

7

Операции, относено които са затворени
регулярните езици

от деф: $\cup, \cdot, *$ групи: $\neg, \cap, \setminus, \Delta, \text{rev}$

Ако L_1 е рег. език, то $\overline{L_1}$ е рег.?

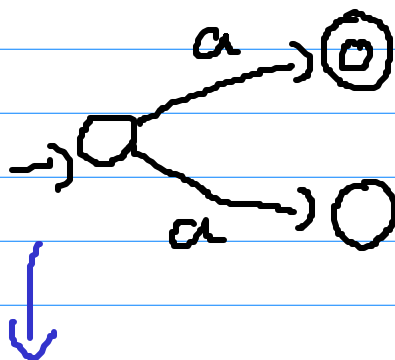
$$U = \Sigma^*$$

Щом L_1 е рег., то \exists автомат A

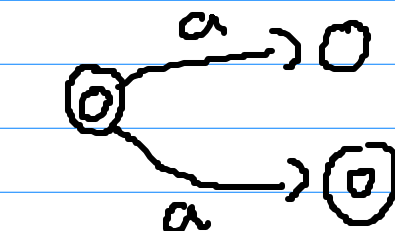
$$L(A) = L_1$$

Обръщаме финалните с нефиналните
състояния

Пример:



$$L(A) = \{a\}$$




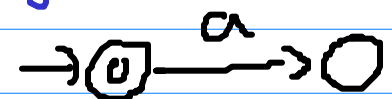
$$L(A) = \{\epsilon, a\}$$

Проблем!

Автоматът е недетерминистичен

Трябва да е детерминистичен!

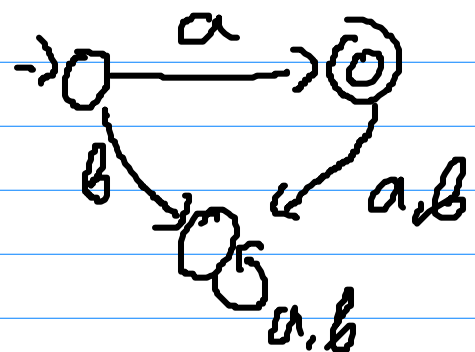
A:  $L(A) = \{a\}$

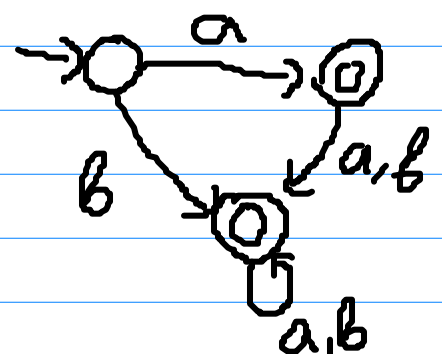
 A':  $L(A') = \{\epsilon\}$

Проблем!

Автоматът не е тотален

Трябва да е тотален!

A:  $L(A) = \{a\}$

A':  $L(A') = \{\epsilon, b, ab, \dots\} = \overline{\{a\}}$
compl(A')

L_1 - рег. $\overline{L_1}$ е рег.

Щом L_1 е рег, то с

$$A = \langle Q, \Sigma, s, F, \delta \rangle$$

$$L(A) = L_1$$

$$\text{търсим } A': L(A') = \overline{L(A)} = \overline{L_1}$$

$$A' = \langle Q, \Sigma, s, Q \setminus F, \delta \rangle$$

↖ биемим с $\text{comp}(A)$

Твърдение: Ако L е регулярен и

A е **минимален** автомат за L ,

то $\text{comp}(A)$ е **минимален**

автомат за \overline{L}

- Ако L_1 и L_2 са регулярни, то $L_1 \cap L_2$ е регулярен?

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$

↑
само регулярни
операции

$\Rightarrow L_1 \cap L_2$ е рег.

- Ако L_1 и L_2 са рег, то $L_1 \setminus L_2$ е рег?

$$L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$$

↑
само рег. операции

$\Rightarrow L_1 \setminus L_2$ е регулярен.

Аналогично за $L_1 \Delta L_2$

Автоматни конструкции за \cap, \setminus, Δ

$$A_1 = \langle Q_1, \Sigma, s_1, F_1, \delta_1 \rangle$$

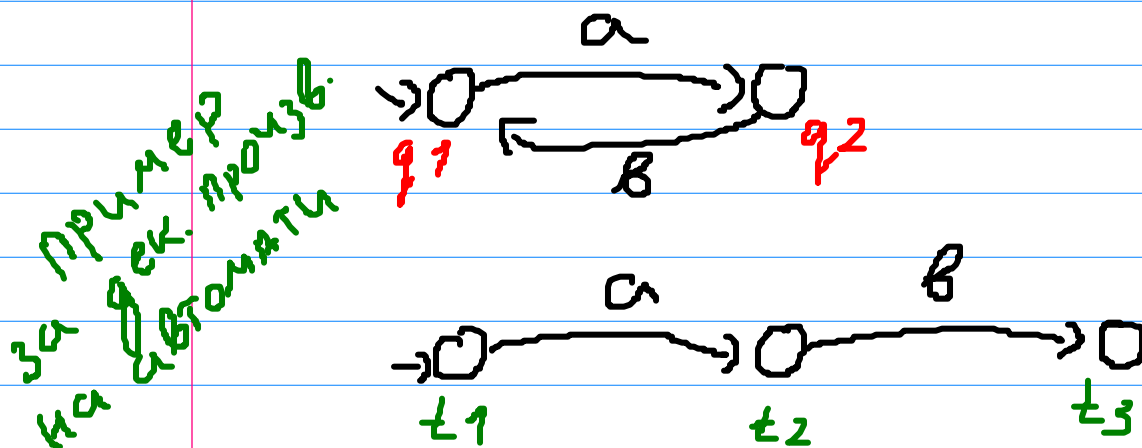
$$A_2 = \langle Q_2, \Sigma, s_2, F_2, \delta_2 \rangle$$

Тогда A', A'', A''' .

$$L(A') = L(A_1) \cap L(A_2)$$

$$L(A'') = L(A_1) \setminus L(A_2)$$

$$L(A''') = L(A_1) \Delta L(A_2)$$



$$\langle q_1, t_1 \rangle \xrightarrow{a} \langle q_2, t_2 \rangle \xrightarrow{b} \langle q_1, t_3 \rangle$$

$$A' = \langle Q_1 \times Q_2, \Sigma, \langle s_1, s_2 \rangle, F', \delta' \rangle$$

$$A'' = \langle Q_1 \times Q_2, \Sigma, \langle s_1, s_2 \rangle, F'', \delta'' \rangle$$

$$A''' = \langle Q_1 \times Q_2, \Sigma, \langle s_1, s_2 \rangle, F''', \delta''' \rangle$$

$$F' = F_1 \times F_2$$

$$F'' = F_1 \times Q_2 \setminus F_2$$

$$F''' = (F_1 \times Q_2 \setminus F_2) \cup (Q_1 \setminus F_1 \times F_2)$$

$$\delta'(\langle q, t \rangle, a) = \delta''(\langle q, t \rangle, a) = \delta'''(\langle q, t \rangle, a) = \\ = \langle \delta_1(q, a), \delta_2(t, a) \rangle$$

предвиждане \nwarrow \nearrow двата автомата

L_1 е регулярен, то L_1^{rev} е регулярен

L_1^{rev} регулярен?

базис

$$\varepsilon^{\text{rev}} = \varepsilon$$

$$a^{\text{rev}} = a$$

$$\emptyset^{\text{rev}} = \emptyset$$

свойства

$$(L_1 \cup L_2)^{\text{rev}} = L_2^{\text{rev}} \cup L_1^{\text{rev}}$$

$$(L_1 \cdot L_2)^{\text{rev}} = L_2^{\text{rev}} L_1^{\text{rev}}$$

$$(L_1^*)^{\text{rev}} = ((L_1)^{\text{rev}})^*$$

Задача Постройте КТДМД за L

$$L = \{w \mid w \text{ не свързва } aab\}$$

труден за изчисляване

$$\rightarrow b^*(ab b^*)^* a^*$$

Решение:

Разглеждаме $\bar{L} = \{w \mid w \text{ свързва } aab\}$

$$\bar{L} = \underbrace{(a+b)^*}_{a(a+b)^* + b(a+b)^* + \epsilon} aab (a+b)^*$$

$$a(a+b)^* + b(a+b)^* + \epsilon$$

$$\bar{L} = a\bar{L} + b\bar{L} + aab(a+b)^*$$

$$a^{-1}\bar{L} = \bar{L} + aab(a+b)^* \quad L_1$$

$$b^{-1}\bar{L} = \bar{L}$$

$$a^{-1}L_1 = \underbrace{a^{-1}(\bar{L})}_{L_1} + \underbrace{a^{-1}(aab(a+b)^*)}_{b(a+b)^*} = L_2$$

$$b^{-1}L_1 = \bar{L} + \emptyset = \bar{L}$$

$$a^{-1} L_2 = L_2$$

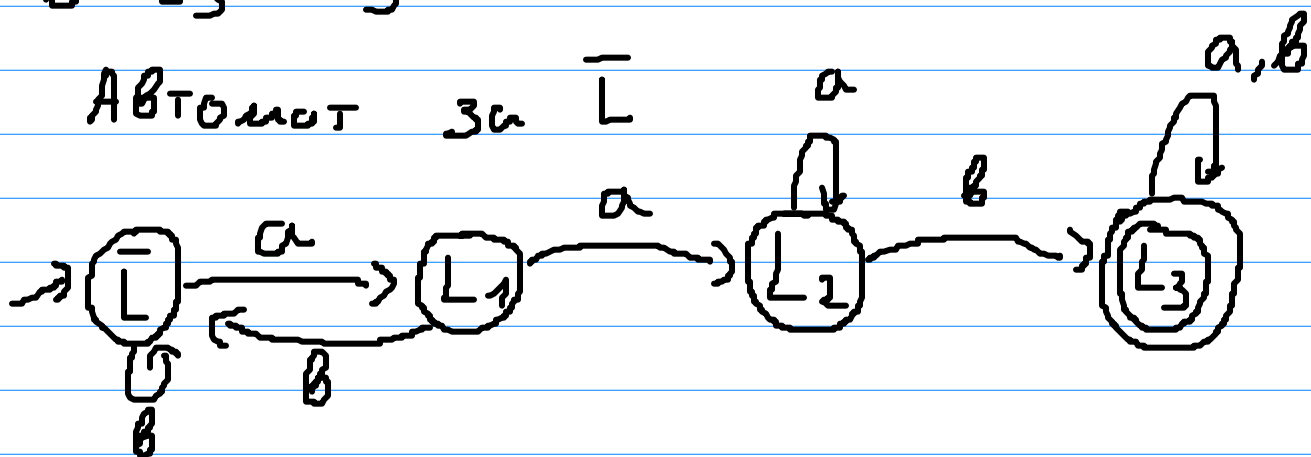
$$b^{-1} L_2 = \bar{L} + [a+b]^* = (a+b)^* \quad L_3$$

$$\begin{aligned} L_3 &= (a+b)^* = a(a+b)^* + b(a+b)^* + \varepsilon = \\ &= aL_3 + bL_3 + \varepsilon \end{aligned}$$

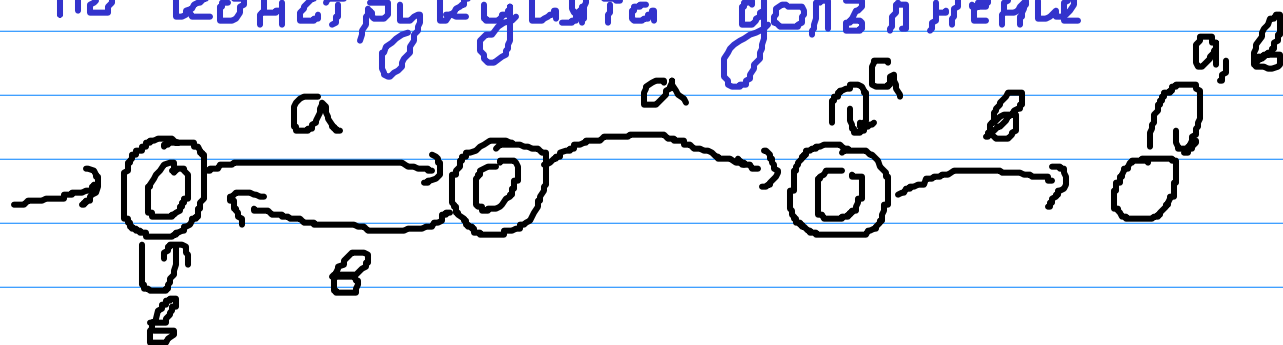
$$a^{-1} L_3 = L_3$$

$$b^{-1} L_3 = L_3$$

Автомат за \bar{L}



По конструкцията изпълнение



Автомат за L

Проверки:

$$\begin{array}{ll} \cdot \quad \bar{L} \neq L_1 & \dots \quad \bar{L} \neq L_2 \\ \quad ab \in L_1 & \quad b \in L_2 \\ \quad ab \notin \bar{L} & \quad L_1 \neq L_2 \quad b \notin L_1 \\ & \quad \quad \quad \bar{L} \end{array}$$

$$\dots \quad L_3 \neq \bar{L}, L_1, L_2$$

$$\varepsilon \in L_3 \quad \varepsilon \notin \bar{L}, L_1, L_2$$

зад $L_1 = ba(a+b)^*ab$

$$L_2 = bb(bb)^*$$

$$L_3 = \left\{ w \mid \begin{array}{l} \text{ако } w \text{ започва с } bb, \text{ то} \\ \text{ } w \text{ не съдържа } a \end{array} \right\}$$

Постройте КТДМА за $L_1 \cup L_2 \cup L_3$

Решение:

$$L_1 \subseteq L_3 \quad L_2 \subseteq L_3$$

$$\Rightarrow L_1 \cup L_2 \cup L_3 = L_3$$

P	q	$P \rightarrow q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

$$\neg(P \rightarrow q) \equiv \neg(\neg P \vee q) \equiv P \wedge \neg q$$

Различаване $\overline{L_3}$

$$L' = \overline{L_3} = \left\{ w \mid \begin{array}{l} w \text{ започва с } bb \text{ и} \\ \text{ } w \text{ съдържа } a \end{array} \right\}$$

$$L' = b b (a+b)^* a (a+b)^*$$

$$a^{-1} L' = \emptyset \quad L'_1$$

$$b^{-1} L' = b (a+b)^* a (a+b)^* \quad L'_2$$

$$a^{-1} L'_1 = L'_1$$

$$b^{-1} L'_1 = L'_1$$

$$a^{-1} L'_2 = \emptyset = L'_1$$

$$b^{-1} L'_2 = (a+b)^* a (a+b)^* \quad L'_3$$

$$L'_3 = a L'_3 + b L'_3 + a (a+b)^*$$

$$a^{-1} L'_3 = L'_3 + (a+b)^* = (a+b)^* \quad L'_4$$

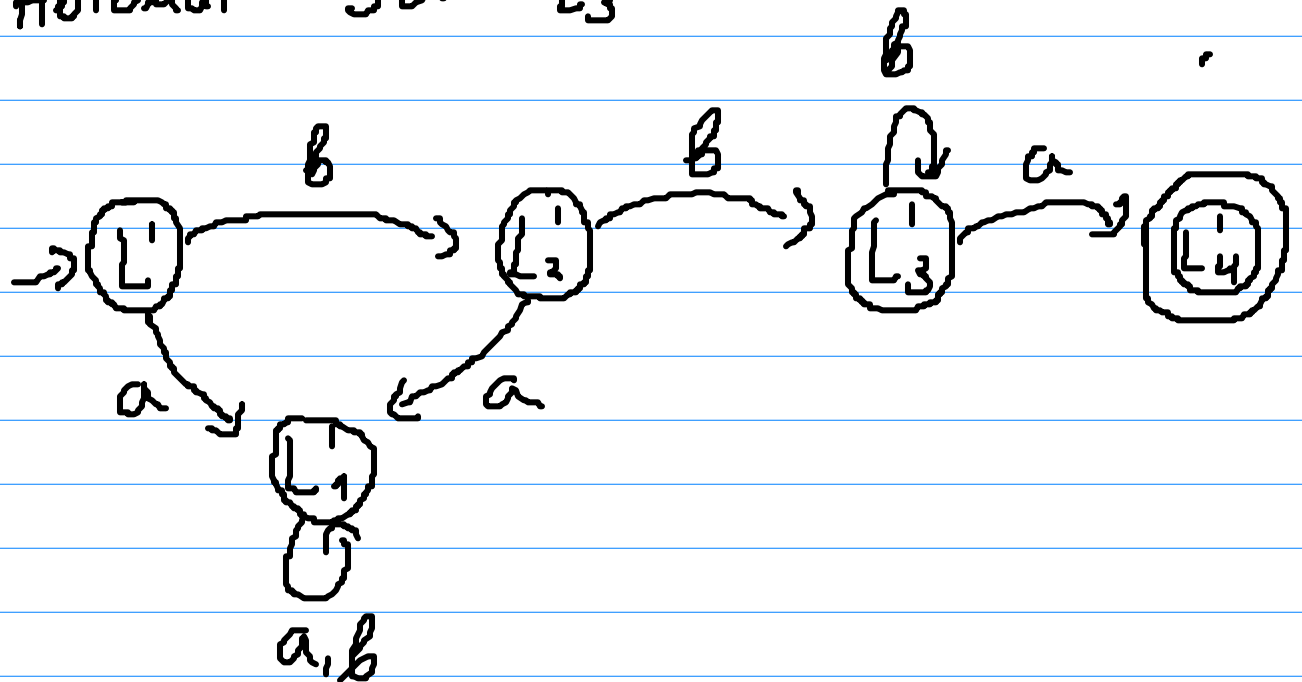
$$b^{-1} L'_3 = L'_3$$

$$L'_4 = a L'_4 + b L'_4 + \varepsilon$$

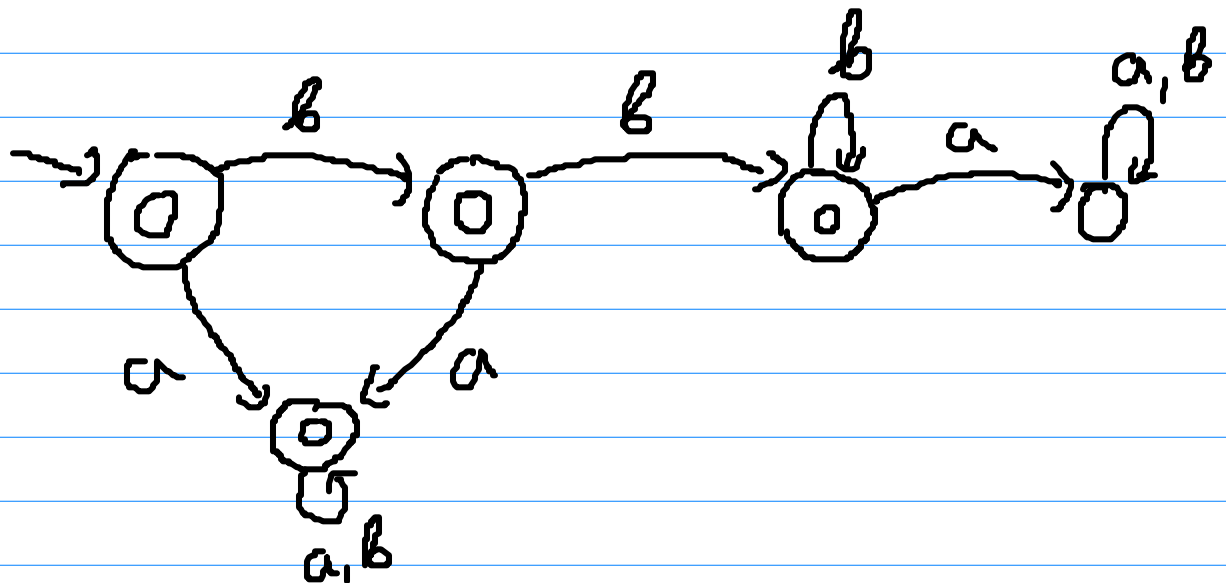
$$a^{-1} L'_4 = L'_4$$

$$b^{-1} L'_4 = L'_4$$

Автомат за $\overline{L_3}$



По конструкцията приложение



Проверки:

- $L'_1 \neq L'$
 $bba \in L'$
 $bba \notin L'_1$
- .. $L'_2 \neq L', L'_1$
 $ba \in L'_2$
 $ba \notin L', L'_1$
- ... $L'_3 \neq L', L'_1, L'_2$
 $a \in L'_3$ $a \notin L', L'_1, L'_2$
- $L'_4 \neq L', L'_1, L'_2, L'_3$
 $\varepsilon \in L'_4$ $\varepsilon \notin L', L'_1, L'_2, L'_3$