Теорема на Хилберт-Акерман

Ангел Димитриев

Дефиниция: Консервативно разширение.

Нека F е формална система. Нека F' е разширение на F. Тоест: $F \subseteq F'$. Ще казваме, че F' е **консервативно** разширение на F, ако за всяка формула A е изпълнено, че: ако $\vdash_{F'} A$, то $\vdash_F A$.

Теорема за константите

Нека F' се получава от F чрез добавяне на нови константи. Тогава F' е консервативно разширение на F. При това ако $x_1 \dots x_n$ са различни променливи и $c_1 \dots c_n$ са различни нови константи, то за всяка формула А:

$$\vdash_F A \iff \vdash_{F'} A_{x_1 \dots x_n}[c_1 \dots, c_n]$$

Дефиниция: Противоречива формална система.

Нека F е формална система. F е противоречива, ако за някоя формула А:

$$\vdash_F A \;\&\; \vdash_F \neg A$$

Тогава следното твърдение е изпълнено:
F е противоречива $\iff$ за всяка формула В е изпълнено, че $\vdash_F B$

Дефиниция: Хенкинова система.

Една формална систма е **хенкинова**, ако за всяка затворена формула $\exists x A$ на системата, съществува затворен терм t, такъв че $\exists x A \implies A_x[t]$ е теорема на системата.

Забележка. А изразява свойство на х. Системата трябва да е *готова с пример, в случай че свойството е изпълнено в нея.* Но това **НЕ** означава, че тя *дава примера преди да сме доказали, че свойството е вярно.*

Дефиниции: Специални константи. Специални аксиоми

Нека F е формална система. Ако $\exists x A$ е затворена формула от симовлите на F (и специалните константи на F), то символът $K_{\exists x A}$ е **специална**

константа на F за формулата $\exists xA$.
Ако $K_{\exists xA}$ е специална константа, то формулата:

$$\exists xA \implies A_x[K_{\exists xA}]$$

наричаме **специална аксиома** за $K_{\exists xA}$.

Ако F' е получен от F, добавяйки всички специални константи, то от **теоремата за константите** следва, че F' е консервативни разшиерение на F. А ако SA е множеството на всички специални аксиоми, то $F'[SA]$ е **хенкинова формална система**.

Теорема 1:

$F'[SA]$ е консервативно хенкиново разширение на F.

Доказателство:

Нека А е формула на F и нека $\vdash_{F'[SA]} A$. От **теоремата за редукцията** имаме че (*):

$$\vdash_{F'} A_1 \implies A_2 \implies \ldots \implies A_n \implies A$$

където $A_i (1 <= i <= n)$ са специални аксиоми. От **теоремата за тавтологиите**, може да считаме, че A_1 се отнася за специална константа от най-високо ниво. Тогава $A_1 \equiv \exists xB \implies B_x[C_{\exists xB}]$. Да разгледаме A_1. Нека y е нова променлива. Тогава от **теоремата за константите**:

$$\vdash_{F'} \exists xB \implies B_x[y] \implies A_2 \implies \ldots \implies A_n \implies A$$

От (П $\exists$) имаме:

$$\vdash_{F'} \exists y(\exists xB \implies B_x[y]) \implies A_2 \implies \ldots \implies A_n \implies A$$

Забележка: y не участва в $A_2 \ldots A_n$ и A. Освен това избрахме A_1 да бъде от най-високо ниво. Следователно пак ще получихме тавтология.
Съгласно пренексните опрации (и y не участва в B) имаме, че:

$$\vdash_{F'} \exists y(\exists xB \implies B_x[y]) \iff \vdash_{F'} (\exists xB \implies \exists yB_x[y])$$

Но $\exists yB_x[y]$ е вариант на $\exists xB$. Следователно: $\vdash_{F'} A_1$ От тук по **modus ponens**:

$$\vdash_{F'} \cancel{A_1} \implies A_2 \implies \ldots \implies A_n \implies A$$

Прилагайки тези разсъждения n-1 пъти получаваме, че $\vdash_{F'} A$, от където следва, че $\vdash_F A$

Твърдение 1:

Ако $\vdash_F T$, то всеки затворен частен случай на T от $L_c(F)$ е тавтологично следствие на затворени частни случаи в $L_c(F)$ на аксиомите и специалните аксиоми на F.

Доказателство:

Нека $\vdash_F T$ и нека T' е затворен частен случай на T.
Ще покажем, че T' е тавтологично следствие на затворени частни случаи на аксиомите и специалните аксиоми. Ще направим индукция по извода в F.

1. Ако T не се получва чрез (П $\exists$).

- Ако T е аксиома,

то T' е затворен частен случай на аксиома на F.
Но всеки терм е тавтологично следствие на себе си (в частност T' на T'), от където следва, че T' е тавтологично следствие на затворени частни случай на аксиомите на F (в частност аксиомата T).

- Ако T е тавтологично следствие на $T_1, T_2 ... T_n$:

Тогава T' се получава чрез замяна на свободните променливи с термове в T. Прилагаме същите замени в $T_1, T_2 ... T_n$ и получаваме $T'_1, T'_2 ... T'_n$. Тогава $T'_1, T'_2 ... T'_n$ са затворени частни случаи на теоремите $T_1, T_2 ... T_n$.
От и.п. $T'_1, T'_2 ... T'_n$ са тавтологични следствия на затворени частни случаи на аксиомите и специалните аксиоми. Но T' е тавтологично следствие на $T'_1, T'_2 ... T'_n$. А T' е тавтологично следствие на това, на което $T'_1, T'_2 ... T'_n$ са тавтологични следствия.
Следователно T' е тавтологично следствие на затворени частни случаи на аксиомите и специалните аксиоми.

2. Ако T се получава от $A \implies B$ чрез (П $\exists$).
Тогава: $T' = \exists x A' \implies B'$, където A' е частен случай на A, а B' е **затворен** частен случай на B.
Възможно е A' да **не е затворена**. Ако в A променливата x е участвала **свободно**, то в T' тя вече е свързана и **не можем да я заменим** в A'.
Тогава за да получим **затворен** частен случай на $A \implies B$ **трябва да заменим свободните срещания на** x (които са в A') с терм.
Нека $C_{\exists x A'}$ е **специалната константа** на $\exists x A'$.
Тогава $A'_x[C_{\exists x A'}] \implies B'$ **е затворен частен случаи на** $A \implies B$. От **и.п.** формулата $A'_x[C_{\exists x A'}] \implies B'$ е тавтологично следствие на аксиомите на F и специалните аксиоми на F.
Специалната аксиома за $C_{\exists x A'}$ е $\exists x A' \implies A'_x[C_{\exists x A'}]$. Имаме, че:

a) $\exists x A' \implies A'_x[C_{\exists x A'}]$ е специална аксиома.

б) $A'_x[C_{\exists xA'}] \implies B'$ е тавтологично следствие на аксиомите и специалните аксиоми на F

От а), б) и транзитивността на импликацията следва, че:
$T' = \exists xA' \implies B'$ е тавтологично следствие на затворени частни случаи в $L_c(F)$ на аксиомите и специалните аксиоми на F.

Теорема на Хилберт-Акерман:

Нека F е формална система, имаща само **безкванторни нелогически аксиоми**. Тогава F е противоречива тогава и само тогава, когато някоя дизюнкция от отрицания на частни случаи на нелогическите аксиоми на F е тавтологично следствие на частни случаи на аксиомите за равенството.

Доказателство:

$\Longleftarrow$) Нека някоя дизюнкция от отрицания на частни случаи на нелогически аксиоми на F е тавтологично следствие на частни случаи на аксиомите за равенството.Т.е. :

$$\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \cdots \vee \neg A_n$$

е тавтологично следствие на частни случаи на аксиомите за равенството и $A_i (1 <= i <= n)$ е частен случай на аксиомите на F. Но тогава:

$$\vdash_F \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \cdots \vee \neg A_n$$

но A_i е частен случай на аксиома и съгласно **теоремата за замяната**:

$$\vdash_F A_1, \vdash_F A_2, \cdots \vdash_F A_n$$

Горната формула може да запишем така:

$$A_1 \implies A_2 \implies A_3 \implies \ldots \implies A_{n-2} \implies A_{n-1} \implies \neg A_n.$$

Но по **modus ponens**:

$$\cancel{A_1} \implies A_2 \implies A_3 \implies \ldots \implies A_{n-2} \implies A_{n-1} \implies \neg A_n$$

$$\cancel{A_1} \implies \cancel{A_2} \implies A_3 \implies \ldots \implies A_{n-2} \implies A_{n-1} \implies \neg A_n$$

$$\cancel{A_1} \implies \cancel{A_2} \implies \cancel{A_3} \implies \ldots \implies A_{n-2} \implies A_{n-1} \implies \neg A_n$$

$$\vdots$$

$$\cancel{A_1} \implies \cancel{A_2} \implies \cancel{A_3} \implies \ldots \implies \cancel{A_{n-2}} \implies \cancel{A_{n-1}} \implies \neg A_n$$

Следователно $\neg A_n$ **е теорема** на F. Но и A_n е **теорема** на F.
От тук следва, че F е **противоречива**.

$\Longrightarrow$) Нека F е противоречива (и F има само безкванторни нелогически аксиоми). Тогава $\vdash_F x \neq x$. Но от твърдение 1, следва, че $c \neq c$ (c е произволна константа от $L_c(F)$) е **тавтологично следствие** на затворени в $L_c(F)$ частни случай на аксиомите и специалните аксиоми на F.
Т.е от затворени частни случай на аксиомите и специалните аксиоми на F, използвайки само **теорема за тавтологиите**, може да докажем, че $c \neq c$.
Следователно имаме нещо от типа:

$$A_1 \implies A_2 \implies A_3 \implies \dots \implies A_n \implies c \neq c$$

което е тавтология. $A_i (1 <= i <= n)$ е частен случай на аксиомите и специалните аксиоми на F. Ще трябва да се освободим от **аксиомите за субституция и специалните аксиоми**. Така ще получим тавтология, която е дизюнкция от отрицания на затворени частни случаи в $L_c(F)$ на аксиоми за равенството и нелогически аксиоми на F. Имаме следната тавтология:

$$\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3 \cdots \vee \neg A_n$$

$A_i (1 <= i <= n)$

- Затворена аксиома за субституцията.
- Специална аксиома.
- Затворен частен случай на аксиома за равенството.
- Затворен частен случай на нелогическа аксиома на F.

Но F е отворена формална система - **нелогическите аксиоми нямат квантори**. В аксиомите за равенството също **няма квантори**. Тогава може да разпознаем дали A_i е аксиома за субституцията/специална аксиома по това **дали съдържа квантор**.
Нека $\exists x A'$ е формулата с възможно най-много квантори от тавтологията.
Тогава $\exists x A'$ е парче от:

- $A'_x[a] \implies \exists x A'$ (част от аксиома за субституцията).
- $\exists x A' \implies A'_x[C_{\exists x A'}]$ (част от специална аксиома)

Тогава имаме следната таволoгия:

$$\neg(\exists x A' \implies A'_x[C_{\exists x A'}]) \vee \neg(A'_x[a_1] \implies \exists x A') \vee \cdots \vee \neg(A'_x[a_m] \implies \exists x A') \vee$$

$$\vee \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3 \cdots \vee \neg A_s$$

където $\exists x A'$ не участва в $A_1, \dots, A_s$.
Забележка: Ако някой дизюнкт не участва във формулата

(например: $A'_x[a] \implies \exists x A'$), то понеже нашата дизюнкция е тавтология, можем да го добавим.
Искаме да премахнем $\exists x A'$. След краен брой прилагания на тази процедура(която сега ще приложим), ще премахнем всички квантори от тавтологията.

Заместваме $\exists x A'$ с $A'_x[C_{\exists x A'}]$)

$$\neg(A'_x[C_{\exists x A'}] \implies A'_x[C_{\exists x A'}]) \vee \neg(A'_x[a_1] \implies A'_x[C_{\exists x A'}]) \vee \cdots \vee \neg(A'_x[a_m] \implies A'_x[C_{\exists x A'}]) \vee$$

$$\vee \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3 \cdots \vee \neg A_s$$

Но $A'_x[C_{\exists x A'}] \implies A'_x[C_{\exists x A'}]$ е аксиома, т.е целият дизюнкт можем да го премахнем. Така получаваме тавтологията (∗):

$$\neg(A'_x[a_1] \implies A'_x[C_{\exists x A'}]) \vee \cdots \vee \neg(A'_x[a_m] \implies A'_x[C_{\exists x A'}]) \vee$$

$$\vee \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3 \cdots \vee \neg A_s$$

За всеки израз t с t^i да означим израза, който се получава след заместване на $C_{\exists x A'}$ с a_i. **Заместваме и в индексите на специалните константи**. При тази замяна, **спциалната константа се превръща в специална константа**, а **специалните аксиоми в специални аксиоми**.
Получаваме m тавтологии.

$$\neg(A'_x[a_1^1] \implies A'_x[a_1]) \vee \cdots \vee \neg(A'_x[a_m^1] \implies A'_x[a_1]) \vee \neg A_1^1 \vee \cdots \vee \neg A_s^1$$

$$\neg(A'_x[a_1^2] \implies A'_x[a_2]) \vee \cdots \vee \neg(A'_x[a_m^2] \implies A'_x[a_2]) \vee \neg A_1^2 \vee \cdots \vee \neg A_s^2$$

$$\vdots$$

$$\neg(A'_x[a_1^m] \implies A'_x[a_m]) \vee \cdots \vee \neg(A'_x[a_m^m] \implies A'_x[a_m]) \vee \neg A_1^m \vee \cdots \vee \neg A_s^m$$

Ако в i-тата тавтология $A'_x[a_i]$ е истина, то първите m дизюнкта ще са лъжа.
От тук получаваме, че:

$$A'_x[a_1] \implies \neg A_1^1 \vee \cdots \vee \neg A_s^1$$

$$A'_x[a_2] \implies \neg A_1^2 \vee \cdots \vee \neg A_s^2$$

$$\vdots$$

$$A'_x[a_m] \implies \neg A_1^m \vee \dots \vee \neg A_s^m$$

От $(*)$ за да бъде истина дизюнкта $\neg(A'_x[a_1] \implies A'_x[C_{\exists x A'}])(1 <= i <= m)$, то трябва $A'_x[a_1]$ да е истина. Следователно получаваме:

$$\neg(A'_x[a_1] \implies A'_x[C_{\exists x A'}]) \implies A'_x[a_1]$$

$$\neg(A'_x[a_2] \implies A'_x[C_{\exists x A'}]) \implies A'_x[a_2]$$

$$\vdots$$

$$\neg(A'_x[a_m] \implies A'_x[C_{\exists x A'}]) \implies A'_x[a_m]$$

Следователно следната формула е тавтология:

$$\neg A_1^1 \vee \dots \vee \neg A_s^1 \vee \dots\dots\dots \vee \neg A_1^m \vee \dots \vee \neg A_s^m \vee \neg A_1 \vee \dots \neg A_m.$$

Нека Б.О.О в горната формула няма квантори (ако има, то ще приложим отново горната стратегия). Всеки дизюнкт е частен случай или на аксиомите за равенството, или на нелогическите аксиоми за F. Нека с α_i бележим i-тият дизюнкт, който е частен случай на аксиома за равеснтвото, а с β_i i-тият дизюнкт, който е частен случай на нелогическите аксиоми на F. (броим от ляво надясно). Тогава следното е тавтология (след преподреждане):

$$\alpha_1 \implies \alpha_2 \implies \dots \implies \alpha_k \implies (\neg\beta_1 \vee \dots \vee \neg\beta_r)$$

Получихме, че дизюнкцията от отрицания на частни случай на нелогическите аксиоми на F $(\neg\beta_1 \vee \dots \vee \neg\beta_r)$ е тавтологично следствие на частни случаи на аксиомите за равенството $(\alpha_1 \dots \alpha_k)$.