Интуиционистки структури и модели на Крипке. Интуиционистка съждителна логика. Примери за съждителни тавтологии, които не са от интуиционистката съждителна логика. Породени подструктури. Коренови структури

Ангел Димитриев

Дефиниция: Интуиционистка структура на Крипке.

$$F = (W, \leq)$$

където $\leq$ е релация на частична наредба в W.
Ако $\leq$ има минимален елемент, то F е **коренова**.

Дефиниция: Оценка на PVar в структура $F = (W, \leq)$.

$$V : PVar \to P(W) \text{ като:}$$

за всяка променлива p: $V(p)$ е затворено нагоре.
Затворено нагоре: $\forall x \forall y (x \in V(p) \land x \leq y \implies y \in V(p))$

Дефиниция: Интуиционистки модел на Крипке

$$m = (F, V)$$

където F е структура на Крипке, а V е оценка.

Дефиниция: $m, x \models \phi$

С индукция по построение на формулата:
- $m, x \models p \iff x \in V(p)$
- $m, x \models \phi \land \psi \iff m, x \models \phi$ и $m, x \models \psi$
- $m, x \models \phi \lor \psi \iff m, x \models \phi$ или $m, x \models \psi$
- $m, x \models \phi \to \psi \iff \forall y (x \leq y \land m, y \models \phi \implies m, y \models \psi)$
- $m, x \models \neg\phi \iff \forall y (x \leq y \implies m, y \not\models \phi)$
- $m, x \not\models \bot$
- $m, x \models \top$

Дефинициии:

$m \models \phi \iff (\forall x \in W)(m, x \models \phi)$
$F, x \models \phi \iff$ за всеки модел m над $F : m, x \models \phi$
$F \models \phi \iff (\forall x \in W)(F, x \models \phi)$

Твърдение :

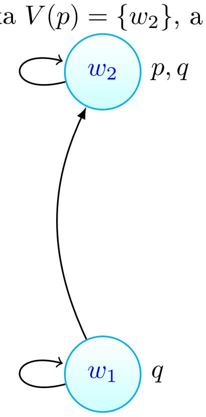
За всеки интуиционистки модел на Крипке на структурата $F = (W, \leq)$, всяка формула ϕ и всички точки $x, y \in W$, ако $x \models \phi$ и $x \leq y$, то $y \models \phi$

Доказателство :

С индукция по построението на ϕ.
•$\phi = \perp$ или $\phi = \top$. - тривиално.
•$\phi = p$. Тогава $p \in V(x)$, но V е затворено нагоре $p \in V(y)$. Но тогава $y \models p = \phi$
•$\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$. Тогава $x \models \phi_1$ и $x \models \phi_2$. От и.п $y \models \phi_1$ и $y \models \phi_2$. Следователно $y \models \phi_1 \wedge \phi_2 = \phi$
•$\phi = \phi_1 \vee \phi_2$ - аналогично с $\wedge$.
•$\phi = \phi_1 \to \phi_2$
Ще покажем, че $y \models \phi_1 \to \phi_2$.
Нека $z \in W$ и $y \leq z$ и нека $z \models \phi_1$.
Трябва да покажем, че $z \models \phi_2$
Но $x \leq y$ и $y \leq z$ и $\leq$ е транзитивна. Следователно $x \leq z$.
Но $x \models \phi_1 \to \phi_2$ и $x \leq z$ и $z \models \phi_1$.
Следователно $z \models \phi_2$.
Тогава $y \models \phi_1 \to \phi_2$.

Пример 1:

Нека $F = (W, \leq)$, където $W = \{w_1, w_2\}$ и $\leq = \{(w_1, w_1), (w_1, w_2), (w_2, w_2)\}$ и нека $V(p) = \{w_2\}$, а $V(q) = \{w_1, w_2\}$.



Да разгледаме формулата:

$$p \vee (p \rightarrow \perp)$$

Формулата е **истина** в точката w_2 и **лъжа** в точката w_1 в модела $m = (F, V)$. Следователно $F \not\models p \vee (p \rightarrow \perp)$

Пример 2:

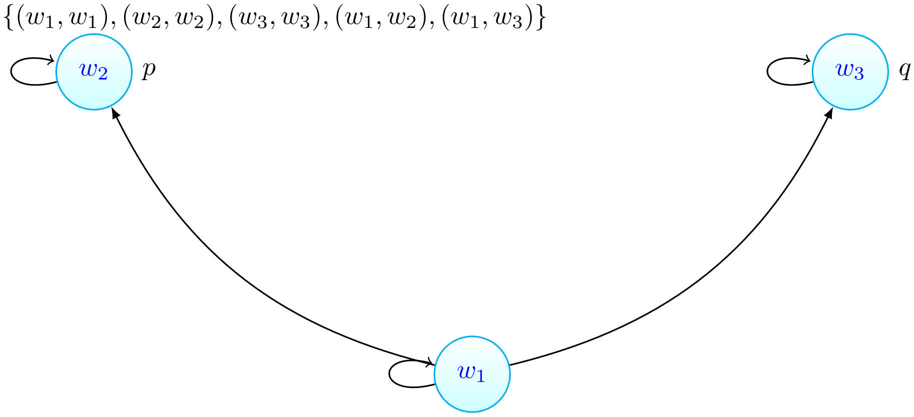
Да разгледаме същия модел и формулата:

$$p \vee \neg p$$

•$m, w_1 \not\models p$ (понеже $w_1 \notin V(p)$)
•$m, w_1 \not\models \neg p$ (защото $w_1 \leq w_2 \wedge m, w_2 \models p$)
От където следва, че $F, w_1 \not\models p \vee \neg p$ (и че $F \not\models p \vee \neg p$)

Пример 3:

Нека $F = (W, \leq)$, където $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ и
$\leq = \{(w_1, w_1), (w_2, w_2), (w_3, w_3), (w_1, w_2), (w_1, w_3)\}$



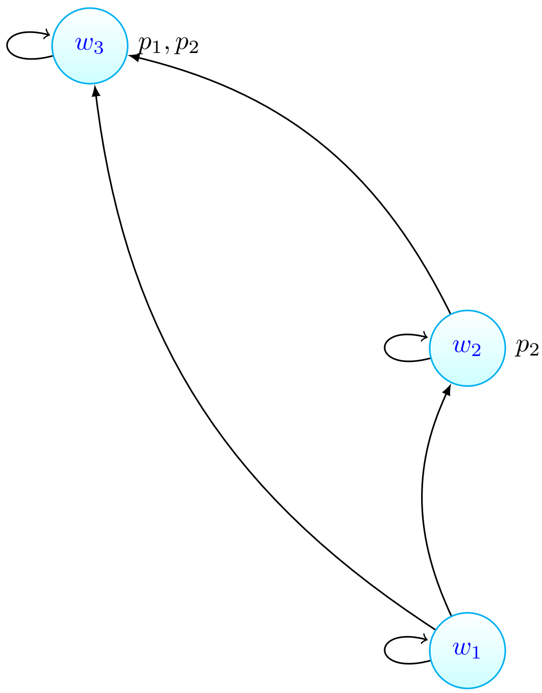
Да разгледаме:

$$\phi = (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$$

•$w_1 \not\models p \rightarrow q$, защото $w_1 \leq w_2$ и $w_2 \models p$ и $w_2 \not\models q$
•$w_1 \not\models q \rightarrow p$, защото $w_1 \leq w_3$ и $w_3 \models q$ и $w_3 \not\models p$
От където следва, че $F \not\models \phi$

Пример 4:

Нека $F = (W, \leq)$, където $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ и
$\leq = \{(w_1, w_1), (w_2, w_2), (w_3, w_3), (w_1, w_2), (w_2, w_3), (w_1, w_3)\}$



$\bullet V(p_1) = \{w_3\}$
$\bullet V(p_2) = \{w_2, w_3\}$
Да разгледаме:

$$\phi = p_2 \vee (p_2 \to p_1 \vee \neg p_1)$$

Тогава:
$\bullet w_1 \not\models p_2$
$\bullet w_1 \not\models p_2 \to p_1 \vee \neg p_1$
От където следва, че $F \not\models \phi$

Дефиниция:

$$CPL = \{\phi \mid \phi \text{ е съждителна тавтология } \}$$
$$IntPL = \{\phi \mid (\forall F)(F \models \phi)\}$$

Но владация на формула от класическата съждителна логика е валидация в едноточкова структура на Крипке. Тогава:

$$CPL = \{\phi \mid F \models \phi \ (F \text{ е едноточкова структура})\}$$

$F = (\{x_0\}, \{(x_0, x_0)\})$

$$V(p) = \begin{cases} \emptyset \text{ интуитивно лъжа} \\ \{x_0\} \text{ интуитивно истина} \end{cases}$$

Тогава $CPL \subseteq IntPL$. Но вече видяхме, че $p \vee \neg p \notin IntPL$, от където следва, че $IntPL \not\subseteq CPL$

Породени подструкури

Нека $(W, \leq)$ е частично наредено множество.
Нека $X \neq \emptyset$ и $X \subseteq W$.
$W_X = \{y \in W \mid \exists x \in X (x \leq y)\}$
Индуцирана от $\leq$ частична наредба в W_X означаваме $\leq_X$
$\leq_X = (W_X \times W_X) \cap \leq$
$\forall x, y \in W_X (x \leq y \iff x \leq_X y)$
$F = (W, \leq)$ - интуиционистка структура на Крипке
$F_X = (W_X, \leq_X)$ - породена от X подструктура на F
$X = \{x_0\}$. Ще бележим F_{x_0}.
Нека V е оценка в $F = (W, \leq)$
$V_X(p) = V(p) \cap W_X$
• Твърдим, че V_X е оценка в F_X.
Нека $p \in Pvar$, $x \in V_X(p)$ и $x \leq y$. Трябва да покажем, че $y \in V_X(p)$. Щом $x \in V(p)$, то $y \in V(p)$ (V е затв. нагоре). Но $y \in W_X$(от деф. на W_X). Следователно $y \in V(p) \cap W_X = V_X(p)$

$$m_X = (F_X, V_X) \text{ - породен от X подмодел на } m$$

Твърдение

Нека m_X е породения от X подмодел на m. Нека ϕ е съждителна формула. Тогава:

$$\forall x \in W_X (m_X, x \models \phi \iff m, x \models \phi)$$

Индукция по построението на ϕ:
1.$\phi \in PVar$

$m_X, x \models \phi \iff x \in V_X(p) \iff x \in V(p)$ и $x \in W_X \iff x \in W_X$ и $m, x \models p = \phi$

2.$\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$

$$m_X, x \models \phi \iff m_X, x \models \phi_1 \text{ и } m_X, x \models \phi_2 \iff$$

$$\iff \text{ (от и.х.)} m, x \models \phi_1 \text{ и } m, x \models \phi_2 \iff m, x \models \phi$$

3.$\phi = \phi_1 \vee \phi_2$ аналогично с 2.
4.$\phi = \phi_1 \to \phi_2$.

$$m_X, x \models \phi \iff \forall y \in W_X (x \leq_X y \wedge m_X, y \models \phi_1 \implies m_X, y \models \phi_2) \iff$$

(от и.п и от това, че наследниците на x в W са и в W_X и обратно.)

$$\iff \forall y \in W (x \leq y \wedge m, y \models \phi_1 \implies m, y \models \phi_2) \iff$$

$$\iff m, x \models \phi_1 \to \phi_2 = \phi$$

Следствие:

За всяка структура F и всяка формула ϕ:
$F \models \phi \iff$ за всяка коренова породена подструктура P на F е изпълнено, че $P \models \phi$

Следствие:

$$IntPL = \{\phi \mid F \models \phi \text{ за всички коренови структури } F\}$$

Дизюнктивно свойство на IntPl:

$$\phi \vee \psi \in IntPL \iff \phi \in IntPL \vee \psi \in IntPL$$

Доказателство:

$\Longleftarrow$ ясно.
$\Longrightarrow$ Нека $\phi \vee \psi \in IntPL$. Да допуснем, че $\phi \notin IntPl$ и $\psi \notin IntPl$
Тогава съществуват $m' = (F', V'), x' \in F'$ и $m'' = (F'', V''), x'' \in F''$, такива че F' и F'' са коренови, x' и x'' са съответните корени и:

$$m', x' \not\models \phi \text{ и } m'', x'' \not\models \psi$$

$F' = (W', \leq')$, $F'' = (W'', \leq'')$.
Б.о.о $W' \cap W'' = \emptyset$
$W = W' \cup W'' \cup \{x_0\}$ $(x_0 \notin W' \cup W'')$
$\leq = \leq' \cup \leq'' \cup \{(x_0, y) \mid y \in W\}$
$F = (W, \leq)$
$V = V' \cup V''$
$m = (F, V)$
$m'm''$ са породени подмодели на m.
Тогава от горното твърдение: $m, x' \not\models \phi$ и $m, x'' \not\models \psi$
Следователно: $m, x_0 \not\models \phi$ и $m, x_0 \not\models \psi$ (понеже $x_0 \leq x'$ и $x_0 \leq x''$)
$m, x_0 \not\models \phi \vee \psi$
Но тогава $\phi \vee \psi \notin IntPL$
Абсурд!

Задача 1.

Нека $n \geq 1$, а $\phi_1 \ldots \phi_n$ са модални формули. Да се докаже, че следните са еквивалентни.
i) Формулата $\Box\phi_1 \vee \Box\phi_2 \cdots \vee \Box\phi_n$ е от най-малката нормална модална логика.
ii) Поне една от формулите $\phi_1, \ldots, \phi_n$ е от най-малката нормална модална логика

Решение:

ii) $\implies$ i)
Нека $\vdash_K \phi_i$ за някое $i, (1 \leq i \leq n)$. От правилото за необходимост $\vdash_K \Box\phi_i$.
От тук следва, че $\vdash_K \Box\phi_1 \vee \Box\phi_2 \cdots \vee \Box\phi_n$
i) $\implies$ ii)
Да разгледаме контрапозицията $[\neg(ii) \implies \neg(i)]$.
Нека никоя от формулите $\phi_1, \ldots, \phi_n$ не е от най-малката нормална модална логика. Тогава за всяко i (понеже ϕ_i не е теорема на K) съществува коренова структура на Крипке $S_i = (W_i, R_i)$ с корен w_i, оценка V_i и модел $M_i = (S_i, V_i)$, за които $M_i, w_i \not\models \phi_i$.
Ще пострим контрамодел за формулата $\Box\phi_1 \vee \Box\phi_2 \cdots \vee \Box\phi_n$. Да приемем, че $W_i \cap W_j = \emptyset$ за всеки $i, j(1 \leq i < j \leq n)$. Нека $w_c \notin \cup_{i=1 \ldots n} W_i$. Да дефинираме:
$S_c = (\cup_{i=1 \ldots n} W_i \cup \{w_c\}, \cup_{i=1 \ldots n} R_i \cup \{(w_c, w_1)\} \ldots \{(w_c, w_n)\})$
$V_c = \cup_{i=1 \ldots n} V_i$
Разглеждаме модела $M_c = (S_c, V_c)$. M_i е **породен подмодел** на M_c за всяко $i = 1 \ldots n$
Тогава за произволно i е изпълнено, че $M_c, w_c \not\models \Box\phi_i$, защото $M_c, w_i \not\models \phi_i$ **(от лемата за породените структури)** и $w_c R w_i$. От тук следва, че $M_c \not\models \Box\phi_1 \vee \Box\phi_2 \cdots \vee \Box\phi_n$.
Следователно $\not\vdash_K \Box\phi_1 \vee \Box\phi_2 \cdots \vee \Box\phi_n$

Лема за породените структури:

Нека $F = (W, R)$ и $\emptyset \neq X \subseteq W$
$F_X = (W_X, R_X)$
$W_X = \cup_{x \in X, k \in \mathbb{N}} R^k(x)$
$R_X = R \cap (W_X \times W_X)$
Оценка: $V_X(p) = V(p) \cap W_X$
За всяка модална формула ϕ и всяко $y \in W_X$ е в сила

$$(F, V), y \models \phi \iff (F_X, V_X), y \models \phi$$

Доказателство:

С индукция по построението на ϕ
1.$\phi = p \in PVar$ за $y \in W_X$:

$$(F, V), y \models p \iff y \in V(p) \iff y \in V(p) \cap W_X \iff y \in V_X(p) \iff (F_X, V_X), y \models p$$

2. $\phi = \neg\phi_1$ за $y \in W_X$.

$$(F,V), y \models \neg\phi_1 \iff (F,V), y \not\models \phi_1 \iff$$

$$\iff (F_X, V_X), y \not\models \phi_1 \iff (F_X, V_X), y \models \neg\phi_1$$

3.$\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$ за $y \in W_X$.

$$(F,V), y \models \phi \iff (F,V), y \models \phi_1 \text{ и } (F,V), y \models \phi_2 \iff$$

$$\iff (F_X, V_X), y \models \phi_1 \text{ и } (F_X, V_X), y \models \phi_2 \iff$$

$$(F_X, V_X), y \models \phi_1 \wedge \phi_2$$

Аналогично с $\vee$, $\implies$ ...
4.$\phi = \Box\phi_1$ за $y \in W_X$.

$$(F,V), y \models \Box\phi_1 \iff \forall z \in W_X (yRz \implies (F,V), z \models \phi_1) \iff$$

$$\iff \forall z \in W_X (yRz \implies (F_X, V_X), z \models \phi_1) \iff$$

$$\iff (F_X, V_X), y \models \Box\phi_1$$

Следствие:

$$K = \{\phi \mid F \models \phi \text{ за всички коренови структури } F\}$$