8

Език - регулярен?

$$R_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$$

$$x R_L y \Leftrightarrow \forall z \in \Sigma^* \, (xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$$

R_L релация на екв.

↳ класове на екв. – съст. в мин. авт.

$$L \text{ е рег} \Leftrightarrow \underbrace{\exists \text{ краен автомат } A : L(A) = L}_{L \text{ е автомат}}$$

$|Q| < \infty$

- Th. на Майхил-Нероуд

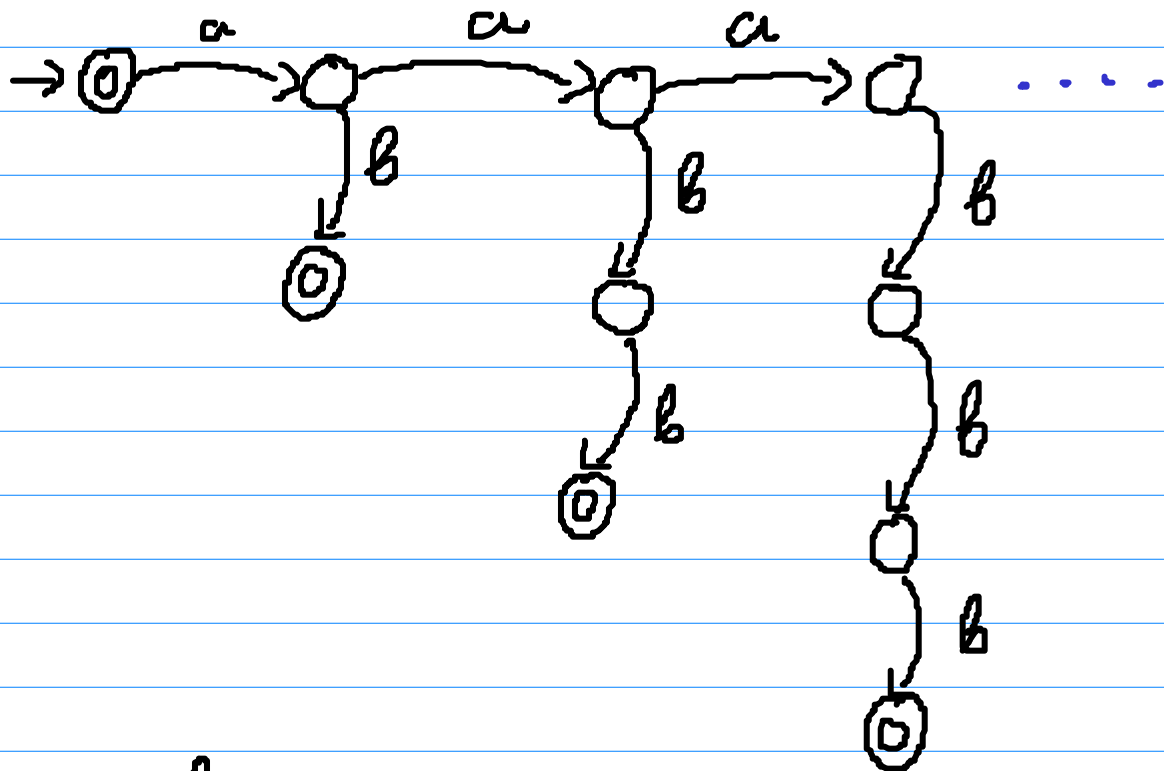
$$L \text{ е рег.} \Leftrightarrow R_L \text{ има краен индекс}$$

Пример за нерегулярен език

$$\Sigma = \{a, b\} \qquad L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$L = \{\varepsilon, ab, aabb \ldots\}$$

Защо не е регулярен?



зад 1 Докажете, че не рег.

Ще покажем, че R_L има ∞ индекс

Ще покажем, че

$$(\forall i,j \in \mathbb{N})(i \neq j)\ [a^i] \neq [a^j]$$

Нека $i,j \in \mathbb{N}$ и $i \neq j$ са произволни.

$[a^i] \neq [a^j]$?

$a^i b^i \in L$

$a^j b^i \notin L \quad (i \neq j)$

$\Rightarrow \quad a^i \not{R}_L\, a^j$

$\Rightarrow \quad [a^i] \neq [a^j]$

Но i, j са произволни

$\Rightarrow (\forall i,j \in \mathbb{N})(i \neq j)\ [a^i] \neq [a^j]$

$\Rightarrow R_L$ има ∞ индекс

$\Rightarrow L$ не е регулярен

зад 2 Докажете, че L не е рег.

$\Sigma = \{a, b\}$ $\quad L = \{w \mid w$ е палиндром$\}$

Ще покажем, че R_L има ∞ индекс

$\forall i \forall j\ (i \neq j)\ [a^i b] \neq [a^j b]$

Нека i, j са произволни и $i \neq j$

$$[a^i b] \overset{?}{=} [a^j b]$$

$a^i b a^i \in L$

$a^j b a^i \notin L \quad i \neq j$

$\Rightarrow [a^i b] \neq [a^j b]$

Но i, j са произволни

$(\forall i,j \in \mathbb{N})(i \neq j)\ \left([a^i b] \neq [a^j b] \right)$

$\Rightarrow R_L$ има ∞ индекс

$\Rightarrow L$ не е регулярен

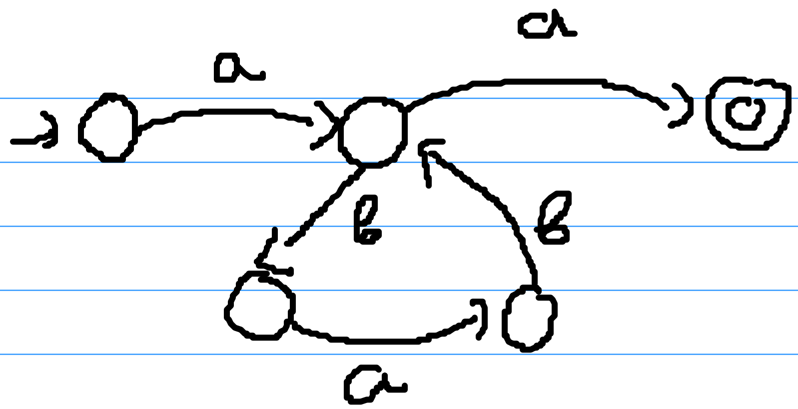
Pumping Lemma

Ако L е регулярен, то:

$(\exists p \in \mathbb{N}^+)(\forall w \in L)$

$|w| \geq p \Rightarrow (\exists x,y,z \in \Sigma^*)(xyz = w)$

- $|xy| \leq p$
- $|y| \geq 1$
- $(\forall i \in \mathbb{N})(xy^iz \in L)$



$a(bab)^*a$

$P = |Q|$ в минималния автомат

$P = 5$

$aa \to 3$ състояния

$w \to |w| + 1$ състояния

Ако $|w| \geq |Q|$, то в прочита на w ще минем през $> |Q|$ състояния

$\to$ По принципа на Дирихле

ще повторим състояние.

$\to$ били сме в цикъл

$$\underbrace{a}_{x}\underbrace{bab}_{y}\underbrace{a}_{z}$$

• $|xy| \leq P \to$ Попадаме в цикъла преди P-ия преход.

- $|y| \geq 1$ → цикълът съществува
- $\forall i \; xy^iz \in L$ → можем да се "въртим" в цикъла

$i=0$ $\quad xy^0z = xz = \underset{x}{a}\,\underset{z}{a}$

$i=2$ $\quad xy^2z = xyyz = \underset{x}{a}\,\underset{y}{\underline{bab}}\,\underset{y}{\underline{bab}}\,\underset{z}{a}$

зад 1 $\quad L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

(с P.L.)

Допускаме, че е регулярен.

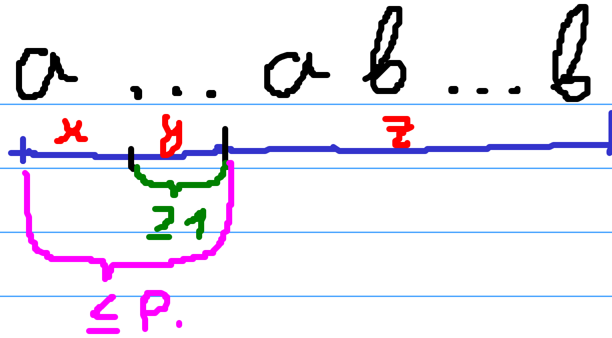
→ изпълнена е P. L.

$w = a^p b^p$ $\quad \in L$ ✓

$|w| \geq p$ ✓

→ $\exists x, y, z \in \Sigma^*$ $\quad xyz = w$

- $|xy| \leq p$
- $|y| \geq 1$
- $xy^iz \in L$ $[\forall i \in \mathbb{N}]$



- xy е префикс на думата $(a^p b^p)$
- $|xy| \le p \Rightarrow xy = a^t \ (t \le p)$
- $|y| \ge 1 \Rightarrow y = a^r \ (1 \le r \le t)$

Ще покажем, че не е вярно:

$$(\forall i \in \mathbb{N})(xy^iz \in L)$$

Контрапример:

$$i = 2 \qquad xy^2z = xyyz = a^{p+r}b^p \cancel{\in} L$$

$$p + r \ne p$$
$$r \ge 1$$

Противоречие!

$\Rightarrow L$ не е регулярен.

зад 2 (с P.L)

$\Sigma = \{a, b\}$

$L = \{w \mid w$ е палиндром$\}$

Допускаме, че е регулярен.

$\rightarrow$ изпълнена е P. L.

$w = a^p$ $\in L$ ✓
$|w| \geq p$ ✓

$x = \varepsilon,\ y = a,\ z = a^{p-1}$

$|xy| \leq p$

$|y| \geq 1$

$\forall i \in \mathbb{N}\ (xy^iz \in L)$ $(xy^iz = a^{p+(i-1)} \in L)$

Думата не става!

$w = a^p b a^p$ $\in L$ ✓
$|w| \geq p$ ✓

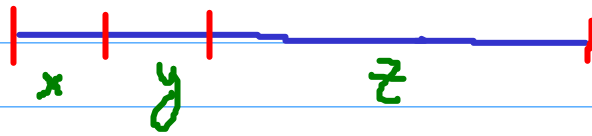
$\exists x, y, z \in \Sigma^*$ $\quad xyz = w$

$|xy| \leq p$

$|y| \geq 1$

$$(\forall i \in \mathbb{N})\,(xy^iz \in L)$$

$$a \ldots a\, b\, a \ldots a$$



xy е префикс и $|xy| \le p$

$\Rightarrow xy = a^t \quad (t \le p)$

$|y| \ge 1 \quad \Rightarrow \quad y = a^r \quad (1 \le r \le t)$

Ще покажем, че не е вярно:

$$(\forall i \in \mathbb{N})\,(xy^iz \in L)$$

С контрапример

$i = 2 \qquad xy^2z = a^{p+r}\, b\, a^p \notin L$

$r \ge 1$

$p + r \ne p$

Противоречие!

$\Rightarrow L$ не е регулярен.

~~зад~~ 3

Докажете, че L не е регулярен

$$L = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \wedge n \neq m\}$$

P.L. не е приложима

Допускаме, че L е рег.

$$L_1 = L(a^* b^*) = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

регулярен

Да разгледаме:

$$\overset{\text{рег}}{L_1} \setminus \overset{\text{рег}}{L} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

рег операции

$\Rightarrow \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ е регулярен

Но ние доказахме, че не е

$$\Rightarrow L = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \wedge n \neq m\}$$

Не е регулярен!