④

Зад

Д.С.Д. че всяко ест число

може да се представ като

сума на **различни** степени на 2

$$5 = 2^2 + 2^0$$

D-во със силна инд:

$P(k) \longleftrightarrow k$ може да се представ
        като сума на разл. степени
        на 2

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ \, P(n)$$

база $n = 1$ $1 = 2^0$

и.п. Допускаме, че: $P(1) \wedge P(2) \ldots \wedge P(k)$

и.с. Трябва да покажем, че $P(k+1)$

1 сл. $k+1$ е четно

$$\Rightarrow \exists t \in \mathbb{N}^+ \quad 2 \cdot t = k+1$$

$$\boxed{t < k+1}$$

$\Rightarrow$ От и.п. $P(t) - T$

$$t = \underbrace{2^{\alpha_0} + 2^{\alpha_1} \dots 2^{\alpha_s}}_{} \quad \forall i,j \ i \neq j \ \alpha_i \neq \alpha_j$$
$$i,j \in \{0 \dots s\}$$

$$K+1 = 2 \cdot t = 2 \cdot (2^{\alpha_0} + 2^{\alpha_1} \dots 2^{\alpha_s}) =$$

$$= 2^{\alpha_0 + 1} + 2^{\alpha_1 + 1} \dots 2^{\alpha_s + 1} \quad \checkmark$$

$$\forall i,j \ i \neq j \ (\alpha_i + 1 \neq \alpha_j + 1)$$

2 сл. $K+1$ е нечетно

$\Rightarrow K$ е четно $k < k+1$

и.п $P(k) = T$

$$K = 2^{\alpha_1} + \dots 2^{\alpha_s} \quad \forall i,j \ i \neq j \ \alpha_i \neq \alpha_j$$

$$K+1 = 2^{\alpha_1} + \dots 2^{\alpha_s} + \boxed{2^0}$$

Помощно твърдение

• $P(K) \wedge k$ е четно $\rightarrow 2^0$ не участва
в представянето

$$2^0 \quad 2^1 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad 2^4$$

Н 4 4 4 4

$$k+1 = \underbrace{2^{\alpha_1} + .. \; 2^{\alpha_5}}_{\substack{\text{от помощно} \\ \text{твърдение}}} + \boxed{2^0}$$

2^0 не участва

$$k+1 = \underbrace{2^{\alpha_1} + .. \; 2^{\alpha_5} + 2^0}_{\substack{\text{Различни} \\ \text{степени на } 2}} \qquad \checkmark$$

$\Rightarrow$ Твърдението е изпълнено.

зад Д.с.↑ $\forall n \in \mathbb{N}^+$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2$$

С индукция:

База: $n = 1$ $1 < 2$ ✓

И.п. За някое k

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots \frac{1}{k^2} < 2$$

И.с $k+1$??

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \cdots \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2$$

$$1 + \frac{1}{4} + \cdots \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{(k+1)^2}$$

И.п $1 + \frac{1}{4} \cdots \frac{1}{k^2} < 2$

И.П не ни помага!

Засилване инд. предп.

$$\forall x \, P(x)$$

$$P(0)$$

$$P(k) \to P(k+1)$$

Доказваме:

$$\forall x \, Q(x)$$

$$Q(x) \Rightarrow P(x)$$

Ще покажем, че

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \cdots \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

База: $n = 1$ $\quad 1 \leq 2 - \frac{1}{1} = 1$ ✓

И.П. за някое k.

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \cdots \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{k}$$

И.С

$$\underbrace{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \cdots \frac{1}{k^2}}_{\text{и.п.}} + \underbrace{\frac{1}{(k+1)^2}}_{} \overset{?}{\leq} 2 - \frac{1}{k+1}$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} =$$

ИП: $\leq 2 - \frac{1}{k}$

$$= 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} = 2 - \frac{1}{k+1}\left(\frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= 2 - \frac{1}{k+1}\left(\frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)}\right) =$$

$$2 - \frac{1}{k+1}\left(\frac{k^2 + k + 1}{k^2 + k}\right) < 2 - \frac{1}{k+1}$$

≥ 1

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \cdots \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

$\Rightarrow$ ТВЗРДЕНИЕТО е изълнено

$$1 + \frac{1}{4} \cdots \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{4} \cdots \frac{1}{n^2} < 2 \quad \checkmark$$

Зад. Д.С.Д. че $\forall n \in \mathbb{N}^+$

сумата на първите n нечетни числа е точен квадрат.

Инд.

БАЗА: n = 1 $1 = 1^2$

и.п. Нека за някое k

$$1 + 3 \cdots + 2k - 1 = S^2$$

и.с Разглеждаме за k+1

$$\underbrace{1 + 3 \cdots + 2k-1}_{\text{и.п.}} + 2k+1 = \text{точен квадрат}$$

$$\underbrace{S^2 + 2k + 1}_{} = \text{точен квадрат}$$

Не става

Засилваме твърдението:

сумата на първите n нечетни числа е n^2

БАЗА $\quad n=1 \qquad 1 = 1^2 \quad \checkmark$

И. П. ЗА някое k

$$1 + 3 + 5 \ldots 2k-1 = k^2$$

И. С РАЗГЛЕЖДАНЕ $\quad k+1$

$$\underbrace{1 + 3 + 5 .. + 2k-1}_{\substack{\text{и.п:} \\ k^2}} + 2k+1 =$$

$$= k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ ЗАсиленото твърдение е изпълнено

$\Rightarrow$ Сумата на първите n

нечетни числа е точен квадрат

Зад. Къде е грешката в доказателството?

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 7^* n = 0$$

База: 0 $7^* 0 = 0$

и.п. Допускам, че $\forall i \leq k$

$$7^* i = 0$$

и.с. Разглеждам $k+1 \in \{1, 2 \ldots\}$

$$7(k+1) \overset{?}{=} 0$$

$$k+1 = i + j \quad i, j \in \mathbb{N} \quad i < k+1$$
$$j < k+1$$

от- у.п. $7i = 0 \quad 7j = 0$

$$7(k+1) = 7(i+j) = 7i + 7j = 0 + 0 = 0 \quad \checkmark$$

Проблем $k+1 = i + j \qquad i < k+1$
$$j < k+1$$

$\times$ $\underbrace{\dfrac{k+1}{1}}_{1} \quad 1 = i + j \quad i < 1$
$$\text{не!} \qquad j < 1 \quad i, j \in \mathbb{N}$$

Нека A, B, C са множества.

$\Delta \cdot C \cdot \Delta$, че ако

- $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

$\forall x (\underset{p}{x \in A} \rightarrow \underset{q}{x \in B})$ $\forall x (\underset{q}{x \in B} \rightarrow \underset{t}{x \in C})$

- $(p \rightarrow q \wedge q \rightarrow t) \rightarrow (p \rightarrow t) \equiv T$

$$\forall x (x \in A \rightarrow x \in C)$$

def: Наредена двойка

$$\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

des Наредена тройка

$$\langle a, b, c \rangle = \langle a, \langle b, c \rangle \rangle =$$

$$\{\{a\}, \{a, \{\{b\}, \{b, c\}\}\}\}$$

def: Декартово произведение

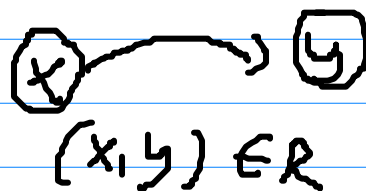$$A \times B = \{ \langle a, b \rangle \mid a \in A \land b \in B \}$$

$$|A| = n \qquad |B| = m \qquad |A \times B| = n \cdot m$$

def: Реляция — подмножество на дек. произведение

$$A = \{a, b\} \qquad B = \{1, 2, 3\}$$

$$R \subseteq A \times B$$

$$(x, y) \in R$$

$$R = \{ (a, 2), (a, 3), (b, 1) \}$$

$$\leq = \{ (3, 4), (3, 3), (7, 9) \cdots \}$$

$$+ \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \qquad + = \{ ((1, 2), 3), ((9, 7), 16)$$

$$- \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} = \{ ((9, 7), 2) \ldots \}$$

Свойства на релации $R \subseteq A \times A$

- Рефлексивност $\forall x (\langle x, x \rangle \in R)$

$$= \quad = = \{ (3,3), (4,4) \dots \}$$

$$\leq$$
$$\geq$$

- Антирефлексивност $\forall x (\langle x, x \rangle \notin R)$
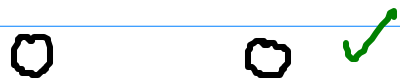
$$<$$
$$>$$

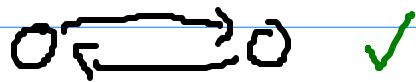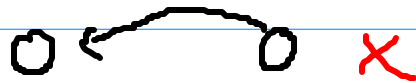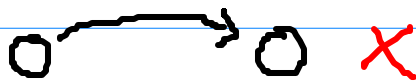① $\emptyset$ — Рефл + антирефл.

$$A = \emptyset \quad R = \emptyset$$

- Симетрична.

$$\forall a \forall b ((a, b) \in R \to (b, a) \in R)$$

○　　　○ ✓　　　　　$=, \neq,$
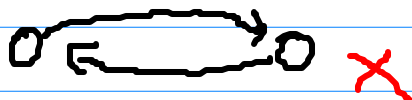
○———→○ ✗

　　　　　　　　　$<, \leq, >, \geq$

○←——○ ✗

○⇄○ ✓

- Антисимметрична

- $\forall a \forall b \ (a R b \wedge b R a \rightarrow a = b)$

- $\forall a \forall b \ (\underbrace{a \neq b \wedge a R b}_{F \rightarrow \iota} \rightarrow b \not R a)$

○　　　○ ✓　　　　　$\varnothing$ – сим
　　　　　　　　　　　АнтиСим.

○———→○ ✓

○←——○ ✓　　　　　$<, \leq, \geq, >, =$

○⇄○ ✗　　　　　　$\neq,$

Силно антисиметрична

$$\forall a \forall b \ (\underline{a \neq b} \rightarrow (a,b) \in R \oplus (b,a) \in R)$$

○   ○   ✗

○⟶○   ✓

○⟵○   ✓ $<, >, \leq, \geq$

○⇄○   ✗ $\neq, =$

- Транзитивност.

$$\forall a \forall b \forall c \ ((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \rightarrow (a,c) \in R)$$

○⟶○⟶○

$=, <, >, <=, >=$ $3 \neq 4$ $4 \neq 3$

$\neq$ $\not\Rightarrow 3 \neq 3$

Зад. Изследвайте за свойства
следните релации:

$(A, B) \in R$
$A R B$

a) $R \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$

$(A, B) \in R \iff A \subseteq B$

$\{1\} \longrightarrow \{1,2\}$

1) Рефл. ✓ $\forall x (x \subseteq x)$

2) Антирефл. ✗ $x = \{1\}$ $\quad x \subseteq x$ $\quad (x,x) \in R$

3) Симетричност ✗ $(x,y) \in R \not\Rightarrow (y,x) \in R$

$x \subseteq y \rightarrow y \not\subseteq x$

$\{1\} \subseteq \{1,2\}$ $\quad \{1,2\} \not\subseteq \{1\}$
$[\{1\}, \{1,2\}] \in R$ $\quad (\{1,2\}, \{1\}) \notin R$

4) Антисиметричност ✓

$\forall x \forall y (x \neq y \wedge (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R)$

x, y са произволни и

x ≠ y и $(x, y) \in R$

$\underbrace{\qquad\qquad}$
$x \subseteq y$

- x ≠ y
- x ⊆ y } в y има елемент, косто
не е елемент в x

y ⊄̸ x

⇒ (y, x) ∉̸ R

5) Силно антисиметрична ✗

$\forall x \forall y \left(x \neq y \longrightarrow (x, y) \in R \oplus (y, x) \in R \right)$

x = {1, 2}   y = {3, 4}

$\underbrace{x \neq y}_{T} \longrightarrow \underbrace{(x, y) \in R}_{F} \oplus \underbrace{(y, x) \in R}_{F}$

$T \to (F \oplus F)$
$T \to F$
F

6) ТРАНЗИТИВНОСТ ✓

$$\forall x \forall y \forall z \left((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R \right)$$

доказахме горе!

$$x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z$$

б) $R \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$

$$(A, B) \in R \leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing$$

1) Рефл. ✗

$$(\varnothing, \varnothing) \notin R$$

2) Анти Рефл. $\forall x (x, x) \notin R$

✗ $\quad (\{1\}, \{1\}) \in R$

3) Симетричност ✓

$$\forall x \forall y \left((x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R \right)$$

$$\varnothing \neq x \cap y = y \cap x \neq \varnothing \Rightarrow (y, x) \in R$$