Примерни изпитни задачи за функции

Ангел Димитриев

Задача 1:

Нека $h : A \to A$.
а) Да се докаже, че следните две условия са еквивалентни:

- $(\forall f \in^A A)(\forall g \in^A A)(h \circ f = h \circ g \implies f = g)$
- h е инективна.

б) Да се докаже, че следните две условия са еквивалентни:

- $(\forall f \in^A A)(\forall g \in^A A)(f \circ h = g \circ h \implies f = g)$
- h е сюрективна.

Забележка: С $h \in^A A$ означаваме, че h е **тотална функция** изобразяваща елементи на A в елементи на A.

Решение:

а) $\to$) Нека $(\forall f \in^A A)(\forall g \in^A A)(h \circ f = h \circ g \implies f = g)$. Т.е:

$$(\forall f \in^A A)(\forall g \in^A A)(\forall a \in A)[h(f(a)) = h(g(a)) \implies f = g]$$

Да допуснем, че h не е инективна. Тогава:

$$\exists a, b \in A(a \neq b \& h(a) = h(b))$$

Нека a_0 и b_0 са свидетели $(a_0 \neq b_0 \& h(a_0) = h(b_0))$.
Нека $c \in A$. Да разгледаме:

$$f'(a) = \begin{cases} a, & a \neq c \\ a_0, & a = c \end{cases}$$

$$f''(a) = \begin{cases} a, & a \neq c \\ b_0, & a = c \end{cases}$$

Тогава $f', f'' \in^A A \& f' \neq f''$ Ще покажем, че $(\forall a \in A)[h(f'(a)) = h(f''(a))]$
Нека $a \in A$ е произволно.
1сл) $a \neq c$. Тогава $h(f'(a)) = h(a) = h(f''(a))$

2сл) $a = c$. Тогава $h(f'(a)) = h(a_0) = h(b_0) = h(f''(a))$.
Но а произволно. Следователно $(\forall a \in A)[h(f'(a)) = h(f''(a))]$.
Но $f' \neq f''$. Абсурд! Следователно h е инективна.
$\leftarrow$) Нека h е инективна. Ще покажем, че:

$$(\forall f \in^A A)(\forall g \in^A A)(h \circ f = h \circ g \implies f = g)$$

Нека f и g са произволни и нека $h \circ f = h \circ g$. Ще покажем, че $f = g$. Тоест ще покажем, че $\forall a \in A(f(a) = g(a))$.
Нека а е произволно. Тогава $h(f(a)) = h(g(a))$.
Но h е **инекция**.$(\forall x, y \in A[h(x) = h(y) \implies x = y])$. Следователно $f(a) = g(a)$. Но а е произволно - $(\forall a \in A)(f(a) = g(a))$ Т.е $f = g$. Но f и g са произволни. Следователно:

$$(\forall f \in^A A)(\forall g \in^A A)(h \circ f = h \circ g \implies f = g)$$

.

б) $\rightarrow$) $(\forall f \in^A A)(\forall g \in^A A)(f \circ h = g \circ h \implies f = g)$.Ще покажем, че h е сюрективна. Да допуснем, че h **не е сюрективна**. Тогава

$$\exists a \neg \exists b[h(b) = a]$$

Нека a_0 е свидетел. Нека $c, d \in A$ и $c \neq d$. Да разгледаме следните фунцкии:

$$f'(a) = \begin{cases} a, & a \neq a_0 \\ c, & a = a_0 \end{cases}$$

$$f''(a) = \begin{cases} a, & a \neq a_0 \\ d, & a = a_0 \end{cases}$$

Тогава $f', f'' \in^A A \& f' \neq f''$ Ще покажем, че $f' \circ h = f'' \circ h$.
Т.е че $(\forall a \in A)(f(h(a)) = f''(h(a)))$ Нека а е произволно.
$h(a) = t$ За някое $t \in A$. Но $t \neq a_0$, защото $a_0 \notin Range(h)$.Т.е

$$f'(h(a)) = f'(t) = t = f''(t) = f''(h(a))$$

Но а е произволно. Тогава $f' \circ h = f'' \circ h$. Но $f' \neq f''$. Противоречие! Следователно h е сюрективна.
$\leftarrow$) Нека h е сюрективна. Ще покажем, че

$$(\forall f \in^A A)(\forall g \in^A A)(f \circ h = g \circ h \implies f = g)$$

Нека f и g са произволни и нека $f \circ h = g \circ h$. Ще покажем, че f = g $(\forall a \in A(f(a) = g(a)))$. Нека a е произволно. Щом h е сюрективна, то $\exists t \in A(h(t) = a)$. Знаем, че $(f \circ h)(t) = (g \circ h)(t)$. Т.е:

$$f(h(t)) = g(h(t))$$

От следва, че:

$$f(a) = g(a)$$

Но a е произволно. Следователно f = g. Но f и g са произволни. Следователно:

$$(\forall f \in^A A)(\forall g \in^A A)(f \circ h = g \circ h \implies f = g)$$

Задача 2:

Нека A,B и C са множества. Да се окаже, че ако $|A \cup B| = |C \times C|$, то съществува сюрективна функция $g : A \to C$ или съществува инективна функция h $h : C \to B$

Решение:

От $|A \cup B| = |C \times C|$ следва, че съществува **биективна функция** $f : A \cup B \to C \times C$. Нека **НЕ** е вярно, че съществува сюрективна функция $g : A \to C$. Ще покажем, че съществува инективна функция $h : C \to B$.
Да разгледаме $\pi : C \times C \to C$:

$$\pi(c_1, c_2) = c_1$$

π е сюрективна. Да разгледаме $k = \pi \circ f|_A$ $(k : A \to C)$. Тогава от допускането k не е сюрективна. Т.е:

$$\exists c \in C \forall a \in A[\pi(f|_A(a)) \neq c]$$

Нека c_0 е свидетел. Тогава:

$$\forall a \in A \forall c \in C(f|_A(a) \neq (c_0, c))$$

$$\forall a \in A \forall c \in C(f(a) \neq (c_0, c))$$

$$\forall a \in A \forall c \in C(f^{-1}(c_0, c) \neq a)$$

$$\forall c \in C(f^{-1}(c_0, c) \notin A)$$

Но $Range(f^{-1}) = A \cup B$. От което следва, че:

$$\forall c \in C(f^{-1}(c_0, c) \in B)$$

Така дефинираме функцията $h : C \to B$.

$$h(c) = f^{-1}(c_0, c)$$

Но f е функция. От тук следва, че f^{-1} е инективна. От тук следва, че h е инективна.