9. Доказателства, че език не е регулярен.

! Th. на Майхил-Нероуд

L е рег. $\Leftrightarrow$ R_L има краен индекс

! Pumping Lemma

Ако L е регулярен, то:

$(\exists p \in \mathbb{N}^+)(\forall w \in L)$

$|w| \geq p \Rightarrow (\exists x, y, z \in \Sigma^*)(xyz = w)$

- $|xy| \leq p$
- $|y| \geq 1$
- $(\forall i \in \mathbb{N})(xy^iz \in L)$

зад 1. Докажете, че L не е рег.

$$L = \{a^n b^k \mid n, k \in \mathbb{N} \wedge n > k\}$$

Допускаме, че е регулярен.

$\rightarrow$ изпълнена е P. L.

$w = a^{p+1} \cdot b^p \in L$ ✓

$|w| \geq p$ ✓

$a \ldots a\, b \ldots b$

$\underbrace{\underbrace{x \ \ y}_{\le p}}$ z, $|y| \geq 1$

- xy е префикс на думата
- $|xy| \leq p \Rightarrow xy = a^t \ (t \leq p)$
- $|y| \geq 1 \Rightarrow y = a^r \ [1 \leq r \leq t]$

При $\uparrow$ $xy^iz \in L \ (i \geq 1)$

Разглеждаме $\downarrow$

$$xy^0z = a^{p+1-r} b^p \notin L \qquad p+1-r \cancel{>} p, \quad r \geq 1$$

$\Rightarrow$ L не е регулярен

зад 2

Докажете, че L не е рег.

$$L = \{a^n b^k \mid n, k \in \mathbb{N} \wedge n \le k\}$$

Допускаме, че е регулярен.

$L(a^* b^*)$ рег

$$\underbrace{L(a^* b^*)}_{\text{рег}} \setminus \underbrace{\{a^n b^k \mid n, k \in \mathbb{N} \wedge n \le k\}}_{\text{рег от допускането}} =$$

$$= \underbrace{\{a^n b^k \mid n, k \in \mathbb{N} \wedge n > k\}}_{\text{рег (} \setminus \text{ запазва регулярността)}}$$ (от зад 1)

Но ние доказахме, че не е

↯

$\Rightarrow$ L не е регулярен

Зад 3

$\Sigma = \{a, b\}$

$L = \{ w \mid$ Ако всяко срещане на 'b' се следва от 'a', то $N_a(w) \neq (N_b(w))^2 \}$

Разглеждаме $\overline{L}$ (L е рег $\Leftrightarrow$ $\overline{L}$ е рег)

$\overline{L} = \{ w \mid$ всяко срещане на 'b' се следва от 'a' и $N_a(w) = (N_b(w))^2 \}$

$$w = a^{p^2-p}(ba)^p \qquad \begin{array}{l} \in \overline{L} \; ✓ \\ |w| \geq p \; ✓ \end{array}$$

$$aa \ldots a\, baba \ldots ba$$

$p^2 - p \geq p$ при $p \geq 2$

1 сл. $p \geq 2$

- xy е префикс на думата
- $|xy| \leq p \Rightarrow xy = a^t \; (t \leq p)$ $\quad |xy| \leq p \leq p^2 - p$
- $|y| \geq 1 \Rightarrow y = a^r \; (1 \leq r \leq t)$

$\uparrow \quad xy^2z = a^{p^2-p+r}(ba)^p \notin \overline{L}$

$p^2-p+r \neq p^2$

$r \geq 1$

• 2 сл $\quad p = 1 \quad w = a^{1^2-1}(ba)^1 = ba$

$|xy| \leq p \wedge |y| \geq 1$

$\Rightarrow x = \varepsilon, \; y = b, \; c = a$

$\uparrow \quad xy^2z = bba \in \overline{L}$

a?

$\Rightarrow \overline{L}$ не е регулярен

$\Rightarrow L$ не е регулярен.

Забележка:

При $\quad w = a^{(p+1)^2-(p+1)}(ba)^{(p+1)}$

! няма да има нужда от разглеждане на случаи

$(p+1)^2-(p+1) \leq p \quad$ (при $p \geq 1$)

зад4 Докажете, че L не е рег.

$$L = \{ a^n b^m c^k \mid n \neq 2021 \vee m = k \}$$

решение:

$$L = \{ a^n b^m c^k \mid n = 2021 \Rightarrow m = k \}$$

$$w = a^{2021} b^p c^p \quad \in L \ ✓ \quad |w| \geq p \ ✓$$

При $x = \varepsilon, y = a, z = a^{2020} b^p c^p$

$$(\forall i \in \mathbb{N})(x y^i z \in L)$$

Пример:

$$x y^2 z = a^{2022} b^p c^p \in L$$

P. L. е изпълнена за L. (друг начин?)

Разглеждаме L^{rev} (L е рег $\Leftrightarrow$ L^{rev} е рег)

$$L^{rev} = \{ c^k b^m a^n \mid n = 2021 \Rightarrow m = k \}$$

Допускаме, че е регулярен.

→ изпълнена е P. L.

$$w = c^p b^p a^{2021} \in L^{rev} \checkmark$$

$$|w| \geq p \checkmark$$

- xy е префикс на думата
- $|xy| \leq p \Rightarrow xy = c^t \ (t \leq p)$
- $|y| \geq 1 \Rightarrow y = c^r \ (1 \leq r \leq t)$

$\downarrow \quad xy^0z = c^{p-r} b^p a^{2021} \notin L^{rev}$

$(T \Rightarrow F \equiv F)$ $\qquad p-r \neq p$

$(r \geq 1)$

↯

$\Rightarrow L^{rev}$ не е регулярен $\Rightarrow$

$\Rightarrow L$ не е регулярен.

зад 5

$$L = \{ w \mid (\exists k \in \mathbb{N})\ |w| = k^2 \}$$

а) L регулярен ли е?

б) $L . L . L . L$ регулярен ли е?

а)

Допускаме, че е регулярен.

$\rightarrow$ изпълнена е P. L.

$$w = a^{p^2} \quad p^2 \in L \ \checkmark \quad |w| \geq p \ \checkmark \quad (p^2 \geq p)$$

$$xy = a^t \quad (t \leq p)$$

$$y = a^r \quad (1 \leq r \leq t \leq p)$$

Разглеждаме $\uparrow$

$$xy^2z = a^{p^2+r} \overset{?}{\underset{?}{\in}} L$$

Дали p^2+r е точен квадрат?

Ще покажем, че

$$p^2 \underset{①}{<} p^2 + r \underset{②}{<} (p+1)^2$$

1. $p^2 < p^2 + r$ $(r \geq 1)$ ✓

2. $p^2 + r < (p+1)^2 = p^2 + 2p + \boxed{1}$ ✓

$\Rightarrow$ $p^2 + r$ не е точен квадрат

$\Rightarrow$ $a^{p^2+r} \cancel{\in} L$

$\Rightarrow$ L не е регулярен

г) $L.L.L.L = \Sigma^*$

Th. на Лагранж

Всяко ест. число може да се представи като сума от 4 квадрата

$\Rightarrow$ е регулярен.