

Теорема на Хилберт-Акерман

Ангел Димитриев

Дефиниция: Консервативно разширение.

Нека F е формална система. Нека F' е разширение на F . Тоест: $F \subseteq F'$. Ще казваме, че F' е **консервативно** разширение на F , ако за всяка формула A е изпълнено, че: ако $\vdash_{F'} A$, то $\vdash_F A$.

Теорема за константите

Нека F' се получава от F чрез добавяне на нови константи. Тогава F' е консервативно разширение на F .

Дефиниция: Противоречива формална система.

Нека F е формална система. F е противоречива, ако за някоя формула A :

$$\vdash_F A \ \& \ \vdash_F \neg A$$

Тогава следното твърдение е изпълнено:

F е противоречива \iff за всяка формула B е изпълнено, че $\vdash_F B$

Дефиниция: Хеникова система.

Една формална система е **хеникова**, ако за всяка затворена формула $\exists xA$ на системата, съществува затворен терм t , такъв че $\exists xA \implies A_x[t]$ е теорема на системата.

Забележка. A изразява свойство на x . Системата трябва да е *готовна с пример*, в случай че свойството е изпълнено в нея. Но това **НЕ** означава, че тя *дава примера преди да сме доказали*, че свойството е вярно.

Дефиниции: Специални константи. Специални аксиоми

Нека F е формална система. Ако $\exists xA$ е затворена формула от символите на F (и специалните константи на F), то символът $K_{\exists xA}$ е **специална константа** на F за формулата $\exists xA$.

Ако $K_{\exists xA}$ е специална константа, то формулата:

$$\exists xA \implies A_x[K_{\exists xA}]$$

наричаме **специална аксиома** за $K_{\exists x A}$.

Ако F' е получен от F , добавяйки всички специални константи, то от **теоремата за константите** следва, че F' е консервативно разширение на F . А ако SA е множеството на всички специални аксиоми, то $F'[SA]$ е **хенкинова формална система**.

Твърдение 1:

Ако $\vdash_F T$, то всеки затворен частен случай на T от $L_c(F)$ е тавтологично следствие на затворени частни случаи в $L_c(F)$ на аксиомите и специалните аксиоми на F .

Доказателство:

Нека $\vdash_F T$ и нека T' е затворен частен случай на T .

Ще покажем, че T' е тавтологично следствие на затворени частни случаи на аксиомите и специалните аксиоми. Ще направим индукция по извода в F .

1. Ако T не се получава чрез правилото за замяната.

- Ако T е аксиома,

то T' е затворен частен случай на аксиома на F .

Но всеки терм е тавтологично следствие на себе си (в частност T' на T'), от където следва, че T' е тавтологично следствие на затворени частни случаи на аксиомите на F (в частност аксиомата T).

- Ако T е тавтологично следствие на $T_1, T_2 \dots T_n$:

Тогава T' се получава чрез замяна на свободните промени с термове в T . Прилагаме същите замени в $T_1, T_2 \dots T_n$ и получаваме $T'_1, T'_2 \dots T'_n$. Тогава $T'_1, T'_2 \dots T'_n$ са затворени частни случаи на теоремите $T_1, T_2 \dots T_n$.

От и.п. $T'_1, T'_2 \dots T'_n$ са тавтологични следствия на затворени частни случаи на аксиомите и специалните аксиоми. Но T' е тавтологично следствие на $T'_1, T'_2 \dots T'_n$. А T' е тавтологично следствие на това, на което $T'_1, T'_2 \dots T'_n$ са тавтологични следствия.

Следователно T' е тавтологично следствие на затворени частни случаи на аксиомите и специалните аксиоми.

2. Ако T се получава от $A \implies B$ чрез $(\Pi \exists)$.

Тогава: $T' = \exists x A' \implies B'$, където A' е частен случай на A , а B' е затворен частен случай на B .

Възможно е A' да **не е затворена**. Ако в A променливата x е участвала **свободно**, то в T' тя вече е свързана и **не можем да я заменим** в A' .

Тогава за да получим **затворен** частен случай на $\exists x A' \implies B'$ **трябва да заменим свободните срещания на** x (които са в A') с терм.

Нека $C_{\exists x A'}$ е **специалната константа** на $\exists x A'$.
 Тогава $A'_x[C_{\exists x A'}] \implies B'$ е **затворен частен случай** на $A \implies B$. От
и.п. формулата $A'_x[C_{\exists x A'}] \implies B'$ е тавтологично следствие на аксиомите
 на F и специалните аксиоми на F .
 Специалната аксиома за $C_{\exists x A'}$ е $\exists x A' \implies A'_x[C_{\exists x A'}]$. Имаме, че:

- а) $\exists x A' \implies A'_x[C_{\exists x A'}]$ е специална аксиома.
- б) $A'_x[C_{\exists x A'}] \implies B'$ е тавтологично следствие на аксиомите и специалните аксиоми на F

От а), б) и транзитивността на импликацията следва, че:
 $T' = \exists x A' \implies B'$ е тавтологично следствие на затворени частни случаи в
 $L_c(F)$ на аксиомите и специалните аксиоми на F .

Теорема на Хилеберт-Акерман:

Нека F е формална система, имаща само **безкванторни нелогически аксиоми**. Тогава F е противоречива тогава и само тогава, когато някоя дизюнкция от отрицания на частни случаи на нелогическите аксиоми на F е тавтологично следствие на частни случаи на аксиомите за равенството.

Доказателство:

\Leftarrow) Нека някоя дизюнкция от отрицания на частни случаи на нелогически аксиоми на F е тавтологично следствие на частни случаи на аксиомите за равенството. Т.е. :

$$\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \dots \vee \neg A_n$$

е тавтологично следствие на частни случаи на аксиомите за равенството и $A_i (1 \leq i \leq n)$ е частен случай на аксиомите на F . Но тогава:

$$\vdash_F \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \dots \vee \neg A_n$$

но A_i е частен случай на аксиома и съгласно **теоремата за замяната**:

$$\vdash_F A_1, \vdash_F A_2, \dots \vdash_F A_n$$

Горната формула може да запишем така:

$$A_1 \implies A_2 \implies A_3 \implies \dots \implies A_{n-2} \implies A_{n-1} \implies \neg A_n.$$

Но по **modus ponens**:

$$\cancel{A_1} \implies A_2 \implies A_3 \implies \dots \implies A_{n-2} \implies A_{n-1} \implies \neg A_n$$

$$\cancel{A_1} \implies \cancel{A_2} \implies A_3 \implies \dots \implies A_{n-2} \implies A_{n-1} \implies \neg A_n$$

$$\cancel{A_1} \Rightarrow \cancel{A_2} \Rightarrow \cancel{A_3} \Rightarrow \dots \Rightarrow A_{n-2} \Rightarrow A_{n-1} \Rightarrow \neg A_n$$

\vdots

$$\cancel{A_1} \Rightarrow \cancel{A_2} \Rightarrow \cancel{A_3} \Rightarrow \dots \Rightarrow \cancel{A_{n-2}} \Rightarrow \cancel{A_{n-1}} \Rightarrow \neg A_n$$

Следователно $\neg A_n$ е **теорема** на F . Но и A_n е **теорема** на F .
От тук следва, че F е **противоречива**.

\Rightarrow) Нека F е противоречива (и F има само безкванторни нелогически аксиоми). Тогава $\vdash_F x \neq x$. Но от твърдение 1, следва, че $c \neq c$ (c е произволна константа от $L_c(F)$) е **тавтологично следствие** на затворени в $L_c(F)$ частни случаи на аксиомите и специалните аксиоми на F .

Т.е от затворени частни случаи на аксиомите и специалните аксиоми на F , използвайки само **теорема за тавтологията**, може да докажем, че $c \neq c$. Следователно имаме нещо от типа:

$$A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n \Rightarrow c \neq c$$

което е тавтология. $A_i (1 \leq i \leq n)$ е частен случай на аксиомите и специалните аксиоми на F . Ще трябва да се освободим от **аксиомите за субституция и специалните аксиоми**. Така ще получим тавтология, която е дизюнкция от отрицания на затворени частни случаи в $L_c(F)$ на аксиоми за равенството и нелогически аксиоми на F . Имаме следната тавтология:

$$\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3 \dots \vee \neg A_n$$

$$A_i (1 \leq i \leq n)$$

- Затворена аксиома за субституцията.
- Специална аксиома.
- Затворен частен случай на аксиома за равенството.
- Затворен частен случай на нелогическа аксиома на F .

Но F е отворена формална система - **нелогическите аксиоми нямат квантори**. В аксиомите за равенството също **няма квантори**. Тогава може да разпознаем дали A_i е аксиома за субституцията/специална аксиома по това **дали съдържа квантор**.

Нека $\exists x A'$ е формулата с възможно най-много квантори от тавтологията. Тогава $\exists x A'$ е парче от:

- $A'_x[a] \Rightarrow \exists x A'$ (част от аксиома за субституцията).
- $\exists x A' \Rightarrow A'_x[C_{\exists x A'}]$ (част от специална аксиома)

Тогава имаме следната тавтология:

$$\neg(\exists x A' \implies A'_x[C_{\exists x A'}]) \vee \neg(A'_x[a_1] \implies \exists x A') \vee \dots \vee \neg(A'_x[a_m] \implies \exists x A') \vee$$

$$\vee \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3 \dots \vee \neg A_s$$

където $\exists x A'$ не участва в A_1, \dots, A_s .

Забележка: Ако някой дизюнкт не участва във формулата (например: $A'_x[a] \implies \exists x A'$), то понеже нашата дизюнкция е тавтология, можем да го добавим.

Искаме да премахнем $\exists x A'$. След краен брой прилагания на тази процедура(която сега ще приложим), ще премахнем всички квантори от тавтологията.

Заместваме $\exists x A'$ с $A'_x[C_{\exists x A'}]$

$$\neg(A'_x[C_{\exists x A'}] \implies A'_x[C_{\exists x A'}]) \vee \neg(A'_x[a_1] \implies A'_x[C_{\exists x A'}]) \vee \dots \vee \neg(A'_x[a_m] \implies A'_x[C_{\exists x A'}]) \vee$$

$$\vee \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3 \dots \vee \neg A_s$$

Но $A'_x[C_{\exists x A'}] \implies A'_x[C_{\exists x A'}]$ е аксиома, т.е целият дизюнкт можем да го премахнем. Така получаваме тавтологията (*):

$$\neg(A'_x[a_1] \implies A'_x[C_{\exists x A'}]) \vee \dots \vee \neg(A'_x[a_m] \implies A'_x[C_{\exists x A'}]) \vee$$

$$\vee \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3 \dots \vee \neg A_s$$

За всеки израз t с t^i да означим израза, който се получава след заместване на $C_{\exists x A'}$ с a_i . **Заместваме и в индексите на специалните константи.** При тази замяна, **спциалната константа се превръща в специална константа, а специалните аксиоми в специални аксиоми.** Получаваме m тавтологии.

$$\neg(A'_x[a_1^1] \implies A'_x[a_1]) \vee \dots \vee \neg(A'_x[a_m^1] \implies A'_x[a_1]) \vee \neg A_1^1 \vee \dots \vee \neg A_s^1$$

$$\neg(A'_x[a_1^2] \implies A'_x[a_2]) \vee \dots \vee \neg(A'_x[a_m^2] \implies A'_x[a_2]) \vee \neg A_1^2 \vee \dots \vee \neg A_s^2$$

\vdots

$$\neg(A'_x[a_1^m] \implies A'_x[a_m]) \vee \dots \vee \neg(A'_x[a_m^m] \implies A'_x[a_m]) \vee \neg A_1^m \vee \dots \vee \neg A_s^m$$

Ако в i -тата тавтология $A'_x[a_i]$ е истина, то първите m дизюнкта ще са лъжа. От тук получаваме, че:

$$A'_x[a_1] \implies \neg A_1^1 \vee \dots \vee \neg A_s^1$$

$$A'_x[a_2] \implies \neg A_1^2 \vee \dots \vee \neg A_s^2$$

\vdots

$$A'_x[a_m] \implies \neg A_1^m \vee \dots \vee \neg A_s^m$$

От (*) за да бъде истина дизюнкта $\neg(A'_x[a_i] \implies A'_x[C_{\exists x A'}])$ ($1 \leq i \leq m$), то трябва $A'_x[a_i]$ да е истина. Следователно получаваме:

$$\neg(A'_x[a_1] \implies A'_x[C_{\exists x A'}]) \implies A'_x[a_1]$$

$$\neg(A'_x[a_2] \implies A'_x[C_{\exists x A'}]) \implies A'_x[a_2]$$

\vdots

$$\neg(A'_x[a_m] \implies A'_x[C_{\exists x A'}]) \implies A'_x[a_m]$$

Следователно следната формула е тавтология:

$$\neg A_1^1 \vee \dots \vee \neg A_s^1 \vee \dots \vee \neg A_1^m \vee \dots \vee \neg A_s^m \vee \neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_m.$$

Нека Б.О.О в горната формула няма квантори (ако има, то ще приложим отново горната стратегия). Всеки дизюнкт е частен случай или на аксиомите за равенството, или на нелогическите аксиомы за F . Нека с α_i бележим i -тият дизюнкт, който е частен случай на аксиома за равенството, а с β_i i -тият дизюнкт, който е частен случай на нелогическите аксиомы на F . (броим от ляво надясно). Тогава следното е тавтология (след препореждане):

$$\alpha_1 \implies \alpha_2 \implies \dots \implies \alpha_k \implies (\neg \beta_1 \vee \dots \vee \neg \beta_r)$$

Получихме, че дизюнкцията от отрицания на частни случаи на нелогическите аксиомы на F ($\neg \beta_1 \vee \dots \vee \neg \beta_r$) е тавтологично следствие на частни случаи на аксиомите за равенството ($\alpha_1 \dots \alpha_k$).