Примерно решение на домашна работа 2 по Дискретни структури, специалност Информационни системи, първи курс, зимен семестър на 2019/2020 г.

Задача 1

Нека A е множеството от всички функции $f : \{0,1\}^5 \to \{0,1\}$, за които $f(0,0,0,0,0) = 0$. Кое от следните множества е равномощно с A?

а) Множеството от всички 31-буквени думи в азбуката $\{a,b\}$

б) Множеството $\{i \mid i \in \mathbb{N} \ \& \ i \leq 32\}$.

в) Множеството от всички петбуквени думи в азбуката $\{a,b\}$

Решение:

Броят функции от търсения вид е 2^{31}. Множеството от всички 31-буквени думи в азбуката $\{a,b\}$ е равномощно с A, понеже и двете множества имат 2^{31} елемента.

Задача 2

Колко са n-цифрените десетични числа, такива че започват и завършват с една и съща четна цифра.

Решение:

За първата и последната цифра имаме 4 избора. За всички останали имаме по 10 избора. Т.е отговорът е: $4 * 10^{n-2}$

Задача 3

Нека $D = (V,E)$ е кореново дърво. Вярно ли е, че:

а) $|V| = |E| + 1$.

б) $|V| = |E| - 1$.

в) Ако $|V| \geq 2$, то в D има поне два върха със степен 1.

Решение:

а) и в) са вярни. Всяко дърво има точно |V| - 1 ребра.
Щом D е дърво, то D и няма цикли. Т.е съществува най-дълъг път. Т.е началото и края на този път ще бъдат 2 върха със степен 1 (защото, ако имат повече от 1 ребро, използвайки друго ребро ще получим по-дълъг път). Ако допуснем, че в D няма такива 2 върха, означава че най-дълъг път няма, от където следва, че в графа има цикъл.

Задача 4

Колко е броят графи с n върха и m ребра?

Решение:

Избираме m от всички ненаредени двойки върхове в графа. Т.е отговорът е: $\binom{\binom{n}{2}}{m}$

Задача 5

Дадена е функцията: $f(x_1, x_2, x_3) = (00101100)$. Вярно ли е, че запазва 0-та и 1-цата:

Решение:

f запазва 0-та $f(00000000) = 0$, но f не запазва 1-цата $f(1111111) = 0$.

Задача 6

Ако знаем, че $p \leftrightarrow q = F$, то каква е стойността на следното съждение?
$p \oplus q \oplus q \oplus q \oplus p \oplus p \oplus q \oplus p \oplus p \oplus q$

Решение:

Щом $p \leftrightarrow q = F$, значи едната от двете променливи има стойност истина. В израза двете променливи се срещат нечетен брой пъти, а ние знаем, че за да има стойност истина, трябва да има нечетен брой променливи със стойност истина. Следователно изразът има стойност истина.

Задача 7

Нека A и B са множества и нека |A| = n и |B| = m и $A \cap B = \emptyset$. Колко са всички множества X ($X \subseteq A \cup B$), такива че: $X \cap A \neq \emptyset$ и $X \cap B \neq \emptyset$?

Решение:

От всички подмножества на $A \cup B$ премахваме тези, които са подмножества само на А или само на В. Т.е отговорът е $2^{n+m} - 2^n - 2^m$

Задача 8

Колко са всички n-цифрени числа, които започват и завършват с различна цифра.

Решение:

Първата и последната я избираме по 9*9 начина (0-та не може да е първата, а последната е различна от първата). За останали n-2 цифри имаме по 10 избора. Т.е отговорът е $9 * 9 * 10^{n-2}$.

Задача 9

Иванчо и n негови приятели отиват на кино. Купили си билети на един и същ ред и се оказало, че го запълват изцяло. По колко различни начина могат да седнат, така че Иванчо да бъде между двама свои приятели?

Решение:

От всички наредби $(n+1)!$ изваждаме тези, в които Иванчо е на края на реда $(2 * n!)$. Отговор: $(n+1)! - 2(n!)$

Задача 10

Иван, Петър и Ангел и $n-2$ техни приятели отиват на кино. Купили си билети на един и същ ред и се оказало, че го запълват изцяло. По колко различни начина могат да седнат, така че Иван да бъде между Ангел и Петър?

Решение:

Разглеждаме Петър, Иван и Ангел като един елемент. Всичките подредби са $(n-2)!$. След това разменяме местата на Петър и Ангел и имаме още $(n-2)!$ подредби. Отговор: $2 * (n-2)!$