# Релации

$R \subseteq A \times B$ $\quad \langle a, b \rangle \in R$

$aRb$

$R \subseteq A \times A$

зад Нека $R$ е релация над $2^{\mathbb{N}}$

$R \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$

$(X, Y) \in R \leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$

изследвайте за свойства

$\{1,2\} \rightarrow \{1,2,3\}$

1) Рефлексивност ✓

$(\forall X \in 2^{\mathbb{N}})\ X \setminus X = \emptyset \Rightarrow \langle X, X \rangle \in R$

2) антирефлексивна

$$\langle \{1\}, \{1\} \rangle \in R$$

3) симетрична

$$\underbrace{\{1\}}_{A} \to \underbrace{\{1,2\}}_{B}$$

$\langle A, B \rangle \in R$, но $\langle B, A \rangle \notin R$

$B \setminus A \neq \emptyset$

4 антисиметрична

$$\forall A \forall B (ARB \wedge BRA \to A = B)$$

Нека $A, B$ произволни и нека

$\underbrace{ARB}$ и $\underbrace{BRA}$

$\downarrow$ $\quad$ $\downarrow$

$\underbrace{A \setminus B}_{} = \emptyset$ $\quad$ $\underbrace{B \setminus A}_{} = \emptyset$ $\quad$ $(B \subseteq A)$

$(A \subseteq B)$ $A$ няма елемент, който да не е ел. на $B$ $\quad$ $B$ няма ел, който да не е ел. на $A$

$\Rightarrow A = B$

5) Силно антисиметрична ✗

$\{1\} \qquad \{2\}$

$\langle \{1\}, \{2\} \rangle \notin R \qquad \langle \{2\}, \{1\} \rangle \notin R$

6) Транзитивност ✓

$\forall A \forall B \forall C \, (A R B \wedge B R C \rightarrow A R C)$

A, B, C произволни

$\underbrace{A R B}_{A \setminus B = \emptyset}$ и $\underbrace{B R C}_{B \setminus C = \emptyset}$

$\underbrace{\text{няма ел на } A \text{, което да не е в } B}_{A \subseteq B}$

$\underbrace{\text{няма ел на } B \text{, който да не е в } C}_{B \subseteq C}$

$A \subseteq C$

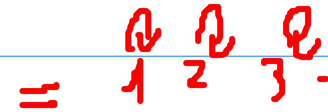
няма ел на A, който да не е в C

$A \setminus C = \emptyset$

$\Rightarrow A R C$

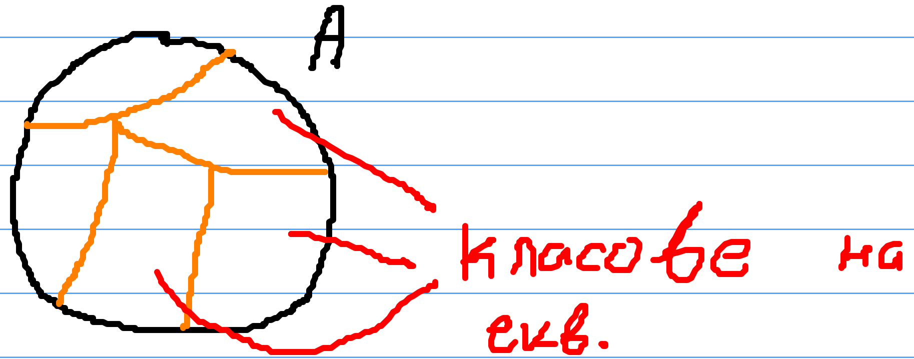
def: Релация на екв.

$R \subseteq A \times A$




- рефлексивна
- симетрична
- транзитивност

↳ поражда разбиване на $A$ на класове на екв.




$A_1 \dots A_n$ е покритие на $A$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$$

$A_1 \dots A_n$ е разбиване на $A$

- е покритие
- $\forall i \forall j \quad i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

Зад. Нека $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

$\langle x, y \rangle \in R \leftrightarrow x - y$ се дели на 3.

а) Докажете, че $R$ е рел. на екв.

б) Намерете кл. на екв.

а)

1) рефл. $\forall x (xRx)$

$x$ - произволно

$x - x = 0$, което се дели на 3

$\Rightarrow \langle x, x \rangle \in R$

2) сим. $\forall x \forall y (xRy \rightarrow yRx)$

$x, y$ - произволни и $xRy$

$x - y = 3 * t \quad (t \in \mathbb{Z})$

$y - x \quad 3 * (-t) \quad -t \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow yRx$

3) Транзитивност.

$$\forall x \forall y \forall z (xRy \wedge yRz \to xRz)$$

x, y, z – произволни

$xRy$ – $x-y = 3^* t \quad (t \in \mathbb{Z})$

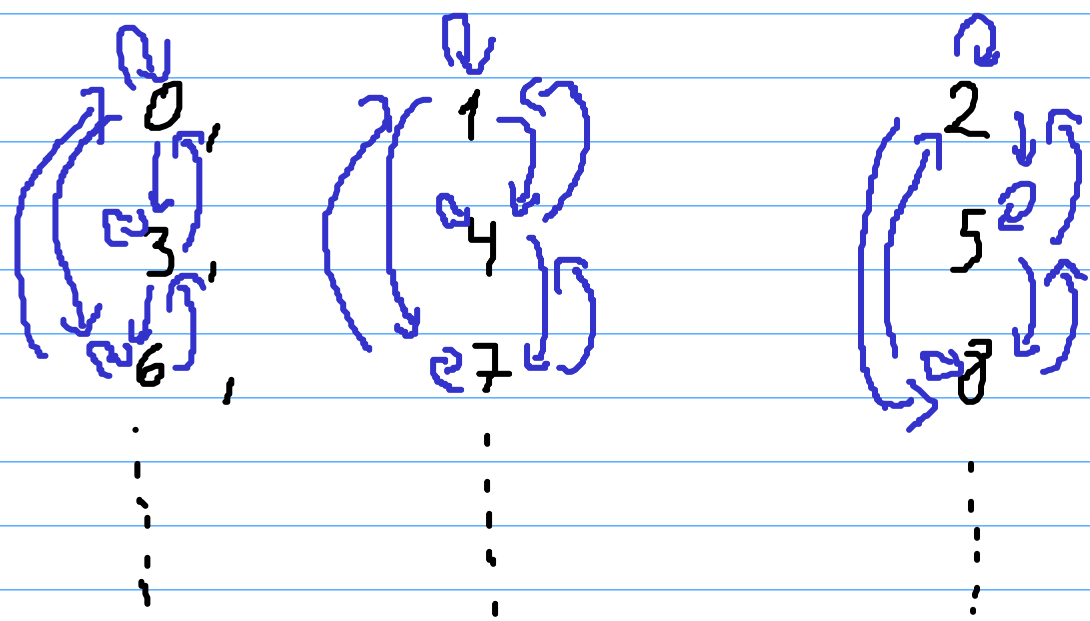
$yRz$ – $y-z = 3^* s \quad (s \in \mathbb{Z})$

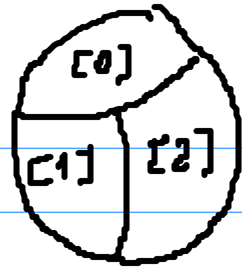
$$x-\cancel{y}+\cancel{y}-z = 3(t+s)$$

$$x-z = 3(t+s)$$

$\Rightarrow xRz$ $\qquad t+s \in \mathbb{Z}$

б)






$\mathbb{N}$

$[0] = \{0, 3, 6, 9 \ldots\} = \{3t \mid t \in \mathbb{N}\}$

$[1] = \{1, 4, 7 \ldots\} = \{3t+1 \mid t \in \mathbb{N}\}$

$[2] = \{2, 5, 8 \ldots\} = \{3t+2 \mid t \in \mathbb{N}\}$

$[0] \cup [1] \cup [2] = \mathbb{N}$

$[0] \cap [1] = \emptyset$

$[0] \cap [2] = \emptyset$

$[1] \cap [2] = \emptyset$

Зад. Нека $FinSubs(\mathbb{N})$ - всички крайни подмножества на $\mathbb{N}$

$$FinSubs(\mathbb{N}) \subseteq 2^{\mathbb{N}}$$

$$R \subseteq FinSubs(\mathbb{N}) \times FinSubs(\mathbb{N})$$

$$X \, R \, Y \iff \sum_{x \in X} x^2 - \sum_{y \in Y} y = 2^n t \quad (t \in \mathbb{Z})$$

а) Док, че $R$ е рел екв.

б) Кл. на екв.

а)

- Рефл. $\forall x (xRx)$

– Нека $X$ произволно

$$\sum_{x \in X} x^2 - \sum_{x \in X} x = \sum_{x \in X} (x^2 - x) = \sum_{x \in X} \overbrace{x(x-1)}^{\text{четно}}$$

= четно

$xRx$ ✓

- Сим. $\forall x \forall y ( xRy \to yRx)$ ✓

$X, Y$ - пр. мн-ва.

$xRy$ . $\sum_{x \in X} x^2 - \sum_{y \in Y} y =$ четно

$\sum y^2 - \sum x \overset{?}{=}$ четно

$$\left(\overset{xRx}{\cancel{\sum_{x\in X} x^2}} - \sum_{x\in X} x\right) + \left(\overset{yRy}{\sum_{y\in Y} y^2 - \cancel{\sum_{y\in Y} y}}\right) -$$

$$\overset{xRy}{\left(\cancel{\sum_{x\in X} x^2} - \cancel{\sum_{y\in Y} y}\right)} = \text{четно}$$

$$\sum_{y\in Y} y^2 - \sum_{x\in X} x = \text{четно}$$

$\Rightarrow yRx$

- Транзитивност ✓

$$\forall x \forall y \forall z \, ( xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$$

– $x, y, z$ – произволни

- $xRy$ $\left(\sum_{x\in X} x^2 - \sum_{y\in Y} y = \text{четно}\right)$
- $yRz$ $\left(\sum_{y\in Y} y^2 - \sum_{z\in Z} z = \text{четно}\right)$

? $xRz$ ??

четно $(xRy)$ четно $(yRz)$

$$\left(\sum x^2 - \sum y\right) + \left(\sum y^2 - \sum z\right) = \text{четно} =$$

$$= \sum x^2 - \sum z + \underbrace{\sum y^2 - \sum y}_{\text{четно}\,(yRy)}$$

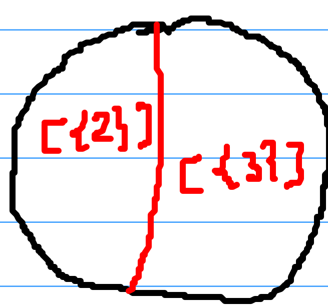
$$\sum x^2 - \sum z = \text{четно}$$

$$\Rightarrow xRz$$

$\Rightarrow R$ е рел. на екв.

д) Кл. на екв.

$$\mathrm{FinSubs}(\mathbb{N})$$




$$[\{2\}] = \{S \mid \sum_{x \in S} x \text{ е четно}\}$$

$$[\{3\}] = \{S \mid \sum_{x \in S} x \text{ е нечетно}\}$$

Зад $R \subseteq \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$

$(a,b) \in R \leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q} \quad q^2 = \frac{a}{b}$

а) Док, че $R$ е рел. на екв.

б) Опишете $[1]$

а) рефлексивност. ✓

$\forall x\, [x R x]$ $\qquad \frac{x}{x} = 1 = \left(\frac{1}{1}\right)^2$

б) Симетричност

$\forall x \forall y\, (x R y \rightarrow y R x)$

$x, y$ – произв.

$x R y \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} \quad q^2 = \frac{x}{y}$

$q = \frac{a}{b} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{x}{y}$

$$\frac{b}{a} \in \mathbb{Q} \qquad \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{y}{x} \Rightarrow yRx$$

• Транзитивност

$$\forall x \forall y \forall z \, (xRy \wedge yRz \to xRz)$$

• x, y, z – произволни

$xRy$ $\qquad \frac{x}{y} = q'^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$

$yRz$ $\qquad \frac{y}{z} = q''^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$

$$\frac{x}{\cancel{y}} \cdot \frac{\cancel{y}}{z} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \left(\frac{a \cdot m}{\underbrace{b \cdot n}_{\in \mathbb{Q}}}\right)^2$$

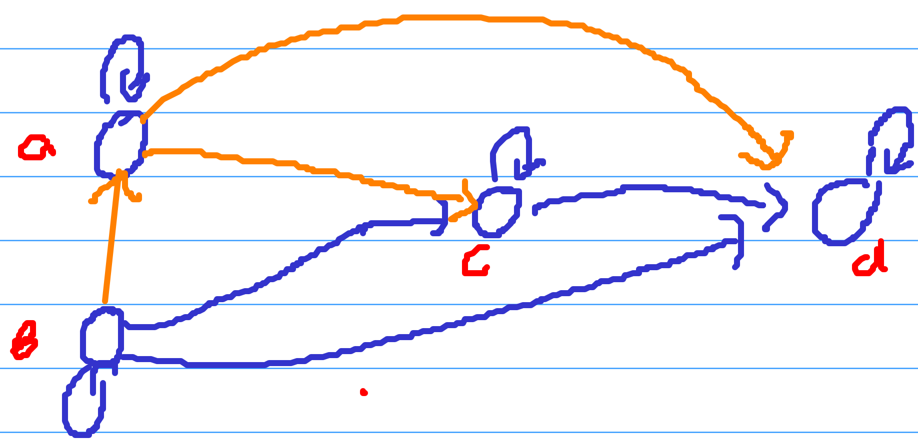
$\Rightarrow xRz$ ✓

г) $[1] = \{1, 4, 9, 16, 25 \ldots\}$

(За дом: Опишете $\forall$ кл. на екв.)

def: ще казваме, че $R \subseteq A \times A$ е

- рел на част. наредба, ако:
  - рефл.
  - антисиметрична
  - транзитивна.
- рел. на пълна/линейна наредба, ако:
  - рефл.
  - силно антисиметрична.
  - транз




част наредба

a b c d

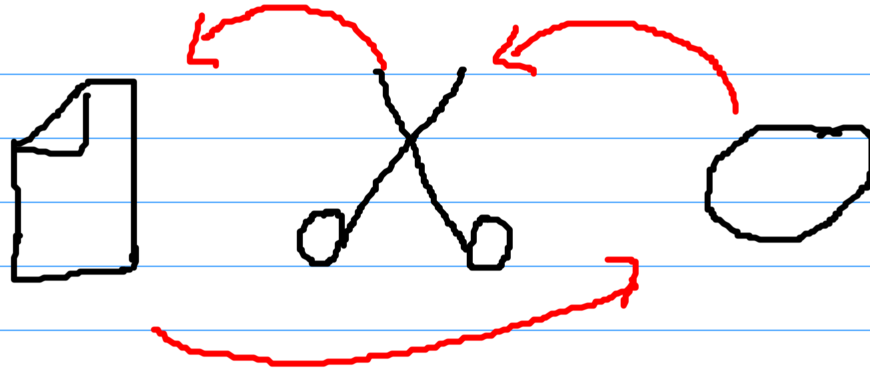
b a c d

b c a d

b c d a

пълна наредба

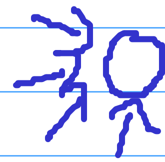
b a c d



R е част наредба $(R \subseteq A \times A)$

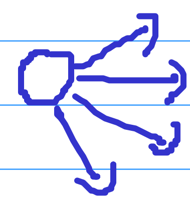
def: x е максимален елемент,

ако $\neg \exists y \; xRy$



def: x е минимален елемент,

ако $\neg \exists y \; yRx$



зад

Нека $S = \{0 \dots 32\}$ и $R \subseteq S \times S$

$aRb \iff b - a = 0 \pmod{3} \wedge (a - b \geq 0)$

а) Док. че $R$ е рел. на част. наредба

- Рефл. $\forall x \, (xRx)$

✓ $x - x \equiv 0 \pmod 3$ $\quad x - x \geq 0$

- Антисиметричност.

$\forall x \, \forall y \, (x \neq y \wedge xRy \to y \cancel{R} x)$

- $x, y$ произволни и $x \neq y$ $\quad xRy$

- $xRy$ $\quad y - x \equiv 0 \pmod 3$ $\quad \underline{x - y \geq 0}$

$x \neq y$

$\Rightarrow y - x < 0$

$\Rightarrow y - x \cancel{\geq} 0$

$\Rightarrow y \cancel{R} x$

• Транз.

$$\forall x \forall y \forall z \, (xRy \wedge yRz \to xRz)$$

$x, y, z$ – произв.

· $xRy$ $\qquad y - x = 3t \qquad x - y \geq 0$

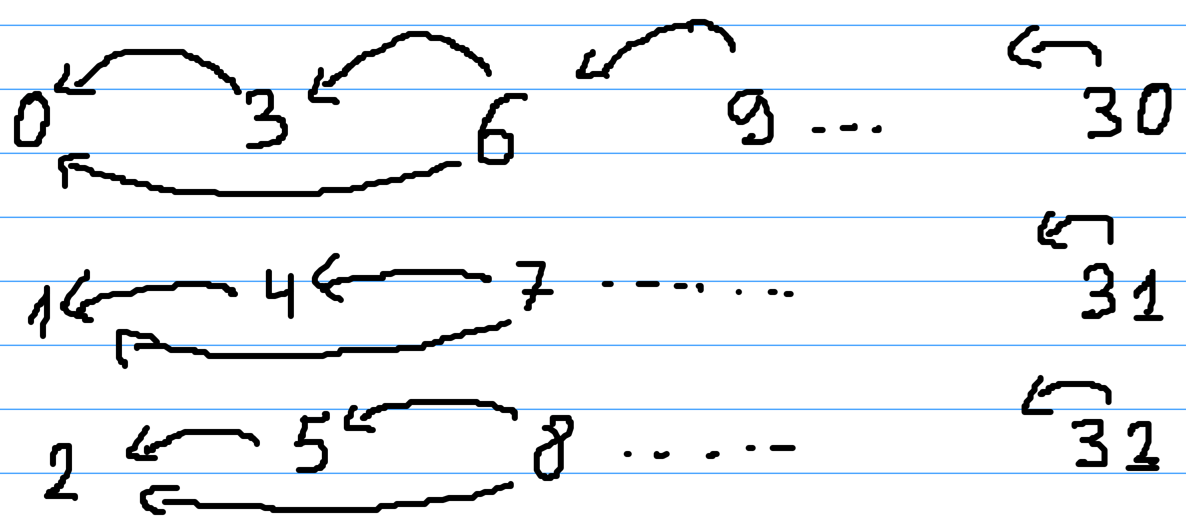
· $yRz$ $\qquad \underbrace{z - y = 3s}_{z - x = 3(t+s)} \qquad \underbrace{y - z \geq 0}_{x - z \geq 0}$

✓ ✓

$\Rightarrow xRz$

$\Rightarrow R$ е рел. на част. наредба

б) Определете макс. и мин. елемент.



Мин: 30, 31, 32

Макс: 0, 1, 2

в) Брой валидни топ. сортировки

def: $R \subseteq A \times B$

R е частична ф-я, ако

$\forall a \in A$ същ. най-много едно $b \in B$ $(a, b) \in R$

$A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{a, b\}$

$R \subseteq A \times B$

$R = \{(1, a), (2, b)\}$ ✓

$R = \{(\underline{1, a}), (\underline{1, b}), (2, a)\}$ ✗

def: R е тотална ф-я

$\forall a \in A$ същ. точно едно $b \in B$ $(a, b) \in R$

$A=\{a,b\}$ $\quad$ $B=\{1,2\}$

$R=\{(a,1)\}$ — част, но не е тот.

$R=\{(a,1),(b,1)\}$ - част + тот

$R=\{(a,1),(a,2)\}$ - не е част/тот.

$\underbrace{R\subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}}$

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ $\quad$ $f(x)=\dfrac{x}{2}$ $\quad$ $f(3)=?$

$f=\{\langle 0,0\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 6,3\rangle ..\}$

$f':\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ $\quad$ $f(x)=x+1$ $\quad$ тот

$f(x)=x-1$ $\quad$ част.

Тотални ф-ии:

зад $A, B$ - м-ва. $f : A \to B$ $g : A \to B$

док. или опровергайте, че:

а) $f \cap g$ е тотална ф-я

Не!

$A = \{a, b\}$ $B = \{1, 2\}$

$f = \{(a,1), (b,1)\}$ тот

$g = \{(a,1), (b,2)\}$ тот

$f \cap g = \{(a,1)\}$ ~~тот~~

$f \cap g(b) = ???$

б) $f \cap g$ е част. ф-я

Да допуснем, че $f \cap g$ не е част. ф-я

$\neg[\forall a \in A$ съществува най-много едно $b \in B$ $(a, b) \in R]$

$\exists\, a \in A$ за която има $b', b'' \in B$ $(a,b') \in R$

$b' \neq b''$ $(a,b'') \in R$

$(a,b') \in f \cap g$

$(a,b'') \in f \cap g$

| | |
|---|---|
| $(a,b') \in f$ | $(a,b') \in g$ |
| $(a,b'') \in f$ | $(a,b'') \in g$ |

$f$ не е ф-я $g$ не е ф-я

но $f$ и $g$ са тот. ф-ии

Противоречие

б) $f \cup g$ е ф-я Не.

$A = \{a\}$ $B = \{1,2\}$

$f = \{\langle a,1\rangle\}$ тот

$g = \{\langle a,2\rangle\}$ тот

$f \cup g = \{\langle a,1\rangle, \langle a,2\rangle\}$ не е част.

2) ако $g \le f$, то $f \cup g$ е ф-я

$f \cup g = f$ – тот ф-я