Релации

$R \subseteq A \times B$ $\qquad$ $\langle a, b \rangle \in R$

aRb

$R \subseteq A \times A$

Зад. Нека R е релация над $2^{\mathbb{N}}$

$R \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$

$(X, Y) \in R \longleftrightarrow A \setminus B = \emptyset$

Изследвайте за свойства

$\{1,2\} \longrightarrow \{1,2,3\}$

1) Рефлексивност ✓

$(\forall X \in 2^{\mathbb{N}})\ X \setminus X = \emptyset \Rightarrow \langle X, X \rangle \in R$

2) антирефлексивна ✗

$$\langle \{1\}, \{1\} \rangle \in R$$

3) симетрична ✗

$$\underbrace{\{1\}}_{A} \to \underbrace{\{1,2\}}_{B}$$

$\langle A, B \rangle \in R$, но $\langle B, A \rangle \notin R$

$B \setminus A \neq \emptyset$

4 антисиметрична ✓

$$\forall A \forall B (ARB \wedge BRA \to A = B)$$

Нека A, B произволни и нека

$\underbrace{ARB}$ и $\underbrace{BRA}$

$\downarrow$ $\downarrow$

$\underbrace{A \setminus B} = \emptyset$ $\underbrace{B \setminus A} = \emptyset$ $(B \subseteq A)$

$(A \subseteq B)$ А няма елемент, който да не е ел. на B B няма ел., който да не е ел. на A

$\Rightarrow A = B$

5) Силно антисиметрична ✗

$\{1\}$ $\{2\}$

$\langle \{1\}, \{2\} \rangle \notin R$ $\langle \{2\}, \{1\} \rangle \notin R$

6) Транзитивност ✓

$\forall A \forall B \forall C \, (A R B \wedge B R C \rightarrow A R C)$

A, B, C произволни

$\underbrace{A R B}$ и $\underbrace{B R C}$

$A \setminus B = \emptyset$ $B \setminus C = \emptyset$

няма ел на A, който да не е в B

няма ел на B, който да не е в C

$A \subseteq B$ $B \subseteq C$

$A \subseteq C$

няма ел на A, който да не е в C

$A \setminus C = \emptyset$

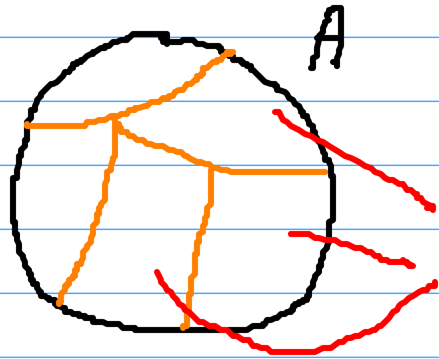
$\Rightarrow A R C$

def: Релация на екв.

$R \subseteq A \times A$ $\qquad = \; 1 \; 2 \; 3.$

- рефлексивна
- симетрична
- транзитивност

↳ поражда разбиване на A на класове на екв.



класове на екв.

$A_1 \ldots A_n$ е покритие на A

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$$

$A_1 \ldots A_n$ е разбиване на A

- е покритие
- $\forall i \forall j \;\; i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

Зад Нека $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

$\langle x, y \rangle \in R \leftrightarrow x - y$ се дели на 3.

а) Докажете, че R е рел. на екв.

б) Намерете кл. на екв.

а)

1) рефл. $\forall x (xRx)$

x - произволно

$x - x = 0$, което се дели на 3

$\Rightarrow \langle x, x \rangle \in R$

2) сим. $\forall x \forall y (xRy \rightarrow yRx)$

x, y - произволни и $\underline{xRy}$

$x - y = 3 * t \quad (t \in \mathbb{Z})$

$y - x \quad 3 * (-t) \quad -t \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow yRx$

3) Транзитивност.

$\forall x \forall y \forall z (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$

x, y, z – произволни

xRy – $x - y = 3 * t \quad (t \in \mathbb{Z})$

yRz – $y - z = 3 * s \quad (s \in \mathbb{Z})$

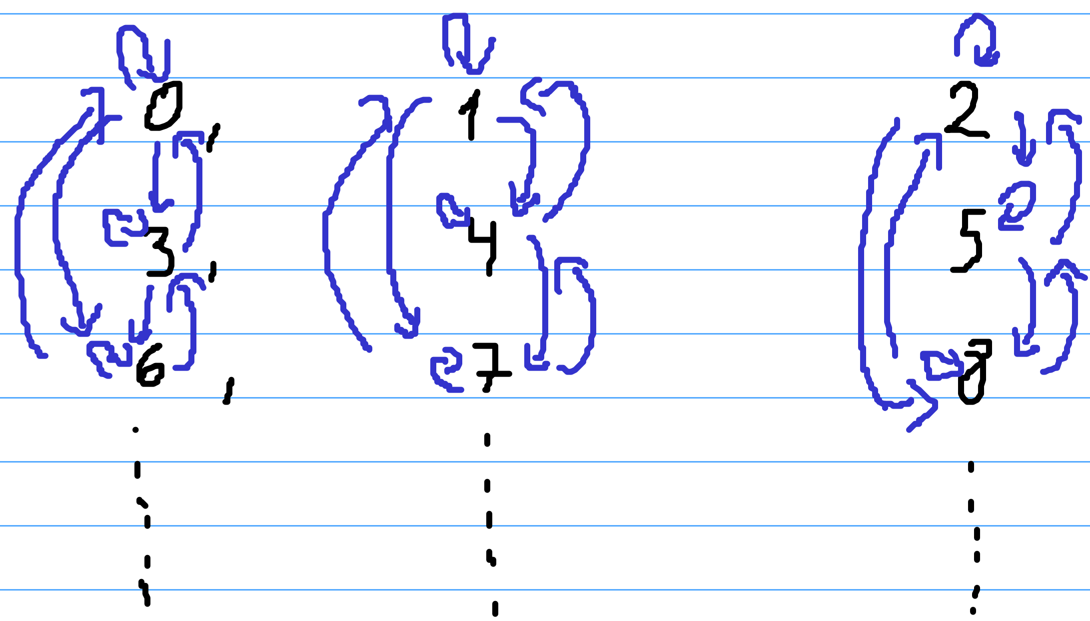
$$\underbrace{}$$

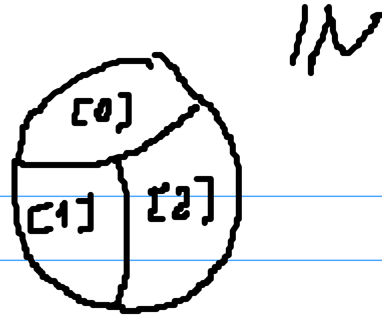
$$x - \cancel{y} + \cancel{y} - z = 3(t+s)$$

$$x - z = 3(t+s)$$

$\Rightarrow xRz \qquad t+s \in \mathbb{Z}$

б)





$[0] = \{0, 3, 6, 9 \ldots\} = \{3t \mid t \in \mathbb{N}\}$

$[1] = \{1, 4, 7 \ldots\} = \{3t+1 \mid t \in \mathbb{N}\}$

$[2] = \{2, 5, 8 \ldots\} = \{3t+2 \mid t \in \mathbb{N}|$

$[0] \cup [1] \cup [2] = \mathbb{N}$

$[0] \cap [1] = \emptyset$

$[0] \cap [2] = \emptyset$

$[1] \cap [2] = \emptyset$

Зад. Нека $FinSubs(\mathbb{N})$ - всички крайни подмножества на $\mathbb{N}$

$$FinSubs(\mathbb{N}) \subseteq 2^{\mathbb{N}}$$

$$R \subseteq FinSubs(\mathbb{N}) \times FinSubs(\mathbb{N})$$

$$X \, R \, Y \Leftrightarrow \sum_{x \in X} x^2 - \sum_{y \in Y} y = 2^{*} t \quad (t \in \mathbb{Z})$$

а) Док, че R е рефл еив.

б) Кл. на еив.

а)

• Рефл. $\forall x (x R x)$

– Нека X произволно

$$\sum_{x \in X} x^2 - \sum_{x \in X} x = \sum_{x \in X} (x^2 - x) = \sum_{x \in X} \overbrace{x(x-1)}^{\text{четно}}$$

$= $ четно

$x R x$ ✓

• Сим. $\forall x \forall y (x R y \to y R x)$ ✓

X, Y – пр. мн-ва.

$x R y$. $\sum_{x \in X} x^2 - \sum_{y \in Y} y =$ четно

$\sum y^2 - \sum x \overset{?}{=}$ четно

$$\left(\overset{xRx}{\cancel{\sum_{x\in X} x^2} - \sum_{x\in X} x}\right) + \left(\overset{yRy}{\sum_{y\in Y} y^2 - \cancel{\sum_{y\in Y} y}}\right) -$$

$$\overset{xRy}{\left(\cancel{\sum_{x\in X} x^2} - \cancel{\sum_{y\in Y} y}\right)} = \text{четно}$$

$$\sum_{y\in Y} y^2 - \sum_{x\in X} x = \text{четно}$$

$$\Rightarrow yRx$$

- транзитивност ✓

$$\forall x \forall y \forall z\ (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$$

- x, y, z – произволни

- xRy $\quad \left(\sum_{x\in X} x^2 - \sum_{y\in Y} y = \text{четно}\right)$
- yRz $\quad \left(\sum_{y\in Y} y^2 - \sum_{z\in Z} z = \text{четно}\right)$

? xRz ??

четно (xRy) четно (yRz)

$$\left(\sum x^2 - \sum y\right) + \left(\sum y^2 - \sum z\right) = \text{четно} =$$

$$= \sum x^2 - \sum z + \underbrace{\sum y^2 - \sum y}_{\text{четно } (yRy)}$$

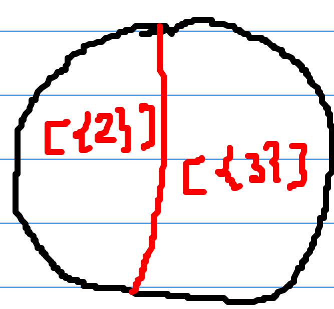
$$\sum x^2 - \sum z = \text{четно}$$

$$\Rightarrow xRz$$

$\Rightarrow R$ е рел. на екв.

г) Кл. на екв.

$$FinSubs(\mathbb{N})$$



$$[\{2\}] = \{S \mid \sum_{x \in S} x \text{ е четно}\}$$

$$[\{3\}] = \{S \mid \sum_{x \in S} x \text{ е нечетно}\}$$

зад $R \subseteq \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$

$(a, b) \in R \leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q} \quad q^2 = \frac{a}{b}$

а) док, че R е рел. на екв.

б) Опишете [1]

а) рефлексивност. ✓

$\forall x \, [x R x] \qquad \frac{x}{x} = 1 = \left(\frac{1}{1}\right)^2$

б) Симетричност

$\forall x \forall y \, (x R y \rightarrow y R x)$

x, y – произв.

$x R y \quad \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} \quad q^2 = \frac{x}{y}$

$q = \frac{a}{b} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{x}{y}$

$\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ $\quad \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{y}{x} \Rightarrow yRx$

• транзитивност

$$\forall x \forall y \forall z \, (xRy \wedge yRz \to xRz)$$

• x, y, z – произволни

$xRy \qquad \frac{x}{y} = q'^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$

$yRz \qquad \frac{y}{z} = q''^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$

$$\frac{x}{\cancel{y}} \cdot \frac{\cancel{y}}{z} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \left(\frac{a \cdot m}{\underbrace{b \cdot n}_{\in \mathbb{Q}}}\right)^2$$

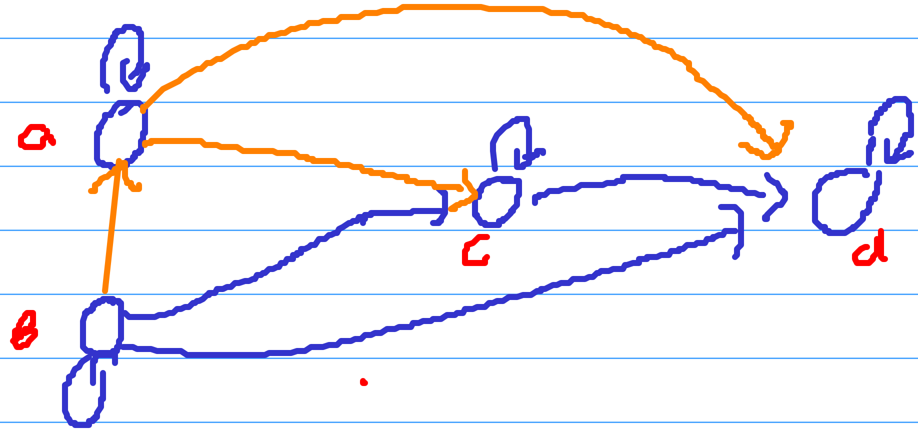
$\Rightarrow xRz$ ✓

г) $[1] = \{1, 4, 9, 16, 25 \ldots\}$

(За дом: Опишете $\forall$ кл. на екв.)

def: ще казваме, че $R \subseteq A \times A$ е

- рел. на част. наредба, ако:
  - рефл.
  - антисиметрична
  - транзитивна.
- рел. на пълна/линейна наредба, ако:
  - рефл.
  - $\boxed{\text{силно антисиметрична.}}$
  - транз



част наредба

a b c d

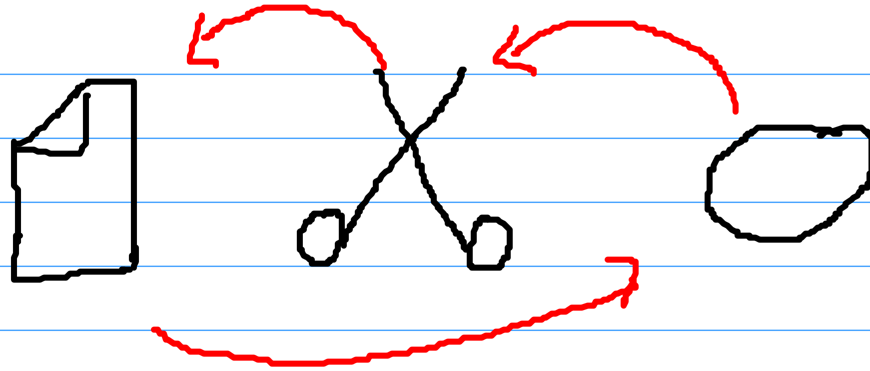
b a c d

b c a d

b c d a

пълна наредба

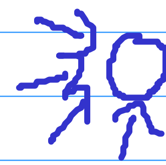
b a c d



R е част наредба $(R \subseteq A \times A)$

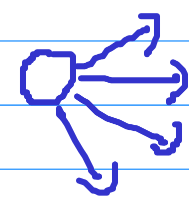
def: x е максимален елемент,

ако $\neg \exists y (y \neq x \wedge xRy)$



def: x е минимален елемент,

ако $\neg \exists y (y \neq x \wedge yRx)$



зад

Нека $S = \{0 \ldots 32\}$ и $R \subseteq S \times S$

$aRb \Longleftrightarrow b - a \equiv 0 \pmod 3 \wedge (a - b \geq 0)$

а) Док. че R е рел. на част. наредба

- Рефл. $\forall x \, (x R x)$

✓ $x - x \equiv 0 \pmod 3$ $\quad x - x \geq 0$

- Антисиметричност.

$\forall x \forall y \, (x \neq y \wedge x R y \rightarrow y \cancel{R} x)$

- x, y произволни и $x \neq y$ $\quad x R y$

- $x R y$ $\quad y - x \equiv 0 \pmod 3$ $\quad \underline{x - y \geq 0}$

$x \neq y$

$\Rightarrow y - x < 0$

$\Rightarrow y - x \cancel{\geq} 0$

$\Rightarrow y \cancel{R} x$

• Транз.

$$\forall x \forall y \forall z \ (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$$

x, y, z - произв.

· xRy $\qquad y - x = 3t \qquad x - y \geq 0$

· yRz $\qquad \underbrace{z - y = 3s}_{z - x = 3(t+s)\ \checkmark} \qquad \underbrace{y - z \geq 0}_{x - z \geq 0\ \checkmark}$

$\Rightarrow xRz$

$\Rightarrow R$ е рел. на част. наредба

б) Определете макс. и мин. елемент.

$0 \quad 3 \quad 6 \quad 9 \quad \ldots \quad 30$

$1 \quad 4 \quad 7 \quad \ldots\ldots \quad 31$

$2 \quad 5 \quad 8 \quad \ldots\ldots \quad 32$

Мин : 30, 31, 32

Макс : 0, 1, 2

в) Брой валидни топ. сортировки

def: $R \subseteq A \times B$

R е частична ф-я, ако

$\forall a \in A$ съще най-много едно $b \in B$