(7)

Операции, относно които са затворени регулярните езици

От деф: $\cup$, $\cdot$, * други: $\overline{}$, $\cap$, $\setminus$, Δ, ^{rev}

Ако L_1 е рег. език, то $\overline{L_1}$ е рег?

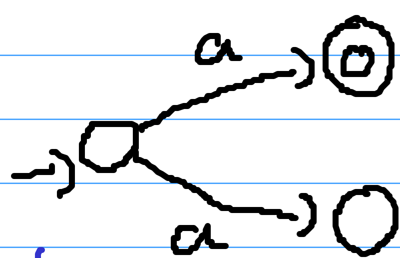
$\overline{U} = \Sigma^*$

Щом L_1 е рег, то $\exists$ автомат A

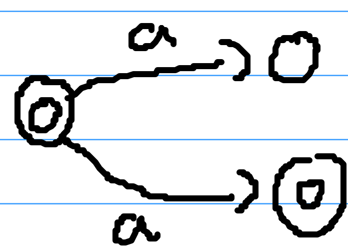
$L(A) = L_1$

Обръщаме финалните с нефиналните състояния

Пример:



$L(A) = \{a\}$

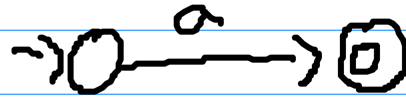


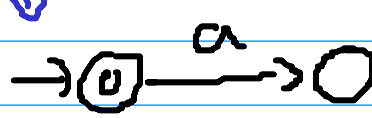
$L(A) = \{\varepsilon, a\}$

Проблем:

Автоматът е недетерминистичен

Трябва да е детерминистичен!

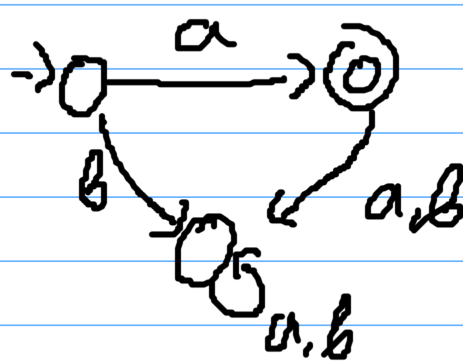
A:  $L(A)=\{a\}$

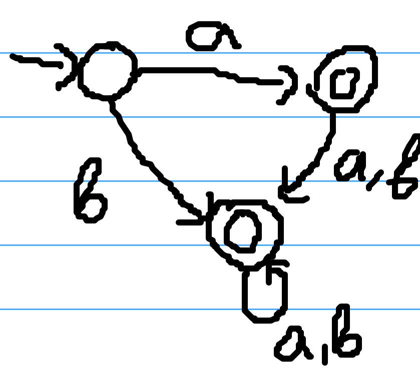
A':  $L(A')=\{\varepsilon\}$

Проблем:

Автоматът не е тотален

Трябва да е тотален!

A:  $L(A)=\{a\}$

A':  $L(A')=\{\varepsilon, b, ab \dots\} = \overline{\{a\}}$

compl(A')

L_1 – рег. $\overline{L_1}$ е рег.

щом L_1 е рег, то с

$$A = \langle Q, \Sigma, s, F, \delta \rangle$$

$$L(A) = L_1$$

Търсим A': $L(A') = \overline{L(A)} = \overline{L_1}$

$$A' = \langle Q, \Sigma, s, Q \setminus F, \delta \rangle$$

Бележим с compl(A)

Твърдение: Ако L е регулярен и A е минимален автомат за L, то compl(A) е минимален автомат за $\overline{L}$

- Ако L_1 и L_2 са регулярни, то $L_1 \cap L_2$ е регулярен?

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$

само регулярни операции

$\Rightarrow L_1 \cap L_2$ е рег.

- Ако L_1 и L_2 са рег, то $L_1 \setminus L_2$ е рег?

$$L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$$

само рег. операции

$\Rightarrow L_1 \setminus L_2$ е регулярен.

Аналогично за $L_1 \triangle L_2$

Автоматни конструкции за $\cap, \setminus, \triangle$

$A_1 = \langle Q_1, \Sigma, s_1, F_1, \delta_1 \rangle$

$A_2 = \langle Q_2, \Sigma, s_2, F_2, \delta_2 \rangle$

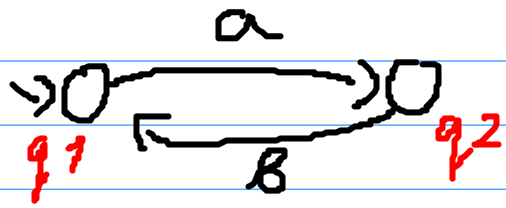
Търсим A', A'', A'''.

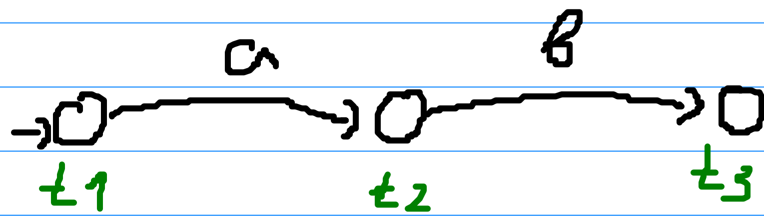
$$L(A') = L(A_1) \cap L(A_2)$$

$$L(A'') = L(A_1) \setminus L(A_2)$$

$$L(A''') = L(A_1) \triangle L(A_2)$$

за пример на дек. произв. на автомати





$$\langle q_1, t_1 \rangle \xrightarrow{a} \langle q_2, t_2 \rangle \xrightarrow{b} \langle q_1, t_3 \rangle$$

$$A' = \langle Q_1 \times Q_2, \Sigma, \langle s_1, s_2 \rangle, F', \delta' \rangle$$

$$A'' = \langle Q_1 \times Q_2, \Sigma, \langle s_1, s_2 \rangle, F'', \delta'' \rangle$$

$$A''' = \langle Q_1 \times Q_2, \Sigma, \langle s_1, s_2 \rangle, F''', \delta''' \rangle$$

$$F' = F_1 \times F_2$$

$$F'' = F_1 \times Q_2 \setminus F_2$$

$$F''' = (F_1 \times Q_2 \setminus F_2) \cup (Q_1 \setminus F_1 \times F_2)$$

$$\delta'(\langle q, t\rangle, a) = \delta''(\langle q, t\rangle, a) = \delta'''(\langle q, t\rangle, a) =$$
$$= \langle \delta_1(q, a), \delta_2(t, a) \rangle$$

предвижване двата автомата

L_1 е регулярен, то L_1^{rev} е регулярен

L_1^{rev} регулярен ?

база

$$\varepsilon^{rev} = \varepsilon$$
$$a^{rev} = a$$
$$\emptyset^{rev} = \emptyset$$

стъпка

$$(L_1 \cup L_2)^{rev} = L_2^{rev} \cup L_1^{rev}$$
$$(L_1 \cdot L_2)^{rev} = L_2^{rev} L_1^{rev}$$
$$(L_1^*)^{rev} = ((L_1)^{rev})^*$$

Зад Постройте КТДМА за L

$$L = \{ w \mid w \text{ не съдържа } aab \}$$

труден за измисляне $\longrightarrow b^*(abb^*)^*a^*$

Решение:

Разглеждаме $\bar{L} = \{ w \mid w \text{ съдържа } aab \}$

$$\bar{L} = \underbrace{(a+b)^*}_{a(a+b)^* + b(a+b)^* + \varepsilon} aab(a+b)^*$$

$$\bar{L} = a\bar{L} + b\bar{L} + aab(a+b)^*$$

$$a^{-1}\bar{L} = \bar{L} + ab(a+b)^* \quad L_1$$

$$b^{-1}\bar{L} = \bar{L}$$

$$a^{-1}L_1 = \underbrace{a^{-1}(\bar{L})}_{L_1} + \underbrace{a^{-1}(ab(a+b)^*)}_{b(a+b)^*} = \quad L_2$$

$$b^{-1}L_1 = \bar{L} + \emptyset = \bar{L}$$

$a^{-1}L_2 = L_2$

$b^{-1}L_2 = \overline{L} \underset{2}{+} (a+b)^* = (a+b)^* \quad L_3$

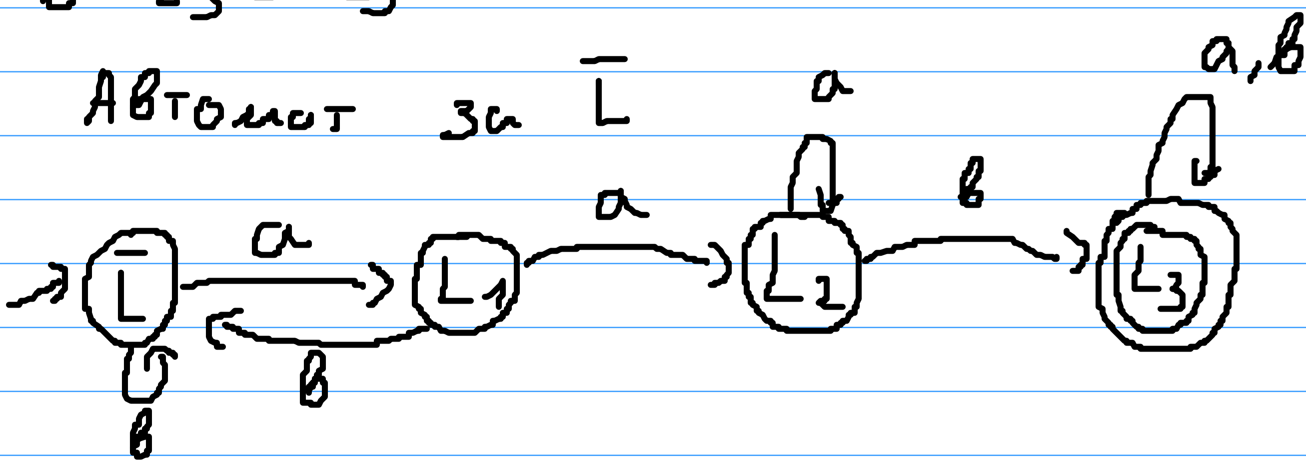
$$L_3 = (a+b)^* = a(a+b)^* + b(a+b)^* + \varepsilon =$$

$$= aL_3 + bL_3 + \varepsilon$$

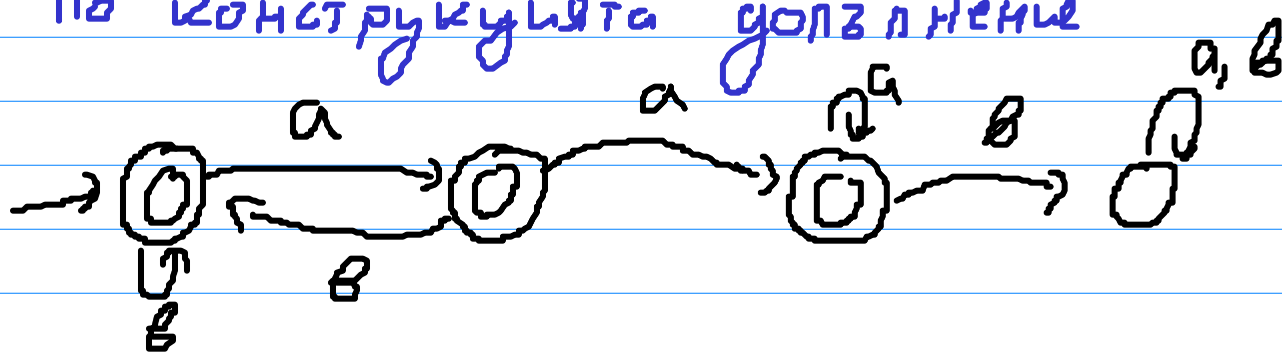
$a^{-1}L_3 = L_3$

$b^{-1}L_3 = L_3$

Автомат за $\overline{L}$



По конструкцията допълнение



Автомат за L

Проверки:

- $\overline{L} \neq L_1$

  $ab \in L_1$

  $ab \notin \overline{L}$

•• $\overline{L} \neq L_2$

$L_1 \neq L_2$

$b \in L_2$

$b \notin L_1, \overline{L}$

••• $L_3 \neq \overline{L}, L_1, L_2$

$\varepsilon \in L_3$ $\quad$ $\varepsilon \notin \overline{L}, L_1, L_2$

зад $L_1 = ba(a+b)^*ab$

$L_2 = bb(b+bb)^*$

$L_3 = \{w \mid$ ако w започва с bb, то w не съдържа $a\}$

Постройте КТДМА за $L_1 \cup L_2 \cup L_3$

Решение:

$L_1 \subseteq L_3 \qquad L_2 \subseteq L_3$

$\Rightarrow L_1 \cup L_2 \cup L_3 = L_3$

p	q	p → q
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

$\neg(p \to q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv p \wedge \neg q$

Разглеждаме $\overline{L_3}$

$L' = \overline{L_3} = \{w \mid w$ започва с bb и съдържа $a\}$

$$L' = bb(a+b)^* a (a+b)^*$$

$a^{-1}L' = \emptyset$ L'_1

$b^{-1}L' = b(a+b)^* a(a+b)^*$ L'_2

$a^{-1} L'_1 = L'_1$

$b^{-1} L'_1 = L'_1$

$a^{-1} L'_2 = \emptyset = L'_1$

$b^{-1} L'_2 = (a+b)^* a(a+b)^*$ L'_3

$$L'_3 = aL'_3 + bL'_3 + a(a+b)^*$$

$a^{-1} L'_3 = L'_3 + (a+b)^* = (a+b)^*$ L'_4

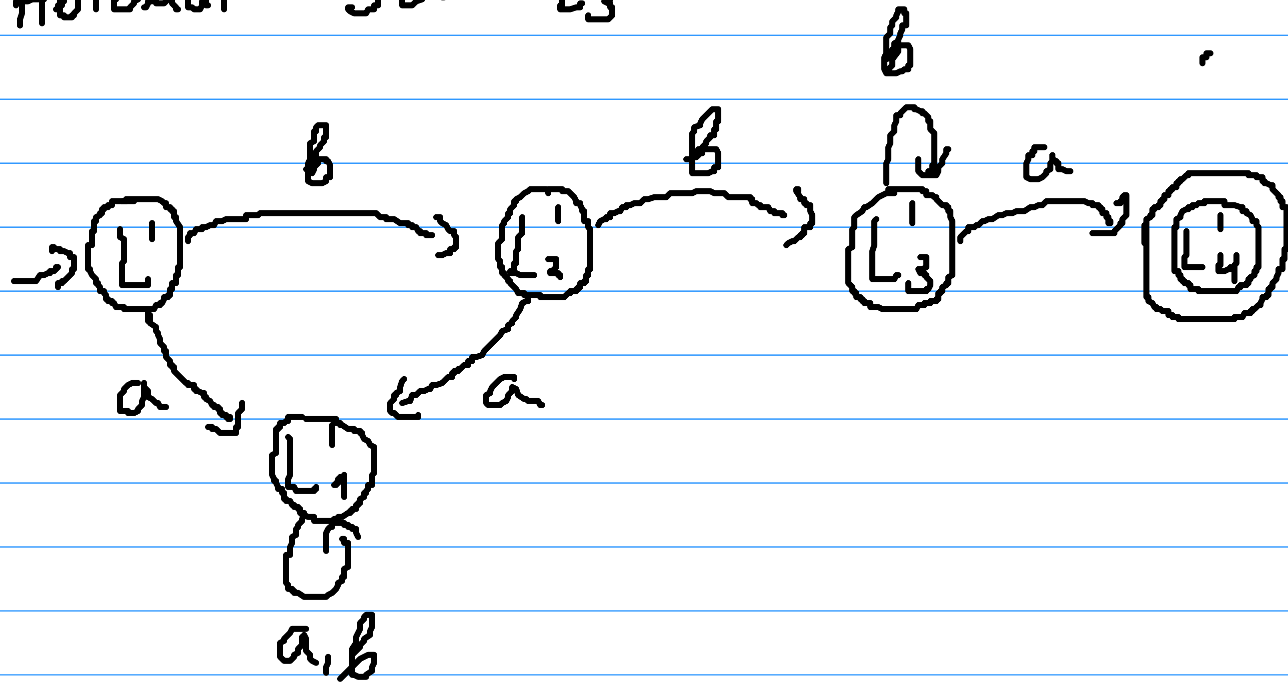
$b^{-1} L'_3 = L'_3$

$$L'_4 = aL'_4 + bL'_4 + \varepsilon$$

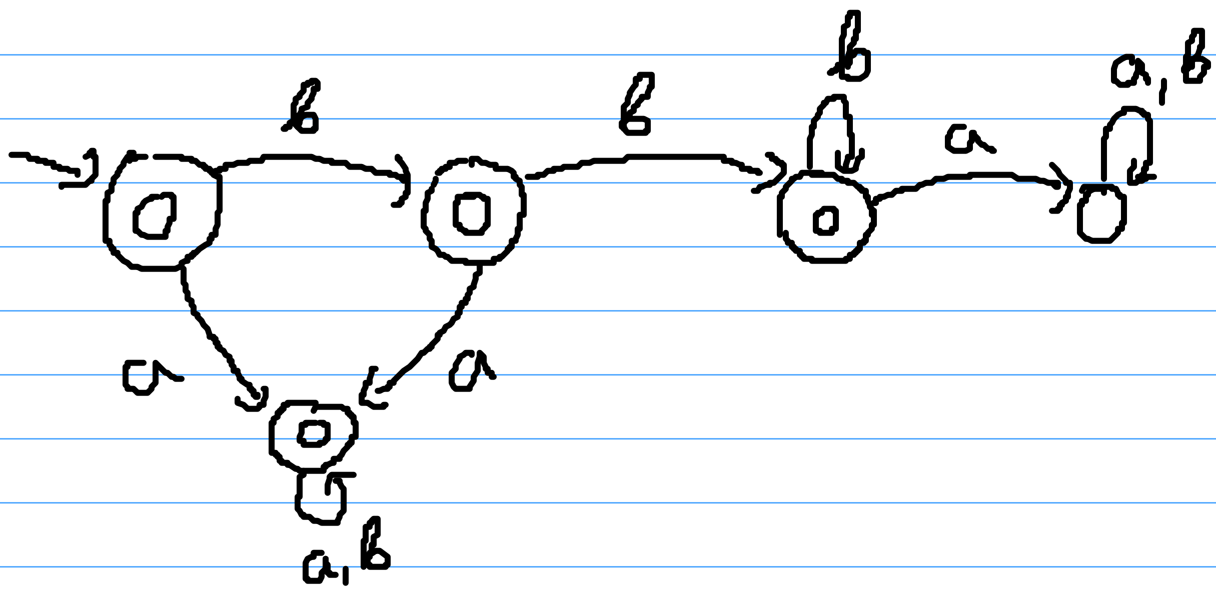
$a^{-1} L'_4 = L'_4$

$b^{-1} L'_4 = L'_4$

Автомат за $\overline{L_3}$



По конструкцията допълнение



Проверки:

$\cdot \quad L_1' \neq L'$

$bba \in L'$

$bba \notin L_1'$

$\cdot\cdot \quad L_2' \neq L', L_1'$

$ba \in L_2'$

$ba \notin L', L_1'$

$\cdots \quad L_3' \neq L', L_1', L_2'$

$a \in L_3' \quad a \notin L', L_1', L_2'$

$\cdots\cdot \quad L_4' \neq L', L_1', L_2', L_3'$

$\varepsilon \in L_4' \quad \varepsilon \notin L', L_1', L_2', L_3'$

Зад Докажете, че L е рег.

$L = \{\alpha \in \{a, b\}^* \mid \alpha$ съдържа $aba \iff \alpha$ съдържа $bb\}$

p	q	$p \iff q$	
F	F	T	L'
F	T	F	
T	F	F	
T	T	T	L''

$L = L' \cup L''$

Нека $L_1 = \{\alpha \in \{a, b\}^* \mid \alpha$ съдържа $aba\}$

$L_2 = \{\alpha \in \{a, b\}^* \mid \alpha$ съдържа $bb\}$

L_1 е рег: $(a+b)^* aba (a+b)^*$

L_2 е рег: $(a+b)^* bb (a+b)^*$

щом L_1, L_2 са рег. $\Rightarrow$ $\overline{L_1}$, $\overline{L_2}$ са рег

$L' = \overline{L_1} \cap \overline{L_2} \Rightarrow L'$ е рег.

$L'' = L_1 \cap L_2 \Rightarrow L''$ е рег.

$\Rightarrow L' \cup L'' = L$ е рег.