Примерно решение на второто контролно по Дискретни структури, специалност Информационни системи, първи курс, зимен семестър на 2019/2020 г.

Задача 1 (10 т.)

Колко са петцифрените числа $a_1a_2a_3a_4a_5$ с цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6 ($a_1 \neq 0$), такива че в $\{a_1, a_3, a_5\}$ има поне една четна и една нечена цифра.

Решение

Първо ще сметнем броя на всички петцифрени числа с тези цифри. Първата цифра може да вземем по $\binom{6}{1} = 6$ начина (не може да започнем с 0). Останалите 4 цифри избраме по 7^4 начина. От тук следва, че общият брой петцифрени числа с тези цифри е : $6 * 7^4 = 14406$.

Сега можем да сметнем броят на тези числа, които не отговарят на условието. Първо ще изчислим тези, които из между първата, третата и последната цифра имат само четни цифри. Първата цифра я избираме по $\binom{3}{1} = 3$ (отново не можем да започваме с 0), втората по $\binom{4}{1} = 4$ и третата по $\binom{4}{1} = 4$. Останалите 2 цифри можем да изберем по 7^2. Следователно общият им брой е: $3 * 4^2 * 7^2 = 2352$.

Сега да сметнем броя на тези, които за първа, трета и последна цифра имат само нечетни цифри. За всяка от тези 3 позиции може да избираме от $\binom{3}{1}$ цифри. За останалите 2 позиции от по 7 цифри. От тук следва, че общият им брой е: $3^3 * 7^2 = 1323$.
Общият брой на числата, които удоволетворяват условието, получаваме по принципа на изваждането. $14406 - 2352 - 1323 = 10731$

Задача 2

Нека $A = \{1, 2 \ldots 100\}$. Колко са всички ненарастващи тотални функции $f : A \to A$? За една тотална функция f ще казваме, че е ненарастваща, ако:

$$x \leq y \to f(x) \geq f(y)$$

Решение

Функция, дефинирана върху множеството $\{1, 2, \ldots 99, 100\}$, може да представим като редица с 100 члена. На 1-та позиция стои $f(1)$, на 2-та $f(2)$ и

тн. Следователно в задачата се търси броя на редиците с 100 члена, такива че елементите са между 1 и 100 и всеки елемент е по-голям или равен на следващия. Нека x_i е броят на срещанията на числото i в редицата. От тук търсим броя решения на уравнението : $x_1 + x_2 + x_3 \ldots x_{99} + x_{100} = 100$. Всяко едно такова решение съответства на точно една такава редица, в която тези числа са сортирани в низходящ ред. Т.е решение, в което $x_{100} = 2$ и $x_{99} = 3$, съответства на редица $(100, 100, 99, 99, 99, \ldots)$. Може да преброим решенията на уравнението по следния начин:
Имаме 100 последователни единици и трябва м/у тях ще поставим 99 знака плюс. Едно такова поставяне на 99 плюс-а съответства на 1 решение. $(1111 + 1 + 11 + \ldots 1+)$ $x_1 = 4, x_2 = 1, \ldots x_{100} = 0$. Това всъщност са редици с дължина 199 (100 единици и 99 плюс-а). Остава да видим колко такива редици има. Един избор на позиции за плюсовете определя еднозначно позициите за единиците. Плюсовете може да ги поставим по $\binom{199}{99}$ начина. Следователно решенията на това уравнение са точно $\binom{199}{99}$.

Задача 3

Докажете или опровергайте, че:

а) $\{\wedge, \oplus, \vee\}$ е пълно множество.

б) функцията $f(x, y, z)$ зададена с редицата от стойности f = (10111110) е шеферова.

Представете в СДНФ:

в) $((x \to y) \oplus z) \leftrightarrow x$

Решение

а) Това множество не е пълно. Функциите запазват константата 0. От теоремата на Пост-Яблонски следва, че множеството не е пълно.

б) **Решение 1**:
Функция е шеферова, точно когато не запазва 0-та, не запазва 1-цата и не е самодвойствена. Нашата функция е точно такава, защото: $f(0, 0, 0) \neq 0, f(1, 1, 1) \neq 1, f(0, 1, 0) \neq \neg f(1, 0, 1)$ От тук следва, че f е шеферова.
Решение 2:
От теоремата на Бул знаем, че $\{\neg, \wedge, \vee\}$ е пълно множество. От това, че $x \wedge y \equiv \neg(\neg x \vee \neg y)$, може да заключим, че и $\{\neg, \vee\}$ е пълно множество. Ако успеем да изразим тези функции чрез f, то ще следва, че f е шеферова. Но лесно се вижда, че:
$\neg x \equiv f(x, x, x)$
За да видим как ще получим дизюнкцията, да разгледаме f в табличен вид:

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

В таблицата лесно се вижда, че редовете 2, 4, 5 и 7 са дизюнкция на x и y, а z е с противолопожна стойност на x. Тогава:
$x \vee y \equiv f(x, y, \neg x) \equiv f(x, y, f(x, x, x))$.
Следователно f е шеферова.

в) Представяме функцията в таблица:

x	y	z	$((x \to y) \oplus z) \leftrightarrow x$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

От редовете, които са в сиво, получаваме че СДНФ на $(x \to y) \oplus z) \leftrightarrow x$ е:
$(\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z)$.

Задача 4

Докажете, че ако в произволен неориентиран граф G всички върхове са от степен ≥ 2, то в G има цикъл.

Решение

Да допуснем, че в G няма цикъл. Нека тогава $v_1, v_2 \ldots v_n$ е най-дългият път в този граф. Знаем, че има такъв след като в графът няма цикли. Понеже от v_n излизат поне 2 ребра, то v_n има и друг съсед освен v_{n-1}. Нека това е върхът u. Ако върхът u е част от редицата $v_1, v_2 \ldots v_n$, ще следва, че в графа има цикъл, което е в противорчие с допускането. Ако върхът u не е част от редицата, ще следва, че сме намерили по-дълъг път, който е $v_1, v_2 \ldots v_n, u$. Отново стигнахме до противоречие. Следователно в G има цикъл.