② Преговор

def: Рег език.

$\{a\}$ са рег езици

$\emptyset$ е рег. език.

Ако L_1 и L_2 са рег, то

- $L_1 \cup L_2$ е рег.
- $L_1 . L_2$ е рег.
- L_1^* и L_2^* са рег езици

$L = \{aa, bbb\}$

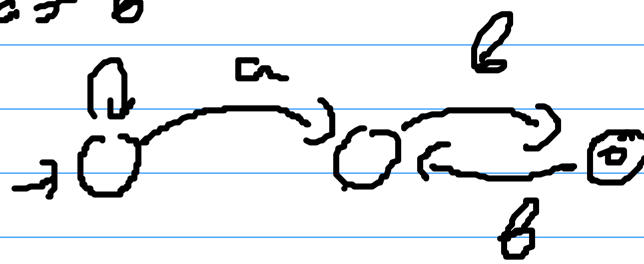
$L^* = \{\varepsilon, aa, bbb, aabbb, bbbaaa \dots\}$

Ако $\Sigma = \{a, b\}$. L е език над Σ, ако $L \subseteq \Sigma^*$ $[L \in 2^{\Sigma^*}]$

всички думи над азбуката

Краен автомат

$\Sigma = \{a, b\}$



$A = \langle Q, \Sigma, s, F, \delta \rangle$

- $s \in Q$
- $F \subseteq Q$
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ $\quad \delta(q, a) = p$

ab ✓

ba ✗ $\quad$ aa ✗

babb ✗ $\quad$ aabbb ✗

bab ✓

дефинираме индуктивно

$\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$ $\quad \delta^*(q, abb) = t$

- Тотален автомат

δ да е тотална функция

Зад. $\Sigma = \{a, b\}$.

Докажете, че $L = \{a^n \mid n$ се дели на 3 или n се дели на 4$\}$ е регулярен

$$L = \{ \underbrace{\varepsilon}_{a^0}, \underbrace{aaa}_{a^3}, \underbrace{aaaa}_{a^4}, \underbrace{aaaaaa}_{a^6}, \underbrace{aaaaaaaa}_{a^8} \ldots$$

От твърдението от семинар 1

$\forall$ краен език е регулярен.

$$\{aaa\}_p \qquad\qquad \{aaaa\}_p$$

$$\downarrow * \qquad\qquad \downarrow *$$

$$\{aaa\}^*_p \qquad\qquad \{aaaa\}^*_p$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

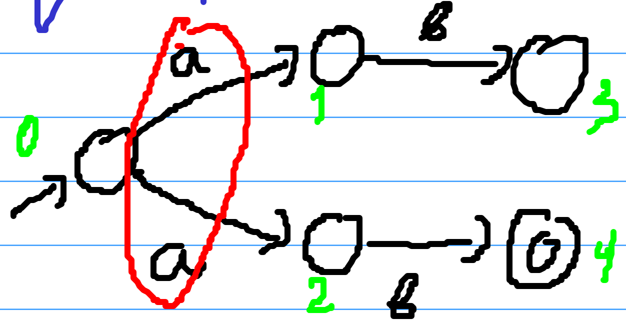
$$\{\varepsilon, a^3, a^6, a^9 \ldots\}_p \cup \{\varepsilon, a^4, a^8, a^{12} \ldots\}_p$$

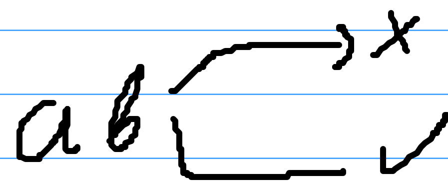
$$L$$

$\Rightarrow$ L е рег. език.

Автоматите, които разгледахме се наричат детерминистични

def: Недетерминистични автомати.





$\Rightarrow ab \in L(A)$

Автомат разпознава w, ако съществува път с думата от стартовото състояние до някое финално състояние

Примерният автомат разпознава ab

def: $A = \langle Q, \Sigma, s, F, \delta \rangle$

$s \in Q$

$F \subseteq Q$

$\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$

δ^* за недетерминистични автомати

$$\delta^*(q, aab) = \{\ldots\}$$

За примера горе

$$\delta^*(0, ab) = \{3, 4\}$$

$$\delta^* : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$$

дефинираме индуктивно:

- $\delta^*(q, \varepsilon) = \{q\}$
- $\delta^*(q, aw) = \bigcup_{r \in \delta(q,a)} \delta^*(r, w)$

$a \in \Sigma$

$w \in \Sigma^*$

A недет. автомат

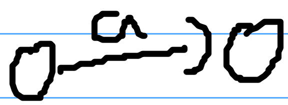
$$L(A) = \{ w \mid \delta^*(s, w) \cap F \neq \emptyset \}$$

стигаме до поне 1 финално състояние.

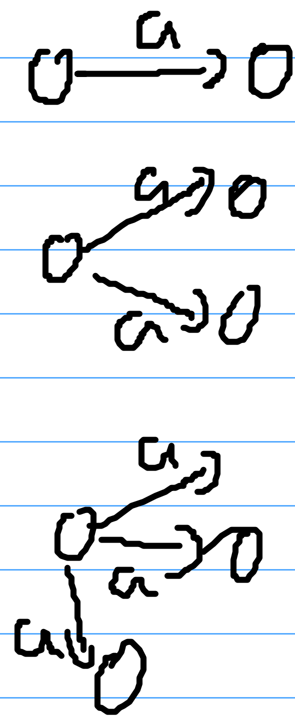
Каква е връзката м/у дет. автомати и нед. автомати

Кои са "по-мощни"?

дет



недет:



Th. Rabin – Scott.

За всеки недетерминистичен автомат, съществува детерминистичен автомат, който разпознава същия език.

Конструкция: "детерминизация"

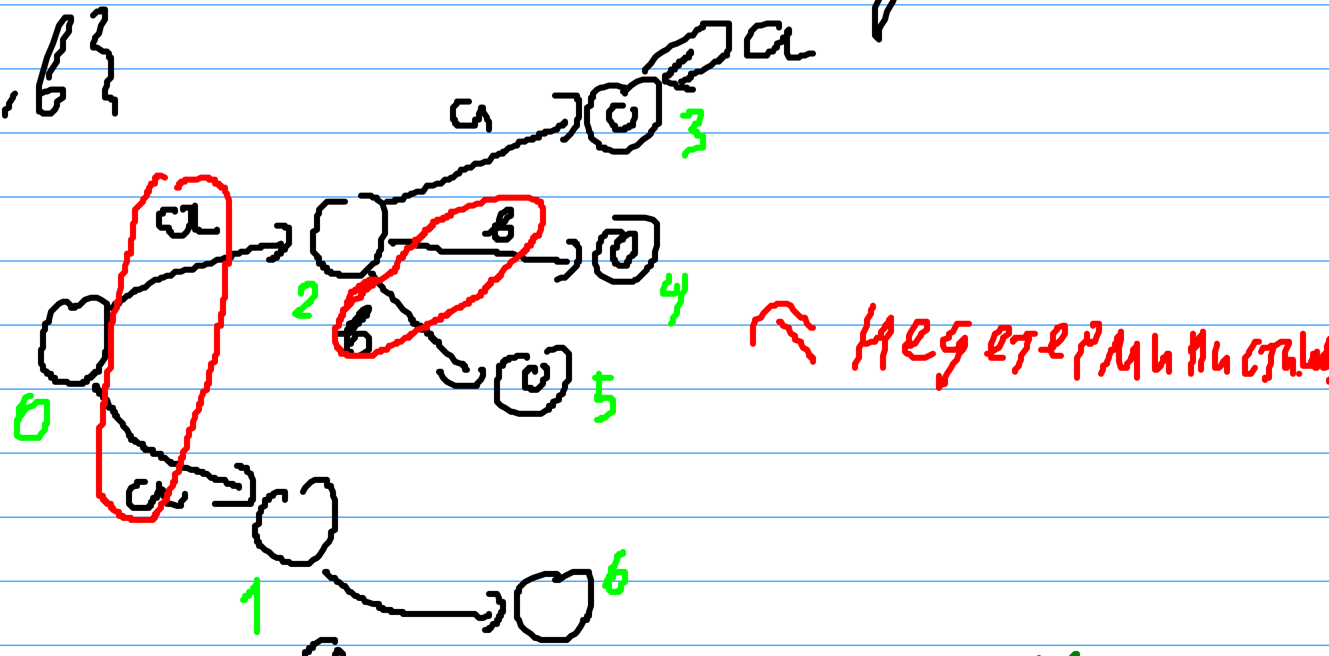
Нед. Автомат A

Търсим дет. автомат $det(A)$

такъв че $L(A) = L(det(A))$

Зад Постройте дет. автомат еквивалентен на следния.

$\Sigma = \{a, b\}$



↓детерминиране.

$ab \in L(A)$

$aa \in L(A)$

$aaa \in L(A)$

$abb \notin L(A)$

$\delta^*(0, ab) = \{4, 5\}$

$\delta^*(0, aa) = \{3, 6\}$

	a	b
→ {0}	{1,2}	∅
{1,2}	{3,6}	{4,5}
∅	∅	∅
{3,6}	{3}	∅
{4,5}	∅	∅
{3}	{3}	∅

финални

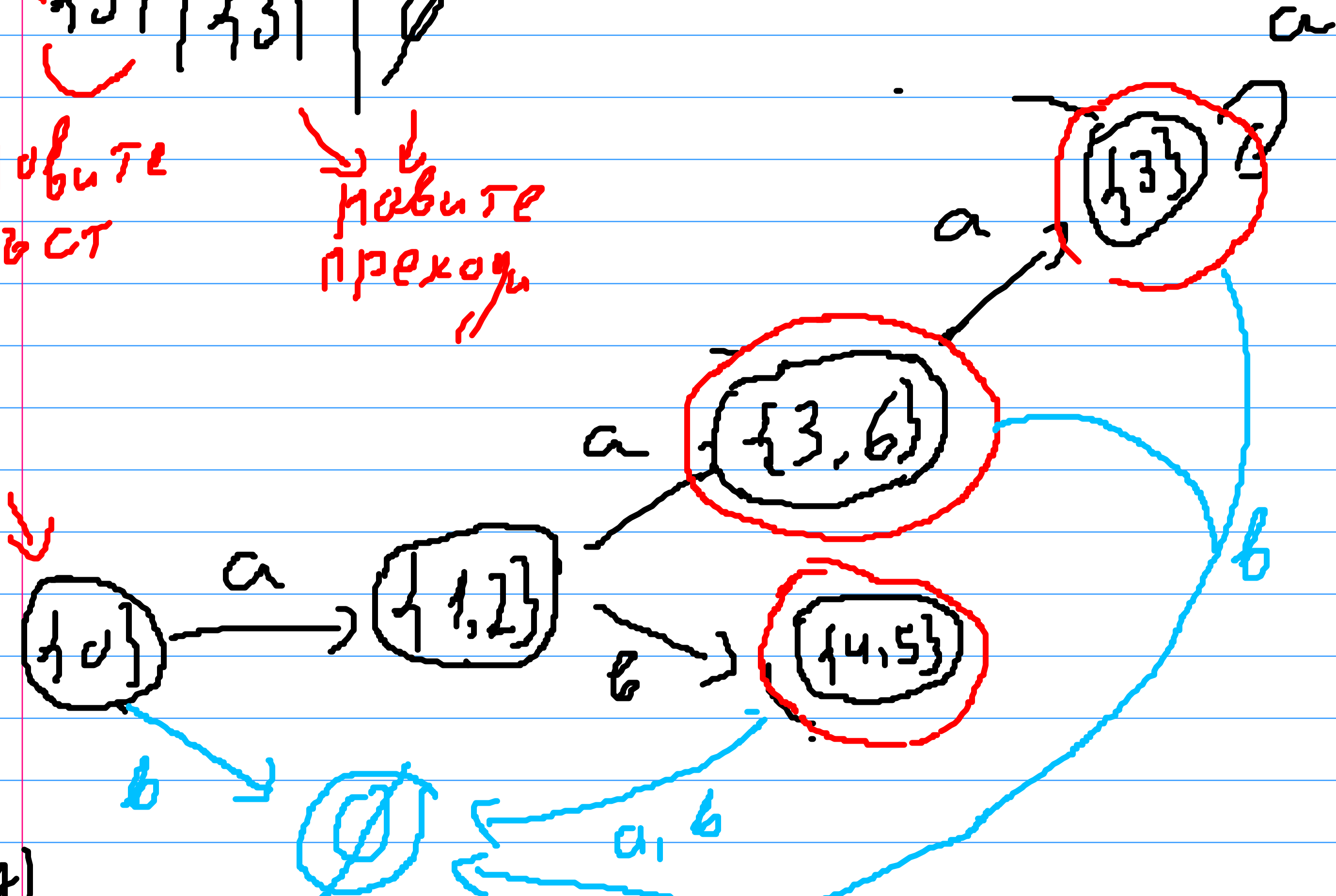
новите сост

новите преходи

{0} - винаги стартово

Фин. сост:

м-вата, които съдържат някое фин. състояние



det(A)

Автомат е детерминистичен и разпознава същия език

Th. Рабин - Скот

$A = \langle Q, \Sigma, s, F, \delta \rangle$

$$det(A) = \langle 2^Q, \Sigma, \{s\}, \underbrace{2^Q \setminus 2^{Q\setminus F}}_{\text{множества които съдържат поне 1 фин. състояние}}, \delta \rangle$$

- $\delta : 2^Q \times \Sigma \to 2^Q$
- $\delta(S, a) = \bigcup\limits_{q \in S} \delta(q, a)$

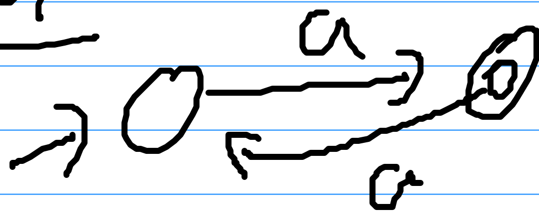
Нед. автомат $\longrightarrow$ дет. автомат

def: Автоматен език.

Ще казваме, че L $(L \subseteq \Sigma^*)$ е автоматен, ако $\exists$ краен автомат A, такъв че

$$L(A) = L$$

Пример:



$L(A) = \{a\}.\{aa\}^*$

$\Rightarrow$ $\{a\}\{aa\}^*$ автоматен.

Тв (*) Нека $L \subseteq \Sigma^*$

! L е регулярен $\Leftrightarrow$ L е автоматен.

- Ако L е рег, то $\exists$ автомат за L
- Ако A е автомат, то $L(A)$ е рег.

Важно! $\{a, b\}^*$ ← всички стрингове с a и b.

$\{a\}.\{a, b\}^*$ = всички стрингове с a и b, които започват с a.

$\{a\} \cdot \{a, b\}^* \subset \{a, b\}^*$

! Понякога конкатенацията играе ролята на филтър

Зад. Х Докажете, че $L = \{w \mid w \text{ съдържа } aab\}$ е регулярен. $(\Sigma = \{a, b\})$

$$\underbrace{bbab}_{\in\Sigma^*}\,b\,\underbrace{aab}_{aab}\,\underbrace{ba}_{\in\Sigma^*}$$

$\{a, b\}^* \cdot \{aab\}_p \cdot \{a, b\}^* = L$

Зад. Y Докажете, че $L = \{w \mid w \text{ завършва на } b\}$ е рег.

$\{a, b\}^*_p \cdot \{b\}_p$

$(\{a\}_p \cup \{b\}_p)^*_p \cdot \{b\}_p$

def: Регулярен израз (друг запис за рег. езици)

	Рег. израз:	
$\emptyset$	$\emptyset$	
$\{a\}$	a	без { }
$L_1 \cup L_2$	$L_1 + L_2$	$\cup \to +$
$L_1 . L_2$	$L_1 L_2$	без ·
L_1^*	L_1^*	

зад X $(a+b)^* aab (a+b)^*$

зад Y $(a+b)^* b$

зад Постройте рег. израз $\Sigma = \{a, b\}$

а) $L = \{ w \mid w$ започва и завършва с различна буква$\}$

$$a(a+b)^* b + b(a+b)^* a$$

б) $L = \{w \mid w$ започва и завършва с една и съща буква$\}$

$$a(a+b)^*a + b(a+b)^*b + a + b$$

в) $L = \{w \mid |w|$ е четно$\}$

$$(aa+ab+ba+bb)^*$$

$$((a+b)(a+b))^*$$

г) $L = \{w \mid w$ съдържа поне 2 а-та$\}$

$$(a+b)^*a\,(a+b)^*a\,(a+b)^*$$

$\varepsilon\ a\ b\ a\ b\ b$

д) $L = \{w \mid w$ съдържа най-много 2 а-та$\}$

$$b^*ab^*ab^* + b^*ab^* + b^*$$

(две а-та) (една а) (нула а)

e) $L = \{w \mid w$ започва с a и няма две последователни a-та$\}$

$$a(b + ba)^*$$

$$abbabb$$