

# Теорема на Хилберт-Акерман

Ангел Димитриев

## Дефиниция: Консервативно разширение.

Нека  $F$  е формална система. Нека  $F'$  е разширение на  $F$ . Тоест:  $F \subseteq F'$ . Ще казваме, че  $F'$  е **консервативно** разширение на  $F$ , ако за всяка формула  $A$  е изпълнено, че: ако  $\vdash_{F'} A$ , то  $\vdash_F A$ .

## Теорема за константите

Нека  $F'$  се получава от  $F$  чрез добавяне на нови константи. Тогава  $F'$  е консервативно разширение на  $F$ . При това ако  $x_1 \dots x_n$  са различни променливи и  $c_1 \dots c_n$  са различни нови константи, то за всяка формула  $A$ :

$$\vdash_F A \iff \vdash_{F'} A_{x_1 \dots x_n}[c_1 \dots, c_n]$$

## Дефиниция: Противоречива формална система.

Нека  $F$  е формална система.  $F$  е противоречива, ако за някоя формула  $A$ :

$$\vdash_F A \ \& \ \vdash_F \neg A$$

Тогава следното твърдение е изпълнено:

$F$  е противоречива  $\iff$  за всяка формула  $B$  е изпълнено, че  $\vdash_F B$

## Дефиниция: Хенкинова система.

Една формална система е **хенкинова**, ако за всяка затворена формула  $\exists x A$  на системата, съществува затворен терм  $t$ , такъв че  $\exists x A \implies A_x[t]$  е теорема на системата.

**Забележка.**  $A$  изразява свойство на  $x$ . Системата трябва да е *готова с пример*, в случай че свойството е изпълнено в нея. Но това **НЕ** означава, че тя дава примера преди да сме доказали, че свойството е вярно.

## Дефиниции: Специални константи. Специални аксиоми

Нека  $F$  е формална система. Ако  $\exists x A$  е затворена формула от символите на  $F$  (и специалните константи на  $F$ ), то символът  $K_{\exists x A}$  е **специална**

**константа** на  $F$  за формулата  $\exists xA$ .

Ако  $K_{\exists xA}$  е специална константа, то формулата:

$$\exists xA \implies A_x[K_{\exists xA}]$$

наричаме **специална аксиома** за  $K_{\exists xA}$ .

Ако  $F'$  е получен от  $F$ , добавяйки всички специални константи, то от **теоремата за константите** следва, че  $F'$  е консервативно разширение на  $F$ . А ако  $SA$  е множеството на всички специални аксиоми, то  $F'[SA]$  е **хенкинова формална система**.

### Теорема 1:

$F'[SA]$  е консервативно хенкиново разширение на  $F$ .

### Доказателство:

Нека  $A$  е формула на  $F$  и нека  $\vdash_{F'[SA]} A$ . От **теоремата за редукцията** имаме че (\*):

$$\vdash_{F'} A_1 \implies A_2 \implies \dots \implies A_n \implies A$$

където  $A_i (1 \leq i \leq n)$  са специални аксиоми. От **теоремата за тавтологииите**, може да считаме, че  $A_1$  се отнася за специална константа от най-високо ниво. Тогава  $A_1 \equiv \exists xB \implies B_x[C_{\exists xB}]$ . Да разгледаме  $A_1$ . Нека  $y$  е нова променлива. Тогава от **теоремата за константите**:

$$\vdash_{F'} \exists xB \implies B_x[C_{\exists xB}] \iff \vdash_{F'} \exists xB \implies B_x[y]$$

От  $(\Pi \exists)$  имаме:

$$\vdash_{F'} \exists xB \implies B_x[y] \iff \vdash_{F'} \exists y(\exists xB \implies B_x[y])$$

**Забележка:**  $y$  не участва в  $A_2 \dots A_n$  и . Освен това избрахме  $A_1$  да бъде от най-високо ниво. Следователно ако заместим  $A_1$  с получената формула в (\*) пак ще получим тавтология.

Съгласно пренексните операции (и  $y$  не участва в  $B$ ) имаме, че:

$$\vdash_{F'} \exists y(\exists xB \implies B_x[y]) \iff \vdash_{F'} (\exists xB \implies \exists yB_x[y])$$

Но  $\exists yB_x[y]$  е вариант на  $\exists xB$ . Следователно:  $\vdash_{F'} A_1$  От тук по **modus ponens**:

$$\vdash_{F'} \cancel{A_1} \implies A_2 \implies \dots \implies A_n \implies A$$

Прилагайки тези разсъждения  $n-1$  пъти получаваме, че  $\vdash_{F'} A$ , от където следва, че  $\vdash_F A$

### Твърдение 1:

Ако  $\vdash_F T$ , то всеки затворен частен случай на  $T$  от  $L_c(F)$  е тавтологично следствие на затворени частни случаи в  $L_c(F)$  на аксиомите и специалните аксиоми на  $F$ .

### Доказателство:

Нека  $\vdash_F T$  и нека  $T'$  е затворен частен случай на  $T$ .

Ще покажем, че  $T'$  е тавтологично следствие на затворени частни случаи на аксиомите и специалните аксиоми. Ще направим индукция по извода в  $F$ .

1. Ако  $T$  не се получава чрез  $(\Pi \exists)$ .

- Ако  $T$  е аксиома,

то  $T'$  е затворен частен случай на аксиома на  $F$ .

**Но всеки терм е тавтологично следствие на себе си** (в частност  $T'$  на  $T'$ ), от където следва, че  $T'$  е тавтологично следствие на затворени частни случаи на аксиомите на  $F$  (в частност аксиомата  $T$ ).

- Ако  $T$  е тавтологично следствие на  $T_1, T_2 \dots T_n$ :

Тогава  $T'$  се получава чрез замяна на свободните променливи с термове в  $T$ . Прилагаме същите замени в  $T_1, T_2 \dots T_n$  и получаваме  $T'_1, T'_2 \dots T'_n$ . Тогава  $T'_1, T'_2 \dots T'_n$  са затворени частни случаи на теоремите  $T_1, T_2 \dots T_n$ .

**От и.п.**  $T'_1, T'_2 \dots T'_n$  са тавтологични следствия на затворени частни случаи на аксиомите и специалните аксиоми. Но  $T'$  е тавтологично следствие на  $T'_1, T'_2 \dots T'_n$ . А  $T'$  е тавтологично следствие на това, на което  $T'_1, T'_2 \dots T'_n$  са тавтологични следствия.

Следователно  $T'$  е тавтологично следствие на затворени частни случаи на аксиомите и специалните аксиоми.

2. Ако  $T$  се получава от  $A \implies B$  чрез  $(\Pi \exists)$ .

Тогава:  $T' = \exists x A' \implies B'$ , където  $A'$  е частен случай на  $A$ , а  $B'$  е затворен частен случай на  $B$ .

Възможно е  $A'$  да **не е затворена**. Ако в  $A$  променливата  $x$  е участвала **свободно**, то в  $T'$  тя вече е свързана и **не можем да я заменим** в  $A'$ .

Тогава за да получим **затворен** частен случай на  $A \implies B$  **трябва да заменим свободните срещания на  $x$**  (които са в  $A'$ ) с терм.

Нека  $C_{\exists x A'}$  е **специалната константа** на  $\exists x A'$ .

Тогава  $A'_x[C_{\exists x A'}] \implies B'$  е **затворен частен случай на  $A \implies B$** . От **и.п.** формулата  $A'_x[C_{\exists x A'}] \implies B'$  е тавтологично следствие на аксиомите на  $F$  и специалните аксиоми на  $F$ .

Специалната аксиома за  $C_{\exists x A'}$  е  $\exists x A' \implies A'_x[C_{\exists x A'}]$ . Имаме, че:

- а)  $\exists x A' \implies A'_x[C_{\exists x A'}]$  е специална аксиома.

б)  $A'_x[C_{\exists x A'}] \implies B'$  е тавтологично следствие на аксиомите и специалните аксиоми на  $F$

От а), б) и транзитивността на импликацията следва, че:

$T' = \exists x A' \implies B'$  е тавтологично следствие на затворени частни случаи в  $L_c(F)$  на аксиомите и специалните аксиоми на  $F$ .

### Теорема на Хилеберт-Акерман:

Нека  $F$  е формална система, имаща само **безкванторни нелогически аксиоми**. Тогава  $F$  е противоречива тогава и само тогава, когато някоя дизюнкция от отрицания на частни случаи на нелогическите аксиоми на  $F$  е тавтологично следствие на частни случаи на аксиомите за равенството.

### Доказателство:

$\Leftarrow$  ) Нека някоя дизюнкция от отрицания на частни случаи на нелогически аксиоми на  $F$  е тавтологично следствие на частни случаи на аксиомите за равенството. Т.е. :

$$\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \dots \vee \neg A_n$$

е тавтологично следствие на частни случаи на аксиомите за равенството и  $A_i (1 \leq i \leq n)$  е частен случай на аксиомите на  $F$ . Но тогава:

$$\vdash_F \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \dots \vee \neg A_n$$

но  $A_i$  е частен случай на аксиома и съгласно **теоремата за замяната**:

$$\vdash_F A_1, \vdash_F A_2, \dots \vdash_F A_n$$

Горната формула може да запишем така:

$$A_1 \implies A_2 \implies A_3 \implies \dots \implies A_{n-2} \implies A_{n-1} \implies \neg A_n.$$

Но по **modus ponens**:

$$\cancel{A_1} \implies A_2 \implies A_3 \implies \dots \implies A_{n-2} \implies A_{n-1} \implies \neg A_n$$

$$\cancel{A_1} \implies \cancel{A_2} \implies A_3 \implies \dots \implies A_{n-2} \implies A_{n-1} \implies \neg A_n$$

$$\cancel{A_1} \implies \cancel{A_2} \implies \cancel{A_3} \implies \dots \implies A_{n-2} \implies A_{n-1} \implies \neg A_n$$

$\vdots$

$$\cancel{A_1} \implies \cancel{A_2} \implies \cancel{A_3} \implies \dots \implies \cancel{A_{n-2}} \implies \cancel{A_{n-1}} \implies \neg A_n$$

Следователно  $\neg A_n$  е **теорема** на  $F$ . Но и  $A_n$  е **теорема** на  $F$ .  
От тук следва, че  $F$  е **противоречива**.

$\implies$ ) Нека  $F$  е противоречива (и  $F$  има само безкванторни нелогически аксиоми). Тогава  $\vdash_F x \neq x$ . Но от твърдение 1, следва, че  $c \neq c$  ( $c$  е произволна константа от  $L_c(F)$ ) е **тавтологично следствие** на затворени в  $L_c(F)$  частни случаи на аксиомите и специалните аксиоми на  $F$ .  
Т.е от затворени частни случаи на аксиомите и специалните аксиоми на  $F$ , използвайки само **теорема за тавтологии**, може да докажем, че  $c \neq c$ .  
Следователно имаме нещо от типа:

$$A_1 \implies A_2 \implies A_3 \implies \dots \implies A_n \implies c \neq c$$

което е тавтология.  $A_i (1 \leq i \leq n)$  е частен случай на аксиомите и специалните аксиоми на  $F$ . Ще трябва да се освободим от **аксиомите за субституция и специалните аксиоми**. Така ще получим тавтология, която е дизюнкция от отрицания на затворени частни случаи в  $L_c(F)$  на аксиоми за равенството и нелогически аксиоми на  $F$ . Имаме следната тавтология:

$$\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3 \dots \vee \neg A_n$$

$$A_i (1 \leq i \leq n)$$

- Затворена аксиома за субституцията.
- Специална аксиома.
- Затворен частен случай на аксиома за равенството.
- Затворен частен случай на нелогическа аксиома на  $F$ .

Но  $F$  е отворена формална система - **нелогическите аксиоми нямат квантори**. В аксиомите за равенството също **няма квантори**. Тогава може да разпознаем дали  $A_i$  е аксиома за субституцията/специална аксиома по това **дали съдържа квантор**.

Нека  $\exists x A'$  е формулата с възможно най-много квантори от тавтологията. Тогава  $\exists x A'$  е парче от:

- $A'_x[a] \implies \exists x A'$  (част от аксиома за субституцията).
- $\exists x A' \implies A'_x[C_{\exists x A'}]$  (част от специална аксиома)

Тогава имаме следната тавтология:

$$\neg(\exists x A' \implies A'_x[C_{\exists x A'}]) \vee \neg(A'_x[a_1] \implies \exists x A') \vee \dots \vee \neg(A'_x[a_m] \implies \exists x A') \vee$$

$$\vee \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3 \dots \vee \neg A_s$$

където  $\exists x A'$  не участва в  $A_1, \dots, A_s$ .

**Забележка:** Ако някой дизюнкт не участва във формулата

(например:  $A'_x[a] \implies \exists x A'$ ), то понеже нашата дизюнкция е тавтология, можем да го добавим.

Искаме да премахнем  $\exists x A'$ . След краен брой прилагания на тази процедура (която сега ще приложим), ще премахнем всички квантори от тавтологията.

**Заместваме**  $\exists x A'$  с  $A'_x[C_{\exists x A'}]$ )

$$\neg(A'_x[C_{\exists x A'}] \implies A'_x[C_{\exists x A'}]) \vee \neg(A'_x[a_1] \implies A'_x[C_{\exists x A'}]) \vee \dots \vee \neg(A'_x[a_m] \implies A'_x[C_{\exists x A'}]) \vee$$

$$\vee \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3 \dots \vee \neg A_s$$

Но  $A'_x[C_{\exists x A'}] \implies A'_x[C_{\exists x A'}]$  е аксиома, т.е целият дизюнкт можем да го премахнем. Така получаваме тавтологията (\*):

$$\neg(A'_x[a_1] \implies A'_x[C_{\exists x A'}]) \vee \dots \vee \neg(A'_x[a_m] \implies A'_x[C_{\exists x A'}]) \vee$$

$$\vee \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3 \dots \vee \neg A_s$$

За всеки израз  $t$  с  $t^i$  да означим израза, който се получава след заместване на  $C_{\exists x A'}$  с  $a_i$ . **Заместваме и в индексите на специалните константи.** При тази замяна, **спциалната константа се превръща в специална константа, а специалните аксиоми в специални аксиоми.** Получаваме  $m$  тавтологии.

$$\neg(A'_x[a_1^1] \implies A'_x[a_1]) \vee \dots \vee \neg(A'_x[a_m^1] \implies A'_x[a_1]) \vee \neg A_1^1 \vee \dots \vee \neg A_s^1$$

$$\neg(A'_x[a_1^2] \implies A'_x[a_2]) \vee \dots \vee \neg(A'_x[a_m^2] \implies A'_x[a_2]) \vee \neg A_1^2 \vee \dots \vee \neg A_s^2$$

⋮

$$\neg(A'_x[a_1^m] \implies A'_x[a_m]) \vee \dots \vee \neg(A'_x[a_m^m] \implies A'_x[a_m]) \vee \neg A_1^m \vee \dots \vee \neg A_s^m$$

Ако в  $i$ -тата тавтология  $A'_x[a_i]$  е истина, то първите  $m$  дизюнкта ще са лъжа. От тук получаваме, че:

$$A'_x[a_1] \implies \neg A_1^1 \vee \dots \vee \neg A_s^1$$

$$A'_x[a_2] \implies \neg A_1^2 \vee \dots \vee \neg A_s^2$$

⋮

$$A'_x[a_m] \implies \neg A_1^m \vee \dots \vee \neg A_s^m$$

От (\*) за да бъде истина дизюнкта  $\neg(A'_x[a_1] \implies A'_x[C_{\exists x A'}])$  ( $1 \leq i \leq m$ ), то трябва  $A'_x[a_1]$  да е истина. Следователно получаваме:

$$\neg(A'_x[a_1] \implies A'_x[C_{\exists x A'}]) \implies A'_x[a_1]$$

$$\neg(A'_x[a_2] \implies A'_x[C_{\exists x A'}]) \implies A'_x[a_2]$$

$\vdots$

$$\neg(A'_x[a_m] \implies A'_x[C_{\exists x A'}]) \implies A'_x[a_m]$$

Следователно следната формула е тавтология:

$$\neg A_1^1 \vee \dots \vee \neg A_s^1 \vee \dots \vee \neg A_1^m \vee \dots \vee \neg A_s^m \vee \neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_m.$$

Нека Б.О.О в горната формула няма квантори (ако има, то ще приложим отново горната стратегия). Всеки дизюнкт е частен случай или на аксиомите за равенството, или на нелогическите аксиомы за  $F$ . Нека с  $\alpha_i$  бележим  $i$ -тият дизюнкт, който е частен случай на аксиома за равенството, а с  $\beta_i$   $i$ -тият дизюнкт, който е частен случай на нелогическите аксиомы на  $F$ . (броим от ляво надясно). Тогава следното е тавтология (след преподреждане):

$$\alpha_1 \implies \alpha_2 \implies \dots \implies \alpha_k \implies (\neg \beta_1 \vee \dots \vee \neg \beta_r)$$

Получихме, че дизюнкцията от отрицания на частни случаи на нелогическите аксиомы на  $F$  ( $\neg \beta_1 \vee \dots \vee \neg \beta_r$ ) е тавтологично следствие на частни случаи на аксиомите за равенството ( $\alpha_1 \dots \alpha_k$ ).