③

Зад

$$(p \to q) \vee (q \to p) \equiv$$

$$(\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee p) \equiv$$

$$\neg p \vee q \vee \neg q \vee p \equiv$$

$$\underbrace{\neg p \vee p}_{T} \vee \underbrace{\neg q \vee q}_{T} \equiv T$$

Зад

$$[(p \to q) \wedge (q \to t)] \to (p \to t) \equiv$$ Св. импл.

$$\neg[(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee t)] \vee (\neg p \vee t) \equiv$$ Де Морган

$$[\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee t)] \vee (\neg p \vee t) \equiv$$ Де Морган

$$(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg t) \vee \neg p \vee t \equiv$$ Ком.

$$(p \wedge \neg q) \vee \neg p \vee (q \wedge \neg t) \vee t \equiv$$ Дистр.

$$\underbrace{(p \vee \neg p)}_{T} \wedge (\neg q \vee \neg p) \vee (q \vee t) \wedge \underbrace{(t \vee \neg t)}_{T} \equiv$$

асоц + ком

$$(\neg q \vee \neg p) \vee (q \vee t) \equiv$$

$$\underbrace{\neg q \vee q}_{T} \vee \neg p \vee t \equiv T \vee \neg p \vee t \equiv T$$

~~зад~~ Докажете, че ако $C \cap B = \emptyset$

$$(A \triangle B) \cup C = (A \cup C) \triangle B$$

$$C \cap B = \emptyset$$

$$\forall x\, (x \in C \to x \notin B) \wedge \forall x\, (x \in B \to x \notin C)$$

I начин.

$C \cap B = \emptyset$

A	B	C	$A \triangle B$	$(A \triangle B) \cup C$	$A \cup C$	$(A \cup C) \triangle B$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~

II начин.

1) $(A \triangle B) \cup C \subseteq (A \cup C) \triangle B$

$\forall x \left(x \in (A \triangle B) \cup C \to x \in (A \cup C) \triangle B \right)$

Нека x е произволно и $x \in \underbrace{(A \triangle B) \cup C}$

$(C \cap B = \emptyset)$

• 1сл. $\left.\begin{array}{l} x \in C \Rightarrow x \notin B \\ \quad\Rightarrow x \in A \cup C \end{array}\right\} x \in (A \cup C) \triangle B$ ✓

• 2сл $x \in A \triangle B$

2.1 $\left.\begin{array}{l} x \in A \wedge x \notin B \\ \quad\Rightarrow x \in A \cup C \end{array}\right\} x \in (A \cup C) \triangle B$ ✓

2.2 $x \notin A \wedge x \in B$

$\Downarrow$ $B \cap C = \emptyset$

$x \notin C$

$\left.\begin{array}{l} x \notin A \wedge x \notin C \Rightarrow x \notin A \cup C \\ x \in B \end{array}\right\} x \in (A \cup C) \triangle B$ ✓

x беше произволно

$\Rightarrow (A \triangle B) \cup C \subseteq (A \cup C) \triangle B$

2) $(A \cup C) \triangle B \subseteq (A \triangle B) \cup C$

$\forall x (x \in (A \cup C) \triangle B \rightarrow x \in (A \triangle B) \cup C)$

Нека x произволно и $\underbrace{x \in (A \cup C) \triangle B}$

1. $\underbrace{x \in A \cup C} \wedge x \notin B$

1.1. $x \in A$ $\quad x \notin B \Rightarrow x \in A \triangle B$

$\Rightarrow x \in (A \triangle B) \cup C$ ✓

1.2 $x \in C$ $\quad x \in (A \triangle B) \cup C$ ✓

2. $x \notin A \cup C \wedge x \in B$

$\Downarrow$

$x \notin A \wedge x \notin C$

$$\left.\begin{matrix} x \notin A \\ x \in B \end{matrix}\right\} \quad x \in A \Delta B \quad \Rightarrow \quad x \in (A \Delta B) \cup C$$

x беше произволно

$$(A \cup C) \Delta B \subseteq (A \Delta B) \cup C$$

$\square$

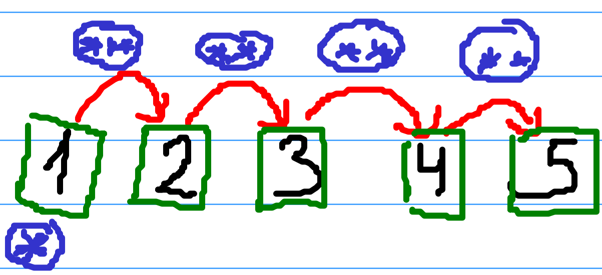
$\Rightarrow$ равни са

Мат. индукция

$$\forall x \in \mathbb{N} \, (P(x))$$

(*) 1) $P(0)$ база

(**) 2) $P(k) \longrightarrow P(k+1)$



Зад. $\forall n \in \mathbb{N} \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

$$2^0 + 2^1 \ldots 2^n = 2^{n+1} - 1$$

$$P(k) = 2^0 + 2^1 \ldots 2^k = 2^{k+1} - 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \, (P(n))$$

1) База $P(0)$

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{0} 2^i}_{2^0 = 1} \stackrel{?}{=} \underbrace{2^1 - 1}_{1} \; ✓$$

2) Инд. пред. Нека за някое $k \in \mathbb{N}$ $P(k) = T$

$$2^0 + 2^1 \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

3) Инд. ст. Трябва да покажем $P(k+1)$

$$P(k+1) \leftrightarrow 2^0 + 2^1 \ldots 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$$

$$\underbrace{2^0 + 2^1 + \dots 2^k}_{\text{от. и.п}} + 2^{k+1} =$$

$$2^{k+1} - 1$$

$$= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} = 2 . 2^{k+1} - 1 =$$

$$= 2^{k+2} - 1 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow P(k+1) \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \, (P(n)) \qquad \square$$

зад

Докажете, че всяка сума от к лева $(k \geq 12)$ може да се състави само с банкноти от 4лв и 5лв

$\boxed{4}$ $\boxed{5}$

$$\forall k \in \mathbb{N} \; k \geq 12 \; \exists a \exists b \in \mathbb{N} \quad 5.a + 4.b = k$$

a - брой $\boxed{5}$

b - брой $\boxed{4}$

С индукция

База: $K = 12 \quad a=0 \quad b=3 \quad 5.0+4.3=12$

Инд. пр. Нека твърдението е изпълнено за някое $K = t$

$$t = \alpha.5 + \beta.4$$

Инд. ст. трябва да покажем, че можем да съставим сумата $t+1$

от. и.п. $t = \alpha.5 + \beta.4$

1 сл. $\beta \geq 1$

$$\alpha' = \alpha + 1 \quad \boxed{5}$$

$\alpha' \in \mathbb{N}$

$$\beta' = \beta - 1 \quad \boxed{4}$$

$\beta' \in \mathbb{N} \ (\beta \geq 1)$

$$\alpha'.5 + \beta'.4 = (\alpha+1).5 + (\beta-1).4 =$$

$$= \underbrace{\alpha.5+\beta.4}_{t \text{ (от и.п)}} + 1 = t + 1 \checkmark$$

2 сл. $\beta = 0$ $\qquad t \geq 12$

$\Rightarrow \alpha \geq 3$ $\qquad \cancel{\boxed{5}}\ \cancel{\boxed{5}}\ \cancel{\boxed{5}}$

$\qquad \boxed{4}\ \boxed{4}\ \boxed{4}\ \boxed{4}$

$\alpha' = \alpha - 3$

$\alpha' \in \mathbb{N}$, защото $\alpha \geq 3$

$\beta' = \beta + 4$

$\alpha' . 5 + \beta' . 4 = (\alpha - 3) . 5 + (\beta + 4) . 4 =$

$= \underbrace{\alpha . 5 + \beta . 4}_{t} + 1 = t + 1$ ✓

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{N}$ $x \geq 12$ твърдението е изпълнено

~~30у~~ Докажете, че $\forall k \geq 3$ 30 може да се представи като израз само с k 5-ци и +, −, *, /, (,)

$k=6$ $\quad 5+5+5+5+5+5$

$k=12$ $\quad 5*5+5/5+5/5+5/5+5/5+5/5$

$P(k) \Leftrightarrow$ 30 може да се представи с k 5-ци

$$\underbrace{\underbrace{\alpha}_{30}+5-5}_{30} \qquad P(k) \rightarrow P(k+2)$$

БАЗА: $P(3)$ $\quad 5 * 5 + 5$

$P(4)$ $\quad (5+(5/5)) * 5$

И.П $P(K)$ за някое K $\qquad (P(K) \to P(K+2))$

K 5-ци $\to \alpha = 30$

И.С $P(K+2)$

$\alpha = 30 \xleftarrow{\text{И.П}}$ $\underbrace{\alpha + 5 - 5}_{K+2 \text{ 5-ци}} = 30$

α има K 5-ци

БАЗА 2

1, 2, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{9}$, $\boxed{10}$

БАЗА 1

Зад

$a_0 = 1$

$a_1 = 2$ $\qquad 1, 2, 4, 8 \ldots$

$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$

Докажете, че $\forall n \in \mathbb{N} \; (a_n = 2^n)$

1) База $n=0$ $\quad a_0 = 1 \quad 2^0 = 1$ ✓

2) И.П. $n = k$ допускаме, че $a_k = 2^k$

3) И.С. разглеждаме a_{k+1}

$$a_{k+1} = \underbrace{a_k}_{\text{И.П.: } 2^k} + 2\underbrace{a_{k-1}}_{???}$$

Мат. инд. $\equiv$ Силна инд.

$p(0)$ $\qquad\qquad p(0) \wedge \ldots$

$p(k) \to p(k+1)$ $\qquad P(0) \wedge P(1) \wedge \ldots \wedge P(k-1) \wedge P(k)$
за някое k

$\to P(k+1)$

за някое k

БАЗА: 0 $a_0 = 1$ $2^0 = 1$

1 $a_1 = 2$ $2^1 = 1$

И.П. Допускаме за някое k

$P(k) \wedge P(k-1) \ldots P(1) \wedge P(0)$

$a_k = 2^k$ $a_{k-1} = 2^{k-1}$ $a_1 = 2$ $a_0 = 1$

И.С. Разглеждаме $k+1$

$$a_{k+1} = \underbrace{a_k}_{2^k} + 2\underbrace{a_{k-1}}_{2^{k-1}} =$$

И.П.:

$$= 2^k + 2 \cdot 2^{k-1} = 2\,2^k = 2^{k+1}$$

$\Rightarrow \forall n \; a_n = 2^n$

~~зад~~ Докажете, че $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$

n може да се разбие на прости множители.

$P(n) \Leftrightarrow n$ може да се разбие на прости множители

$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq 2)\left(P(n)\right)$

БАЗА: $P(2)$ $\quad 2 = 2$

И.П. Допускаме, че за някое k

$P(0) \wedge P(1) \wedge \ldots \wedge P(k)$ е изпълнено

И.С. разглеждаме $k+1$ $\quad P(k+1) \stackrel{?}{=}$

1 сл. $k+1$ е просто $P(k+1) = T$

2 сл. $k+1$ не просто число

$\exists a, b \in \mathbb{N} \quad a \geq 2, b \geq 2 \quad a \cdot b = k+1$

$\underbrace{a < k+1 \quad b < k+1}_{\text{от и.п.}}$

a, b могат да се

представят като прости множители

$$\left.\begin{array}{l} a = p_1 \cdot p_2 \ldots p_s \\ b = q_1 \cdot q_2 \ldots q_r \end{array}\right\} \text{от и.п.}$$

$$k+1 = a \cdot b = \underbrace{p_1 \ldots p_s \cdot q_1 \ldots q_r}_{\text{прости множители}}$$

$\Rightarrow$ $k+1$ може да се разбие на прости множители.

$\Rightarrow$ твърдението е изпълнено!