

# Задачи с доказателство на контекстно-свободни граматики

Ангел Димитриев

## Задача 1

Докажете, че езикът  $L = \{a^n b^n | n \in \mathbf{N}\}$  е контекстно- свободен.

### Решение:

$L$  е контекстно-свободен, ако съществува контекстно-свободна граматика  $G$  за езика  $L$ . Да разгледаме граматика  $G$ :

$$S \rightarrow aSb | \epsilon$$

Ще докажем, че граматиката генерира точно думите от  $L$ . Т.е че:  $L(G) = L$ .  
1.  $L(G) \subseteq L$ .

Трябва да покажем, че всички думи от граматиката (съставени само от символи от  $\Sigma$ ) принадлежат на езика  $L$ . За целта трябва да дефинираме точно какво е поведението на променливата  $S$ . Твърдим, че:

$$S \rightarrow^* \underbrace{\{a^m S b^m \mid m \in \mathbf{N}\}}_{\Delta} \cup \underbrace{\{a^m b^m \mid m \in \mathbf{N}\}}_{\circ}$$

( $S \rightarrow^* w$  означава, че  $w$  е изводимо от  $S$  за краен брой стъпки)

Ще докажем твърдението с **индукция по дължината на извода**.

**База:** За 0 стъпки:  $S \rightarrow^0 S = a^0 S b^0 \Delta$ .

**Индукционно предположение:** Допускаме, че за  $k$  стъпки:

$$S \rightarrow^k a^q S b^q \text{ или } S \rightarrow^k a^q b^q$$

**Индукционно стъпка:** Разглеждаме за  $k+1$  стъпка. Ще приложим всяко едно от правилата:

• Знаем, че  $S \rightarrow^k a^q S b^q$  :

Правило 1:  $S \rightarrow^k a^q S b^q \rightarrow a^q a S b b^q = a^{q+1} S b^{q+1} \Delta$

Правило 2:  $S \rightarrow^k a^q S b^q \rightarrow a^q b^q \circ$

Кое и правило да приложим за  $k + 1$ -та стъпка, получаваме дума във вида, който искаме.

• Знаем, че  $S \rightarrow^k a^q b^q$

Но тук нямаме променливи, така че няма как да приложим  $k + 1$  стъпка.

Доказахме, че от  $S$  можем да изведем **само** думи от този вид:

$$\{a^m S b^m \mid m \in \mathbf{N}\} \cup \{a^m b^m \mid m \in \mathbf{N}\}$$

Но единствените думи, които са от  $\Sigma^*$  са  $\{a^m b^m \mid m \in \mathbf{N}\}$ , за които е ясно, че са  $\subseteq L$ .

Доказахме, че  $L(G) \subseteq L$

2.  $L \subseteq L(G)$ . Трябва да покажем, че всяка дума, която е от езика, може да се изведе от  $G$ . Т.е  $(\forall i \in \mathbf{N}) S \rightarrow^* a^i b^i$

Ще докажем твърдението с **индукция по дължината на думата**.

**База:** Най-малката дума от езика е с дължина 0. Това е думата  $\epsilon$ . Можем да изведем:  $S \rightarrow \epsilon$

**Индукционно предположение:** Допускаме, че можем да изведем **всички** думи с дължина  $< k$  ( $k$  е произволно естествено число ( $k > 1$ ))

Т.е допускаме, че  $(\forall j) j < k : S \rightarrow^* a^j b^j$

**Индукционна стъпка:**

Разглеждаме произволна дума с дължина  $k$ :  $a^t b^t$ , където  $t + t = k$ .

Ще покажем, че можем да я изведем. **Трябва да изразим дадената дума, чрез по-къса дума от същия език + някое правило от граматиката.**

Думата може да разбием така:

$$a^t b^t = a a^{t-1} b^{t-1} b.$$

Вижда се, че  $a^{t-1} b^{t-1}$  е от езика и че  $|a^{t-1} b^{t-1}| < k$ . Т.е от и.п. можем да я изведем от граматиката. Т.е  $S \rightarrow^* a^{t-1} b^{t-1}$

Сега да изведем желаната дума ( $a^t b^t$ )

$$S \rightarrow a S b \xrightarrow{* \text{ и.п. }} a a^{t-1} b^{t-1} b = a^t b^t$$

Показахме, че можем да изведем думата  $a^t b^t$ .

От тук следва, че  $(\forall i \in \mathbf{N}) S \rightarrow^* a^i b^i$ .

Т.е  $L \subseteq L(G)$ .

От тук вече е ясно, че  $L = L(G)$ . Следователно  $L$  е контекстно свободен.

## Задача 2

Докажете, че езикът  $L = \{a^n b^k \mid n, k \in \mathbf{N} \wedge n > k\}$  е контекстно-свободен.

**Решение:**

$L$  е контекстно-свободен, ако съществува контекстно-свободна граматика  $G$  за езика  $L$ . Да разгледаме граматика  $G$ :

$$S \rightarrow a S b \mid a S \mid a$$

Ще докажем, че граматиката генерира точно думите от  $L$ . Т.е че:  $L(G) = L$ .

1.  $L(G) \subseteq L$ . Трябва да покажем, че всички думи от граматиката (съставени само от символи от  $\Sigma$ ) принадлежат на езика  $L$ . За целта трябва да дефинираме точно какво е поведението на променливата  $S$ . Твърдим, че:

$$S \rightarrow^* \{a^{t_1} S b^{t_2} \mid t_1 \geq t_2\} \cup \{a^{s_1} b^{s_2} \mid s_1 > s_2\}$$

$\triangle$   $\circ$

( $S \rightarrow^* w$  означава, че  $w$  е изводимо от  $S$  за краен брой стъпки)

Ще докажем твърдението с **индукция по дължината на извода**.

**База:** За 0 стъпки:  $S \rightarrow^0 S = a^0 S b^0 \triangle$ .

**Индукционно предположение:** Допускаме, че за  $k$  стъпки:

$$S \rightarrow^k a^{q_1} S b^{q_2} \quad (q_1 \geq q_2) \quad \text{или} \quad S \rightarrow^k a^{q_1} b^{q_2} \quad (q_1 > q_2)$$

**Индукционно стъпка:** Разглеждаме за  $k+1$  стъпка.

• Знаем, че  $S \rightarrow^k a^{q_1} S b^{q_2}$ . Ще приложим всяко едно от правилата:

1.  $S \rightarrow^k a^{q_1} S b^{q_2} \rightarrow a^{q_1} a S b b^{q_2} = a^{q_1+1} S b^{q_2+1} \triangle (q_1 \geq q_2 \implies q_1+1 \geq q_2+1)$
2.  $S \rightarrow^k a^{q_1} S b^{q_2} \rightarrow a^{q_1} a S b^{q_2} = a^{q_1+1} S b^{q_2} \triangle (q_1 \geq q_2 \implies q_1+1 \geq q_2)$
3.  $S \rightarrow^k a^{q_1} S b^{q_2} \rightarrow a^{q_1} a b^{q_2} = a^{q_1+1} b^{q_2} \circ (q_1 \geq q_2 \implies q_1+1 > q_2)$

Кое и правило да приложим за  $k+1$ -та стъпка, получаваме дума във вида, който искаме.

• Знаем, че  $S \rightarrow^k a^{q_1} b^{q_2}$ .

Но тук нямаме променливи, така че няма как да приложим  $k+1$  стъпка.

Доказахме, че от  $S$  можем да изведем **само** думи от този вид:

$$\{a^{t_1} S b^{t_2} \mid t_1 \geq t_2\} \cup \{a^{s_1} b^{s_2} \mid s_1 > s_2\}$$

Но единствените думи, които са от  $\Sigma^*$  са  $\{a^{s_1} b^{s_2} \mid s_1 > s_2\}$ , за които е ясно, че са  $\subseteq L$ .

Доказахме, че  $L(G) \subseteq L$

2.  $L \subseteq L(G)$ . Трябва да покажем, че всяка дума, която е от езика, може да се изведе от  $G$ . Т.е  $(\forall i, j \in \mathbf{N}) i > j \implies S \rightarrow^* a^i b^j$

Ще докажем твърдението с **индукция по дължината на думата**.

**База:** Най-малката дума от езика е с дължина 1. Това е думата **a**. Можем да изведем:  $S \rightarrow a$

**Индукционно предположение:** Допускаме, че можем да изведем **всички думи** с дължина  $< k$  ( $k$  е произволно естествено число ( $k > 1$ ))

Т.е допускаме, че  $(\forall i, j) i > j \wedge i + j < k \implies S \rightarrow^* a^i b^j$

**Индукционна стъпка:**

Разглеждаме произволна дума с дължина  $k$ :  $a^t b^r$ , където  $t > r \wedge t + r = k$ .

Ще покажем, че можем да я изведем. **Трябва да изразим дадената дума, чрез по-къса дума от същия език + някое правило от граматиката.**

**1 сл.** Ако в думата има поне едно  $b$ . Тогава тя изглежда така:  $a^t b^r$ , където  $t > r \wedge t + r = k \wedge t > 1 \wedge r \geq 1$ . Думата може да разбием така:  $a^t b^r = a a^{t-1} b^{r-1} b$ . Думата  $a^{t-1} b^{r-1}$  е част от езика, защото:  $t > r \implies t - 1 > r - 1$ . Освен това  $|a^{t-1} b^{r-1}| < k$ , защото  $t + r = k$ . Т.е от и.п. можем да я изведем от граматиката ( $S \rightarrow^* a^{t-1} b^{r-1}$ ). Сега остана да изведем желаната дума:

$$S \rightarrow a S b \rightarrow^{* \text{и.п.}} a a^{t-1} b^{r-1} b = a^t b^r$$

**2 сл.** Ако в думата няма  $b$ -та. Тогава тя изглежда така:  $a^k b^0 = a^k$ . Можем да я разбием по следния начин:  $a^k = a a^{k-1}$ . Но думата  $a^{k-1}$  е в езика, защото  $a^{k-1} = a^{k-1} b^0$ , но  $k - 1 > 0$ , защото  $k > 1$ . Освен това  $|a^{k-1}| < k$ , т.е от и.п.  $S \rightarrow^* a^{k-1}$ . Сега остана да изведем думата:

$$S \rightarrow a S \rightarrow^{* \text{и.п.}} a a^{k-1} = a^k$$

Покажахме, че можем да изведем думата  $a^t b^r (t > r) \wedge (t + r = k)$ . От тук следва, че  $(\forall i, j \in \mathbf{N}) i > j \implies S \rightarrow^* a^i b^j$ .

Т.е  $L \subseteq L(G)$ .

От тук вече е ясно, че  $L = L(G)$ . Следователно  $L$  е контекстно-свободен.