ЕАИ

K1 – 1 конт 3

K2 – 2 конт 3 ②

2 контролни → теория

задачи

≥3 ≥3

• изпит – задачи ≥3

1 конт | 1 контр

• изпит – теория ≥3

K1 → 1) Регулярни езици + автомати

K2 → 2) Конт.-свободни езици + 2 [illegible]

преди V контролно

• тест в moodle (9 от.)

задължителен

(1)

(Σ) · Азбука – крайно м-во от символи

· Думи над азбуки:

$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n : \forall i \in \{1 \dots n\}\ \alpha_i \in \Sigma$

n – дължина на думата.

$n = 0$ · Бележим с ε

· Език – м-во от думи над Σ

$\Sigma = \{a, b\}$ $L = \{ab, ba\}$

Операции над езици:

Операция? $(f : A \to B)$ $(f : A^n \to A)$ $(f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$

1) Обединение

L_1, L_2 – езици

$L_1 \cup L_2 = \{w \mid w \in L_1 \vee w \in L_2\}$

$L_1 = \{a\}$ $L_2 = \{ba, b\}$

$L_1 \cup L_2 = \{a, ba, b\}$

$|L_1| = n$ $|L_2| = m$ $\max(n, m) \le |L_1 \cup L_2| \le n + m$

2) Конкатенация

L_1, L_2 — езици

$L_1 . L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\}$

$L_1 = \{ab, b\}$ $\quad L_2 = \{bb, a\}$

$L_1 . L_2 = \{\underbrace{ab}_{\in L_1}\underbrace{bb}_{\in L_2}, aba, bbb, ba\}$

$|L_1| = n$

$|L_2| = m$

$|L_1 . L_2| \le n . m$

1) обединение $\quad$ 2) конк.

кои са неутралните ел-ти на тези операции

$+$ неутр. ел: 0

$a + 0 = a \quad \forall a \quad a+0 = 0+a = a$

$*$ неутр. ел: 1

$\forall x \; x.1 = x$

1) Неутр. на обединение?

$\emptyset \quad \forall L \, (L \cup \emptyset = \emptyset \cup L = L)$

2) Неутр. на конкатенация?

! Не е $\emptyset$: $\forall L \, (L.\emptyset = \emptyset.L = \emptyset)$

$\{\varepsilon\} \quad \forall L \, [L.\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}.L = L]$

! конкатенацията не е комутат.

3) (унарна оп.)

звезда на Клини.

$$L^* = \{w_1 w_2 \dots w_n \mid w_i \in L \ (i \in 1..n)\}$$

$$L = \{ab, b, aa\}$$

$$L^* = \{\underbrace{\varepsilon}_{\in L^0}, \underbrace{ab}_{\in L^1}, \underbrace{b}_{\in L^1}, \underbrace{aa}_{\in L^1}, \underbrace{abb}_{\in L^2}, \underbrace{baa}_{\in L^2}, \underbrace{abaa}_{\in L^2} \dots$$

$$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n \qquad (L^n = \underbrace{L.L.L \dots L}_{n\text{-пъти}})$$

$$L^* = \{L^0 \cup L^1 \cup L^2 \dots\dots\dots\dots$$

за всеки език L: $\underbrace{L^0}_{0 \text{ пъти конкатенация}} = \{\varepsilon\}$

$3 * 7 = 3+3+3+3+3+3+3$

$3 * 0 = 0$ (неутр. ел относно $+$)

$3^2 = 3 . 3$

$3^0 = 1$ (неутр. ел. относно $*$)

$L^3 = L.L.L$

$L^0 = \{\varepsilon\}$ (неутр. ел. относно $.$)

$|L| = n$ $\qquad |L^*| = \begin{cases} 1 & |L| = 0 \ (L = \emptyset) \\ \infty & |L| \geq 1 \end{cases}$

$$\emptyset^* = \bigcup_{i = \mathbb{N}} L^i = \underbrace{L^0}_{\{\varepsilon\}} \cup \underbrace{L^1}_{\emptyset} \cup \underbrace{L^2}_{\emptyset} \ldots\ldots \ \emptyset$$

$||$

$\{\varepsilon\}$

def: Регулярен език.

индуктивна

$-4 \quad -2 \quad 0 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \ldots$

Пример за инд деф!

Четни числа.

• 0 е четно.

• Ако α е четно, то $\alpha + 2$, $\alpha - 2$

• Всяко е четно

def: Регулярен език над Σ

База: $\emptyset$ е рег. език.

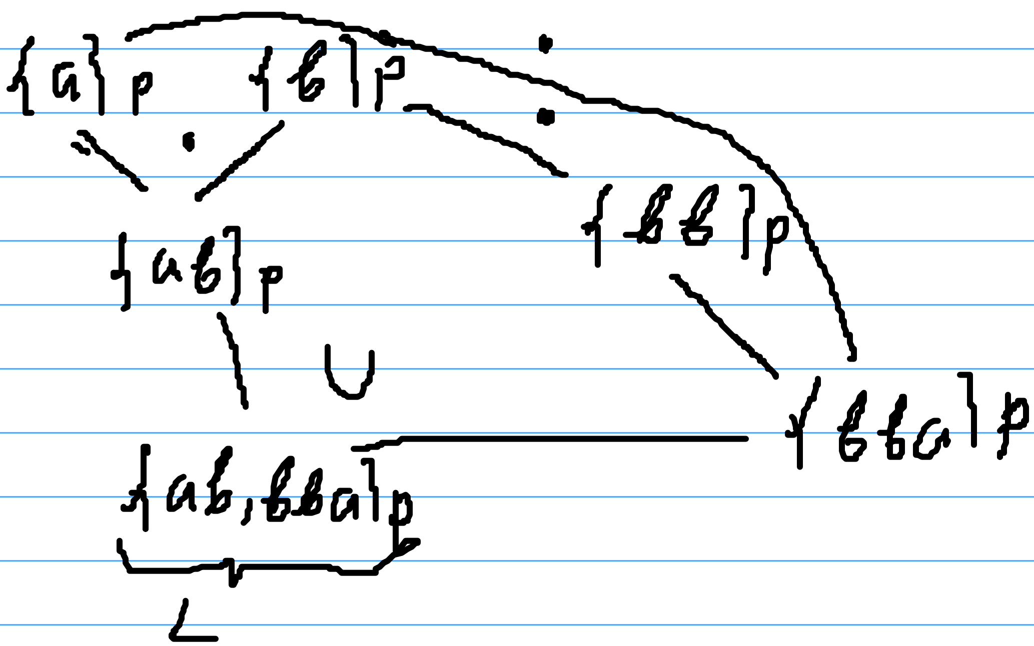
$\{a\}$ е рег език $\forall a \in \Sigma$

Ако L_1 и L_2 са регулярни

- $L_1 \cup L_2$ е регулярен
- $L_1 \cdot L_2$ е регулярен
- L_1^* и L_2^* са регулярни

⚠ Тези операции се прилагат краен брой пъти

Зад. Докажете, че $L=\{ab, bba\}$ е регулярен ($\Sigma=\{a,b\}$)



Въведение.

Всеки краен език е рег.

Сега на док:

Краен брой обединения на думи

думи: краен брой конкатенации на {a} (символи)

зад. $\Sigma = \{a\}$ Докажете, че

$$L = \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ е четно}\}$$

е рег.

$L = \{ \varepsilon, aa, aaaa, aaaaaa \ldots\ldots$

$|L| = \infty$

решение:

$\{aa\}_p$ − рег (защото е краен)

$$\underbrace{\{aa\}^*}_{L} = \{ \underbrace{\varepsilon}_{L^0}, \underbrace{aa}_{L^1}, \underbrace{aaaa}_{L^2}, \underbrace{aaaaaa}_{L^3} \ldots$$

Зад $\Sigma = \{a\}$

$L = \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \text{ и } n \text{ е нечетно}\}$

L е рег?

$L = \{a, aaa, aaaaa, aaaaaaa \dots$

Решение:

Знаем, че $L' = \{a^n \mid n \text{ е четно}\}_P$

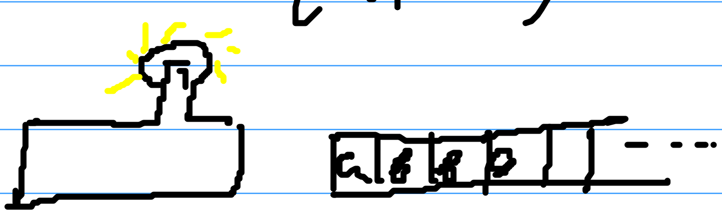
$L'' = \{a\}\ P$

$L' \cdot L'' = \{\varepsilon, aa, aaaa, aaaaaa \dots\} \cdot \{a\}$

$= \underbrace{\{a, aaa, aaaaa, aaaaaaa \dots\}}_{L}$

$\Rightarrow$ L е регулярен.

def: Автомат (краен)



✓ Приема думата

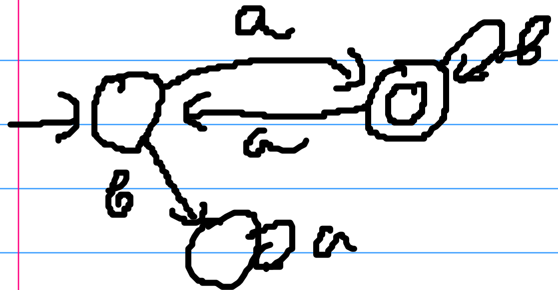
✗ Отхвърля думата

Пример за автомат?

• Visual Studio

If ✓ ✗

• Въвеждане на парола.



← пример за автомат

abb ✓

aba ✗

def: $A = \langle Q, \Sigma, s, F, \delta \rangle$

• Q - мн-во от състояния $|Q| < \infty$

• Σ - азбука на A $|\Sigma| < \infty$

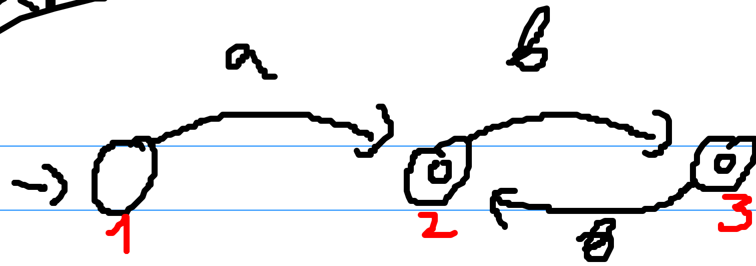
• $s \in Q$ стартово състояние

• $F \subseteq Q$ финални състояния

• δ - ф-я на преходите

$$\delta : Q \times \Sigma \to Q$$

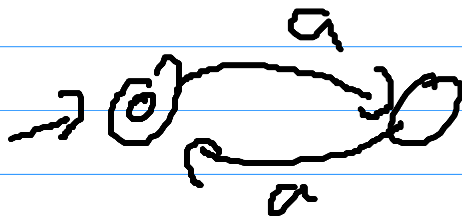
Пример:



$A = \langle \{1,2,3\}, \{a,b\}, 1, \{2,3\}, \delta \rangle$

$\delta = \{((1,a),2), ((2,b),3), ((3,b),2)\}$

A:



ε ✓
aa ✓
aaaa ✓

$L(A)$

Автомат за $L = \{a^n \mid n \text{ е четно}\}$

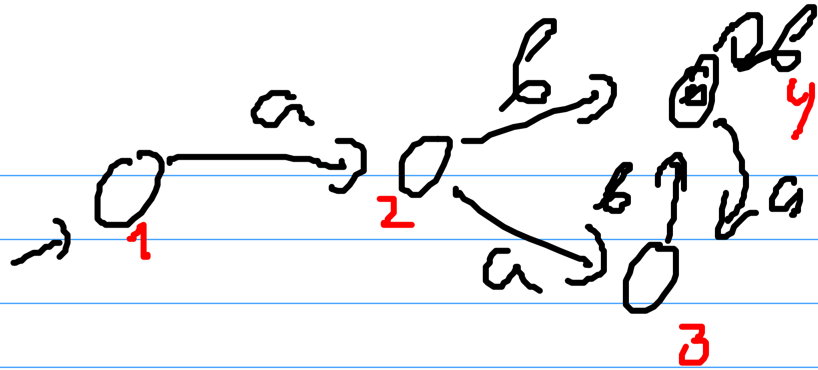
$L(A) = \{w \mid w$ се разпознават от автомата$\}$

aaa

$\delta(\delta(\delta(1,a),a),a) \in F$

$$\delta^*(q,w) = \begin{cases} q & w = \varepsilon \\ \delta^*(\delta(q,a),u) & w = au \quad a \in \Sigma \end{cases}$$

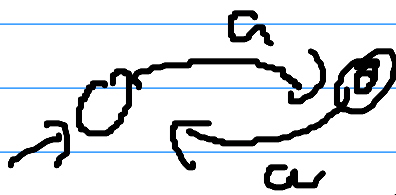
В кое сме „отиване“ след като прочетем w



$\delta^*(1, ababa) = 3$

⚠ $L(A) = \{ w \in \Sigma^* \mid \delta^*(s, w) \in F \}$

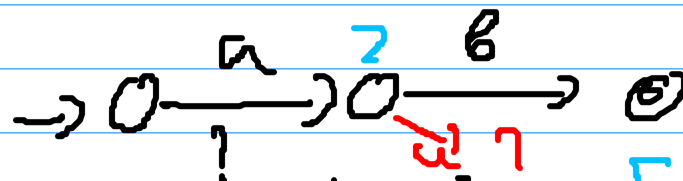
Когато говорим за дума w над азбука Σ $(w \in \Sigma^*)$

? 

$L(A) = \{ a^n \mid n$ е нечетно$\}$

a ✓

aaa ✓



Не е тотален

aa $\in L(A)$?

$\delta(2, a) = ?$

Не приема думата

def: $A = \langle Q \ldots \delta \rangle$ е тотален, ако

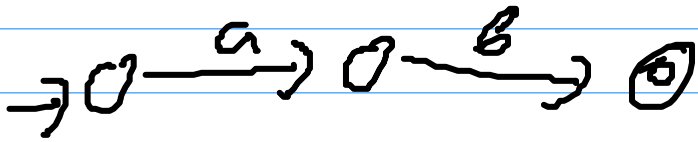
$\forall q \in Q \; \forall a \in \Sigma \quad \delta(q, a)$ да е деф.

δ да е тотална

Ако автоматът не е тотален?

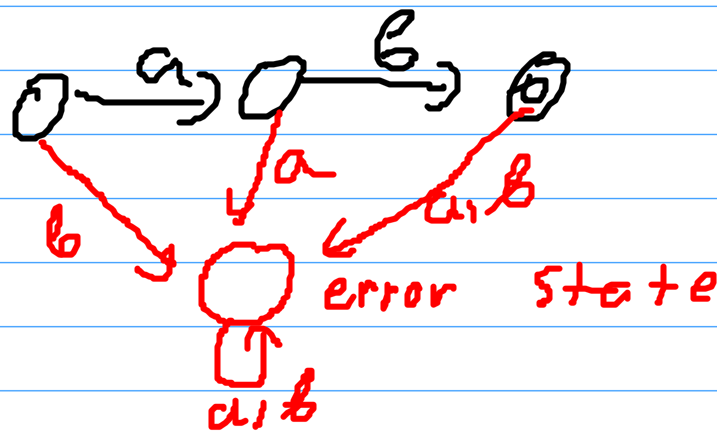
„Тотализация" на автомата:

$\Sigma = \{a, b\}$



$L(A) = \{ab\}$

тотален



$L(\text{тот } A) = \{ab\}$

Автомат вече е тотален

Езикът е същия!