ЕАИ

<u>Оценяване</u>:

- Контролно I – зад + теория
- Контролно II – зад + теория
- Изпит (задачи) (≥ 3.00)
- Изпит (теория) (≥ 3.00)

Изпитът покрива целия материал.

Преди всяко контролно
- тест в moodle (дом.)

(1)

(Σ) · Азбука – крайно м-во от символи

· Думи над азбука:

$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n : \forall i \in \{1 \dots n\} \; \alpha_i \in \Sigma$

n – дължина на думата

При $n = 0$ – празната дума ε

· Език – множество от думи над Σ

$\Sigma = \{a, b\}$ $\quad L = \{ab, ba\}$

Операции над езици:

Какво е операция? $\quad (f : A \to B)$ $\quad (f : A^n \to A)$ $\quad (f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$

1) Обединение

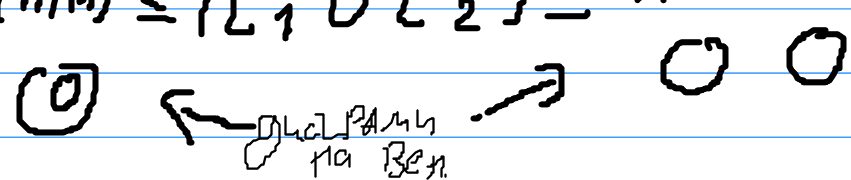
L_1, L_2 – езици

$L_1 \cup L_2 = \{w \mid w \in L_1 \vee w \in L_2\}$

$L_1 = \{a\}$ $\quad L_2 = \{ba, b\}$

$L_1 \cup L_2 = \{a, ba, b\}$

$|L_1| = n$, $|L_2| = m$ $\Rightarrow$ $\max(n, m) \le |L_1 \cup L_2| \le n + m$



2) конкатенация

L_1, L_2 – езици

$L_1 . L_2 = \{ w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2 \}$

$L_1 = \{a, b\}$ $\quad L_2 = \{bb, a\}$

$L_1 . L_2 = \{ \underbrace{ab}_{\in L_1}\underbrace{bb}_{\in L_2}, \underbrace{ab}_{\in L_1}\underbrace{a}_{\in L_2}, bbb, ba \}$

$|L_1| = n$

$|L_2| = m$

$|L_1 . L_2| \leq n . m$

1) обединение 2) конкатенация

кои са неутралните ел-ти на тези операции?

Пример за неутрален елемент

$+$ неутр. елемент: $\boxed{0}$ $\quad \forall a (a+0 = 0+a = a)$

$.$ неутр. елемент: $\boxed{1}$ $\quad \forall a (a.1 = 1.a = a)$

1) Неутр. на обединение?

$\boxed{\emptyset}$ $\quad \forall L (L \cup \emptyset = \emptyset \cup L = L)$

2) Неутр. на конкатенация?

! Не е $\emptyset$: $\forall L (L . \emptyset = \emptyset . L = \emptyset)$

$\boxed{\{\varepsilon\}}$ $\quad \forall L (L . \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\} . L = L)$

! Конкатенацията не е комутативна !

3) Звезда на Клини.

$$L^* = \{w_1 w_2 \ldots w_n \mid w_i \in L \ (i \in \{1..n\})\}$$

$$L = \{ab, b, aa\}$$

$$L^* = \{\underset{\in L^0}{\varepsilon}, \underset{\in L^1}{ab}, \underset{\in L^1}{b}, \underset{\in L^1}{aa}, \underset{\in L^2}{abb}, \underset{\in L^2}{baa}, \underset{\in L^2}{abaa} \ldots$$

$$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n \qquad (L^n = \underbrace{L.L.L \ldots L}_{n\text{-пъти}})$$

$$L^* = \{L^0 \cup L^1 \cup L^2 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

За всеки език L: $\underbrace{L^0}_{0 \text{ пъти конкатенация}} = \{\varepsilon\}$

$3*7 = 3+3+3+3+3+3+3$

$3*0 = \underline{0}$ (неутр. ел. относно $+$)

$3^2 = 3.3$ $\quad (x^1 = x^0.x = 1.x = x)$

$3^0 = \underline{1}$ (неутр. ел. относно $*$)

$L^3 = L.L.L \quad L^n = L^{n-1}.L \quad L^1 = \{\varepsilon\}.L$

$L^0 = \underline{\{\varepsilon\}}$ (неутр. ел. относно $.$)

$|L| = n$ $\quad |L^*| = \begin{cases} 1 & |L| = 0 \ (L = \emptyset) \\ \infty & |L| \geq 1 \end{cases}$

$$\emptyset^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L^i = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \dots$$

$$L^0 = \{\varepsilon\}, \quad L^1 = \emptyset, \quad L^2 = \emptyset, \quad \dots = \emptyset$$

$$\emptyset^* = \{\varepsilon\}$$

Индуктивна дефиниция на м-во.

Пример: Четните числа.

- 0 е четно
- Ако α е четно, то
  - $\alpha + 2$ е четно
  - $\alpha - 2$ е четно

$\dots \ -6 \ \ -4 \ \ -2 \ \ 0 \ \ 2 \ \ 4 \ \ 6 \ \dots$

def: Регулярен език над Σ

База: $\emptyset$ е рег. език.

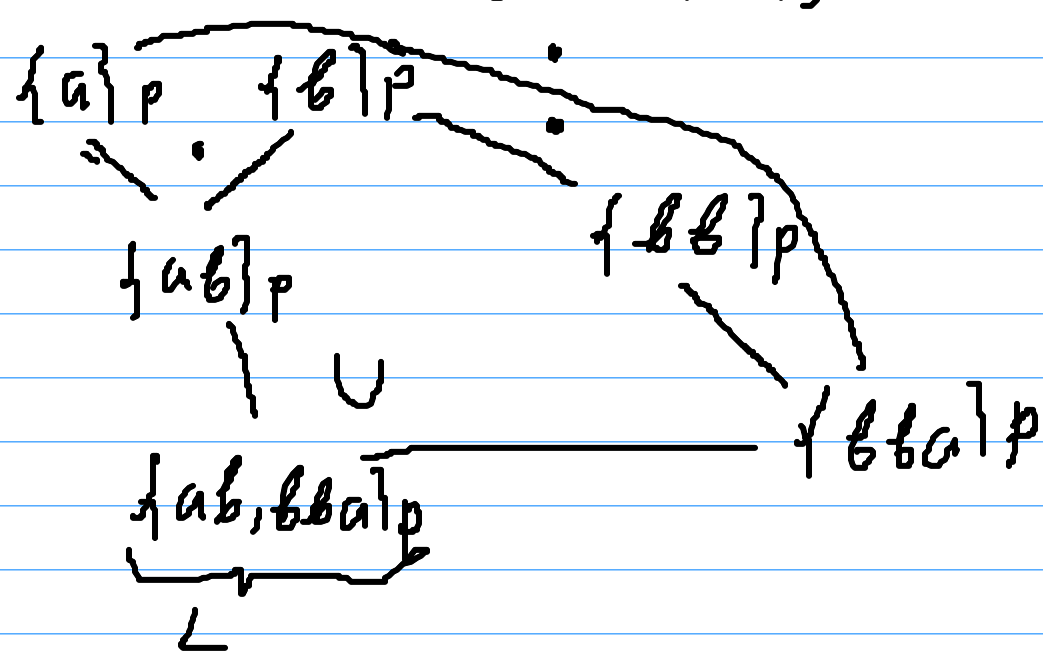
$\{a\}$ е рег език $\forall a \in \Sigma$

Ако L_1 и L_2 са регулярни

- $L_1 \cup L_2$ е регулярен
- $L_1 \cdot L_2$ е регулярен
- L_1^* и L_2^* са регулярни

⚠ Тези операции се прилагат краен брой пъти

Зад Докажете, че $L=\{ab, bba\}$ е регулярен $(\Sigma=\{a,b\})$



Твърдение

Всеки краен език е рег.

Скица на док:

Краен брой обединения на думи

Дума: краен брой конкатенации (на синглетони $- \{a\}$), abb $\{a\}\cdot\{b\}\cdot\{b\}$

зад. $\Sigma = \{a\}$ Докажете, че

$$L = \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ е четно}\}$$

е регулярен език.

$L = \{\varepsilon, aa, aaaa, aaaaaa \ldots\ldots\ldots$

$|L| = \infty$

решение:

$\{aa\}_p$ – рег (защото е краен)

$$\underbrace{\{aa\}}_{L}{}_p^{*} = \{\underset{L^0}{\varepsilon}, \underset{L^1}{aa}, \underset{L^2}{aaaa}, \underset{L^3}{aaaaaa} \ldots$$

$\{aa\}$ е рег $\Rightarrow$ $\{aa\}^*$ е регулярен

но $\{aa\}^* = L$ $\Rightarrow$ L е регулярен

Зад $\Sigma = \{a\}$

$L = \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n$ е нечетно $\}$

L е рег?

$L = \{a, aaa, aaaaa, aaaaaaa \dots$

Решение:

Знаем, че $L' = \{a^n \mid n$ е четно $\}_P$

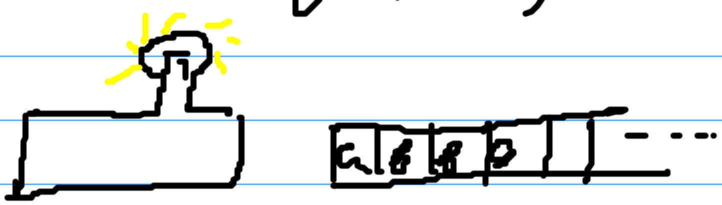
$L'' = \{a\}\ P$

$L' \cdot L'' = \{\varepsilon, aa, aaaa, aaaaaa \dots\} \cdot \{a\}$

$= \underbrace{\{a, aaa, aaaaa, aaaaaaa \dots\}}_{L}$

$\Rightarrow L$ е регулярен.

def: Автомат (краен)

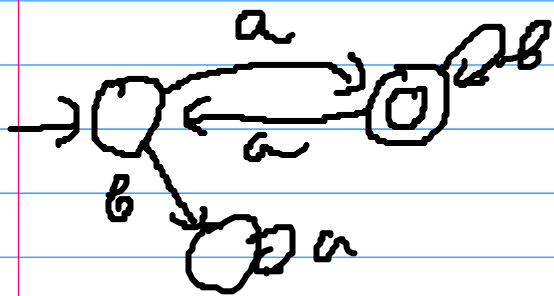


✓ Приема думата

✗ Отхвърля думата

Пример за автомат?

- Въвеждане на правилен e-mail
- Среда за разработка $\left\{ \begin{array}{ll} \text{while} & \checkmark \\ \text{abc} & \times \end{array} \right\}$



← Рисунка на автомат

abb ✓

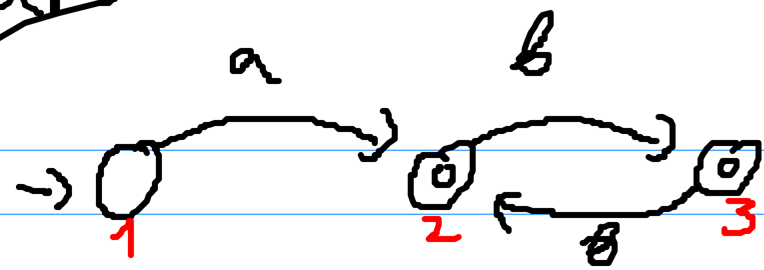
aba ✗

def: $A = \langle Q, \Sigma, s, F, \delta \rangle$

- Q – мн-во от състояния $|Q| < \infty$
- Σ – азбука на A $|\Sigma| < \infty$
- $s \in Q$ стартово състояние
- $F \subseteq Q$ финални състояния
- δ – ф-я на преходите

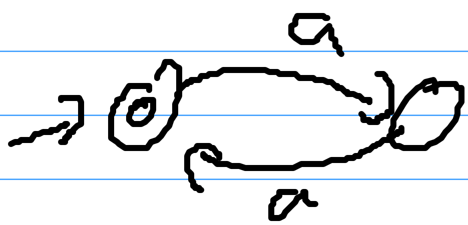
$$\delta : Q \times \Sigma \to Q$$

Пример:



$A = \langle \{1,2,3\}, \{a,b\}, 1, \{2,3\}, \delta \rangle$

$\delta = \{((1,a),2), ((2,b),3), ((3,b),2)\}$

A: 

ε ✓
aa ✓
aaaa ✓

Автомат за $L = \overbrace{\{a^n \mid n \text{ е четно}\}}^{L(A)}$

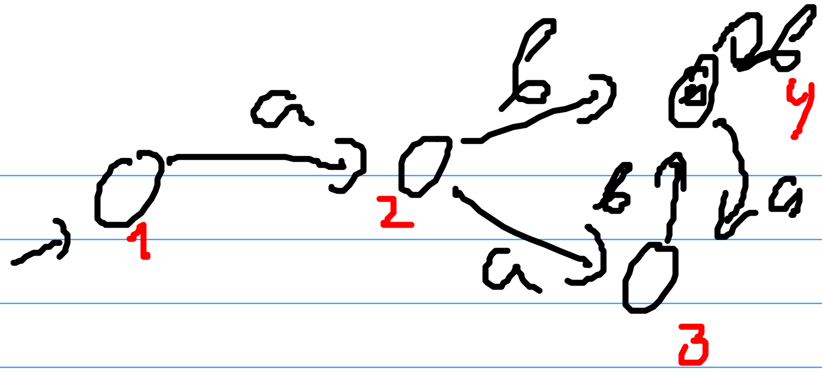
$L(A) = \{ w \mid w$ се разпознава от автомата $\}$

aaa

$\delta(\delta(\delta(1,a),a),a) \in F$

$$\delta^*(q,w) = \begin{cases} q & w = \varepsilon \quad |w|=0 \\ \delta^*(\delta(q,a), u) & w = au \quad |w| \geq 1 \end{cases}$$

В кое състояние "отиваме" след като прочетем думата w

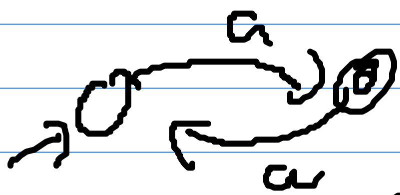


$\delta^*(1, ababa) = 3$

⚠ $L(A) = \{ w \in \Sigma^* \mid \delta^*(s, w) \in F \}$

Когато говорим за дума w над азбука Σ, записваме: $w \in \Sigma^*$

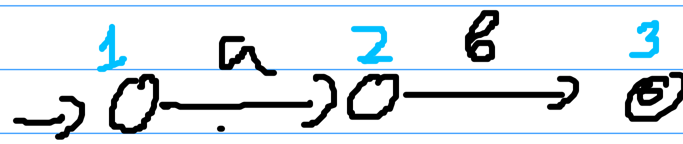
?



$L(A) = \{ a^n \mid n \text{ е нечетно} \}$

a ✓

aaa ✓



$aa \in L(A)$?

Не! $\delta(2, a) = ?$

Не е тотален

def: $A = \langle Q \ldots \delta \rangle$ е тотален, ако

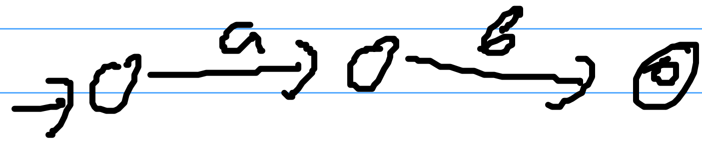
$\forall q \in Q \; \forall a \in \Sigma \;\; \delta(q, a)$ да е дефинирана

$\boxed{\delta \text{ да е тотално}}$

Ако автоматът не е тотален ?

„Тотализация" на автомата:

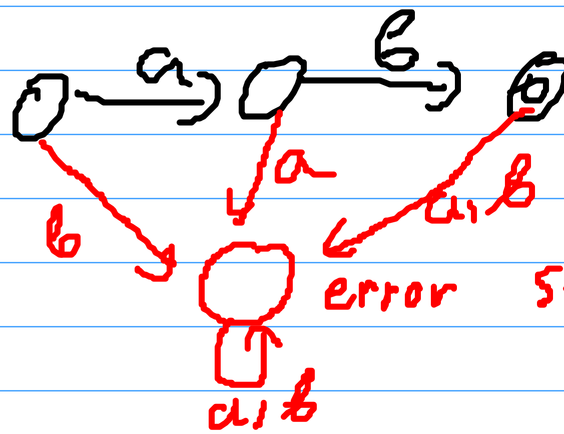
$\Sigma = \{a, b\}$



$L(A) = \{ab\}$

тотален

TOT(A):



$L(TOT\,A) = \{ab\}$

Автомат вече е тотален

Езикът на автомата не е променен