8

Сложност и коректност на рекурсивни алгоритми

- Коректност

1) Ако приключи, то ще върне ли верен резултат?

2) Дали ще приключи?

- Сложност

Каква е сложността?

~~зад 1~~

Коректност

1)

power(n, k) връща $\begin{cases} 1 & n=k=0 \\ n^k & \text{else} \end{cases}$

1 сл. $n = k = 0$

На ред 8 връщаме 1 ✓

2 сл.

Индукция по k

база: $k=0$ $n^k = n^0 = 1$

На ред 8 връщаме 1 ✓

И.П. Нека за всяко m $m < k$

$power(n, m) = n^m$

И.С. $power(n, k) = ?$

$k \geq 1$

1 сл К е четно

power(n, k) връща

$\text{power}(n, K/2) \cdot \text{power}(n, K/2)$

$\downarrow$ и.п $\downarrow$ и.п

$n^{K/2}$ $n^{K/2}$

$\frac{K}{2} \in \mathbb{N}$ защото К е четно

$n^{\frac{K}{2}} \cdot n^{\frac{K}{2}} = \boxed{n^K}$ връщане на ред 13 ✓

2 сл. К е нечетно

тогава power(n, K) връща

$n * \underbrace{\text{power}(n, K-1)}_{n^{K-1} \quad \text{и.п}} = n \cdot n^{K-1} = \boxed{n^K}$ ✓

връщане на ред 17

2) Дали ще приключи?

Да допуснем, че не приключва

$K', K'', K''' \ldots$

последователни с-ти на K

K^x $\quad\quad$ K^{x+1}

$K^{x+1} = K^x/2$ (K^x е четно)

$\Rightarrow K^x > K^{x+1}$ ✓

$K^{x+1} = K^x - 1$ (K^x е нечетно)

$\Rightarrow K^x > K^{x+1}$ ✓

Но тогава редицата е безкрайно спускане.

Но $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ е фундирано

$\Rightarrow$ power терминира.

Сложност

K	K(2)
21	$10101_{(2)}$
20	$1010\cancel{0}_{(2)}$
10	$101\cancel{0}$
5	101
4	$10\cancel{0}$
2	10

Best case:

$10\ldots0$ – $\log(k)$

Worst case:

$11\ldots11$ – $2 \cdot \log(k)$

$\Rightarrow \Theta(\log(k))$

~~зад 2~~

Коректност

1) task2 връща $\lceil \frac{n}{2} \rceil$

с индукция по n.

База : $n=0$ $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ На ред 8 връщаме 0 ✓

И.П. Нека за всяко $m<n$ task2 връща $\lceil \frac{m}{2} \rceil$

И.С. за $n \geq 1$

1сл. n е четно $n=2k$ $\boxed{\lceil \frac{n}{2} \rceil = k}$

$$\underbrace{task2(n-2)}_{\lceil \frac{n-2}{2} \rceil \text{ и.п}} + 1 = \left\lceil \frac{2k-2}{2} \right\rceil + 1 =$$

$= k - 1 + 1 = k$ На ред 11 връщаме $\boxed{k}$ ✓

2 сл. n е нечетно $n = 2k+1$

$$\boxed{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = k+1}$$

$$task2(n) = \underbrace{task2(n+3)}_{task2(n+1)+1} - 1 =$$

от деф. на task3

$$= \underbrace{task2(n+1)}_{task2(n-1)+1} + 1 - 1 =$$

от деф. на task3

$$= \underbrace{task2(n-1)}_{\text{и.п}} + 1 + \cancel{1} - \cancel{1} = \boxed{k+1} \checkmark$$

$$\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2k+1-1}{2} \right\rceil = k$$

2) Дали ще приключи?

1 сл. n е четно

$$n', \; n'', \; n''', \; n''''$$

$>$ $>$ $>$ $>$

четни

$$n^x > n^{x+1} \Rightarrow \text{терминира}$$

2 сл. n е нечетно

$$task2(n) \to task2(\underbrace{n+3}_{\text{четно}}) \longrightarrow \dots$$

Терминира от сл. 1

- Сложност

$\theta(n)$

зад 3

Коректност

1) task3(n) връща 3^n

База: $n=0$ връщаме 1 $(3^0 = 1)$ ✓

И.П.: За всяко $m < n$ $task3(m) = 3^m$

И.С.: $n \geq 1$

$$res = \underbrace{task3(n-1)}_{3^{n-1}} + \underbrace{task3(n-1)}_{3^{n-1}}$$

до ред 18 $res = 2 \cdot 3^{n-1}$

Ще покажем, че в if-a ще увеличим res с 3^{n-1}

1сл. n е нечетно $n = 2k+1$

$(3^{n-1} = 3^{2k})$

$$task3\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)^2 = \underbrace{task3(k)^2}_{3^k \text{ и.п.}} =$$

$$= 3^{k^2} = 3^k \cdot 3^k = 3^{2k} = 3^{n-1}$$ ✓

2 сл. n е четно $n = 2k$

$3^{n-1} = 3^{2k-1}$

$$3 \cdot task3\left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right)^2 =$$

$$= 3 \cdot task3\left(\left\lfloor \frac{2k-1}{2} \right\rfloor\right)^2 =$$

$$= 3 \cdot \underbrace{task3(k-1)}_{\text{и.п}} =$$

3^{k-1}

$$= 3 \cdot \left(3^{k-1}\right)^2 = 3 \cdot 3^{2k-2} = 3^{2k-1}$$

$$= 3^{n-1} \checkmark$$

$$\underset{\text{(преди if-a)}}{2 \cdot 3^{n-1}} + \underset{\text{(if-a)}}{3^{n-1}} = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n \checkmark$$

2) Дали ще приключи?

На всяка стъпка n намаля

$\Rightarrow$ терминира

Сложност

$Power = \Theta(k)$

В task3 винаги извикваме power(, 2)

$\Rightarrow$ Power е $\Theta(1)$ в рамките на task3

$$T(n) = \underbrace{2T(n-1)}_{2^n} + \underbrace{T\left(\frac{n}{2}\right)}_{\log(n)} + 1$$

Получаваме $\Theta(2^n)$

Доказателство:

1)

$$T(n) = \Omega(2^n)$$

$$(\exists c_1)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)$$

$$T(n) \geq c_1 \cdot 2^n$$

С индукция по n

База:

и.п. $\forall k < n \quad T(k) \geq c_1 2^k$

и.с. $T(n) \geq c_1 \cdot 2^n$

$$T(n) = 2\underbrace{T(n-1)}_{(\text{и.п.}) \geq c_1 2^{n-1}} + \underbrace{T\left(\frac{n}{2}\right)}_{\text{и.п.}} + 1$$

$$T(n) \geq 2 \cdot (c_1 \cdot 2^{n-1}) + c_1 2^{\frac{n}{2}} + 1$$

$$T(n) \geq c_1 2^n + c_1 2^{\frac{n}{2}} + 1 \geq c_1 2^n$$

$$T(n) \geq c_1 \cdot 2^n$$

2) $T(n) = O(2^n)$

$$(\exists c_2)(\exists n_1)(\forall n \ge n_1)$$

$$T(n) \le c_2\, 2^n$$

И.П. $\forall k < n \quad T(k) \ge c_1 2^k$

И.С. $T(n) = \underbrace{2T(n-1)}_{\text{и.п.}} + \underbrace{T\left(\frac{n}{2}\right)}_{\text{и.п}} + 1$

$$T(n) \le 2.(c_2.2^{n-1}) + c_2 2^{\frac{n}{2}} + 1$$

$$T(n) \le c_2.2^n + c_2 2^{\frac{n}{2}} + 1$$

$$\cancel{\Rightarrow}\ T(n) \le c_2.2^n$$

(!) Засилваме И.П.

$$T(n) \le c_2.2^n - n \le c_2.2^n \Rightarrow T(n) \le c_2.2^n$$

$$T(n) = 2T(n-1) + T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

$$T(n) \le 2\left(c_2.2^{n-1} - (n-1)\right) + c_2 2^{\frac{n}{2}} - \frac{n}{2} + 1$$

$$T(n) \le \underbrace{c_2.2^n - 2n + 3 + c_1 2^{\frac{n}{2}} - \frac{n}{2}}_{A} \le c_2.2^n - n$$

$$T(n) \leq A \overset{?}{\leq} C_2 \cdot 2^n - n$$

$$A \leq C_2 2^n - n$$

$$\underbrace{-2n}+\underbrace{3}+\underbrace{C_2 2^{\frac{n}{2}}}_{\text{расте най-бързо}} - \underbrace{\frac{n}{2}} + \underbrace{n} \leq 0$$

$$\Rightarrow A \cancel{\leq} C_2 \cdot 2^n - n$$

! Засилваме И.П. (2)

$$T(n) \leq C_2 2^n - (1,5)^n$$

Нека $C_2 = 1$

$$T(n) = 2T(n-1) + T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

$$T(n) \leq 2\left(2^{n-1} - 1{,}5^{n-1}\right) + 2^{\frac{n}{2}} - 1{,}5^{\frac{n}{2}} + 1$$

$$T(n) \leq \underbrace{2^n - 2 \cdot 1{,}5^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} - 1{,}5^{\frac{n}{2}} + 1}_{A}$$

$T(n) \leq A$ ✓ $\quad\quad$?? $A \leq 2^n - 1{,}5^n$

$$2^n - 2 \cdot 1{,}5^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} - 1{,}5^{\frac{n}{2}} + 1 \leq 2^n - 1{,}5^n$$

$$\underbrace{-2 \cdot 1{,}5^{n-1}}_{\text{расте най-бързо}} + \underbrace{2^{\frac{n}{2}}} - \underbrace{1{,}5^{\frac{n}{2}}} + \underbrace{1} + \underbrace{1{,}5^n} \leq 0$$

За $n \geq 18$ ✓

$$T(n) \leq 2^n - 1{,}5^n$$

$$\Rightarrow T(n) \leq C_2 \cdot 2^n$$ ✓

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(2^n)$$

Зад 4

Коректност

1) task4 връща $n!$

База: $n=15$ връща 1307674368000 $(=15!)$ ✓

И.П: За всяко $m > n$ $task4(m) = m!$

И.С за n $(n<15)$

и.п.

$$task4(n) = \frac{task4(n+1)}{n+1} = \frac{(n+1)!}{n+1} = n!$$ ✓

2) Дали ще приключи?

Не!

$\langle \mathbb{N}, > \rangle$ не е фундирано

$\Rightarrow$ Има безкрайно спускане!