⑨ Доказателства, че език не е регулярен.

! Th. на Майхил-Нероуд

L е рег. $\Longleftrightarrow$ R_L има краен индекс

! Pumping Lemma

Ако L е регулярен, то:

$(\exists p \in \mathbb{N}^+)(\forall w \in L)$

$|w| \geq p \Rightarrow (\exists x, y, z \in \Sigma^*)(xyz = w)$

- $|xy| \leq p$
- $|y| \geq 1$
- $(\forall i \in \mathbb{N})(xy^iz \in L)$

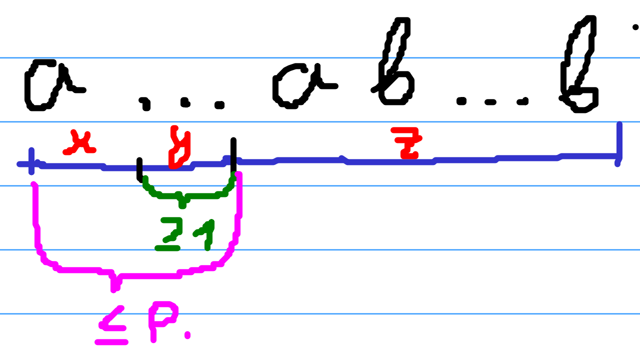
зад 1 Докажете, че L не е рег.

$$L = \{a^n b^k \mid n, k \in \mathbb{N} \wedge n > k\}$$

Допускаме, че е регулярен.

$\rightarrow$ изпълнена е P.L.

$$w = a^{p+1} \cdot b^p \in L \checkmark \qquad |w| \geq p \checkmark$$



- xy е префикс на думата
- $|xy| \leq p \Rightarrow xy = a^t \ (t \leq p)$
- $|y| \geq 1 \Rightarrow y = a^r \ [1 \leq r \leq t]$

При ↑ $xy^iz \in L \ (i \geq 1)$

Разглеждаме ↓

$$xy^0z = a^{p+1-r} b^p \notin L \qquad p+1-r \cancel{>} p, \quad r \geq 1$$

$\Rightarrow$ L не е регулярен

зад 2

Докажете, че L не е рег.

$$L = \{a^n b^k \mid n, k \in \mathbb{N} \wedge n \le k\}$$

Допускаме, че е регулярен.

$L(a^* b^*)$ рег

$$\underbrace{L(a^* b^*)}_{\text{рег}} \setminus \underbrace{\{a^n b^k \mid n, k \in \mathbb{N} \wedge n \le k\}}_{\text{рег от допускането}} =$$

$$= \underbrace{\{a^n b^k \mid n, k \in \mathbb{N} \wedge n > k\}}_{\text{рег } (\setminus \text{ запазва регулярността})}$$ (от зад 1)

Но ние доказахме, че не е

$\Rightarrow$ L не е регулярен

Зад 3

$\Sigma = \{a, b\}$

$L = \{ w \mid$ Ако всяко срещане на a се следва от b, то $N_a(w) \neq (N_b(w))^2 \}$

Разглеждаме $\overline{L}$ (L е рег $\Leftrightarrow$ $\overline{L}$ е рег)

$\overline{L} = \{ w \mid$ всяко срещане на a се следва от b и $N_a(w) = (N_b(w))^2 \}$

$w = a^{p^2-p}(ba)^p \in \overline{L}$ ✓

$|w| \geq p$ ✓

$aa\ldots a\, ba\, ba \ldots ba$

$p^2 - p \geq p$ при $p \geq 2$

1 сл. $p \geq 2$

- xy е префикс на думата
- $|xy| \leq p \Rightarrow xy = a^t \ (t \leq p)$ $|xy| \leq p \leq p^2 - p$
- $|y| \geq 1 \Rightarrow y = a^r \ (1 \leq r \leq t)$

$\uparrow \quad xy^2z = a^{p^2-p+r}(ba)^p \notin \overline{L}$

$p^2-p+r \neq p^2$

$r \geq 1$

• 2 сл $\quad p = 1 \quad w = a^{1^2-1}(ba)^1 = ba$

$|xy| \leq p \wedge |y| \geq 1$

$\Rightarrow x = \varepsilon, \; y = b, \; c = a$

$\uparrow \quad xy^2z = \overset{a?}{b}ba \in \overline{L}$

$\lightning$

$\Rightarrow \overline{L}$ не е регулярен

$\Rightarrow L$ не е регулярен.

зад4 Докажете, че L не е рег.

$$L = \{ a^n b^m c^k \mid n \neq 2021 \vee m = k \}$$

решение:

$$L = \{ a^n b^m c^k \mid n = 2021 \Rightarrow m = k \}$$

$$w = a^{2021} b^p c^p \quad \in L \checkmark \quad |w| \geq p \checkmark$$

При $x = \varepsilon, y = a, z = a^{2020} b^p c^p$

$$(\forall i \in \mathbb{N})(x y^i z \in L)$$

Пример:

$$x y^2 z = a^{2022} b^p c^p \in L$$

P.L. е изпълнена за L. (друг начин?)

Разглеждаме L^{rev} (L е рег $\Leftrightarrow$ L^{rev} е рег)

$$L^{rev} = \{ c^k b^m a^n \mid n = 2021 \Rightarrow m = k \}$$

Допускаме, че е регулярен.

→ изпълнена е P. L.

$w = c^p b^p a^{2021}$ $\in L^{rev}$ ✓

$|w| \geq p$ ✓

- xy е префикс на думата w
- $|xy| \leq p \Rightarrow xy = c^t \ (t \leq p)$
- $|y| \geq 1 \Rightarrow y = c^r \ (1 \leq r \leq t)$

$\downarrow \quad xy^0z = c^{p-r} b^p a^{2021} \notin L^{rev}$

$(T \Rightarrow F \equiv F)$ $\quad p-r \neq p$ $(r \geq 1)$

$\Rightarrow L^{rev}$ не е регулярен $\Rightarrow$

$\Rightarrow L$ не е регулярен.

зад 5

$$L = \{ w \mid (\exists k \in \mathbb{N})\ |w| = k^2 \}$$

а) L регулярен ли е?

б) $L.L.L.L$ регулярен ли е?

а)

Допускаме, че е регулярен.

$\to$ изпълнена е $P.L.$

$$w = a^{p^2} \in L \checkmark \quad |w| \geq p \checkmark \quad (p^2 \geq p)$$

$$xy = a^t \quad (t \leq p)$$

$$y = a^r \quad (1 \leq r \leq t \leq p)$$

Разглеждаме $\uparrow$

$$xy^2z = a^{p^2+r} \overset{?}{\underset{?}{\in}} L$$

Дали p^2+r е точен квадрат?

Ще покажем, че

$$p^2 \underset{①}{<} p^2 + r \underset{②}{<} (p+1)^2$$

1. $p^2 < p^2 + r$ $(r \geq 1)$ ✓

2. $p^2 + r < (p+1)^2 = p^2 + 2p + \boxed{1}$ ✓

$\Rightarrow$ $p^2 + r$ не е точен квадрат

$\Rightarrow$ $a^{p^2+r} \notin L$

↯

$\Rightarrow$ L не е регулярен

б) $L.L.L.L = \Sigma^*$

Th. на Лагранж

Всяко ест. число може да се представи като сума от 4 квадрата

$\Rightarrow$ е регулярен.