9 Доказателства, че език не е регулярен.

! Th. на Майхил-Нероуд

L е рег. $\Leftrightarrow$ R_L има краен индекс

! Pumping Lemma

Ако L е регулярен, то:

$(\exists p \in \mathbb{N}^+)(\forall w \in L)$

$|w| \geq p \Rightarrow (\exists x, y, z \in \Sigma^*)(xyz = w)$

- $|xy| \leq p$
- $|y| \geq 1$
- $(\forall i \in \mathbb{N})(xy^iz \in L)$

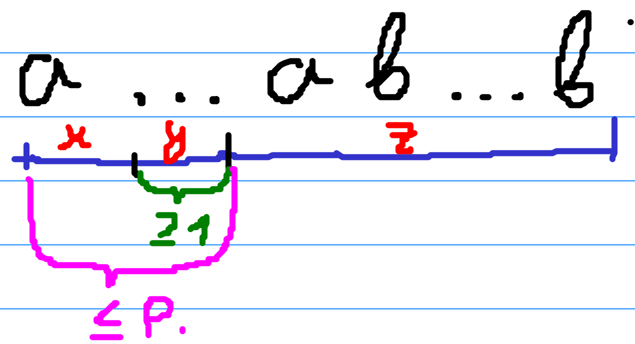
зад 1 Докажете, че L не е рег.

$$L = \{a^n b^k \mid n, k \in \mathbb{N} \wedge n > k\}$$

Допускаме, че е регулярен.

$\rightarrow$ изпълнена е P. L.

$$w = a^{p+1} b^p \in L \checkmark \qquad |w| \ge p \checkmark$$



- xy е префикс на думата
- $|xy| \le p \Rightarrow xy = a^t \quad (t \le p)$
- $|y| \ge 1 \Rightarrow y = a^r \quad [1 \le r \le t]$

При ↑ $xy^iz \in L \quad (i \ge 1)$

Разглеждаме ↓

$$xy^0z = a^{p+1-r} b^p \notin L \qquad p+1-r \cancel{>} p, \quad r \ge 1$$

$\Rightarrow$ L не е регулярен

Зад 2

Докажете, че L не е рег.

$$L=\{a^n b^k \mid n,k\in \mathbb{N} \wedge n\le k\}$$

Допускаме, че е регулярен.

$L(a^*b^*)$ рег

$$\underbrace{L(a^*b^*)}_{\text{рег}} \setminus \underbrace{\{a^n b^k \mid n,k\in \mathbb{N} \wedge n\le k\}}_{\text{рег от допускането}} =$$

$$= \underbrace{\{a^n b^k \mid n,k\in \mathbb{N} \wedge n > k\}}_{\text{рег (} \setminus \text{ запазва регулярността)}}$$ (от зад 1)

Но ние доказахме, че не е

↯

$\Rightarrow$ L не е регулярен

зад 3

$\Sigma = \{a, b\}$

$L = \{ w \mid$ Ако всяко срещане на a се следва от b, то $N_a(w) \neq (N_b(w))^2 \}$

Разглеждаме $\overline{L}$ (L е рег $\Leftrightarrow$ $\overline{L}$ е рег)

$\overline{L} = \{ w \mid$ всяко срещане на a се следва от b и $N_a(w) = (N_b(w))^2 \}$

$$w = a^{p^2 - p} (ba)^p \in L \checkmark$$
$$|w| \geq p \checkmark$$

$aa \ldots a\, baba \ldots ba$

$p^2 - p \geq p$ при $p \geq 2$

1 сл. $p \geq 2$

- xy е префикс на думата
- $|xy| \leq p \Rightarrow xy = a^t \quad (t \leq p)$ $\quad |xy| \leq p \leq p^2 - p$
- $|y| \geq 1 \Rightarrow y = a^r \quad (1 \leq r \leq t)$

↑ $xy^2z = a^{p^2-p+r}(ba)^p \notin L$

$p^2-p+r \neq p^2$

$r \geq 1$

• 2 сл $p = 1$ $w = a^{1^2-1}(ba)^1 = ba$

$|xy| \leq p \wedge |y| \geq 1$

$\Rightarrow x = \varepsilon,\ y = b,\ c = a$

a?

↑ $xy^2z = bba \notin L$

↯

$\Rightarrow$ L не е регулярен

зад4 Докажете, че L не е рег.

$$L = \{ a^n b^m c^k \mid n \neq 2021 \vee m = k \}$$

решение:

$$L = \{ a^n b^m c^k \mid n = 2021 \Rightarrow m = k \}$$

$$w = a^{2021} b^p c^p \quad \in L \ \checkmark \quad |w| \geq p \ \checkmark$$

При $x = \varepsilon, y = a, z = a^{2020} b^p c^p$

$$(\forall i \in \mathbb{N})(xy^iz \in L)$$

Пример:

$$xy^2z = a^{2022} b^p c^p \in L$$

P. L. е изпълнена за L.

Разглеждаме L^{rev} (L е рег $\Leftrightarrow L^{rev}$ е рег)

$$L^{rev} = \{ c^k b^m a^n \mid n = 2021 \Rightarrow m = k \}$$

Допускаме, че е регулярен.

$\rightarrow$ изпълнена е P. L.

$$w = c^p b^p a^{2021} \qquad \begin{array}{l} \in L \checkmark \\ |w| \geq p \checkmark \end{array}$$

- xy е префикс на думата w
- $|xy| \leq p \Rightarrow xy = c^t \quad (t \leq p)$
- $|y| \geq 1 \Rightarrow y = c^r \quad (1 \leq r \leq t)$

$$\downarrow \quad xy^0z = c^{p-r} b^p a^{2021} \notin L$$

$(T \Rightarrow F \equiv F)$

$p - r \neq p$
$(r \geq 1)$

$\lightning$

$\Rightarrow L^{rev}$ не е регулярен $\Rightarrow$

$\Rightarrow L$ не е регулярен.

зад 5

$$L = \{ w \mid (\exists k \in \mathbb{N}) \ |w| = k^2 \}$$

а) L регулярен ли е?

б) $L.L.L.L$ регулярен ли е?

а)

Допускаме, че е регулярен.

$\rightarrow$ изпълнена е P. L.

$$w = a^{p^2} \in L \checkmark \quad |w| \geq p \checkmark \quad (p^2 \geq p)$$

$$xy = a^t \quad (t \leq p)$$

$$y = a^r \quad (1 \leq r \leq t \leq p)$$

разглеждаме ↑

$$xy^2z = a^{p^2+r} \overset{?}{\underset{?}{\in}} L$$

Дали p^2+r е точен квадрат?

Ще покажем, че

$$p^2 \underset{①}{<} p^2 + r \underset{②}{<} (p+1)^2$$

1. $p^2 < p^2 + r$ $(r \geq 1)$ ✓

2. $p^2 + r < (p+1)^2 = p^2 + 2p + \boxed{1}$ ✓

$\Rightarrow$ $p^2 + r$ не е точен квадрат

$\Rightarrow$ $a^{p^2+r} \notin L$

$\Rightarrow$ L не е регулярен

б) $L.L.L.L = \Sigma^*$

Th. на Лагранж

Всяко ест. число може да се представи като сума от 4 квадрата

$\Rightarrow$ е регулярен.