Примерни решения на задачите от първото контролно по Дискретни структури, специалност Информационни системи, първи курс, зимен семестър на 2019/2020 г.

Задача 1

Нека $A, B, C \subseteq X$. Докажете или опровергайте, че ако
$\forall x \in X(x \in A \rightarrow x \in C \wedge x \in B)$, то

$$(B \cup C) \backslash B = \overline{\overline{C} \cap \overline{A}} \cap \overline{B}$$

Решение 1:

$\forall x \in X(x \in A \rightarrow x \in C \wedge x \in B)$ е еквивалентно на $A \subseteq C \cap B$.
За лявата част имаме, че $(B \cup C) \backslash B = C \backslash B$
От дясно: $\overline{\overline{C} \cap \overline{A}} \cap \overline{B} = (C \cup A) \cap \overline{B}$ (от законите на Де Морган) $= C \cap \overline{B}$, (понеже знаем, че A $\subseteq$ C). $= C \backslash B$.
От двете страни получихме еднакви неща, следователно множествата съвпадат.

Решение 2:

$\forall x \in X(x \in A \rightarrow x \in C \wedge x \in B)$ е еквивалентно на $A \subseteq C \cap B$.

A	B	C	B $\cup$ C	$(B \cup C) \setminus B$	$\overline{C}$	$\overline{A}$	$\overline{\overline{C} \cap \overline{A}}$	$\overline{B}$	$\overline{\overline{C} \cap \overline{A}} \cap \overline{B}$
0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1	0	0

При условието, че $A \subseteq C \cap B$ не трябва да гледаме редовете оцветени в сиво. Без тях втората и последната колона съвпадат.

Задача 2

В множеството $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ дефинираме релация R по следния начин:
$(x, y)R(a, b) \iff$ сред координатите на наредената четворка (x, y, a, b) има четен брой нечетни числа.

а) Докажете, че R е релация на еквивалентност.

б) Опишете класовете на еквивалентност на R. Какъв е броят им?

Решение:

а)
Рефлексивност: За всяка двойка $(x, y) \in (\mathbb{N}\times\mathbb{N})^2$ е изпълнено, че $(x, y)R(x, y)$, защото в координатите на наредената четворка (x, y, x, y) всяко число се срещя 2 пъти и при k броя четни числа в (x,y) (k е между 0 и 2, разбира се), броят на четните числа в (x, y, x, y) ще бъде 2k, което е четно.
Симетричност: След като $(x, y)R(a, b)$, то в (x, y, a, b) има четен брой нечетни числа. Тогава и в (a, b, x, y) има четен брой нечетни числа(числата са същите).
Транзитивност: Нека $(x, y),(a, b),(c, d) \in (\mathbb{N}\times\mathbb{N})^2$ и $(x, y)R(a, b)$ и $(a, b)R(c, d)$. Следователно в двете наредени четворки - (x, y, a, b) и (a, b, c, d) има четен брой нечетни числа. Нека броят им е съответно $2 * k$ и $2 * r$. От тук следва, че броят на четните числа в (x, y, a, b, a, b, c, d) е $2 * (k + r)$. Нека в (a, b) броят на нечетни числа е t (t е между 0 и 2). Тогава в (x, y, c, d) броят на нечетните числа е $2 * (k + r) - 2 * t = 2 * (k + r - t)$, което е четно число. Следователно $(x, y)R(c, d)$.
С което доказахме, че R е релация на еквивалентност.
б)
R има два класа на еквиваленстност:
$[(0{,}0)] = \{(x{,}y) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^2 \mid$ x и y са от еднаква четност $\}$
$[(0{,}1)] = \{(x{,}y) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^2 \mid$ x и y са от различна четност$\}$

Задача 3

Нека $I = \{0, 1, 2, \ldots, 97, 98\}$ и нека $R \subseteq I \times I$ е дефинирана по следния начин:

$$xRy \iff (x - y \geq 0) \wedge (\exists k \in \mathbb{Z} : y - x = 5k)$$

а) Докажете, че R е релация на частична наредба. Вярно ли е, че R е линейна?

б) Намерете максималните и минималните елементи на R.

Решение:

а)
Рефлексивност: За всяко число $x \in I$ е изпълнено, че xRx, защото: $x - x >= 0 \wedge x - x = 5 * 0$
Антисиметричност: След като $x \neq y$ и xRy, то $x - y > 0$. Но тогава $y - x < 0$. Следователно $y \not{R} x$.
Транзитивност: След като xRy и yRz от тук следва, че $x-y \geq 0$ и $y-z \geq 0$. Събирайки двете, получаваме, че $x - z \geq 0$. Знаем още, че $y - x = 5t$ и $z - y = 5r$. Събираме двете равенства и получаваме $y - x + z - y = 5t + 5r$. Но това е еквивалентно на $z - x = 5 * (t + r)$, а $5 * (t + r)$ се дели на 5.

Следователно xRz. От тук следва, че R е релация на частична наредба. R не е линейна, понеже R не е силно антисиметрична ($3 \not R 4$ и $4 \not R 3$)
б) Елементът a е минимален елемент по отношение на R, ако не съществува друг елемент b, за който bRa. Това са елементите 98,97,96,95 и 94. Аналогично a е максимален по отношение на R, ако не съществува друг елемент b, за който aRb. Това са елементите 0,1,2,3,4.

Задача 4

Нека $R, P \subseteq S \times S$. Докажете или опровергайте, че:

а) Ако R и P са релации на еквивалентност, то $R \cap P$ е релация на еквивалентност.

б) Ако R и P са релации на еквивалентност, то $R \setminus P$ е релация на еквивалентност.

в) Ако R и P са релации на частична наредба, то $R \cup P$ е релация на частична наредба.

г) Ако R е релация на частична наредба, то $R \cup R^{-1}$ е релация на еквивалентност.

д) Ако R е релация на частична наредба, то $R \cap R^{-1}$ е релация на еквивалентност. Ако е вярно, намерете броя класове на еквивалентност.

$R^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in R\}$.

Решение:

а) $R \cap P$ е релация на еквивалентност.
Рефлексивност: Щом R и S са релации на еквивалентност, то $(\forall x \in S)(xRx \wedge xPx)$. От тук следва и че $(\forall x \in S)(x(R \cap P)x$.
Симетричност: Нека $x(R \cap P)y$. Но тогава xRy и xPy. Но R и S са релации на еквивалентност, от което следва, че yRx и yPx. Но от тук веднага следва и че $y(R \cap P)x$.
Транзитивност: Нека $x(R \cap P)y$ и $y(R \cap P)z$. Но от тук следва, че xRy, yRz, xPy и yPz. Но R и P са релации на еквивалентност, от което следва и че xRz и xPz. Но тогава и $x(R \cap P)z$.

б) $R \setminus P$ не винаги е релация на еквивалентност. Нека $|S| \geq 1$. Щом R и S са релации на еквивалентност, то $(\forall x \in S)(xRx \wedge xPx)$. Но тогава $(\forall x \in S)\neg(x(R \setminus P)x)$. Т.е $R \setminus P$ не е рефлексивна. От където следва, че не е релация на еквивалентност.

в) $R \cup P$ не винаги е релация на частична наредба. Ако за два произволни елемента x, y от S, е изпълнено, че xRy и yPx, то $x(R \cup P)y$ и $y(R \cup P)x$. Но тогава $R \cup P$ не е антисиметрична. Следователно е възможно $R \cup P$ да не е релация на частична наредба г) Ще докажем, че твърдението не е вярно с контрапример. Нека $S = \{1, 2, 3\}$ и нека $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (3, 2)\}$. R е релация на частична наредба, понеже е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна. Тогава $R^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1), (2, 3)\}$. Да разгледаме $R \cup R^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 3)\}$. $R \cup R^{-1}$ не е релация на еквивалентност, защото не е транзитивина - $1R2$ и $2R3$, но $1 \not R 3$.

д) Твърдението е вярно, защото $R \cap R^{-1} = \{(x, x) | x \in S\}$. Релацията е рефлексивна, симетрична и транзитивна. От тук следва, че подмножествата на S с точно 1 елемент са класовете на еквивалентност на $R \cap R^{-1}$. Броят им е |S|.