

③

3a9

$$\begin{aligned}
 & (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p) \equiv \\
 & (\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee p) \equiv \\
 & \neg p \vee q \vee \neg q \vee p \equiv \\
 & \underbrace{\neg p \vee p}_T \vee \underbrace{\neg q \vee q}_T \equiv T
 \end{aligned}$$

3a9

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow t)] \rightarrow (p \rightarrow t) \equiv \text{CB. Wahrheitstabelle}$$

$$\neg [(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee t)] \vee (\neg p \vee t) \equiv \text{De Morgan}$$

$$[\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee t)] \vee (\neg p \vee t) \equiv \text{De Morgan}$$

$$(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg t) \vee \neg p \vee t \equiv \text{Kuhn.}$$

$$(p \wedge \neg q) \vee \neg p \vee (q \wedge \neg t) \vee t \equiv \text{ges. Sp.}$$

$$\underbrace{(p \vee \neg p)}_T \wedge (\neg q \vee \neg p) \vee (q \vee t) \wedge \underbrace{(t \vee \neg t)}_T \equiv$$

$$(\neg q \vee \neg p) \vee (q \vee \neg p) \equiv$$

$$\underbrace{\neg q \vee q}_T \vee \neg p \vee \neg p \equiv T \vee \neg p \vee \neg p \equiv T$$

Заг Докажете, че ако $C \cap B = \emptyset$

$$(A \Delta B) \cup C = (A \cup C) \Delta B$$

$$C \cap B = \emptyset$$

$$\forall x (x \in C \rightarrow x \notin B) \wedge \forall x (x \in B \rightarrow x \notin C)$$

Иначе.

A	B	C	$A \Delta B$	$(A \Delta B) \cup C$	$A \cup C$	$(A \cup C) \Delta B$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	1	0

$C \cap B = \emptyset$

||| НАИИИ.

$$1) (A \Delta B) \cup C \subseteq (A \cup C) \Delta B$$

$$\forall x (x \in (A \Delta B) \cup C \rightarrow x \in (A \cup C) \Delta B)$$

Нека x е произволно и $x \in (A \Delta B) \cup C$

$$\begin{aligned} & \text{1 сл. } \left. \begin{array}{l} x \in C \Rightarrow x \notin B \\ \hookrightarrow x \in A \cup C \end{array} \right\} x \in (A \cup C) \Delta B \end{aligned}$$

$(C \cap B = \emptyset)$

✓

$$\cdot \text{2 сл. } x \in A \Delta B$$

$$\begin{aligned} & \text{2.1 } \left. \begin{array}{l} x \in A \wedge x \notin B \\ \hookrightarrow x \in A \cup C \end{array} \right\} x \in (A \cup C) \Delta B \end{aligned}$$

✓

$$\text{2.2 } x \notin A \wedge x \in B$$

$$\Downarrow B \cap C = \emptyset$$

$$x \notin C$$

$$\left. \begin{array}{l} x \notin A \wedge x \notin C \Rightarrow x \notin A \cup C \\ x \in B \end{array} \right\} x \in (A \cup C) \Delta B$$

✓

x еще произвольно

$$\Rightarrow (A \Delta B) \cup C \subseteq (A \cup C) \Delta B$$

$$2) (A \cup C) \Delta B \subseteq (A \Delta B) \cup C$$

$$\forall x (x \in (A \cup C) \Delta B \rightarrow x \in (A \Delta B) \cup C)$$

Нека x произвольно и $\underline{x \in (A \cup C) \Delta B}$

$$1. \underline{x \in A \cup C} \quad \wedge \quad x \notin B$$

$$1.1. x \in A \quad x \notin B \Rightarrow x \in A \Delta B$$

$$\Rightarrow x \in (A \Delta B) \cup C \quad \checkmark$$

$$1.2. x \in C \quad x \in (A \Delta B) \cup C \quad \checkmark$$

$$2. x \notin A \cup C \quad \wedge \quad x \in B$$

\Downarrow

$$x \notin A \quad \wedge \quad x \notin C$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array} \right\} x \in A \Delta B \Rightarrow x \in (A \Delta B) \cup C \quad \checkmark$$

x еще произвольно

$$(A \cup C) \Delta B \subseteq (A \Delta B) \cup C$$

□

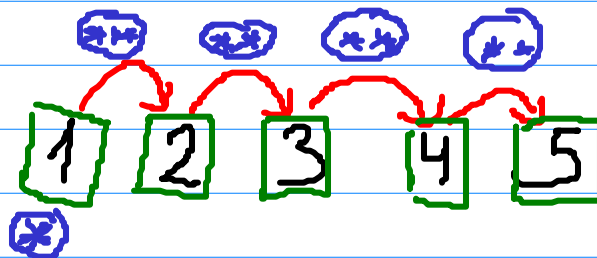
⇒ РАВНЫ со

Мат. индукция

$$\forall x \in \mathbb{N} (P(x))$$

① 1) $P(0)$ база

② 2) $P(k) \rightarrow P(k+1)$



$$\text{зая. } \forall n \in \mathbb{N} \sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$$

$$2^0 + 2^1 \dots 2^n = 2^{n+1} - 1$$

$$P(k) = 2^0 + 2^1 \dots 2^k = 2^{k+1} - 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} (P(n))$$

1) база $P(0)$

$$\underbrace{\sum_{i=0}^0 2^i}_{2^0=1} = \underbrace{2^1 - 1}_1 \quad \checkmark$$

2) Инд. пред. Если за любых $k \in \mathbb{N}$
 $P(k) \equiv \tau$

$$2^0 + 2^1 \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

3) Инд. ст. Требуется доказать покажем $P(k+1)$

$$P(k+1) \Leftrightarrow 2^0 + 2^1 \dots 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$$

$$\underbrace{2^0 + 2^1 + \dots + 2^k}_{\text{от. и.п.}} + 2^{k+1} =$$

$$2^{k+1} - 1$$

$$= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} = 2 \cdot 2^{k+1} - 1 =$$

$$= \underline{2^{k+2}} - 1 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow P(k+1) \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} (P(n)) \quad \square$$

~~Задача~~

Докажете, че всяка сума от
к лева ($k \geq 12$) може да се
състави само с банкноти от 4лв и 5лв

$$\boxed{4} \quad \boxed{5}$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad k \geq 12 \quad \exists a \exists b \in \mathbb{N} \quad 5 \cdot a + 4 \cdot b = k$$

$$a - \text{брой } \boxed{5}$$

$$b - \text{брой } \boxed{4}$$

с индукция

База: $k=12$ $a=0$ $b=3$ $5 \cdot 0 + 4 \cdot 3 = 12$

Инд. пр. Нека твърдението е изпълнено
за някое $k=t$

$$t = \alpha \cdot 5 + \beta \cdot 4$$

Инд. ст. трябва да покажем, че
можем да съставим сумата $t+1$

от. и п. $t = \alpha \cdot 5 + \beta \cdot 4$

1 сл. $\beta \geq 1$

$$\alpha' = \alpha + 1 \quad \leftarrow \boxed{5}$$

$$\beta' = \beta - 1 \quad \boxed{4} \rightarrow$$

$\alpha' \in \mathbb{N}$
 $\beta' \in \mathbb{N} \quad (\beta \geq 1)$

$$\alpha' \cdot 5 + \beta' \cdot 4 = (\alpha + 1) \cdot 5 + (\beta - 1) \cdot 4 =$$

$$= \underbrace{\alpha \cdot 5 + \beta \cdot 4}_{t \text{ (от и.п.)}} + 1 = t + 1 \quad \checkmark$$

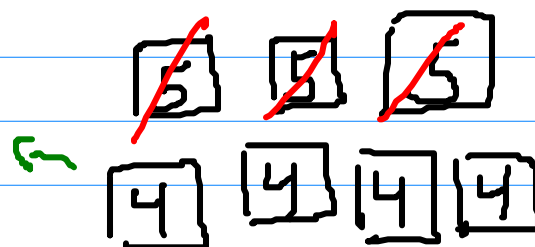
t (от и.п.)

$$2 \text{ ч. } \beta = 0$$

$$t \geq 12$$

$$\Rightarrow \alpha \geq 3$$

$$\alpha' = \alpha - 3$$



$$\alpha' \in \mathbb{N}, \text{ защото } \alpha \geq 3$$

$$\beta' = \beta + 4$$

$$\alpha' \cdot 5 + \beta' \cdot 4 = (\alpha - 3) \cdot 5 + (\beta + 4) \cdot 4 =$$

$$= \underbrace{\alpha \cdot 5 + \beta \cdot 4}_t + 1 = t + 1 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{N} \ x \geq 12$ Твърдението е изпълнено

~~304~~ Докажете, че $\forall k \geq 3$

30 може да се представи
като израз само с k 5-ци и
 $+, -, *, /, (,)$

$$k=6 \quad 5+5+5+5+5+5$$

$$k=12 \quad 5*5 + 5/5 + 5/5 + 5/5 + 5/5 + 5/5$$

$P(k) \Leftrightarrow$ 30 може да се
представи с k 5-ци

$$\begin{array}{r} \textcolor{red}{\cancel{5}} + 5 - 5 \\ \hline 30 \\ \hline 30 \end{array}$$

$$P(k) \rightarrow P(k+2)$$

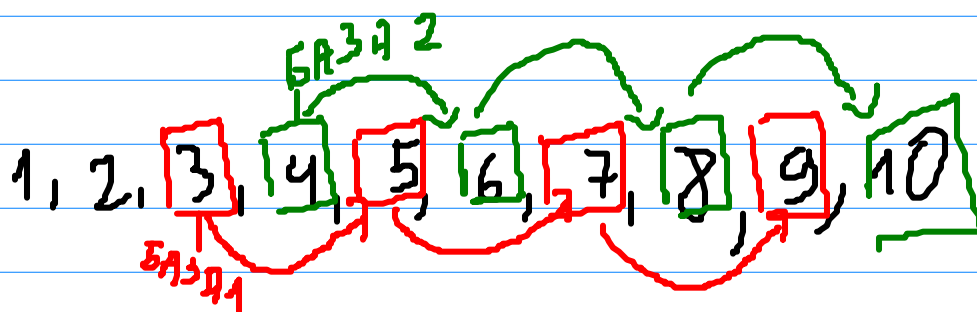
БАЗА: $P(3) \quad 5 * 5 + 5$
 $P(4) \quad (5 + (5/5)) * 5$

и.п. $P(k)$ за какое k ($P(k) \rightarrow P(k+2)$)

k 5-yl $\rightarrow d = 30$

и.с. $P(k+2)$

$d = 30$ и.п. $d + 5 - 5 = 30$
 d и.с. k 5-yl
 $k+2$ 5-yl



заг

$a_0 = 1$

$a_1 = 2$

1, 2, 4, 8, ...

$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$

Докажете, че $\forall n \in \mathbb{N} (a_n = 2^n)$

1) база $n=0$ $a_0 = 1$ $2^0 = 1$ ✓

2) и.п. $n=k$ допущение, че $a_k = 2^k$

3) и.с. разпечетяване a_{k+1}

$$a_{k+1} = \underbrace{a_k}_{\text{и.п.: } 2^k} + 2 \underbrace{a_{k-1}}_{? ! ?}$$

Мат. инд.

≡

Силна инд.

$P(0)$

$P(0)$

$P(k) \rightarrow P(k+1)$

за всякое k

$P(0) \wedge P(1) \wedge \dots \wedge P(k-1) \wedge P(k)$

$\rightarrow P(k+1)$

за всякое k

База: $0 \quad a_0 = 1 \quad 2^0 = 1$

И.П. Допускаме за някое k

$$p(k) \wedge p(k-1) \dots p(1) \wedge p(0)$$

$$a_k = 2^k \quad a_{k-1} = 2^{k-1} \quad a_1 = 2 \quad a_0 = 1$$

И.С. Разглеждаме $k+1$

$$a_{k+1} = \underbrace{a_k}_{\text{и.п.: } 2^k} + 2 \underbrace{a_{k-1}}_{2^{k-1}} =$$

$$= 2^k + 2 \cdot 2^{k-1} = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1} \checkmark$$

$$\Rightarrow \forall n \quad a_n = 2^n$$

Зау

Докажете, че $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2$

n може да се разбие на прости множители.

$p(n) \Leftrightarrow n$ може да се разбие на прости множители

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq 2) (P(n))$$

База: $P(2) \quad 2 = 2$

И.П. Допускаме, че за някое k
 $P(0) \wedge P(1) \wedge \dots \wedge P(k)$ е изпълнено

И.С. Разглеждаме $k+1$ $P(k+1) = ?$

1 сл. $k+1$ е просто $P(k+1) = T$

2 сл. $k+1$ не е просто число

$$\exists a, b \in \mathbb{N} \quad a \geq 2, b \geq 2 \quad a \cdot b = k+1$$

$a \leq k+1 \quad b \leq k+1$
от И.П.

a, b могат да се
 представят като прости множители

$$\left. \begin{array}{l} a = p_1 \cdot p_2 \dots p_s \\ b = q_1 \cdot q_2 \dots q_r \end{array} \right\} \text{от И.П.}$$

$$K+1 = a \cdot b = \underbrace{p_1 \dots p_s \cdot q_1 \dots q_r}_{\text{Прости множители}}$$

$\Rightarrow K+1$ може да се разбие на
прости множители.

\Rightarrow твърдението е изпълнено!