$R \subseteq A \times A$

- част. ф-я $f \subseteq A \times B$
- за $\forall a \in A$ $\exists$ най-много едно b : aRb
- тот. ф-я

за $\forall a \in A$ $\exists$ точно едно b : aRb

зад $\forall n \in \mathbb{N}$ дефинираме $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{ако } x \leq n \\ \text{недеф.} & \text{else} \end{cases}$$

Нека $g = \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$

Д. С. Ч. че g е функция

$f_0 = \{(0,0)\}$

$f_1 = \{(0,0), (1,1)\}$

$f_2 = \{(0,0), (1,1), (2,2)\}$

• g е част. ф-я

$\neg\,[\exists a\, \exists b_1\, \exists b_2\ (a, b_1) \in g \wedge (a, b_2) \in g]$
$b_1 \neq b_2$

допускаме, че не е част функция.

$\Rightarrow \exists a\, \exists b_1\, \exists b_2\ (a, b_1) \in g \wedge (a, b_2) \in g$
$b_1 \neq b_2$

$\exists k \in \mathbb{N}\ f_k\ (a, b_1) \in f_k$

$\Rightarrow a = b_1$

$\exists t \in \mathbb{N}\ (a, b_2) \in f_t$

$a = b_2$

$a = b_1,\ a = b_2,\ b_1 \neq b_2$

$\lightning$

. Тотална.

$\forall n \in \mathbb{N}\ g(n)$ е дефинирана

Нека n е произволно.

$f_n(n) = n$ (от деф на f_n)

$$f_n \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i = g$$

$g(n) = n \Rightarrow g(n)$ е дефинирана

но n е произволно

$\Rightarrow \forall n\ g(n)$ е дефинирана.

~~зад~~

Нека A е множество и нека

$R \subseteq A \times A$ и $P \subseteq A \times A$

Докажете или опровергайте:

a) R е рел. на екв, то $\overline{R}^{(A \times A)}$ е рел. на екв.

Не $A = \{1, 2\}$ $R = \{(1,1), (2,2)\}$ - р.е.

$\overline{R} = \{(1,2)\ (2,1)\}$ - ~~рефлексивност~~

- ~~транзитивност~~

$1R2 \wedge 2R1$ $1\cancel{R}1$

б) Ако R е р.е и P р.е., то $R \setminus P$ е р.е..

Не!! . $A = \{1,2\}$

$R = \{(1,1)\ (2,2)\}$

$P = \{(1,1)\ (2,2)\}$

$R \setminus P = \emptyset$ не е Р.Е (защото $A \neq \emptyset$)

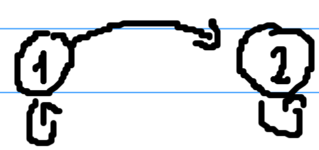
↳ няма рефл.

в) Ако R и P са рел. на част. наредба, то $R \cup P$ е рел на част. нар.

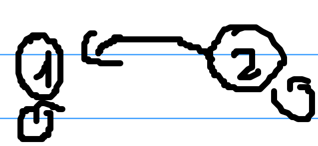
Не!

Антисиметрична: $a \neq b \wedge aRb \rightarrow b \not{R} a$

$A = \{1,2\}$ $R = \{(1,1)\ (2,2)\ (1,2)\}$



$P = \{(1,1)\ (2,2)\ (2,1)\}$



$R \cup P = \{ (1,1), (2,2) \underbrace{(1,2)\ (2,1)} \}$

не е антисиметрична.

2) R, P са рел на екв, то $R \cap P$ е рел на екв.

- Рефлексивна ✓

$\forall x \in A \quad (x,x) \in R \cap P$

R, P са рефлексивни

$\forall x \left((x,x) \in R \wedge (x,x) \in P \right) \Rightarrow (x,x) \in R \cap P$

- Симетрична. ✓

$\forall x \forall y \ ((x,y) \in R \cap P \Rightarrow (y,x) \in R \cap P)$

Нека x, y - произволни и $(x,y) \in R \cap P$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x R y \xRightarrow{R \text{ е симетрична}} y R x \\ \Rightarrow x P y \xRightarrow[P \text{ е симетрична}]{} y P x \end{array}\right\} (y,x) \in R \cap P$$

· транзитивност:

$\forall x \forall y \forall z \, ((x,y) \in R \cap P \wedge (y,z) \in R \cap P \Rightarrow (x,z) \in R \cap P)$

Нека x, y, z – произволни и

$(x,y) \in R \cap P$ $\quad$ $(y,z) \in R \cap P$

R е транз.

$(x,y) \in R$ $\quad$ $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

$(x,y) \in P$ $\quad$ $(y,z) \in P \Rightarrow (x,z) \in P$

P е транз.

$(x,z) \in R \cap P$

$\Rightarrow R \cap P$ е рел. на екв.

g) Ако R е рел. частична наредба, то $R \cup R^{-1}$ е рел на екв.

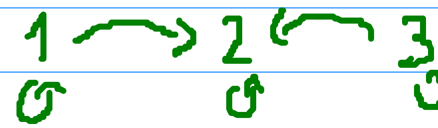
$R^{-1} = \{ (y,x) \mid (x,y) \in R \}$

Решение: Не!

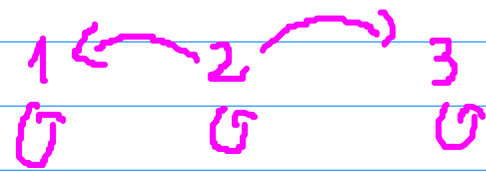
Възможно е $R \cup R^{-1}$ да не е транзитивна

$A = \{1, 2, 3\}$

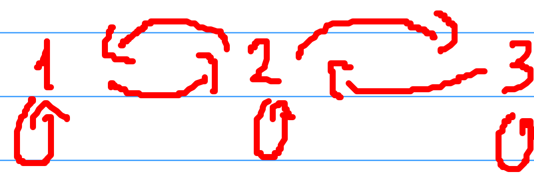
$R = \{(1,1), (2,2) (3,3), (1,2), (3,2)\}$



Тогава: $R^{-1} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,1), (2,3)\}$



$R \cup R^{-1} = \{(1,1) (2,2), (3,3) (2,1) (2,3), (1,2) (3,2)\}$



$$\left.\begin{array}{l}(1,2) \in R \cup R^{-1} \\ (2,3) \in R \cup R^{-1}\end{array}\right\} \quad (1,3) \notin R \cup R^{-1}$$

$\Rightarrow R \cup R^{-1}$ не е транзитивна

$\Rightarrow R \cup R^{-1}$ не е рел. на екв.

е) Ако R е рел. на част. наредба, то $R \cap R^{-1}$ е рел. на екв.

Ако е вярно, то какъв е броя кл. на екв.?

$$R \cap R^{-1} = \{ (x,x) \mid x \in A \}$$

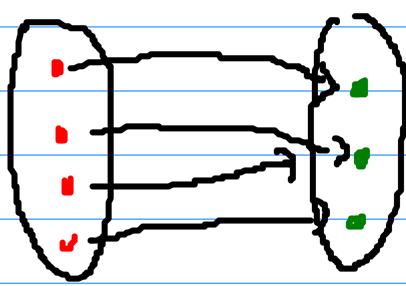
$\Rightarrow R \cap R^{-1}$ е рел на екв.

брой класове на екв: $|A|$

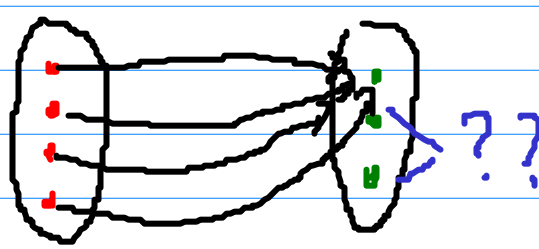
def: $f: A \to B$ е сюрекция

$$\forall b \in B \, \exists a \in A \; f(a) = b$$

✓

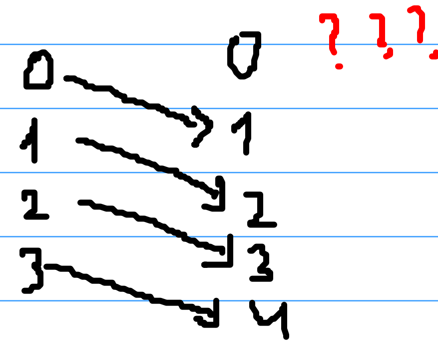


✗



$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(x) = x+1$ ✗



$f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f_2(x) = 2x$ ✗

$f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ✓

$f_3(x) = x-1 \quad \cup \ \{(0,0)\}$

Твърдение (*): A и B са мн-ва

$\exists f : A \to B$ и f е сюрекция $\Rightarrow |A| \geq |B|$

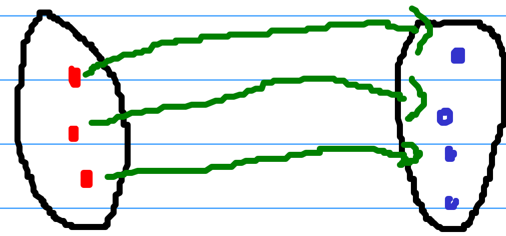
def: $f : A \to B$ е инекция

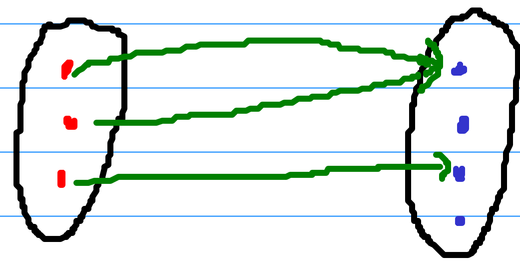
d_1 • $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

d_2 • $\forall a_1, a_2 \in A \quad f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

?

$d1 \equiv d2$ $\qquad$ $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$





$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f_1(x) = 2x$

$f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f_2(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ $\qquad$ $f_2(4) = f_2(5) = 2$

$4 \neq 5$

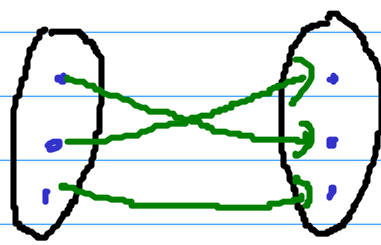
$f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$f_3(x) = |x|$ $\qquad$ $f_3(-3) = f_3(3)$

$\cdot\, 3$

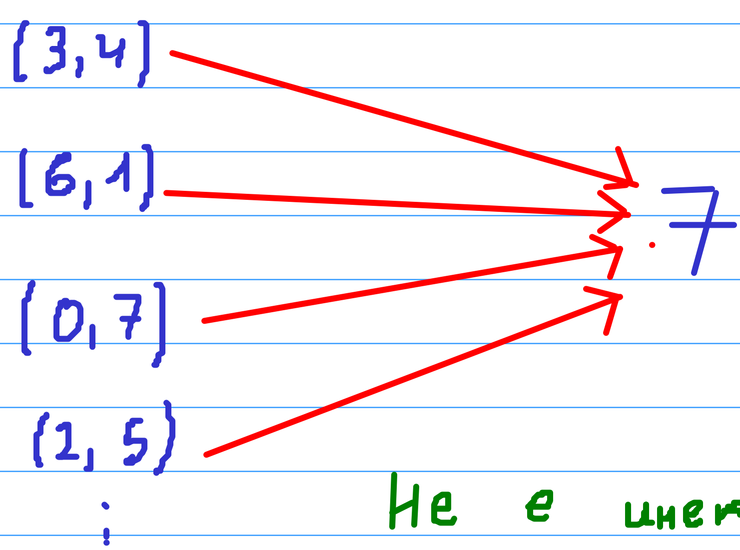
Твърдение: (**): Ако $f: A \to B$ и f е инекция, то: $|A| \leq |B|$

def: f е биекция $\iff$ f е инекция $\wedge$ f е сюрекция



$|A| = |B| \iff \exists f: A \to B$ е биекция

Вярно ли е, че $f: (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ е биекция?



Не е инекция.

(!) A, B - множества. $|A| = |B| \Leftrightarrow \exists f: A \to B$ и f е биекция

$$|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$$

$\exists$ биекция : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(a,b) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + b$$

твърдение:

$f: A \to B$ е биекция $\Leftrightarrow f^{-1}$ е функция

$$f^{-1} = \{ (b,a) \mid (a,b) \in f \}$$

(1) $f: A \to B$ е биекция $\Rightarrow f^{-1}$ е ф-я

- $\forall b \in B \; \exists a \in A \; f^{-1}(b) = a$

$\Rightarrow$ Нека b е произволно.

? $\exists a \in A \; f^{-1}(b) = a$?

След като f е сюрекция

$\exists a' \in A \; f(a') = b \Rightarrow \langle a', b \rangle \in f$

$\Rightarrow \langle b, a' \rangle \in f^{-1}$

$f^{-1}(b) = a'$

② $\underbrace{f^{-1} \text{ е ф-я}}_{(f^{-1}: B \to A)}$ $\Rightarrow$ f е биекция

$\forall b \in B \; \exists! a \in A \quad f^{-1}(b) = a$

Допускаме, че f не е биекция

1 сл) f не е сюрекция

$\exists b \; \neg \exists a \quad f(a) = b$

$\Rightarrow f^{-1}(b)$ не е дефинирана

Но f^{-1} е ф-я (ТОТАЛНА) ↯

2 сл) f не е инекция

$\exists a_1 \exists a_2 \exists b \quad a_1 \neq a_2 \wedge f(a_1) = f(a_2) = b$

Но тогава: $\langle a_1, b \rangle \in f$ $\langle a_2, b \rangle \in f$

Но $\langle b, a_1 \rangle \in f^{-1}$ и $\langle b, a_2 \rangle \in f^{-1}$

$\Rightarrow$ f^{-1} не частична ф-я

↯

$\Rightarrow$ f е биекция