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3\sqrt{\log(n)}}{\log(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3\cancel{\sqrt{\log(n)}}}{\sqrt{\log(n)}\cdot\cancel{\sqrt{\log(n)}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3}{\sqrt{\log(n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{15n^2}{\frac{1}{2n\sqrt{\log(n)}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{30n^3\sqrt{\log(n)}}{1} = \infty$$

$$\boxed{\Rightarrow \log(n) < 5n^3\sqrt{\log(n)}}$$

3 $5n^3\sqrt{\log(n)}$ vs $7n^3\sqrt{\log(n)}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7\cancel{n^3\sqrt{\log(n)}}}{5\cancel{n^3\sqrt{\log(n)}}} = \frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow 5n^3\sqrt{\log(n)} \simeq 7n^3\sqrt{\log(n)}$$

(4) $7n^3\sqrt{\log(n)}$ vs $4^n n^2$

• ЛОГАРИТМУВАМЕ

$$\log\left(7n^3\sqrt{\log(n)}\right) \qquad \log(4^n n^2)$$

$$\parallel \qquad \downarrow$$

$$\underbrace{\log(7)+3.\log(n)+\log\left(\sqrt{\log(n)}\right)}_{\Theta(\log(n))} \qquad \underbrace{\underline{n.\log(4)}+2\log(n)}_{\Theta(n)}$$

$$\Rightarrow 7n^3\sqrt{\log(n)} < 4^n n^2$$

(5) $4^n n^2$ vs $9^n n$

логаритмуваме

$$\underbrace{n\log(4)+2\log(n)}_{\Theta(n)} \qquad \underbrace{n.\log(9)+\log(n)}_{\Theta(n)}$$

$$\cancel{\Rightarrow}\ 4^n n^2 \simeq 9^n n$$

С този метод не става!

$$\lim_{n \to \infty} \frac{9^n \cdot n}{4^n \cdot n^2} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{9^n}{n \cdot 4^n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{9}{4}\right)^n \frac{1}{n} =$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2.5^n}{n} = \infty$$

$$\Rightarrow \quad 4^n \cdot n^2 < 9^n \cdot n$$

6

$$9^n \cdot n \quad vs \quad \underbrace{\left(10 + \underbrace{\sin(n)}_{[-1,1]}\right)}_{[9,11]} 9^n \cdot n$$

!

Порядъкът на $10 + \sin(n)$ е 0

$$\Rightarrow \quad 9^n n \asymp (10 + \sin(n)) \cdot 9^n \cdot n$$

7. $(10+\sin(n)) \cdot 9^n \cdot n \quad vs \quad n!$

разглеждаме:

$$9^n \cdot n \quad vs \quad n!$$

! $\log(n!) \asymp n \cdot \log(n)$

Д-во: 1) с формулата на Стирлинг

2) със свеждане на сбор до интеграл

Логаритмуваме:

$$\underbrace{n \cdot \log(9) + \log(n)}_{\Theta(n)} \prec n \cdot \log(n)$$

$$\Rightarrow \quad 9^n \cdot n \prec n!$$

....

8) $n!$ vs n^n

Опитваме с логаритмуване

$\log(n!)$ $\log(n^n)$

$n.\log(n) \simeq n\log(n)$

$\Rightarrow$ Нищо!!

! $n! \simeq n^n \cdot \frac{\sqrt{n}}{e^n}$!

$\Rightarrow n! < n^n$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^n}}{\cancel{n^n}\frac{\sqrt{n}}{e^n}} = \frac{e^n}{\sqrt{n}} = \infty$

9) n^n vs 3^{n^2}

Логаритмуваме:

$\log(n^n)$ $\log(3^{n^2})$

$n.\log(n) < n^2\log(3)$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 \cdot \log(3)}{n \cdot \log(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n} \cdot n \cdot \log(3)}{\cancel{n} \cdot \log(n)}$$

$$= \infty$$

10

$$3^{n^2} \quad \text{vs} \quad 2^{n^3}$$

Логаритмуваме

$$n^2 \cdot \underline{\log}(3) \prec \checkmark \; n^3 \cdot \underline{\log}(2)$$

Отг:

$$\log(\log(n)) \prec \log(n) \prec 5n^3\sqrt{\log(n)} \asymp n^3\sqrt{\log n}$$

$$\prec 4^n n^2 \prec 9^n \cdot n \asymp (\sin(n)+10) \cdot 9^n \cdot n \prec n!$$

$$\prec n^n \prec 3^{n^2} \prec 2^{n^3} \quad \checkmark$$