

Задачи с доказателство на контекстно-свободни граматики

Ангел Димитриев

Задача 1

Докажете, че езикът $L = \{a^n b^n | n \in \mathbf{N}\}$ е контекстно свободен.

Решение:

L е контекстно-свободен, ако съществува контекстно-свободна граматика G за езика L . Да разгледаме граматика G :

$$S \rightarrow aSb | \epsilon$$

Ще докажем, че граматиката генерира точно думите от L . Т.е че: $L(G) = L$.
1. $L(G) \subseteq L$.

Трябва да покажем, че всички думи от граматиката (съставени само със символи от Σ) принадлежат на езика L . За целта трябва да дефинираме точно какво е поведението на променливата S . Твърдим, че:

$$S \rightarrow^* \underbrace{\{a^m S b^m \mid m \in \mathbf{N}\}}_{\Delta} \cup \underbrace{\{a^m b^m \mid m \in \mathbf{N}\}}_{\circ}$$

($S \rightarrow^* w$ означава, че w е изводимо от S за краен брой стъпки)

Ще докажем твърдението с **индукция по дължината на извода**.

База: За 0 стъпки: $S \rightarrow^0 S = a^0 S b^0 \Delta$.

Индукционно предположение: Допускаме, че за k стъпки:

$$S \rightarrow^k a^q S b^q \text{ или } S \rightarrow^k a^q b^q$$

Индукционно стъпка: Разглеждаме за $k+1$ стъпка.

• Знаем, че $S \rightarrow^k a^q S b^q$:

$$\text{Правило 1: } S \rightarrow^k a^q S b^q \rightarrow a^q a S b b^q = a^{q+1} S b^{q+1} \Delta$$

$$\text{Правило 2: } S \rightarrow^k a^q S b^q \rightarrow a^q b^q \circ$$

Кое и правило да приложим за $k+1$ -та стъпка, получаваме дума във вида, който искаме.

• Знаем, че $S \rightarrow^k a^q b^q$

Но тук нямаме променливи, така че няма как да приложим $k+1$ стъпка.

Доказахме, че от S можем да изведем **само** думи от този вид:

$$\{a^m S b^m \mid m \in \mathbf{N}\} \cup \{a^m b^m \mid m \in \mathbf{N}\}$$

Но единствените думи, които са от Σ^* са $\{a^m b^m \mid m \in \mathbf{N}\}$, за които е ясно, че са $\subseteq L$.

Доказахме, че $L(G) \subseteq L$

2. $L \subseteq L(G)$. Трябва да покажем, че всяка дума, която е от езика, може да се изведе от G . Т.е $(\forall i \in \mathbf{N}) S \rightarrow^* a^i b^i$

Ще докажем твърдението с **индукция по дължината на думата**.

База: Най-малката дума от езика е с дължина 0. Това е думата ϵ . Можем да изведем: $S \rightarrow \epsilon$

Индукционно предположение: Допускаме, че можем да изведем **всички** думи с дължина $< k$ (k е произволно естествено число ($k > 1$))

Т.е допускаме, че $(\forall j) j < k : S \rightarrow^* a^j b^j$

Индукционна стъпка:

Разглеждаме произволна дума с дължина k : $a^t b^t$, където $t + t = k$.

Ще покажем, че можем да я изведем. **Трябва да изразим дадената дума, чрез по-къса дума от същия език + някое правило от граматиката.**

Думата може да разбием така:

$$a^t b^t = a a^{t-1} b^{t-1} b.$$

Вижда се, че $a^{t-1} b^{t-1}$ е от езика и че $|a^{t-1} b^{t-1}| < k$. Т.е от и.п. можем да я изведем от граматиката. Т.е $S \rightarrow^* a^{t-1} b^{t-1}$

Сега да изведем желаната дума ($a^t b^t$)

$$S \rightarrow a S b \xrightarrow{* \text{ и.п. }} a a^{t-1} b^{t-1} b = a^t b^t$$

Показахме, че можем да изведем думата $a^t b^t$.

От тук следва, че $(\forall i \in \mathbf{N}) S \rightarrow^* a^i b^i$.

Т.е $L \subseteq L(G)$.

От тук вече е ясно, че $L = L(G)$. Следователно L е контекстно свободен.

Задача 2

Докажете, че езикът $L = \{a^n b^k \mid n, k \in \mathbf{N} \wedge n > k\}$ е контекстно-свободен.

Решение:

L е контекстно-свободен, ако съществува контекстно-свободна граматика G за езика L . Да разгледаме граматика G :

$$S \rightarrow a S b \mid a S \mid a$$

Ще докажем, че граматиката генерира точно думите от L . Т.е че: $L(G) = L$.

1. $L(G) \subseteq L$. Трябва да покажем, че всички думи от граматиката (съставени само със символи от Σ) принадлежат на езика L . За целта трябва да дефинираме точно какво е поведението на променливата S . Твърдим, че:

$$S \rightarrow^* \{a^{t_1} S b^{t_2} \mid t_1 \geq t_2\} \cup \{a^{s_1} b^{s_2} \mid s_1 > s_2\}$$

\triangle
 \circ

($S \rightarrow^*$ означава, че w е изводимо от S за краен брой стъпки)

Ще докажем твърдението с **индукция по дължината на извода**.

База: За 0 стъпки: $S \rightarrow^0 S = a^0 S b^0 \triangle$.

Индукционно предположение: Допускаме, че за k стъпки:

$$S \rightarrow^k a^{q_1} S b^{q_2} \ (q_1 \geq q_2) \text{ или } S \rightarrow^k a^{q_1} b^{q_2} \ (q_1 > q_2)$$

Индукционно стъпка: Разглеждаме за $k+1$ стъпка.

• Знаем, че $S \rightarrow^k a^{q_1} S b^{q_2}$. Ще приложим всяко едно от правилата:

1. $S \rightarrow^k a^{q_1} S b^{q_2} \rightarrow a^{q_1} a S b b^{q_2} = a^{q_1+1} S b^{q_2+1} \triangle \ (q_1 \geq q_2 \implies q_1 + 1 \geq q_2 + 1)$
2. $S \rightarrow^k a^{q_1} S b^{q_2} \rightarrow a^{q_1} a S b^{q_2} = a^{q_1+1} S b^{q_2} \triangle \ (q_1 \geq q_2 \implies q_1 + 1 \geq q_2)$
3. $S \rightarrow^k a^{q_1} S b^{q_2} \rightarrow a^{q_1} a b^{q_2} = a^{q_1+1} b^{q_2} \circ \ (q_1 \geq q_2 \implies q_1 + 1 > q_2)$

Кое и правило да приложим за $k+1$ -та стъпка, получаваме дума във вида, който искаме.

• Знаем, че $S \rightarrow^k a^{q_1} b^{q_2}$.

Но тук нямаме променливи, така че няма как да приложим $k+1$ стъпка.

Доказахме, че от S можем да изведем **само** думи от този вид:

$$\{a^{t_1} S b^{t_2} \mid t_1 \geq t_2\} \cup \{a^{s_1} b^{s_2} \mid s_1 > s_2\}$$

Но единствените думи, които са от Σ^* са $\{a^{s_1} b^{s_2} \mid s_1 > s_2\}$, за които е ясно, че са $\subseteq L$.

Доказахме, че $L(G) \subseteq L$

2. $L \subseteq L(G)$. Трябва да покажем, че всяка дума, която е от езика, може да се изведе от G . Т.е $(\forall i, j \in \mathbf{N}) i > j \implies S \rightarrow^* a^i b^j$

Ще докажем твърдението с **индукция по дължината на думата**.

База: Най-малката дума от езика е с дължина 1. Това е думата **a**. Можем да изведем: $S \rightarrow a$

Индукционно предположение: Допускаме, че можем да изведем **всички думи** с дължина $< k$ (k е произволно естествено число ($k > 1$))

Т.е допускаме, че $(\forall i, j) i < j \wedge i + j < k \implies S \rightarrow a^i b^j$

Индукционна стъпка:

Разглеждаме произволна дума с дължина k : $a^t b^r$, където $t > r \wedge t + r = k$.

Ще покажем, че можем да я изведем. **Трябва да изразим дадената дума, чрез по-къса дума от същия език + някое правило от граматиката.**

1 сл. Ако в думата има поне едно b . Тогава тя изглежда така: $a^t b^r$, където $s > r \wedge t + r = k \wedge t > 1 \wedge r \geq 1$. Думата може да разбием така: $a^t b^r = a a^{t-1} b^{r-1} b$. Думата $a^{t-1} b^{r-1}$ е част от езика, защото: $t > r \implies t - 1 > r - 1$. Освен това $|a^{t-1} b^{r-1}| < k$, защото $t + r = k$. Т.е от и.п. можем да я изведем от граматиката ($S \rightarrow^* a^{t-1} b^{r-1}$). Сега остана да изведем желаната дума:

$$S \rightarrow a S b \rightarrow^{* \text{и.п.}} a a^{t-1} b^{r-1} b = a^t b^r$$

2 сл. Ако в думата няма b -та. Тогава тя изглежда така: $a^k b^0 = a^k$. Можем да я разбием по следния начин: $a^k = a a^{k-1}$. Но думата a^{k-1} е в езика, защото $a^{k-1} = a^{k-1} b^0$, но $k - 1 > 0$, защото $k > 1$. Освен това $|a^{k-1}| < k$, т.е от и.п. $S \rightarrow^* a^{k-1}$. Сега остана да изведем думата:

$$S \rightarrow a S \rightarrow^{* \text{и.п.}} a a^{k-1} = a^k$$

Покажахме, че можем да изведем думата $a^t b^r (t > r) \wedge (t + r = k)$. От тук следва, че $(\forall i, j \in \mathbf{N}) i > j \implies S \rightarrow^* a^i b^j$.

Т.е $L \subseteq L(G)$.

От тук вече е ясно, че $L = L(G)$. Следователно L е контекстно-свободен.