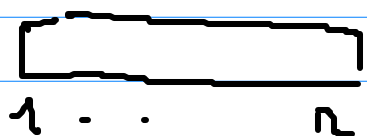


4

309. Алгоритми за броење на инверсии

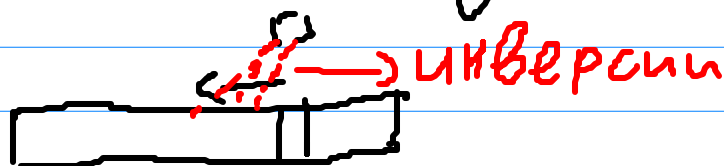
← Број инверсии?



- $\forall i \forall j \in \{1 \dots n\} \quad i < j \wedge \text{arr}[i] > \text{arr}[j]$
↗ инверсия

- Чрез метода на мехурчето
↳ Број на swap-овите

- Чрез сортирање чрез вмзвивање



- Макс. Број инверсии

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

- Даден е произволен масив
с елементи од $\{1, 2 \dots n\}$
Без повторение

Среден брой инверсии:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

Вероятност
за инверсия

Домашно: Спирността на AISCAR?

Анализ на спирността
на рекурсивни алгоритми
(Част 2)

- Алгоритми изградени по
по схемата "разделяй и владей"

Алгоритмите изградени по схемата Р.В.
се състоят в 3 фази:

- Разделяй

- Ако входът е достатъчно голям,
то той се разбива на малки части
- Ако входът е малък, то задачата
се решава по тривиален начин.

- Впадей
↳ Решаваме задачата за малките части
- Комбинирай
↳ Комбиниране решенията на малките части в решение за целия вход

Master theorem

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

$$a \geq 1, b \geq 1 \text{ и } f(n)$$

асимптот
попони телна
Ф-а

$$K = \log_b a$$

$$n^K$$

$$f(n)$$

- 1. $n^{K-\epsilon} > f(n) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^K)$
- 2. $n^K \asymp f(n) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^K \cdot \log(n))$
- 3. $n^{K+\epsilon} \leq f(n)$
- Проверка за регулярност

$$\exists c \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0$$

$$a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \cdot f(n)$$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(f(n))$$

! 3-те сп. на М.Т **НЕ** са
разбиване на всички сп.

! Сравняваме броя на листата
в дървото на рек. с $f(n)$

Заг

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

$$a = 2 \quad b = 2$$

$$k = \log_b a = \log_2 2 = 1$$

$$\varepsilon = 0.1$$

$$n^{1 \cdot 0.1} > 1$$

\Rightarrow 1-ви случай на м.т.

$$T(n) = \theta(n)$$

Заг $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$

$$\alpha = 1 \quad \beta = 2$$

$$K = \log_2 1 = 0$$

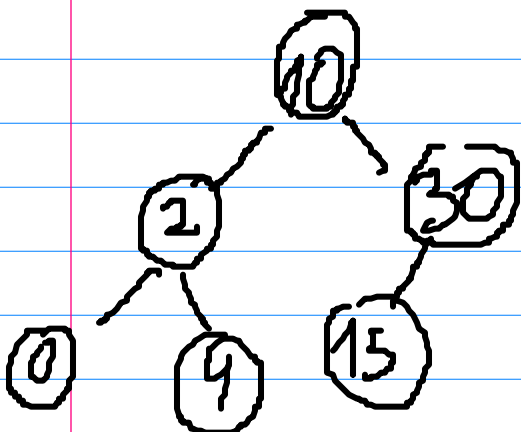
$$n^0 = 1$$

$$n^K = n^0 = 1 \approx f(n) = 1$$

\Rightarrow 2-ри сл на м.т.

$$\Rightarrow T(n) = \theta(\log n)$$

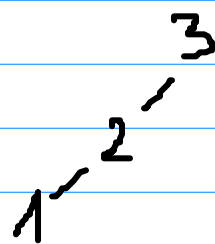
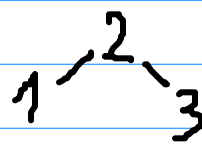
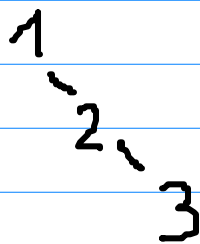
Заг 3 Търсене в BST



Не знаем как
изглежда горното

Колко са всички BST-а с
числата $1 \dots n$

При $n=3$



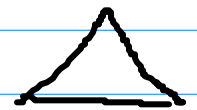
Броят им е C_n (n-тото число
на Каталан)

- $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

- $C_0 = 1$
 $C_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}$

- Най-добрият сл.

- Ако дървото е балансирано



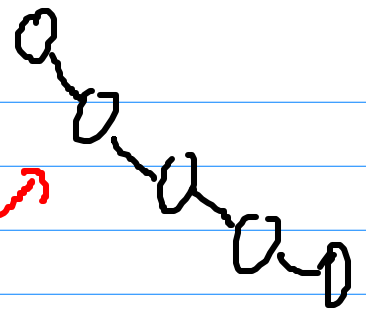
$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

Вече го решихме:

$$T(n) = \Theta(\log(n))$$

• Най-лош сн.

Ако гърбът е "изражено" ↗



$$T(n) = T(n-1) + 1$$

$$T(n) = T(n-1) + 1 = T(n-2) + 1 + 1$$

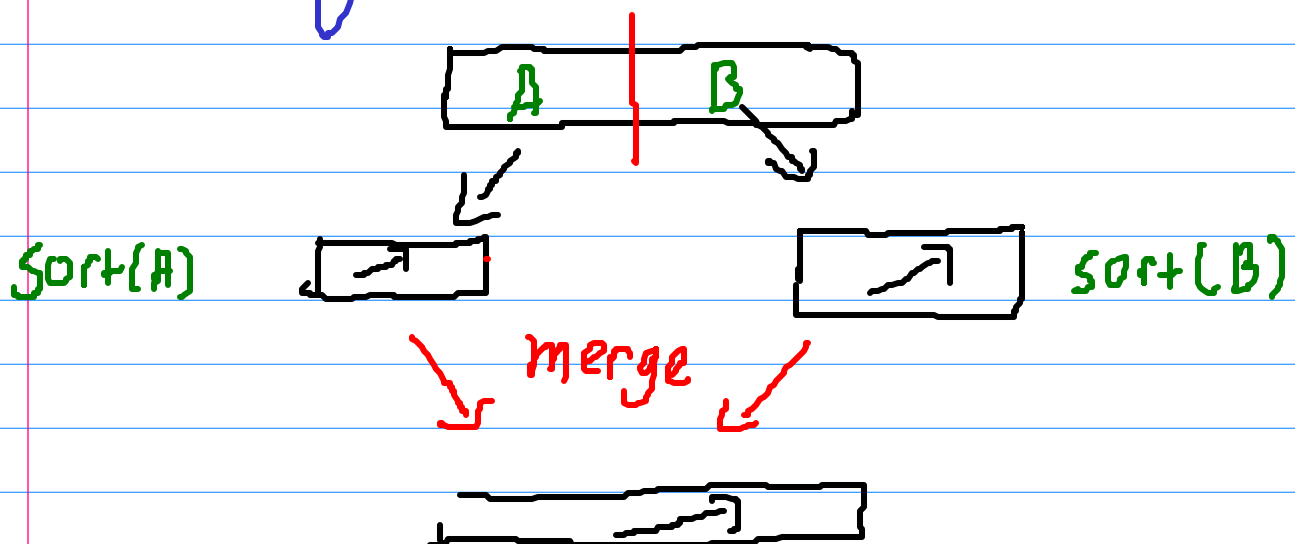
$$\dots = \underbrace{T(0)}_{\theta(1)} + \underbrace{1+1+1+1 \dots 1}_n$$

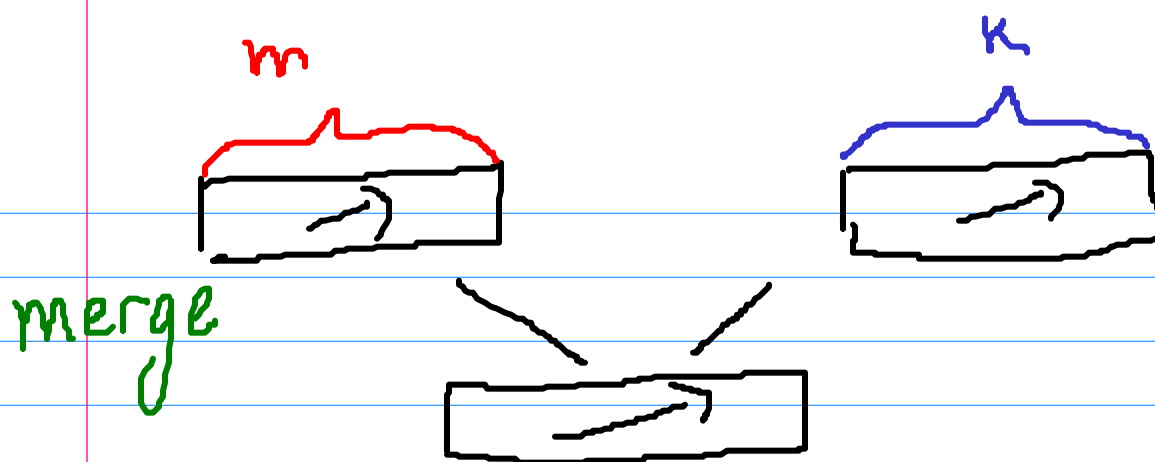
$$T(n) = \theta(n)$$

Алгоритми за сортиране
изражени по схемата Р.В.

1) Сортиране чрез сливане

Merge sort





$$\text{merge} = \Theta(m+k)$$

Анализ на Merge Sort .

$$\bullet T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \quad \rightarrow \text{merge}$$

$$a=2, b=2$$

$$k = \log_2 2 = 1$$

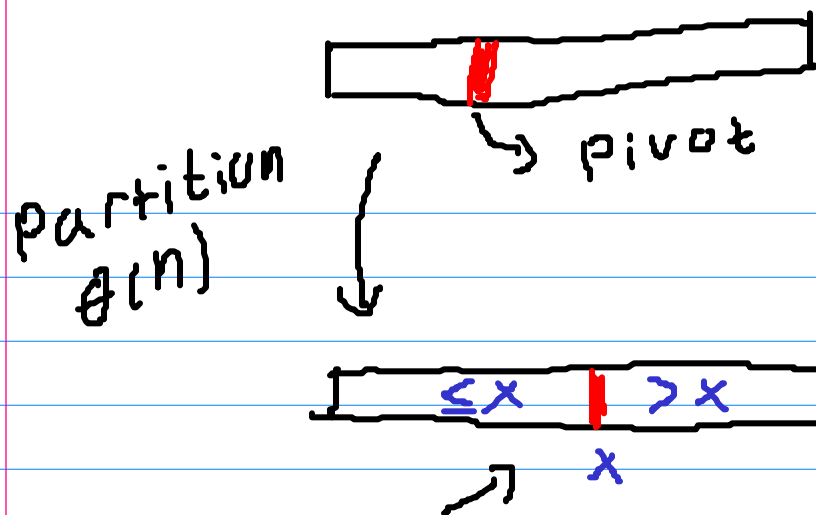
$$n^k = n \approx n$$

• 2-ру сп. на М.Т

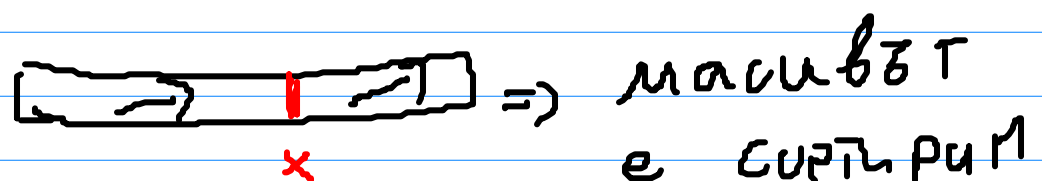
$$T(n) = \Theta(n \cdot \log(n))$$

• 3-й БЪРЗО СОРТИРАНЕ

Quick Sort



x е на мястото си в сортираната редица.



Анализ:

Най-добър сл.

- Ако разделителят (pivot-а) винаги е средният по големина

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

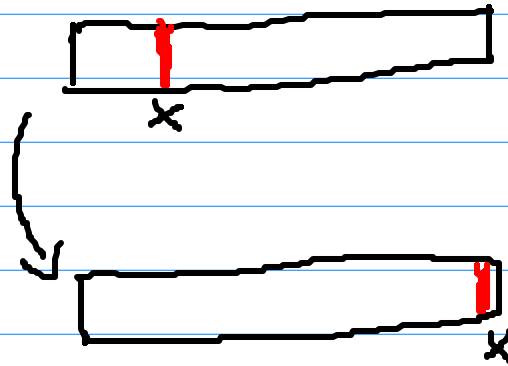
това рек. ур-е го решихме

$$T(n) = \Theta(n \cdot \log n)$$

• Най-лош сл.

Ако разделителят винаги

е най-големият / най-малкият
елемент в масива



- $T(n) = T(n-1) + n$

$$T(n) = T(n-1) + n = T(n-2) + (n-1) + n$$

$$= \underbrace{T(0)}_{\theta(1)} + \underbrace{1+2+3+\dots+n}_{\theta(n^2)} \\ \Rightarrow \theta(n^2)$$

Заг

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

$$K = \log_2 4 = 2$$

$$n^K = n^2$$

• 1 сп. на м.т. $n^{2-0,1} > n$

$$\Rightarrow \theta(n^2)$$

• 3ag $T(n) = T\left(\frac{5n}{6}\right) + 1$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{\frac{6}{5}}\right) + 1$$

$$k = \log_{\frac{6}{5}} 1 = 0$$

$$n^k = n^0 = 1 \approx f(n) = 1$$

\Rightarrow 2-ру сл. на м.т.

$$\Theta(\log(n))$$

3ag $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + \sqrt{n} \cdot n^2$

$$k = \log_2 4 = 2$$

$$n^k = n^2 \quad \sqrt{n} \cdot n^2$$

• 3ch. $n^{k+\varepsilon} \not\prec n^2 \sqrt{n} \quad \varepsilon = 0.1$

\Rightarrow 3-ту сл. на м.т.

• Проверка за регулярность

$$4 \left(\frac{n}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{n}{2}} \leq C \cdot n^2 \sqrt{n}$$

$$4 \frac{n^2 \sqrt{n}}{4 \sqrt{2}} \leq C \cdot n^2 \cdot \sqrt{n}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad n_0 = 1$$

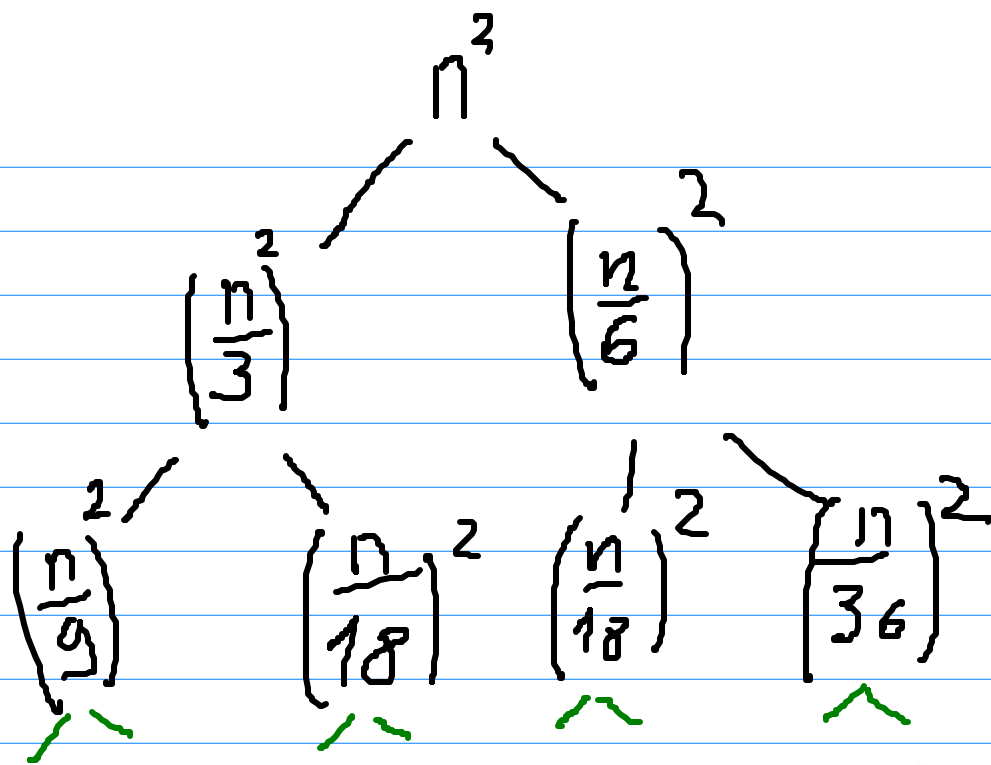
$$\Rightarrow \Theta(n^2 \sqrt{n})$$

заг $T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{n}{6}\right) + n^2$

• М.Т. не стави

• развиване

• *долна граница: n^2*



$$\begin{aligned}
 & n^2 = \frac{n^2}{9} + \frac{n^2}{36} \\
 & \quad = \frac{n^2}{9} + \frac{n^2}{36} + \frac{n^2}{36} + \frac{n^2}{1296} \\
 & \quad = \frac{25n^2}{1296}
 \end{aligned}$$

$\cdot \frac{5}{36}$
 $\cdot \frac{5}{36}$

$$\sum_{i=0}^{\infty} n^2 \left(\frac{5}{36} \right)^i = \frac{n^2}{1 - \frac{5}{36}} = \boxed{\frac{36n^2}{31}}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

$\Rightarrow \Theta(n^2)$

зона знания
 разделение
 безкрытия
 слия
 ДЗРОВО ИМА КРАЕИ ДРОИ
 ВОКОВЕ

3ая $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n \cdot \log(n)$

$$k = \log_4 3 = 0,79 \dots$$

$$n^{0,79 \pm \varepsilon} \begin{cases} n \cdot \log(n) \end{cases} \quad \varepsilon = 0, 1$$

\Rightarrow 3-ий сл. не М.Т.

- Проверка 3-ей регулярности.

$$3 \cdot \underbrace{\frac{n}{4} \cdot \log\left(\frac{n}{4}\right)}_{f\left(\frac{n}{4}\right)} \leq c \cdot n \cdot \log(n)$$

$$f\left(\frac{n}{4}\right)$$

$$c = \frac{3}{4} \left| \begin{array}{l} \text{за достаточно} \\ \text{большо } n \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow \Theta(n \cdot \log(n))$$

$$\text{Зая } T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \log(n)$$

$$k = \log_2 1 = 0$$

$$n^k = n^0$$

$$\bullet 1cn. \quad n^{0-\varepsilon} > \log(n) \quad \times$$

$$\bullet 2cn. \quad n^0 \asymp \log(n) \quad \times$$

$$\bullet 3cn. \quad n^{0+\varepsilon} \neq \log(n) \quad \times$$

\Rightarrow С М.Т. Не СТАБА!

• С ПОДАГАНІЕ:

$$n = 2^m$$

$$\underbrace{T(2^m)}_{S(m)} = T(2^{m-1}) + m$$

$$S(m)$$

$$S(m) = S(m-1) + m$$

1

$$\downarrow S(m) = \Theta(m^2)$$

$$T(2^m) = \Theta(m^2)$$

$$T(n) = \Theta(\log^2(n))$$

⚠. РАЗШИРЕНИЕ НА М.Т. ⚠

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

⚠

$$f(n) = \Theta(n^k \log^t(n))$$

$t \in \mathbb{N}^+$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^k \log^{t+1}(n))$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \log(n)$$

$$k = 0$$

$$n^k = n^0$$

$$\downarrow n^0 \log^1(n)$$

от РАЗШИРЕНИЕТО НА М.Т.

$$T(n) = \Theta(\log^2(n))$$