④

Зад

Д.С.Д. че всяко ест число може да се представ като сума на различни степени на 2

$5 = 2^2 + 2^0$

Д-во със силна инд:

$P(k) \Leftrightarrow k$ може да се представ като сума на разл. степени на 2

$\forall n \in \mathbb{N}^+ \; P(n)$

База $n = 1$ $\quad 1 = 2^0$

И.П. Допускаме, че: $P(1) \wedge P(2) \ldots \wedge P(k)$

И.С. Трябва да покажем, че $P(k+1)$

1 сл. $k+1$ е четно

$\Rightarrow \exists t \in \mathbb{N}^+ \quad 2 * t = k+1$

$$\boxed{t < k+1}$$

$\Rightarrow$ От и.п. $P(t) - T$

$$t = \underbrace{2^{\alpha_0} + 2^{\alpha_1} \dots 2^{\alpha_s}} \qquad \forall i,j \;\; i \neq j \;\; \alpha_i \neq \alpha_j$$

$$i,j \in \{0 \dots s\}$$

$$K+1 = 2.t = 2.(2^{\alpha_0} + 2^{\alpha_1} \dots 2^{\alpha_s}) =$$

$$= 2^{\alpha_0+1} + 2^{\alpha_1+1} \dots 2^{\alpha_s+1}$$ ✓

$$\forall i,j \;\; i \neq j \;\; (\alpha_i + 1 \neq \alpha_j + 1)$$

2 сл. $K+1$ е нечетно

$\Rightarrow$ k е четно $\qquad k < k+1$

и.п $P(K) = T$

$$K = 2^{\alpha_1} + \dots 2^{\alpha_s} \qquad \forall i,j \;\; i \neq j \;\; \alpha_i \neq \alpha_j$$

$$K+1 = 2^{\alpha_1} + \dots 2^{\alpha_s} + \boxed{2^0}$$

Помощно твърдение

- $P(K) \wedge k$ е четно $\rightarrow 2^0$ не участва в представянето

$2^0 \quad 2^1 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad 2^4$

Н 4 4 4 4

$$k+1 = \underbrace{2^{\alpha_1} + \dots 2^{\alpha_s}}_{\text{от помощното твърдение}} + \boxed{2^0}$$

2^0 не участва

$$k+1 = \underbrace{2^{\alpha_1} + \dots 2^{\alpha_s} + 2^0}_{\text{различни степени на 2}}$$

✓

$\Rightarrow$ твърдението е изпълнено.

зад Д.С.Д $\forall n \in \mathbb{N}^+$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{n^2} < 2$$

С индукция:

База: $n=1$ $\quad 1<2$ ✓

И.П. за някое k

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\dots\frac{1}{k^2} < 2$$

И.С $k+1$??

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\dots\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2} < 2$$

$$1+\frac{1}{4}+\dots\frac{1}{k^2} < 2-\frac{1}{(k+1)^2}$$

И.П $\quad 1+\frac{1}{4}\dots\frac{1}{k^2}<2$

И.П не ни помага!

Засилваме инд. предп.

$$\left.\begin{array}{l} \forall x\, P(x) \\ P(0) \\ P(k) \to P(k+1) \end{array}\right\}$$

Доказваме:

$\forall x\, Q(x)$

$Q(x) \Rightarrow P(x)$

ще покажем, че

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \cdots \frac{1}{n^2} \le 2 - \frac{1}{n}$$

База: $n = 1$ $\quad 1 \le 2 - \frac{1}{1} = 1$ ✓

И.П. за някое k.

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \cdots \frac{1}{k^2} \le 2 - \frac{1}{k}$$

И.С

$$\underbrace{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \cdots \frac{1}{k^2}}_{\text{и.п.}} + \frac{1}{(k+1)^2} \overset{?}{\le} 2 - \frac{1}{k+1}$$

$$\underbrace{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \dots + \frac{1}{k^2}}_{\text{ИП: } \le 2 - \frac{1}{k}} + \frac{1}{(k+1)^2} \le 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} =$$

$$= 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} = 2 - \frac{1}{k+1}\left(\frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= 2 - \frac{1}{k+1}\left(\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}\right) =$$

$$2 - \frac{1}{k+1}\underbrace{\left(\frac{k^2+k+1}{k^2+k}\right)}_{\ge 1} < \boxed{2 - \frac{1}{k+1}}$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \dots \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \le 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

$\Rightarrow$ твърдението е изпълнено

$$1 + \frac{1}{4} \dots \frac{1}{n^2} \le 2 - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{4} \dots \frac{1}{n^2} < 2 \quad ✓$$

~~Зад~~ 1. С.М. че $\forall n \in \mathbb{N}^+$

сумата на първите n нечетни числа е точен квадрат.

Инд.

База: $n = 1$ $\qquad 1 = 1^2$

И.П. Нека за някое k

$$1+3 \dots + 2k-1 = s^2$$

И.С. Разглеждаме за $k+1$

$$\underbrace{1+3 \dots + 2k-1}_{\text{и.п.}} + 2k+1 = \text{точен квадрат}$$

$$\underbrace{s^2 + 2k+1}= \text{точен квадрат}$$

Не става

Засилваме твърдението:

сумата на първите n нечетни числа е n^2

База $n=1$ $1=1^2$ ✓

И.П. за някое k

$$1+3+5 \dots 2k-1 = k^2$$

И.С. разглеждаме $k+1$

$$\underbrace{1+3+5 \dots + 2k-1}_{\text{И.П.: } k^2} + 2k+1 =$$

$$= k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$ ✓

=> Заскиленото твърдение е изпълнено

=> Сумата на първите n нечетни числа е точен квадрат

Зад Къде е грешката в доказателството?

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 7 * n = 0$$

База: 0 $\quad 7 * 0 = 0$

И.П. Допускам, че $\forall i \leq k$

$7 * i = 0$

И.С. Разглеждам $k+1$ $\in \{1, 2 \dots\}$

$7(k+1) \overset{?}{=} 0$

$k+1 = i + j \qquad i, j \in \mathbb{N} \qquad i < k+1$

$j < k+1$

От И.П. $7i = 0 \qquad 7j = 0$

$7(k+1) = 7(i+j) = 7i + 7j = 0 + 0 = 0$

✓

Проблем $k+1 = i + j \qquad i < k+1$

$j < k+1$

X $\underbrace{k+1}_{1} \qquad 1 = i + j \qquad i < 1 \qquad i, j \in \mathbb{N}$

Не! $\qquad j < 1$

зад.

Нека A, B, C са множества.

Д. С. Д., че ако

- $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

$$\forall x(\underbrace{x \in A}_{p} \to \underbrace{x \in B}_{q}) \qquad \forall x(\underbrace{x \in B}_{q} \to \underbrace{x \in C}_{t})$$

- $(p \to q \wedge q \to t) \to (p \to t) \equiv T$

$$\forall x(x \in A \to x \in C)$$

def: Наредена двойка

$$\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

def: Наредена тройка

$$\langle a, b, c \rangle = \langle a, \langle b, c \rangle\rangle =$$

$$\{\{a\}, \{a, \{\{b\}, \{b, c\}\}\}\}$$

def: Декартово произведение

$$A \times B = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

$|A| = n \qquad |B| = m \qquad |A \times B| = n \cdot m$

def: Релация – подмножество на дек. произведение

$A = \{a, b\} \qquad B = \{1, 2, 3\}$

$R \subseteq A \times B \qquad x \to y \qquad (x, y) \in R$

$R = \{(a,2), (a,3), (b,1)\}$

$\leq \; = \{(3,4), (3,3), (7,9) \dots\}$

$+ \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \qquad + = \{((1,2),3), ((9,7),16)$

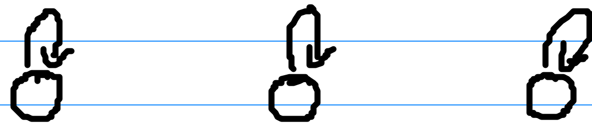
$- \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} = \{((9,7),2) \dots\}$

Свойства на релации $R \subseteq A \times A$

- Рефлексивност $\forall x\, (\langle x, x\rangle \in R)$

$=$ $\quad = \quad = \{(3,3), (4,4) \dots\}$

$\leq$
$\geq$
$\vdots$

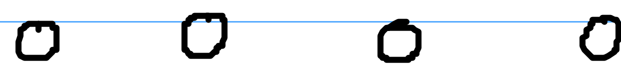


- Антирефлексивност $\forall x\, (\langle x, x\rangle \notin R)$

$<$
$>$

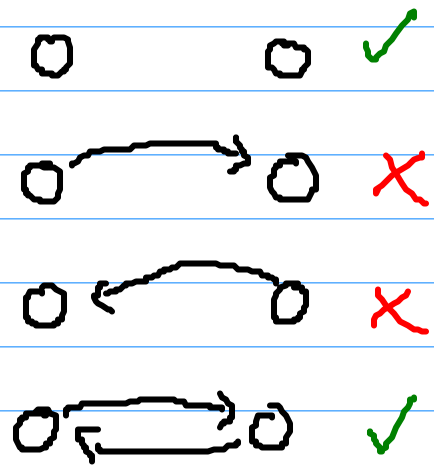
! $\emptyset$ – рефл + антирефл.

$A = \emptyset \quad R = \emptyset$



- Симетрична.

$\forall a \forall b\, ((a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R)$



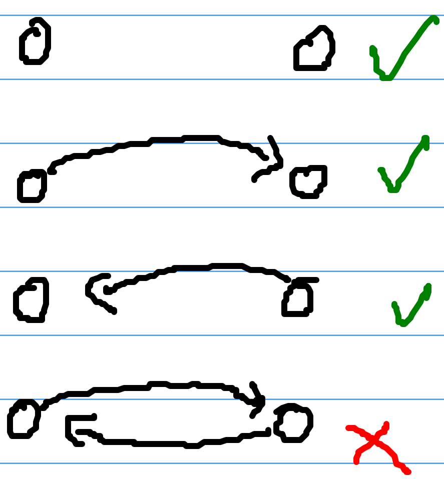
$=$, $\neq$,

$<$, $\leq$, $>$, $\geq$

• Антисимметрична

• $\forall a \forall b \, (aRb \wedge bRa \to a = b)$

• $\forall a \forall b \, (a \neq b \wedge aRb \to b \not R a)$



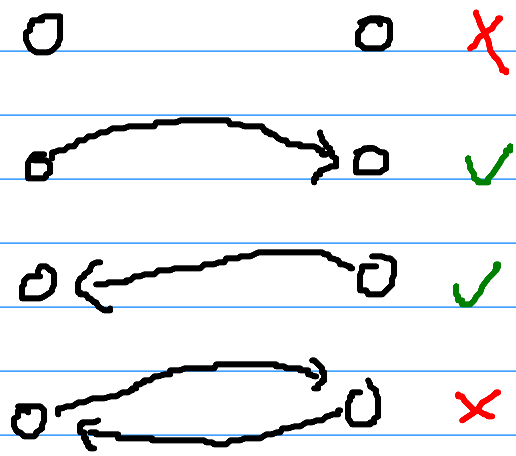
$\varnothing$ – сим
антисим.

$<$, $\leq$, $\geq$, $>$, $=$

$\neq$,

Силно антисиметрична

$$\forall a \forall b \, (a \neq b \to (a,b) \in R \oplus (b,a) \in R)$$



$<, >, \leq, \geq$

$\neq, =$

• Транзитивност.

$$\forall a \forall b \forall c \, ((a,b) \in R \land (b,c) \in R \to (a,c) \in R)$$

$=, <, >, <=, >=$

$\neq$

$3 \neq 4 \quad 4 \neq 3$

$\not\Rightarrow 3 \neq 3$

Зад. Изследвайте за свойства следните релации:

а) $R \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$

$(A, B) \in R$

$A R B$

$(A,B) \in R \iff A \subseteq B$

$$\begin{tikzcd} \{1\} \arrow[loop left] \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \{1,2\} \arrow[loop above] \arrow[r] & \{1,2,3\} \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

1) Рефл. ✓ $\forall x \, (x \subseteq x)$

2) Антирефл. ✗ $x = \{1\}$ $\quad x \subseteq x \quad (x, x) \in R$

3) Симетричност ✗ $(x, y) \in R \cancel{\Rightarrow} (y, x) \in R$

$x \subseteq y \to y \not\subseteq x$

$\{1\} \subseteq \{1,2\} \qquad \{1,2\} \not\subseteq \{1\}$

$(\{1\}, \{1,2\}) \in R \qquad (\{1,2\}, \{1\}) \notin R$

4) Антисиметричност ✓

$\forall x \forall y \, (x \neq y \wedge (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R)$

x, y са произволни и

$x \neq y$ и $\underbrace{(x,y) \in R}_{x \subseteq y}$

- $x \neq y$
- $x \subseteq y$

} в y има елемент, който не е елемент в x

$$y \not\subseteq x$$

$$\Rightarrow (y,x) \notin R$$

5) Силно антисиметрична ✗

$$\forall x \forall y \, (x \neq y \to (x,y) \in R \oplus (y,x) \in R)$$

$x = \{1, 2\}$ $\quad$ $y = \{3, 4\}$

$$\underbrace{x \neq y}_{T} \to \underbrace{(x,y) \in R}_{F} \oplus \underbrace{(y,x) \in R}_{F}$$

$$T \to (F \oplus F)$$

$$T \to F$$

$$F$$

б) Транзитивност ✓

$$\forall x \forall y \forall z \left[(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R \right)$$

доказахме го горе! $x \subseteq y \wedge y \subseteq z \rightarrow x \subseteq z$

д) $R \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$

$$(A, B) \in R \leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$$

1) Рефл. X

$$(\emptyset, \emptyset) \notin R$$

2) Антирефл. $\forall x \, (x, x) \notin R$

X $(\{1\}, \{1\}) \in R$

3) Симетричност ✓

$$\forall x \forall y \left[(x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R \right)$$

$\emptyset \neq x \cap y = y \cap x \neq \emptyset \Rightarrow (y, x) \in R$