12

Зад. Докажете, че L е к.-с. $\Sigma = \{a, b\}$

$$L = \{w \mid w \in \Sigma^* \wedge w = w^{rev}\}$$

G: $S \to aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \varepsilon$

$$L(G) = L$$

1) $L(G) \subseteq L$

$$(\forall w \in \Sigma^*)\ (w \in L(G) \Rightarrow w \in L)$$

$$S \overset{*}{\Rightarrow} \{u S u^{rev} \mid u \in \Sigma^*\} \cup \{u \mid u \in \Sigma^* \wedge u = u^{rev}\}$$

Инд. по дължината на извода

База: 0 стъпки $\quad S \overset{0}{\Rightarrow} S = \varepsilon S \varepsilon^{rev}$ $\square$

И.П. Нека за k стъпки:

$S \overset{k}{\Rightarrow} u S u^{rev}$ $\qquad\qquad$ $S \overset{k}{\Rightarrow} u \quad (u = u^{rev})$

1сл. $\qquad\qquad\qquad\qquad$ 2сл.

И.С: РАЗГЛЕЖДАМЕ К+1 СТЪПКА

1 сл. $S \xrightarrow{k} uSu^{rev}$

$\to \underbrace{ua}_{w} S \underbrace{au^{rev}}_{w^{rev}}$ (*)

$\to ubSbu^{rev}$

$\to uau^{rev}$

$\to ubu^{rev}$ (**)

$\to uu^{rev}$

(*) $(wa)^{rev} = aw^{rev}$ $(a \in \Sigma, w \in \Sigma^*)$

(**) $(ubu^{rev}) = u^{rev\,rev} b u^{rev} = ubu^{rev}$

$(b \in \Sigma, u \in \Sigma^*)$

2 сл. $S \xrightarrow{k} u \to X$ (К+1 СТЪПКА НЯМА)

$\Rightarrow S \xrightarrow{*} X$

$S \xrightarrow{*} X \qquad X \cap \Sigma^* = \{u \in \Sigma^* \mid u = u^{rev}\}$

$\Rightarrow L(G) \subseteq L$

$L \subseteq L(G)$

$\forall w \in L \; (S \xrightarrow{*} w)$

индукция по дължината на думата

База:

$|w| = 0 \qquad w = \varepsilon \qquad S \to \varepsilon$

$|w| = 1 \qquad w = a \qquad S \to a$

$\qquad\qquad w = b \qquad S \to b$

И.П. Допускаме, че $\forall u \in L \; |u| < k$
$k \geq 2$

$S \xrightarrow{*} u$

И.С. Разглеждаме произволна дума

$w \in L \qquad |w| = k$

$(w = w^{rev})$

1сл. $\quad w = a\,u\,a \qquad u = u^{rev} \wedge |u| = k - 2 < k$

$S \to aSa \xrightarrow{\text{и.п.}} aua = w$ ✓

2 сл. $w = b\,u\,b$ $\quad u = u^{rev} \wedge |u| = k-2 < k$

$$S \to bSb \xrightarrow{\text{и.п.}} bub = w \checkmark$$

$\Rightarrow L \subseteq L(G)$

$\Rightarrow L = L(G)$

Твърдение:

Всеки рег. език е к.-с.:

Структурна индукция:

БАЗА	$\emptyset$	$S \to S$
	$\{a\}$	$S \to a$ ✓
СТЪПКА	$\cup$	1)
	$\cdot$	2)
	$*$	3)

1) $G_1 = \langle V_1, \Sigma, S_1, R_1 \rangle$

$G_2 = \langle V_2, \Sigma, S_2, R_2 \rangle$

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$

търсим $G: L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$

$$G = \langle V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, S, R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1 | S_2\} \rangle$$

$S \notin V_1 \cup V_2$

зад Докажете, че L е к.-с.

$$L = \{a^n b^k \mid n \neq k\}$$

$$L = \{a^n b^k \mid n < k\} \cup \{a^n b^k \mid n > k\}$$

$S_1 \to aS_1b \mid S_1b \mid b$

$S_2 \to aS_2b \mid aS_2 \mid a$

Доказателството е аналогично с другото

Доказана е.

$$G: \left| \begin{array}{l} S \to S_1 | S_2 \\ S_1 \to aS_1b \mid S_1b \mid b \\ S_2 \to aS_2b \mid aS_2 \mid a \end{array} \right.$$

2) $G_1 = \langle V_1, \Sigma, S_1, R_1 \rangle$ $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

$G_2 = \langle V_2, \Sigma, S_2, R_2 \rangle$

Търсим G : $L(G) = L(G_1) . L(G_2)$

$G = \langle V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, S, R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1 S_2\} \rangle$

$S \notin V_1 \cup V_2$

зад Докажете, че L е к.-с.

$$L = \{a^n b^m a^k \mid m = n + k\}$$

$$L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} . \{b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$S_1 \to a S_1 b \mid \varepsilon$ $S_2 \to b S_2 a \mid \varepsilon$

доказана е! аналогично доказателство

$$G: \begin{cases} S \to S_1 S_2 \\ S_1 \to a S_1 b \mid \varepsilon \\ S_2 \to b S_2 a \mid \varepsilon \end{cases}$$

3) $G_1 = \langle V_1, \Sigma, S_1, R_1 \rangle$

Търсим $G : L(G) = L(G_1)^*$

$G = \langle V_1 \cup \{S\}, \Sigma, S, R_1 \cup \{S \to S_1 S \mid \varepsilon\} \rangle$

$S \notin V_1$

зад Докажете, че L е к.-с.

$$L = \{a^{n_1} b^{n_1} a^{n_2} b^{n_2} \dots a^{n_k} b^{n_k} \mid n_i \in \mathbb{N}\}$$

$$L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}^*$$

$\downarrow$

$S_1 \to a S_1 b \mid \varepsilon$ (доказана е)

$$G: \begin{array}{|l} S \to S_1 S \mid \varepsilon \\ S_1 \to a S_1 b \mid \varepsilon \end{array}$$

Показахме, че всеки рег. език е к.-с.

зад Постройте безконтекстна граматика за $L = \{ w \mid w$ започва с $a \}$

$a(a+b)^*$

$| S_1 \to a$
$| S_2 \to b$

1) $+$

$S_3 \to S_1 \mid S_2$
$S_1 \to a$
$S_2 \to b$

2) $*$

$S_4 \to S_3 S_4 \mid \varepsilon$
$S_3 \to S_1 \mid S_2$
$S_1 \to a$
$S_2 \to b$

3) $S_5 \to a$

① преименуване

$S_6 \to S_5 S_4$

$S_5 \to a$

$S_4 \to S_3 S_4 \mid \varepsilon$

$S_3 \to S_1 \mid S_2$

$S_1 \to a$

$S_2 \to b$

зад Докажете, че $L \subseteq \{a, b, c, d\}^*$ е к.-с.

$$L = \{a^n b^m c^k d^s \mid n + k = m + s\}$$

Решение:

Нека $L_1 = \{a^n b^m c^k d^s \mid n + k = m + s \wedge n \leq m\}$

и $L_2 = \{a^n b^m c^k d^s \mid n + k = m + s \wedge n \geq m\}$

Тогава $L = L_1 \cup L_2$.

Ще покажем, че L_1 и L_2 са к.-с.

$$L_1 = \{ \overbrace{a^{\alpha}}^{n} \overbrace{b^{\alpha} b^{\beta}}^{m} \overbrace{c^{\beta} c^{\gamma}}^{k} \overbrace{d^{\gamma}}^{s} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N} \}$$

$$\Rightarrow L_1 = \underbrace{\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}}_{\text{к-с}} . \underbrace{\{b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}}_{\text{к-с}} \underbrace{\{c^n d^n \mid n \in \mathbb{N}\}}_{\text{к-с}}$$

$\Rightarrow L_1$ е к.-с.

$$L_2 = \{ a^{\alpha} a^{\beta} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\gamma} d^{\alpha} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N} \}$$

$S \to aSd \mid AB$

$A \to aAb \mid \varepsilon$

$B \to cBd \mid \varepsilon$

$L(A) = \{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$

$L(B) = \{ c^n d^n \mid n \in \mathbb{N} \}$

$L(S) = a^n L(A) L(B) . d^n = L_2$

$\Rightarrow L_2$ e K.-c.

L_1, L_2 ca K-c $\Rightarrow L_1 \cup L_2 = L$ e K-c