Задачи по Логическо програмиране

Ангел Димитриев

1 Задача

Нека L е език с два функционални символа:P и R.
За тях: $\#(P) = 2, \#(R) = 1$.

$$\Sigma = \{a, b\}, A = (\Sigma^*, P^A, R^A)$$

$$(w, y) \in P^A \Leftrightarrow w \textbf{ е подниз на } u$$

$$w \in R^A \Leftrightarrow w \textbf{ съдържа a и b}$$

Да се докаже, че следните множества са определими:

- $\{\epsilon\}$
- Σ^+
- Σ
- $Equals = \{(w, w)\ |w \in \Sigma^*\}$
- $Common = \{(w, u)\ |w$ и u имат общ симовол$\}$
- $\{a^k, b^k\}k \in \mathbf{N}$

Да се докаже, че за произвлна $w \in \Sigma^+$ множеството $\{w\}$ е неопределимо.

Решение:

$\phi_\epsilon(x) = \forall y(p(x, y))$
$\phi_{\Sigma^+}(x) = \neg\phi_\epsilon(x)$
$\phi_\Sigma(x) = \forall y(R(x) \implies P(y, x))$
$\phi_{Equals}(x, y) = P(x, y) \wedge P(y, x)$
$\phi_{Common}(x, y) = \exists z(\phi_\Sigma(z) \wedge P(z, x) \wedge P(z, y))$
Ще покажем с индукция, че за всяко k множеството $\Sigma_k = \{a^k, b^k\}$ е определимо.
База: $\phi_{\Sigma_1} = \phi_\Sigma$.
ИП: Допускаме, че за имаме формули за $\forall t \leq k$ $(\phi_{\Sigma_1}, \phi_{\Sigma_2} \dots \phi_{\Sigma_k})$
ИС: Формула за $k + 1$. $\{a^{k+1}, b^{k+1}\}$

$\phi_{isNotFromPrev}(x) = \neg R(x) \wedge \neg\phi_{\Sigma_1}(x) \wedge \cdots \wedge \neg\phi_{\Sigma_k}(x)$
$\phi_{\Sigma_{k+1}}(x) = \phi_{isNotFromPrev}(x) \wedge \forall y(\phi_{isNotFromPrev}(y) \wedge \phi_{Common}(x,y) \implies R(x,y))$

Нека w е произволна дума с поне един символ. Ще покажем, че $\{w\}$ е неопределимо. Дефинираме:

$$h_{change}(w) = h(\alpha_1 \ldots \alpha_n) = \overline{\alpha_1} \ldots \overline{\alpha_n}$$

където:

$$\overline{\alpha} = \begin{cases} a & \text{if } \alpha = b \\ b & \text{if } \alpha = a \end{cases}$$

Ще покажем, че h_{change} е автоморфизъм.
• Биекция: $h = h^{-1}$
• Константи и функционални символни нямаме.
• $w \in R^A \iff h_{change}(w) \in R^A$ (участието на a и b са съответно участия на b и a в $h_{change}(w)$)
•$R(w,u) \iff u = xwy \iff h_{change}(u) = h_{change}(x)h_{change}(w)h_{change}(y) \iff R(h_{change}(w), h_{change}(y))$
Следователно h_{change} е автоморфизъм.
Но $h_{change}(w) \neq w$. От тук следва, че $\{w\}$ не е определимо.
Забележка: reverse също е валиден автоморфизъм. Но ако използваме него, то няма да можем да докажем, че синглетоните с дума, която е палиндром, са неопределими, понеже палиндормите са негова неподвижна точка!

2 Задача

С метода на резолюцията да се докаже, че множеството от следните формула е неизпълимо.

$$\phi_1 = \forall x(P(x) \Rightarrow \exists y R(y))$$

$$\phi_2 = \forall x \forall y(R(x) \Leftrightarrow T(y))$$

$$\phi_3 = (\forall x R(x) \Rightarrow \neg(\exists x \exists y(R(x) \wedge R(y))))$$

$$\phi_4 = \neg\exists x \exists y(\neg P(x) \wedge Q(y))$$

$$\phi_5 = \forall x Q(x)$$

Решение:

ПНФ:

$$\phi_1^P = \forall x \exists y(P(x) \Rightarrow R(y))$$

$$\phi_2^p = \forall x \forall y(R(x) \Leftrightarrow T(y))$$

$$\phi_3^p = \exists x \forall z \forall y(R(x) \Rightarrow (\neg R(z) \vee \neg R(y))$$

$$\phi_4^p = \forall x \forall y (P(x) \vee \neg Q(y))$$

$$\phi_5^p = \phi_5 = \forall x Q(x)$$

СНФ:

$$\phi_1^s = \forall x (P(x) \Rightarrow R(f(x)))$$

$$\phi_2^s = \phi_2^p = \forall x \forall y (R(x) \Leftrightarrow T(y))$$

$$\phi_3^s = \forall z \forall y (R(b) \Rightarrow \neg R(z) \vee \neg R(y)))$$

$$\phi_4^s = \phi_4^p = \forall x \forall y (P(x) \vee \neg Q(y))$$

$$\phi_5^s = \phi_4^p = \phi_5 = \forall x Q(x)$$

КНФ:

$$\phi_1^k = \forall y (\neg P(a) \vee R(y))$$

$$\phi_2^k = \forall x \forall y ((\neg R(x) \vee T(y)) \wedge (R(x) \vee \neg T(y)))$$

$$\phi_3^k = \forall z \forall y (\neg R(b) \vee \neg R(z) \vee \neg R(y)))$$

$$\phi_4^k = \phi_4^s = \phi_4^p = \forall x \forall y (P(x) \vee \neg Q(y))$$

$$\phi_5^k = \phi_5^s = \phi_4^p = \phi_5 = \forall x Q(x)$$

От тук получаваме следните дизюникти:
$D_1 = \{\neg P(x_1), R(f(x_1))\}$
$D_2 = \{\neg R(x_2), T(y_2)\}$
$D_3 = \{R(x_3), \neg T(y_3)\}$
$D_4 = \{\neg R(b_4), \neg R(z_4), \neg R(y_4))\}$
$D_5 = \{(P(x_5), \neg Q(y_5)\}$
$D_6 = \{Q(x_6)\}$
Резолютивен извод:

$$Res(D_1, D_2\{x_2/f(x_1)\}) = \{\neg P(x_1), T(y_2)\} = D_7$$

$$Res(D_3, D_7\{y_2/y_3\}) = \{\neg P(x_1), R(x_3)\} = D_8$$

$$Collapse(D_4\{z_4/b_4, y_4/b_4\}) = \{\neg R(b_4)\} = D_9$$

$$Res(D_9, D_8\{x_3/b_4\}) = \{\neg P(x_1)\} = D_{10}$$

$$Res(D_6, D_5\{y_5/x_6\}) = \{P(x_5)\} = D_{11}$$

$$Res(D_{10}, D_{11}\{x_5/x_1\}) = \emptyset$$

3 Задача

С метода на резолюцията да се докаже, че множеството от следните дизюнкити е неизпълимо.

$D_1 = \{\neg Q(b, y_1), \neg Q(c, y_1)\}$
$D_2 = \{Q(a, h(z))\}$
$D_3 = \{P(h(y_2), t), Q(y_3, t)\}$
$D_4 = \{Q(b, f(y_4)), \neg Q(a, y_4)\}$
$D_5 = \{\neg P(y_5, f(y_5)), \neg Q(a, y_5)\}$

Резолютивен извод:

$$Res(D_2, D_4\{y_4/h(z)\}) = \{Q(b, f(h(z))\} = D_6$$

$$Res(D_6, D_1\{y_1/f(h(z))\}) = \{\neg Q(c, f(h(z))\} = D_7$$

$$Res(D_7, D_3\{y_3/c, t/f(h(z))\}) = \{p(h(c)), f(h(z))\} = D_8$$

$$Res(D_5 z/c, D_8\{y/h(c)\}) = \{\neg Q(a, h(c))\} = D_9$$

$$Res(D_9, D_2\{z/c\}) = \emptyset$$