Примерно решение на второ домашно по Дискретни структури, специалност Информатика, първи курс, летен семестър на 2017/2018 г.

Зад. 1 Колко са на брой стринговете с дължина n над азбуката $\{a, b, c\}$, в които всяка буква участва поне веднъж?

Решение: Броят на всички стрингове с дължина n над азбуката $\{a, b, c\}$ е 3^n. От него ще извадим броя на стринговете, в които не участват и трите букви. Нека $\sigma \in \{a, b, c\}$ и нека означим с M_σ множеството от стринговете с дължина n над азбуката $\{a, b, c\} \setminus \{\sigma\}$. Всяко от множествата M_σ има мощност 2^n за $\sigma \in \{a, b, c\}$. От принципа на включването и изключването получаваме, че броят на стринговете с дължина n, над азбуката $\{a, b, c\}$, в които не участва поне една от буквите, е $|M_a \cup M_b \cup M_c| = |M_a| + |M_b| + |M_c| - |M_a \cap M_b| - |M_a \cap M_c| - |M_b \cap M_c| + |M_a \cap M_b \cap M_c| = 2^n + 2^n + 2^n - 1 - 1 - 1 + 0 = 3 \times 2^n - 3$. Следователно броят стринговете с дължина n над азбуката $\{a, b, c\}$, в които всяка буква участва поне веднъж е $3^n - (3 \times 2^n - 3) = 3(3^{n-1} - 2^n + 1)$.

Зад. 2 Колко са всички наредени четворки с елементи от $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, за които на първата и третата позиция са нечетни числа, а втората и четвъртата са четни.

Пример: за $n = 4$ търсените четворки са четири $(1, 2, 3, 4), (1, 4, 3, 2), (3, 2, 1, 4), (3, 4, 1, 2)$.

Съставете рекурентно уравнение (без да го решавате) с подходящи начални условия.

Решение: Нека означим с $T(n)$ броя на всички наредени четворки с елементи от $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, за които първата и третата компоненента са нечетни числа, а втората и четвъртата са четни. $I_{k+1} = I_k \cup \{k + 1\}$, следователно всички търсени наредени четворки за $n = k$ ще бъдат част от търсените и за $n = k + 1$. Елемента $n + 1$ можем да поставим на точно две позиции, спрямо това да ли е четен или не е. Ако се опитаме директно да получим броят за $n + 1$, използвайки наредени четворки от n, е възможно да преброим някой от новите наредени четворки няколко пъти.

Пример: от наредените четворки за $n = 6$ $(1, 2, 3, 6)$ и $(1, 2, 5, 6)$ при добавянето на новия елемент в множеството (тоест $n = 7$), при замяната на 3 и 5 с 7, получаваме наредените четворките $(1, 2, 7, 6)$ и $(1, 2, 7, 6)$, тоест можем да получим повторения при броенето.

За да избегнем повторение на наредените четворки, трябва при добавяне на нечетно числа да разделим старите вариации на броя на нечетните числа и да извадим два от получения резултат (заради двете позции за нечетни числа), а при добавяне на четно числа - да разделим старите вариации на броя на четните числа и от него да извадим 2. Броят на четните числа от множеството $\{1, 2, \ldots, n\}$ (ако n е четно) и броят на нечетните (ако n е нечетно), можем да ги получим $\frac{n}{2}$, закръглено нагоре.

От тук получаваме следното уравнение $T(n) = T(n-1) + 2\left(\dfrac{T(n-1)}{\frac{n}{2} - 2}\right)$.

За това уравнение имаме нужда само от едно начално условие $T(4) = 4$.

Зад. 3 Нека $V = \{v_1, v_2, \ldots . v_n\}$ за $n > 3$ и
$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}\} \cup \{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \ldots, \{v_{n-2}, v_n\}\}$
и нека $G = (V, E)$.

5 т. **а)** Докажете, че за всяко $n > 3$ в G има ойлеров път.

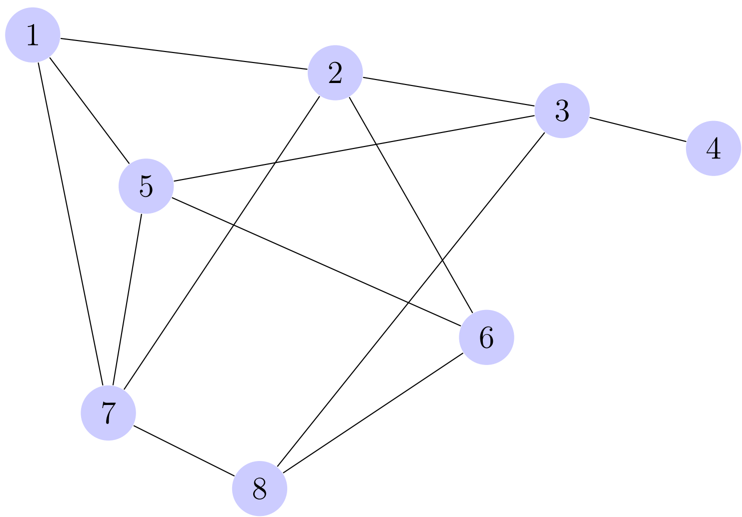
5 т. **б)** Възможно ли е, чрез добавяне на точно едно ребро към G, да се получи ойлеров цикъл? Обосновете отговора си!

Решение:

а) За всяко $n > 3$ съответният граф има има точно два върха от нечетна степен - v_2 и v_{n-1}. Това е така, защото връх с индекс j е свързан с върхове с индекси $j-2$, $j-1$, $j+1$, $j+2$. Лесно се забелязва, че v_1, v_2, v_{n-1} и v_n са единствените, чиито степен е различна от 4. Степента на връх v_1 е 2, защото е свързан само с v_2 и v_3. Степента на връх v_n е 2, защото е свързан само с v_{n-2} и v_{n-1}. Степента на връх v_2 е 3, защото е свързан само с v_1, v_3 и v_4. Степента на връх v_{n-1} е 3, защото е свързан само с v_{n-3}, v_{n-2} и v_n. Следователно в графа има 2 върха с нечетна степен, от което следва, че съществува ойлеров път с начало v_2 и край v_{n-1}.

б) Понеже за всяко $n > 3$ съответният граф има има точно два върха от нечетна степен, достатъчно е да добавим ребро между тях. Добавяме реброто $\{v_2, v_{n-1}\}$ и всички върхове ще бъдат от четна степен. Следователно ще съществува ойлеров цикъл.

Зад. 4 Докажете, че следният граф не е планарен.



Решение: За да докажем твърдението ще използваме теоремата на Kuratowski, която гласи, че граф е планарен тогава и само тогава, когато не садържа подграф, хомеоморфен на K_5 или $K_{3,3}$.

Лесно се забелязва, че даденият граф садържа подграф, който е изоморфен на $K_{3,3}$. Това е индуцираният подграф с върхове $\{2, 3, 5, 7, 8, 6\}$. Следователно даденият граф не е планарен.