Решения на контролно теория 1 по Дискретни структури, специалност Информационни системи, първи курс, зимен семестър на 2019/2020 г.

Задача 1, Вариант: А

Нека A и B са подмножества на U.

а) Дефинирайте $A \cup B$ и релацията $A \subseteq B$.

б) Покажете, че $A \subseteq B$. точно тогава, когато $A \cup B =$ B.

Задача 1, Вариант: Б

Нека A и B са подмножества на U.

а) Дефинирайте $A \cap B$ и релацията $A \subseteq B$.

б) Покажете, че $A \subseteq B$ точно тогава, когато $A \cap B =$ A

Решение

а) $A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$.
$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$.
$A \subseteq B$, ако: $(\forall x)[x \in A \implies x \in B]$.

б) $\mathbf{A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = B}$
Нека $A \subseteq B$. Ако $x \in A \cup B$, то тогава $x \in A \vee x \in B$. Но $A \subseteq B$, от което следва, че $x \in B$. Значи $A \cup B \subseteq B$. Нека $x \in B$. Но тогава $x \in A \cup B$. Следователно $B \subseteq A \cup B$. Значи заключваме, че $A \cup B = B$.
Нека $A \cup B = B$. Щом $x \in A$, то $x \in A \cup B$. Но също и $x \in B$. Тогава $A \subseteq B$.

$\mathbf{A \subseteq B \leftrightarrow A \cap B = A}$
Нека $A \subseteq B$. Ако $x \in A \cap B$, то тогава $x \in A \wedge x \in B$. Но $x \in A$, от което следва, че $A \cap B \subseteq A$. Но ако $x \in A$, то щом A е подмножетво на B, следва че $x \in B$. Но тогава $x \in A \cap B$. Следователно: $A \subseteq A \cap B$. Но тогава $A = A \cap B$.
Нека $A \cap B = A$. Тогава ако $x \in A$, значи че $x \in A \cap B$. Тоест $x \in A$ и $x \in B$. По-конкретно $x \in B$. Тогава $A \subseteq B$.

Задача 2

С $k\mathbb{Z}$ означаваме всички цели числа, които се делят на k. Нека R е релация над множеството на реалните числа R, дефинирана чрез:

$$(a, b) \in R \leftrightarrow a - b \in k\mathbb{Z}$$

а) Докажете, че R е релация на еквивалентност.

б) Напишете по три различни елемента от класовете на еквивалентност на $\frac{1}{k}$ и $k\pi$.

Решение

Във варианти 1 и 3: k=3. Във вариант 2 и 4: k = 5.
Рефлексивност: За всяко число $x \in k\mathbb{Z}$ е изпълнено, че xRx, защото: $x - x = 0$, което е $0 * k$
Сииметричност: След като $x \neq y$ и xRy, то $x - y = k * z.(z \in \mathbb{Z})$. Но тогава $y - x = k * (-z).(-z \in \mathbb{Z})$. Следователно yRx.
Транзитивност: След като xRy и yRz от тук следва, че $x - y = k * z.(z \in \mathbb{Z})$ и че $y - z = k * t.(t \in \mathbb{Z})$. Събираме двете равенства и получаваме: $x - y + y - z = k * z + k * t$. Но това е еквивалентно на $x - z = k * (z + t)$. Следователно xRz. Следователно R е релация на еквивалентност.
При k = 3.
$[\frac{1}{3}] = \{\frac{1}{3}, 3\frac{1}{3}, 6\frac{1}{3} \dots\}$, $[3\pi] = \{3\pi, 3 + 3\pi, 6 + 3\pi \ \dots\}$
При k = 5.
$[\frac{1}{5}] = \{\frac{1}{5}, 5\frac{1}{5}, 10\frac{1}{5} \dots\}$, $[5\pi] = \{5\pi, 5 + 5\pi, 10 + 5\pi \ \dots\}$

Задача 3

Дефинирайте кога една релация R в множеството на естествените числа N е нестрога частична наредба. Проверете дали R е нестрога частична наредба в $\mathbb{N}^+$, където $(a, b) \in R \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^+(b = a * k)$ (Във вариант Б е $(a = k * b)$). Ако е, посочете минимални и максимални елементи относно R, ако има такива. Ако не е, обяснете защо.

Решение

R е нестрога частична наредба, ако е **рефлексивна, транзитивна и антисиметрична**. $(a, b) \in R \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^+(b = a * k)$ е еквивалентно на b $\geq$ a и b се дели на a без остатък.
Релацията е **рефлексивна**, понеже всяко число се дели на себе си.
Ако $a \neq b$ и b $\geq$ a, то $a \cancel{\geq} b$. Т.е релацията е **антисиметрична**.
Ако $(a, b) \in R$ и $(b, c) \in R$, то значи b се дели на a и c се дели на b. Нека b = a*k, a c = b*t $(t, k \in \mathbb{N})$. Но тогава c = a*(k*t)$(k * t \in \mathbb{N})$. Щом $c \geq b$ и $b \geq a$, то $c \geq a$, . Тогава $(a, c) \in R$. Следователно R е **транзитивна**.
Елементът a е минимален елемент по отношение на R, ако не съществува

друг елемент b, за който bRa. Това е само числото 1. Аналогично a е максимален по отношение на R, ако не съществува друг елемент b, за който aRb. В R няма максимални елементи, понеже винаги има по-голям елемент спрямо релацията. Във вариант 2 максималният елемент е 1, но няма минимални.

Задача 4

Дефинирайте кога една функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е инекция. Проверете дали функцията $f(n) = kn + 1$ е инекция. Докажете, че множеството на четните/нечетните числа е равномощно с $k\mathbb{N} + 1 = \{kn + 1 | n \in \mathbb{N}\}$.

Решение:

Във варианти 1 и 3: k=3. Във вариант 2 и 4: k = 5.
f е инекция $\leftrightarrow f(a) = f(b) \to a = b$
$f(n) = kn+1$. Нека $f(x) = f(y)$. Тогава $k*x+1 = k*y+1 \leftrightarrow k*x = k*y \leftrightarrow x = y$. Следователно f е **инекция**.
Знаем, че множеството на четните и множеството на нечетните са равномощни с $\mathbb{N}$. Тогава остава да покажем, че $\{kn + 1 | n \in \mathbb{N}\}$ е равномощно с $\mathbb{N}$. Ще използваме функцията : $f(n) = kn + 1$ ($f : \mathbb{N} \to \{kn + 1 | n \in \mathbb{N}\}$). Показахме, че функцията е инекция. Нека $y \in \{kn + 1 | n \in \mathbb{N}\}$ Но тогава $x = (y-1)/k$, което е естествено число (защото y-1 се дели на k) и $f(x) = y$. Следователно f е **сюрекция**. Но f е сюрекция и инекция, от което следва, че е **бикеция** и че двете множества са равномощни.