

⑧

Език - регулярен?

$$R_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$$

$$x R_L y \iff \forall z \in \Sigma^* [xz \in L \iff yz \in L]$$

$R_L$  репация на екв.

↳ класове на екв. - съот. в мин. свт.

$$L \text{ е рег.} \iff \exists \text{ краен автомат } A: L(A) = L$$

$L$  е автомат

$$|Q| < \infty$$

• Тн. на Майхил-Нерауд

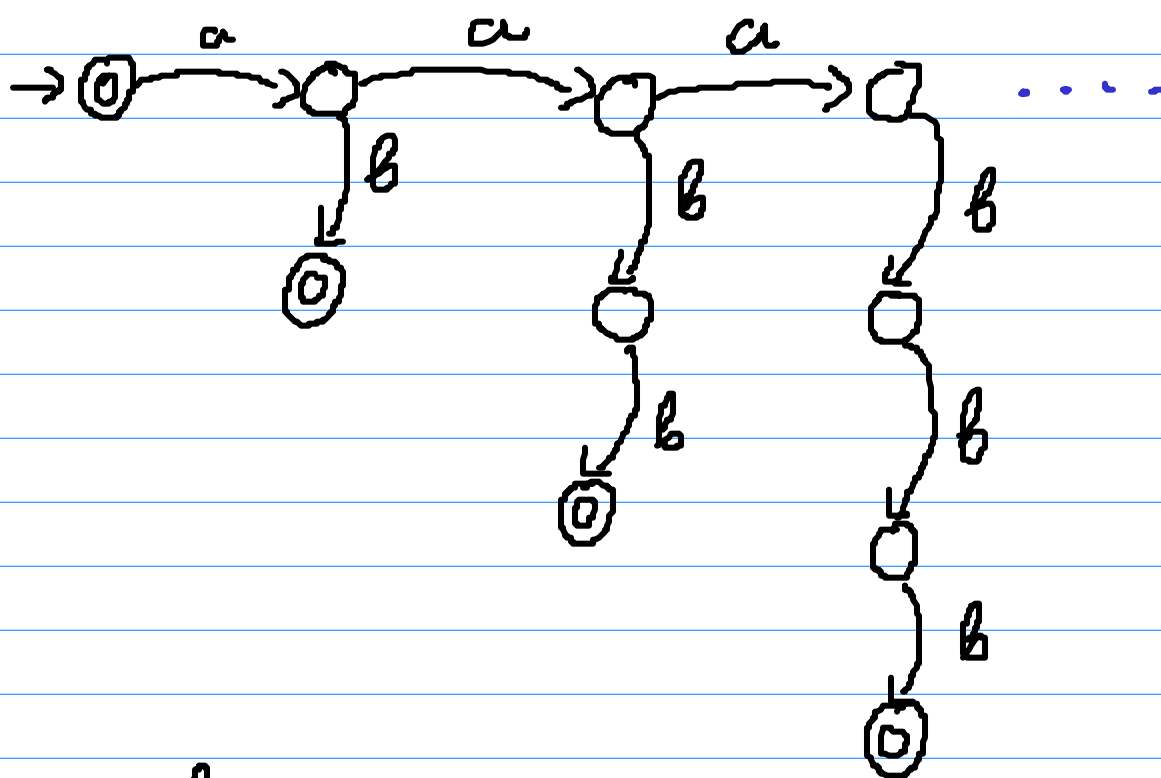
$$L \text{ е рег.} \iff R_L \text{ има краен индекс}$$

Пример за нерегулярен език

$$\Sigma = \{a, b\} \quad L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$L = \{\epsilon, ab, aabbb, \dots\}$$

ЗАЩО не е регулярен?



3<sup>ог</sup>

Докажете, че не е рег.

Ще покажем, че  $R_L$  има  $\infty$  индекс

Ще покажем, че

$$(\forall i, j \in \mathbb{N}) (i \neq j) [a^i] \neq [a^j]$$

Нека  $i, j \in \mathbb{N}$  и  $i \neq j$  са произволни.

$$[a^i] \neq [a^j] ?$$

$$a^i b^i \in L$$

$$a^j b^i \notin L \quad (i \neq j)$$

$$\Rightarrow a^i \not\sim a^j$$

$$\Rightarrow [a^i] \neq [a^j]$$

Но  $i, j$  са произволни

$$\Rightarrow (\forall i, j \in \mathbb{N}) (i \neq j) [a^i] \neq [a^j]$$

$\Rightarrow R_L$  има  $\infty$  индекса

$\Rightarrow L$  не е регулярен

защ<sup>2</sup> Докажете, че  $L$  не е рег.

$$z-40,6 \quad L = \{w \mid w \text{ е палиндром}\}$$

ще покажем, че  $R_L$  има  $\infty$  индекса

$$\forall i \forall j (i \neq j) [a^i b] \neq [a^j b]$$

Нека  $i, j$  са произволни и  $i \neq j$

$$[a^i b] \stackrel{?}{=} [a^j b]$$

$$a^i b a^i \in L$$

$$a^j b a^i \notin L \quad i \neq j$$

$$\Rightarrow [a^i b] \neq [a^j b]$$

Но  $i, j$  са произволни

$$(\forall i, j \in \mathbb{N})(i \neq j) \{ [a^i b] \neq [a^j b] \}$$

$\Rightarrow R_L$  има  $\infty$  индекс

$\Rightarrow L$  не е регулярен

Pumping Lemma

Ако  $L$  е регулярен, то:

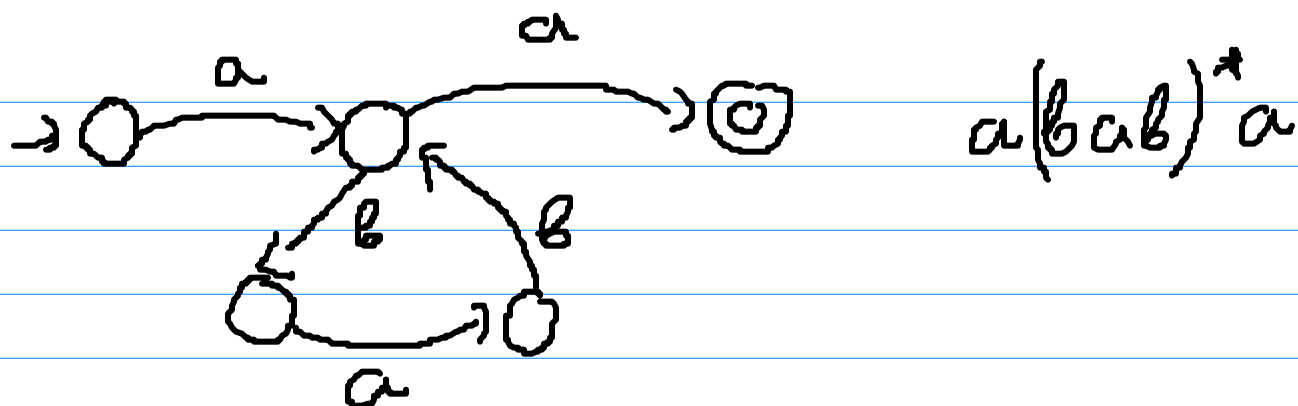
$$(\exists p \in \mathbb{N}^+)(\forall w \in L)$$

$$|w| \geq p \Rightarrow (\exists x, y, z \in \Sigma^*)(xyz = w)$$

$$\cdot |xy| \leq p$$

$$\cdot |y| \geq 1$$

$$\cdot (\forall i \in \mathbb{N})(xy^iz \in L)$$



$P = |Q|$  в минималния автомат

$P = 5$  { за конкретния език е 6, но  
за примера ще изкористиме  
едно-състоянието

$w \rightarrow |w|+1$  състояния (в прочита)

Ако  $|w| \geq |Q|$ , то в прочита на  $w$  ще минем през  $> |Q|$  състояния

→ По принципа на Дирихле

ще повторим състояние.

→ дупи сме в цикъл

$\underline{a} \underline{b a b a}$   
 $\underline{x} \quad \underline{y} \quad \underline{z}$

•  $|xy| \leq P \rightarrow$  Тогава в цикъла преди  $P$ -ия преход.

- $|y| \geq 1 \rightarrow$  цикълът съществува
- $\forall i: xy^iz \in L \rightarrow$  можем да се "въртим" в цикъла

$$i=0 \quad xy^0z = xz = \underline{a} \underline{a}$$

$$i=2 \quad xy^2z = xyxz = \underline{a} \underline{b} \underline{a} \underline{b} \underline{b} \underline{a} \underline{a}$$

заг<sup>1</sup>  
(c.p.l.)

$$L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Допускаме, че е регулярен.

$\rightarrow$  изпълнена е P.L.

$$w = a^p b^p \in L \checkmark$$

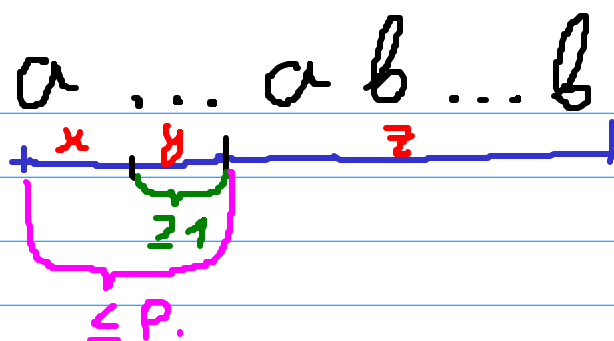
$$|w| \geq p \checkmark$$

$$\rightarrow \exists x, y, z \in \Sigma^* \quad xyz = w$$

$$\bullet |xy| \leq p$$

$$\bullet |y| \geq 1$$

$$\bullet xy^iz \in L \quad (\forall i \in \mathbb{N})$$



- $xy$  е префикс на думата  $(a^P b^P)$
- $|xy| \leq P \Rightarrow xy = a^t \ (t \leq P)$
- $|y| \geq 1 \Rightarrow y = a^r \ (1 \leq r \leq t)$

Ще покажем, че не е вярно:

$$(\forall i \in \mathbb{N}) (xy^i z \in L)$$

Контрпример:

$$i=2 \quad xy^2z = xyxz = a^{P+r}b^P \notin L$$

$$P+r \neq P$$

$$r \geq 1$$

Противоречие!

$\Rightarrow L$  не е регулярен.

заг<sup>2</sup>  
(с Р.Л.)

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$L = \{w \mid w \text{ е палиндром}\}$$

Допускаме, че е регулярен.

→ изпълнена е Р.Л.

$$w = a^p \quad \begin{matrix} \in L \checkmark \\ |w| \geq p \checkmark \end{matrix}$$

$$x = \varepsilon, y = a, z = a^{p-1}$$

$$|xy| \leq p$$

$$|y| \geq 1$$

$$\forall i \in \mathbb{N} (xy^iz \in L) \quad (xy^iz = a^{p+(i-1)} \in L)$$

Думата не става!

$$w = a^p b a^p \quad \begin{matrix} \in L \checkmark \\ |w| \geq p \checkmark \end{matrix}$$

$$\exists x, y, z \in \Sigma^* \quad xyz = w$$

$$|xy| \leq p$$

$$|y| \geq 1$$



$$(\forall i \in \mathbb{N}) (xy^iz \in L)$$

$a \dots a b a \dots a$



$xy$  е префикс и  $|xy| \leq p$

$$\Rightarrow xy = a^t \quad (t \leq p)$$

$$|y| \geq 1 \Rightarrow y = a^r \quad (1 \leq r \leq t)$$

Ще покажем, че не е вярно:

$$(\forall i \in \mathbb{N}) (xy^iz \in L)$$

Е контрапример

$$i=2 \quad xy^2z = a^{p+r} b a^p \notin L$$

$$r \geq 1$$

$$p+r \neq p$$

Противоречие!

$\Rightarrow L$  не е регулярен.

задача 3

Докажете, че  $L$  не е регулярен

$$L = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \wedge n \neq m\}$$

P.L. не е приложима

Допускаме, че  $L$  е рег.

$$L_1 = L(a^* b^*) = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

↑  
регулярен

Да разгледаме:

$$\overset{\text{рег}}{L_1} \setminus \overset{\text{рег}}{L} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

↑  
рег  
операции

$\Rightarrow \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  е регулярен

Но ние доказваме, че не е

$$\Rightarrow L = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \wedge n \neq m\}$$

не е регулярен!