(4)

L е регулярен ⟺ L е автоматен

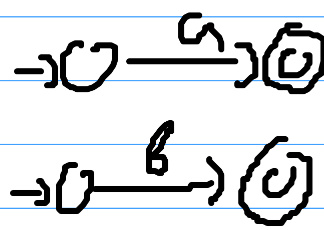
Всеки рег. език е автоматен

2) Всеки автоматен език е регулярен

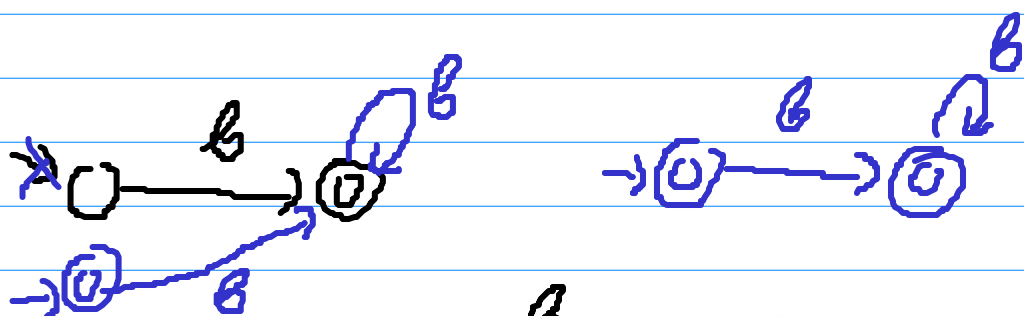
$\Sigma=\{a,b\}$ $L = \{w \mid w$ съдържа четен брой a-та$\}$

$$(\underset{2}{b^*}{}^{1}\, a\, \underset{3}{b^*}\, a\, \underset{4}{b^*})^{*\,5} \underset{6}{+}\, b^*$$

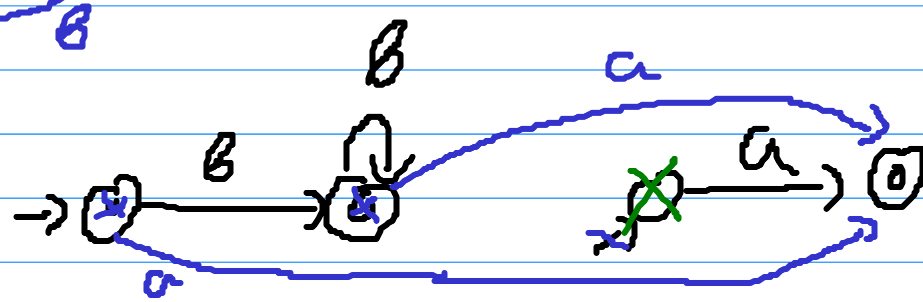
Имаме само:

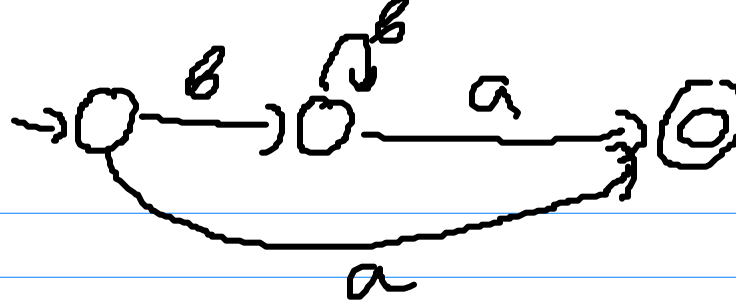


1 b^*

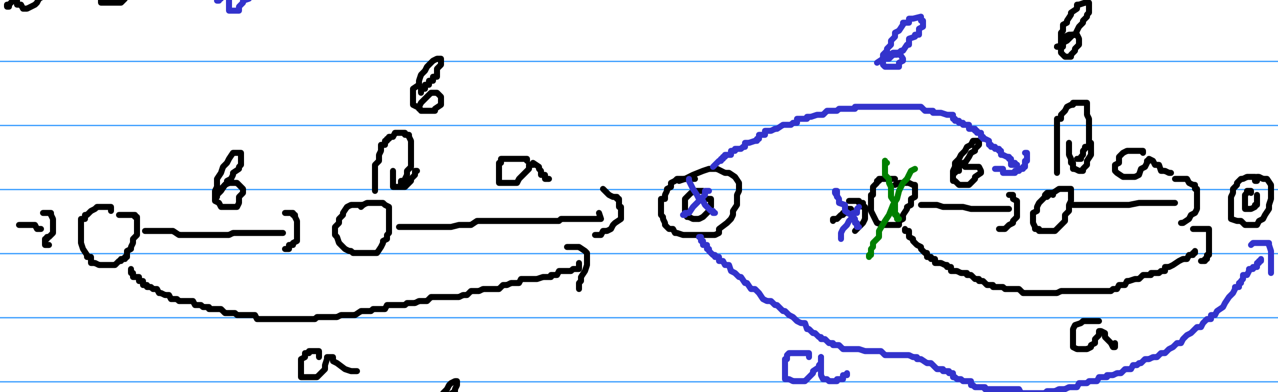


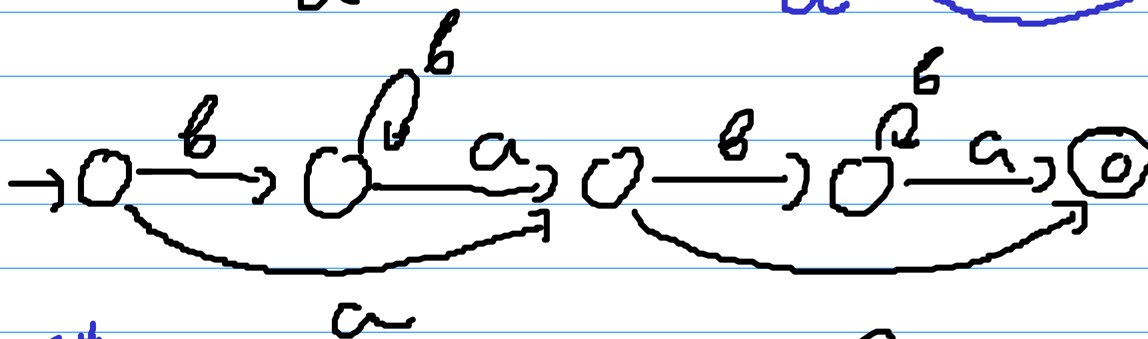
2 b^*a





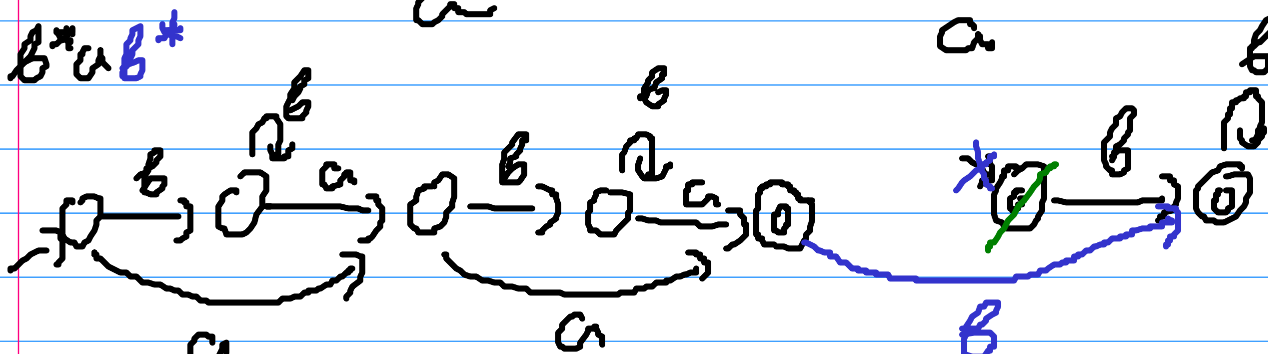
3 $b^*a\,b^*a$



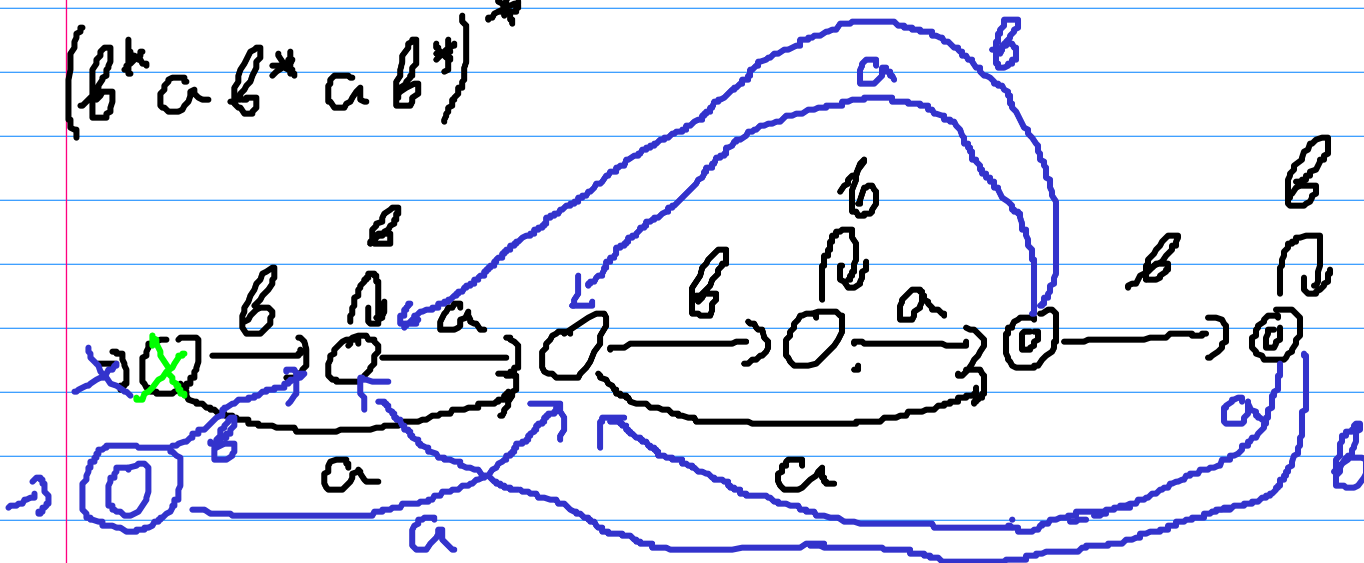


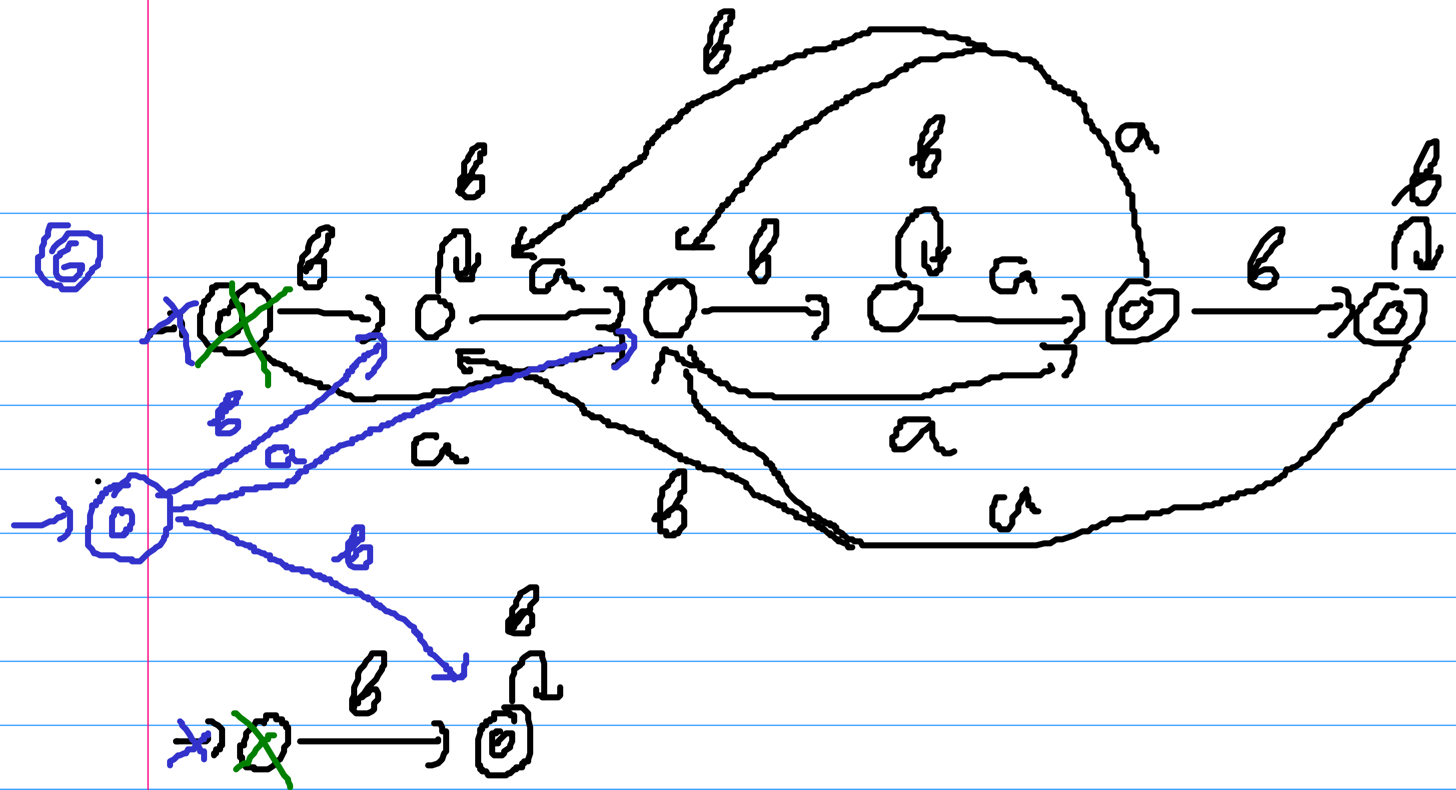
$b^*ab^*ab^*$

4



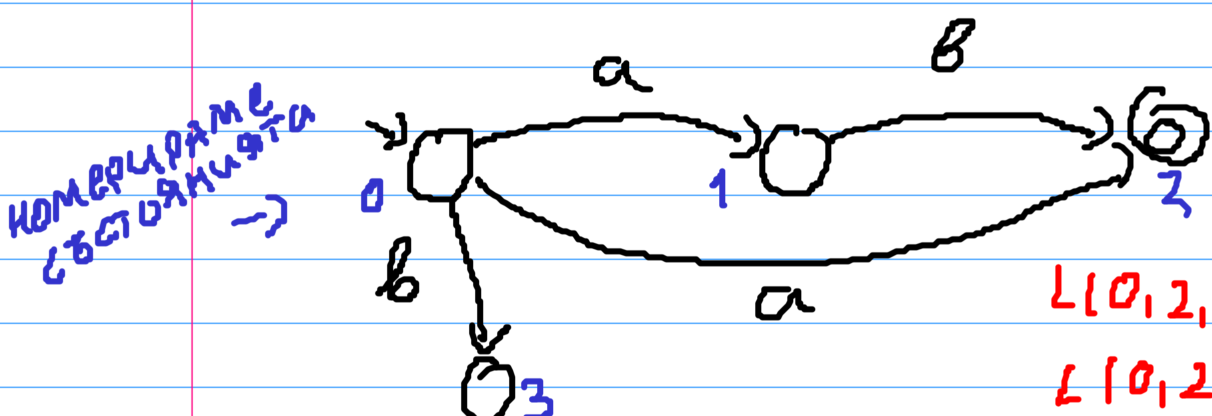
5 $(b^*ab^*ab^*)^*$





• Th. на Клини

Всеки автоматен език е регулярен.



$L(0,2,2) = \{a, ab\}$

$L(0,2,1) = \{a\}$

$L(0,2,0) = \{a\}$

Обща процедура за "извличане" на рег. израз от автомат.

$$L(i,j,k) = \{w \mid \underset{i}{\circ} \xrightarrow[<k]{} \underset{j}{\circ}\}$$

$L(i,j,k) = \{ w \mid w$ се прочита от автомата започвайки от състояние q_i и приключвайки в състояние q_j и междинните състояния са с индекс $< k \}$

$\circ \xrightarrow{a} \circ$ – в прочита на a няма междинни състояния

$\circ \xrightarrow{a} \circ \xrightarrow{b} \circ \xrightarrow{b} \circ$

междинни

Как да изразим $L(A)$ чрез такива езици? ($L(i,j,k)$)

Приемаме б.о.о. стартовото състояние е с индекс 0.

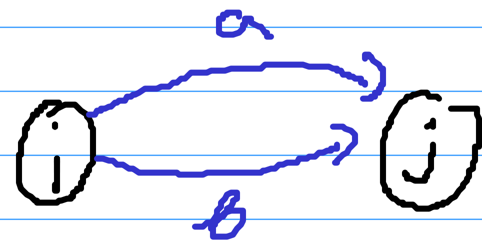
$A = \langle Q, \Sigma, s, F, \delta \rangle$

$$L(A) = \bigcup_{q_j \in F} L(0, j, |Q|)$$

Ако покажем, че $\forall i\ \forall j\ \forall k\ L(i,j,k)$ е регулярен, то тогава $L(A)$ е рег.

Доказване, че $L(i,j,k)$ е рег.

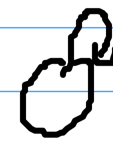
- с индукция по k



База: $k=0$

$i \neq j \quad L(i,j,0) = \{a \mid \delta(q_i,a)=q_j\}_P$

$i = j \quad L(i,j,0) = \{a \mid \delta(q_i,a)=q_j\}_P \cup \{\varepsilon\}_P$



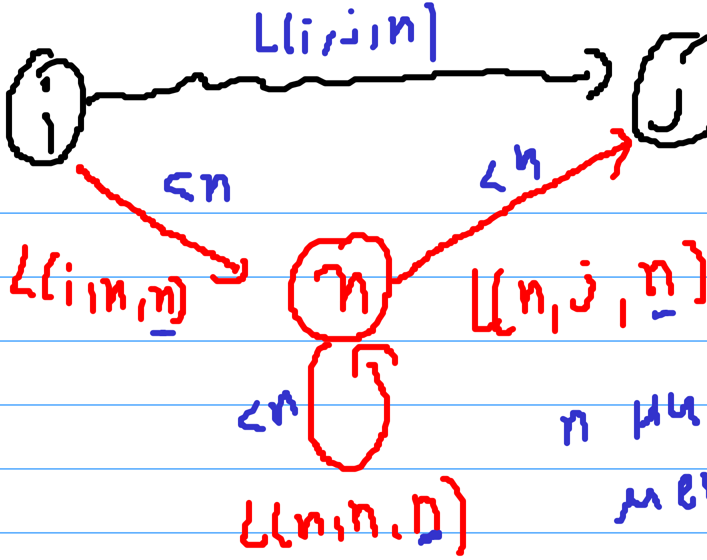
$\Rightarrow$ за $k=0$ $\forall i \forall j$ $L(i,j,\underset{0}{k})$ е рег.

И.П. Допускаме, че $k=n$ $\forall i \forall j$ $L(i,j,\underset{n}{k})$ е рег.

И.С. Разглеждаме за $k=n+1$

$$L(i,j,n+1) = \underbrace{L(i,j,n)}_{\text{без новото състояние}} + \underbrace{L(i,n,n).L(n,n,n)^*.L(n,j,n)}_{\text{през новото състояние}}$$

въвеждаме ново междинно състояние (с индекс n)



n никъде не е междинно съст.

Използвахме само рег. операции

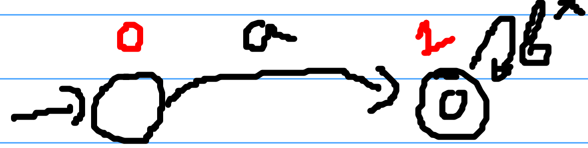
$\Rightarrow L(i,j,n+1)$ е регулярен.

$\Rightarrow \forall i \forall j \forall k \ L(i,j,k)$ е регулярен

$$\Rightarrow L(A) = \bigcup_{q_f \in F} L(0,f,|Q|)$$

е регулярен.

Зад Напишете рег. израз за:



ab^*

$$L(A) = \bigcup_{q_j \in F} L(0,j,|Q|) = L(0,1,2)$$

$$L(0,1,2) = L(0,1,1) + L(0,1,1) \cdot L(1,1,1)^* \cdot L(1,1,1)$$

$$L(0,1,1) = \underbrace{L(0,1,0)}_{\substack{\text{БАЗА} \\ a}} + \underbrace{\underbrace{L(0,0,0)}_{\emptyset} \cdot L(0,0,0)^* \cdot L(0,1,0)}_{\emptyset}$$

$L(0,1,1) = \{a\}$ рег. израз a

$$L(1,1,1) = \underbrace{L(1,1,0)}_{b+\varepsilon} + \underbrace{\underbrace{L(1,0,0)}_{\emptyset} \cdot \underbrace{L(0,0,0)^*}_{\emptyset^* = \{\varepsilon\}} \cdot L(0,1,0)}_{\emptyset}$$

$\Rightarrow$ $L(1,1,0) = \{b, \varepsilon\}$ рег. израз $b+\varepsilon$

$$L(A) = L(0,1,2) = a + a \cdot (b+\varepsilon)^* \cdot (b+\varepsilon)$$

$$a + a\underbrace{(b+\varepsilon)^*(b+\varepsilon)}_{(b+\varepsilon)^*} = a + a(b+\varepsilon)^* =$$

$$= a + ab^* = ab^*$$

Минимален автомат

! Ще говорим само за детерминистични автомати!

$L \subseteq \Sigma^*$ и нека $A = \langle Q, \Sigma, s, F, \delta \rangle$

и нека $L(A) = L$.

def: A е минимален, ако за всеки друг автомат $A' = \langle Q', \Sigma, s', F', \delta' \rangle$ такъв че $L(A') = L$ е изпълнено, че

$$|Q'| \geq |Q|$$

def: релация на Майхил-Нероуд за език L.

- $\forall x \forall y \in \Sigma^* \; x R_L y \Leftrightarrow \forall z \in \Sigma^* \; xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$

Пример:

$L = \{ w \mid w$ започва и завършва на $a \}$

✓ $aa \; \cancel{R_L} \; b$ $\qquad aa\,a \in L$, $\; b\,a \notin L$

✓ $b \; R_L \; ba$ $\qquad$ $b\sqcup \notin L$

$\qquad\qquad\qquad\qquad$ $ba\sqcup \notin L$

✓ $a \; R_L \; aba$ $\qquad$ $a - a$ / $aba - a$ $\in L$

$\qquad\qquad\qquad\qquad$ $a - b$ / $aba - b$ $\notin L$

× $b \; \cancel{R_L} \; ab$ $\qquad$ $ba \notin L$

$\qquad\qquad\qquad\qquad$ $aba \in L$

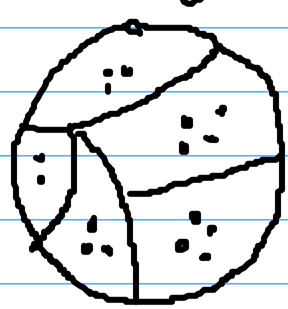
Свойства:

1) рефлексивна ✓
2) симетрична ✓
3) транзитивна ✓

$\Rightarrow$ R_L е релация на еквивалентност

$\Rightarrow$ поражда разбиване на Σ^*

Σ^*



! НА лекции ще докажете, че класовете на екв. на R_L са състоянията на мин. автомат за L

• $\tilde{R}_L$ → класовете на екв. на R_L

автомат на Нероуд

$$A = \langle \tilde{R}_L, \Sigma, [\varepsilon], \{[w] \mid w \in L\}, \delta \rangle$$
$$\delta([w], a) = [wa]$$

пример: $\Sigma = \{a, b\}$ $L = \{w \mid w$ започва и завършва с буквата $a\}$

$[b] = \{w \mid w$ започва с $b\}$

$[a] = \{w \mid w$ започва с a и завършва на $a\} \subseteq F$

$[ab] = \{w \mid w$ започва с a и завършва на $b\}$

→ $[\varepsilon] = \{\varepsilon\}$