(1) # "Логика."

- Просто съждение – просто разказвателно изречение, което е истино или лъжа.

- Логически съюзи

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \oplus q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\neg p$
F	F	F	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T	F	T
T	F	T	F	T	F	F	T
T	T	T	T	F	T	T	T

$\#$комб $= 2^n$ n - брой променливи

$\vee$ "или"

$\wedge$ "и"

$\oplus$ или или

$\Rightarrow$ ако p, то q

$\Leftrightarrow$ p тогава и само тогава, когато q

Приоритет?

$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

Еквивалентност на съждения

1 начин. Таблица на истинност

2 начин. Еквивалентни преобразувания

$$p \Rightarrow q \overset{?}{\equiv} \neg p \vee q$$

1 начин:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
F	F	T	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	F	F
T	T	T	F	T

Свойства.

- Свойства на константите: $p \wedge T \equiv p$ $p \vee F \equiv p$ $p \vee T \equiv T$ $p \wedge F$
- свойства на отрицанието: $p \wedge \neg p \equiv F$ $p \vee \neg p \equiv T$
- идемпотентност $p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$
- двойно отрицание $\neg\neg p \equiv p$
- комутативност $p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- асоциативност $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge$
- дистрибутивност $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee ($

- Закони на De Morgan

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

- поглъщане

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p, \quad p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

- свойство на импликацията

$$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

- свойство на биимпликацията

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

- свойство на xor

$$p \oplus q \equiv \neg(p \Leftrightarrow q)$$

Зад $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ (без закон за поглъщането)

С екв. преобразувания

$$p \vee (p \wedge q) \equiv \text{(дистрибутивност)}$$

$$\underbrace{(p \vee p)} \wedge (p \vee q) \equiv \text{(идемпотентност)}$$

$$p \wedge (p \vee q) \equiv \text{(дистрибутивност)}$$

$$\underbrace{(p \wedge p)} \vee (p \wedge q) \equiv \text{(идемпотентност)}$$

$$p \vee (p \wedge q)$$

! стигнахме до същото

Втори опит

$p \vee (p \wedge q) \equiv$ (с-во на конст)

$\equiv (p \wedge T) \vee (p \wedge q) \equiv$ дистр. в обратна посока изваждаме пред скоби

$p \wedge (T \vee q) \equiv$ (свойства на константите)

$p \wedge T \equiv$ (свойства на константите)

$\boxed{p}$

Имаме 3 твърдения. 2 са еквивалентни. Кои?

1. Ако грее слънце, то уча и тренирам
2. Не грее слънце или уча и тренирам
3. Ако уча, то тренирам.

Решение:

1) $p \Rightarrow (q \wedge t)$

2) $\neg p \vee (q \wedge t)$

3) $q \Rightarrow (t \wedge p)$

p	q	t	$\overbrace{p \wedge t}^{x}$	$p \Rightarrow x$	$\neg p$	$\neg p \vee x$	$\overbrace{p \wedge t}^{y}$	$p =$
F	F	F	F	T	T	T	F	T
F	F	T	F	T	T	T	F	T
F	T	F	F	T	T	T	F	F
F	T	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	F	F	F	F	T
T	F	T	F	F	F	F	T	T
T	T	F	F	F	F	F	F	F
T	T	T	T	T	F	T	T	T
				1		2		3

$1 \equiv 2 \not\equiv 3.$

Вярно ли е, че следния израз е тавтология

$$\underbrace{(\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow p)}_{p,\ q} \oplus \underbrace{((r \wedge t) \wedge (\neg t \vee \neg r))}_{r,\ t}$$

! Нямат общи променливи !
Разглеждаме ги отделно.

Трябва да се покаже, че:

- $\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow p \equiv T$
- $(r \wedge t) \wedge (\neg t \vee \neg r) \equiv F$

$$T \oplus F \equiv T$$

Предикатна логика

Предикат - Съждение с празно място, в което се слага обект от дефинирана област, наречена домейн.

Пример: {ябълка, круша, банан}

$P(x) \iff x$ е жълт(а)

P(ябълка) $\equiv F$

P(банан) $\equiv T$

- Ако има поне един обект, за който предикатът е истина: $\exists x \, P(x)$
- Когато за всеки обект предикатът е истина: $\forall x \, P(x)$

$\{a_1 \dots a_n\}$

$\exists x \, P(x) \quad P(a_1) \vee P(a_2) \dots \vee P(a_n)$

$\forall x \, P(x) \quad P(a_1) \wedge P(a_2) \dots \wedge P(a_n)$

- Ако домейнът е $\emptyset$, то за всеки предикат

$\forall x \, P(x) \equiv T \qquad \exists x \, P(x) \equiv F$

⚠

$$\neg(\forall x\, P(x)) \equiv \exists x\, \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x\, P(x)) \equiv \forall x\, \neg P(x)$$

Зад Вярно ли е, че:

а) от $\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)$ следва $\forall x(P(x) \vee Q(x))$

б) от $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ следва $\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)$

а) Знаем, че $\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)$

1сл. $\forall x\, P(x) \equiv T$

~~$\forall x\, Q(x) \equiv T$~~

с-во на конст

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x(T \vee Q(x)) \equiv T$$

2сл. $\forall x\, P(x) \equiv F$ тогава $\forall x\, Q(x) \equiv T$

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x(P(x) \vee T) \equiv T \quad ✓$$

с-ва на конст

Изпълнено е!

б) Твърдението не е вярно

Контрапример:

Домейн: $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$

$P(x) \Leftrightarrow x$ е четно

$Q(x) \Leftrightarrow x$ е нечетно

$\forall x\, (P(x) \lor Q(x)) \equiv T$, но

$\forall x\, P(x) \equiv F$ и $\forall x\, Q(x) \equiv F$

Домейн $\mathbb{N}$.

$Add(x, y, z) \Leftrightarrow x + y = z$ $\quad$ $Less(x, y) \Leftrightarrow x < y$

$Mult(x, y, z) \Leftrightarrow x * y = z$

Напишете предикати за четно, нечетно, нула, едно, ~~просто~~ равенство, просто, ~~[illegible]~~

а) $Even(x) \Leftrightarrow \exists y\, Add(y, y, x)$

б) $Odd(x) \Leftrightarrow \neg Even(x)$

в) $Zero(x) \Leftrightarrow Add(x, x, x)$ $\quad$ г) $Eq(x, y) \Leftrightarrow Less(x, y) \land$ [illegible]

д) $Prime(x) \Leftrightarrow \neg(\exists y (Less(y, x) \land (\exists z (Mult(z, y, x))))$

$\land \neg One(x) \land$

е) $One(x) \Leftrightarrow \forall y\, Mult(x, y, y)$