$R \subseteq A \times A$

- част. ф-я $f \subseteq A \times B$
- за $\forall a \in A$ $\exists$ най-много едно b: aRb
- тот. ф-я

за $\forall a \in A$ $\exists$ точно едно b : aRb

зад $\forall n \in \mathbb{N}$ дефинираме $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{ако } x \leq n \\ \text{недеф.} & \text{else} \end{cases}$$

Нека $g = \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$

Д.С.Т. че g е функция

$f_0 = \{ (0,0) \}$

$f_1 = \{ (0,0), (1,1) \}$

$f_2 = \{ (0,0), (1,1), (2,2) \}$

- g е част. ф-я

$$\neg\left[\exists a \underset{b_1 \neq b_2}{\exists b_1 \exists b_2} \; (a, b_1) \in g \wedge (a, b_2) \in g\right]$$

допускаме, че не е

$$\Rightarrow \exists a \underset{b_1 \neq b_2}{\exists b_1 \exists b_2} \; (a, b_1) \in g \wedge (a, b_2) \in g$$

$\exists f_k \; (a, b_1) \in f_k$

от деф f_k

$\Rightarrow a = b_1$

$\exists f_t \; (a, b_2) \in f_t$

от деф f_t

$a = b_2$

$a = b_1, \; a = b_2, \; b_1 \neq b_2$

$\lightning$

- Тотална.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad g(n)$ е дефинирана

Нека n е произволно.

$f_n(n) = n$ (от деф на f_n)

$$f_n \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i = g$$

$g(n) = n \Rightarrow g(n)$ е дефинирана

но n е произволно

$\Rightarrow \forall n \; g(n)$ е дефинирана.

~~Зад~~

Нека A е множество и нека

$R \subseteq A \times A$ и $P \subseteq A \times A$

Докажете или опровергайте:

а) R е рел. на екв, то $\overline{R}^{(A \times A)}$ е рел. на екв.

Не $A = \{1, 2\}$ $R = \{(1,1), (2,2)\}$ – р.е.

$\overline{R} = \{(1,2)\ (2,1)\}$ – ~~рефлексивност~~

– ~~транзитивност~~

$1R2 \wedge 2R1$ $1\cancel{R}1$

б) Ако R е р.е и P р.е., то $R \setminus P$ е р.е..

Не!! . $A = \{1, 2\}$

$R = \{(1,1)\ (2,2)\}$

$P = \{(1,1)\ (2,2)\}$

$R \setminus P = \emptyset$ не е Р.Е (защото $A \neq \emptyset$)

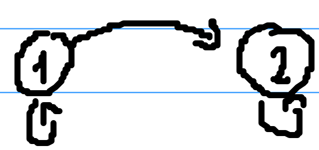
↳ няма рефл.

в) Ако R и P са рел. на част. наредба, то $R \cup P$ е рел на част. нар.

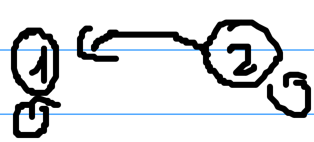
Не!

Антисиметрична: $a \neq b \wedge aRb \rightarrow b \not R a$

$A = \{1, 2\}$ $R = \{(1,1)\ (2,2)\ (1,2)\}$



$P = \{(1,1)\ (2,2)\ (2,1)\}$



$R \cup P = \{ \underbrace{(1,1), (2,2)\ (1,2)\ (2,1)} \}$

не е антисиметрична.

2) R, P са рел на екв, то $R \cap P$

е рел на екв.

- Рефлексивна ✓

$\forall x \in A \quad (x,x) \in R \cap P$

R, P са рефлексивни

$$\forall x \left[(x,x) \in R \wedge (x,x) \in P \right] \Rightarrow (x,x) \in R \cap P$$

- Симетрична. ✓

$\forall x \forall y \ (x\, R \cap P\, y \Rightarrow y\, R \cap P\, x)$

Нека x, y - произволни и $\underbrace{x\ R \cap P\ y}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x R y \xRightarrow{R \text{ р.е.}} y R x \\ \Rightarrow x P y \xRightarrow[P \text{ р.е.}]{} y P x \end{array}\right\} (y,x) \in R \cap P$$

• Транзитивност.

$$\forall x \forall y \forall z \, ((x,y) \in R \cap P \wedge (y,z) \in R \cap P \Rightarrow (x,z) \in R \cap P)$$

Нека x, y, z – произволни и

$(x,y) \in R \cap P$ $\qquad$ $(y,z) \in R \cap P$

R е транз.

$(x,y) \in R$ $\qquad$ $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

$(x,y) \in P$ $\qquad$ $(y,z) \in P \Rightarrow (x,z) \in P$

P е тр.

$\Downarrow$

$(x,z) \in R \cap P$

$\Rightarrow R \cap P$ е р. екв.

g) Ако R е рел. част. н., то

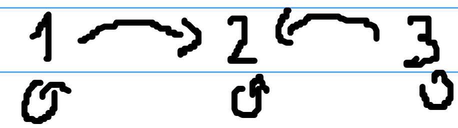
$R \cup R^{-1}$ е рел на екв.

$R^{-1} = \{ (y,x) \mid (x,y) \in R \}$

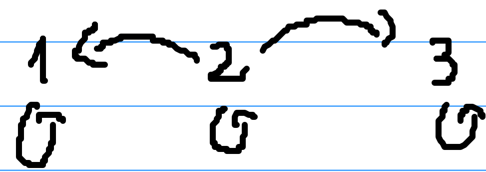
Тук няма транзитивност.

$A = \{1, 2, 3\}$

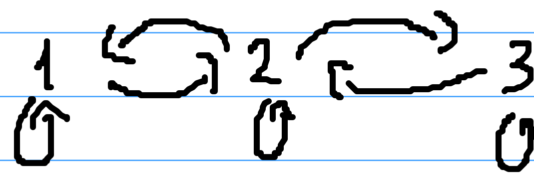
$R = \{(1,1), (2,2) (3,3), (1,2), (3,2)\}$



ТОГАВА: $R^{-1} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,1), (2,3)\}$



$R \cup R^{-1} = \{(1,1) (2,2), (3,3) (2,1) (2,3), (1,2) (3,2)\}$



$$\left.\begin{array}{l} (1,2) \in R \cup R^{-1} \\ (2,3) \in R \cup R^{-1} \end{array}\right\} \quad (1,3) \notin R \cup R^{-1}$$

$\Rightarrow R \cup R^{-1}$ не е екв

e) Ако R е рел. част. наредба, то $R \cap R^{-1}$ е рел. на екв.

Ако е вярно, то какъв е броя кл. на екв.?

$$R \cap R^{-1} = \{ (x, x) \mid x \in A \}$$

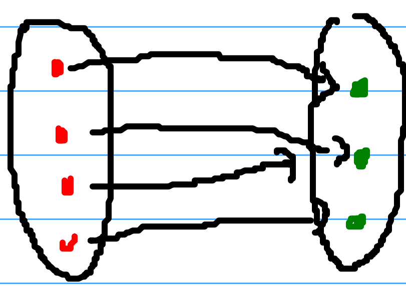
$\Rightarrow R \cap R^{-1}$ е рел на екв.

брой класове на екв: $|A|$

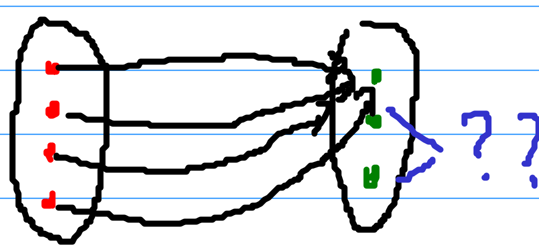
def: $f : A \to B$ е сюрекция

$$\forall b \in B \, \exists a \in A \; f(a) = b$$

✓



✗



$f_1: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(x) = x+1$ ✗

$$\begin{array}{ccc} & & 0 \quad ??? \\ 0 & \to & 1 \\ 1 & \to & 2 \\ 2 & \to & 3 \\ 3 & \to & 4 \end{array}$$

$f_2: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f_2(x) = 2x$ ✗

$f_3: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ✓

$f_3(x) = x-1 \quad \cup \ \{(0,0)\}$

Твърдение (*): A и B са мн-ва

$\exists f: A \to B$ и f е сюрекция $\Rightarrow |A| \geq |B|$

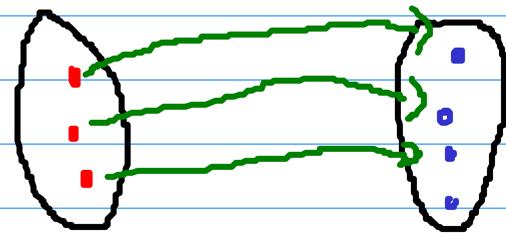
def: $f: A \to B$ е инекция

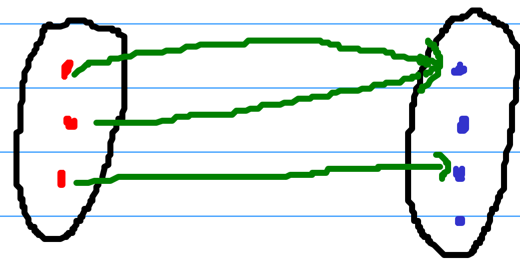
d1 • $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

d2 • $\forall a_1\ a_2 \in A \quad f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

$d1 \overset{?}{\equiv} d2$

✓ 

✗ 

✓ $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f_1(x) = 2x$

✗ $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f_2(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ $\qquad f_2(4) = f_2(5) = 2$

$4 \neq 5$

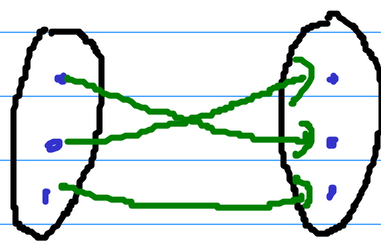
✗ $f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$f_3(x) = |x|$ $\qquad f_3(-3) = f_3(3)$

$\cdot 3$

Твърдение: (**): Ако $f: A \to B$ и f е инекция, то: $|A| \leq |B|$

def: f е биекция $\Leftrightarrow$ f е сюрекция $\wedge$ f е инекция



$|A| = |B| \Leftrightarrow \exists f: A \to B$ е биекция

Вярно ли е, че $f: (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ е биекция?

$f(x, y) = x + y$

$(3,4) \to 7$
$(6,1) \to 7$

$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$\underbrace{f(3,4)}_{7} = \underbrace{f(6,1)}_{7}$

$$|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$$

$\exists$ биекция : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(a,b) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + b$$

Твърдение:

$f: A \to B$ е биекция $\Leftrightarrow f^{-1}$ е ф-я

$$f^{-1} = \{ (b,a) \mid (a,b) \in f \}$$

- $f: A \to B$ е биекция, то f^{-1} е ф-я

- $\forall b \in B \; \exists a \in A \; f^{-1}(b) = a$

$\Rightarrow$ Нека b е произволно.

? $\exists a \in A \; f^{-1}(b) = a$?

След като f е сюрекция

$\exists a' \in A \; f(a') = b \Rightarrow \langle a', b \rangle \in f$

$\Rightarrow \langle b, a' \rangle \in f^{-1}$

$f^{-1}(b) = a'$

- $\underbrace{f^{-1} \text{ е ф-я}}$, то f е биекция

$\downarrow \quad f^{-1}: B \to A$

$\forall b \in B \ \exists! a \in A \quad f^{-1}(b) = a$

Допускаме, че f не е биекция

1 сл) f не е сюрекция

$\exists b \ \neg \exists a \quad f(a) = b$

$\Rightarrow f^{-1}(b)$ не е дефинирана

Но f^{-1} е ф-я $\quad$ ↯

2 сл) f не е инекция

$\exists a_1 \exists a_2 \exists b \quad a_1 \neq a_2 \wedge f(a_1) = f(a_2) = b$

Но тогава: $\langle a_1, b\rangle \in f$ $\langle a_2, b\rangle \in f$

но $\langle b, a_1\rangle \in f^{-1}$ и $\langle b, a_2\rangle \in f^{-1}$

$\Rightarrow f^{-1}$ не частична ф-я

$\lightning$

$\Rightarrow f$ е биекция

Следствие:

$f: A \to B$ е биекция $\Longleftrightarrow f^{-1}(f[X]) = X$

Д-во: за домашно