(11)

Граматики

$$G = \langle V, \Sigma, S, R \rangle$$

V - крайно м-во от променливи

Σ - крайно м-во от символи

S - стартова променлива $(S \in V)$

R - правила

$$R \subseteq (V \cup \Sigma)^{+} \times (V \cup \Sigma)^{*}$$

Контекстно-свободни граматики

Правилата са във вида

$$R \subseteq V \times (V \cup \Sigma)^{*}$$

def: $w \xrightarrow[G]{} u$ ако от w можем да получим u, използвайки правилата на G

def. $L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \xrightarrow[G]{} w \}$

G: $S \to aS \mid \varepsilon$ $\qquad L(G) = a^*$

def: L е контекстно-свободен, ако $\exists$ к.-с. граматика G : $L(G) = L$

~~зад1~~ Докажете, че $L = \{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ е к.-с.

$S \to \overset{1}{aSb} \mid \overset{2}{\varepsilon}$

пример: $aabb$

$S \xrightarrow{1} a\underline{S}b \xrightarrow{1} a\underbrace{aSb}b \to aabb$ ✓

трябва да покажем, че:

$L(G) = L$

1) $L(G) \subseteq L$

2) $L \subseteq L(G)$

1) $L(G) \subseteq L$

Всяка дума w ($w \in \Sigma^*$), която се извежда от G, е в езика L.

$\forall w \in \Sigma^* \ (S \xrightarrow[G]{} w) \Rightarrow w \in L$

! $S \xrightarrow[G]{*} \underbrace{\{a^n S b^n \mid n \in \mathbb{N}\}}_{\square} \cup \underbrace{\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}}_{0}$

Индукция по дължината на извода.

База:

за 0 стъпки: S $\square$ ✓

И.П.

Допускаме, че за k стъпки

$S \xrightarrow[G]{k} \underbrace{\{a^n S b^n \mid n \in \mathbb{N}\}}_{1\text{ сл}} \cup \underbrace{\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}}_{2\text{ сл.}}$

И. С.

K+1 стъпка

K+1 стъпка

$\boxed{\text{1 сл.}}$ $S \xrightarrow[G]{K} a^n S b^n \to a^n a S b b^n = a^{n+1} S b^{n+1}$ ✓

$\to a^n b^n$ ✓

$\boxed{\text{2 сл.}}$ $S \xrightarrow[G]{K} a^n b^n \to$ × (K+1 стъпка няма)

от (!):

$$S \xrightarrow[G]{*} \underbrace{\{a^n S b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}}_{X}$$

$$X \cap \Sigma^* = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\Rightarrow L(G) \subseteq L$$

$L \subseteq L(G)$

Всяка дума от езика може да се изведат от G.

$$(\forall i \in \mathbb{N})\ S \xrightarrow[G]{*} a^i b^i$$

Индукция по дължината на дума.

База: 0 $\qquad \boxed{\varepsilon} \qquad S \to \varepsilon$

И. П. Допускаме, че можем от S да изведем всички думи от L с дължина $< k$ $(k \geq 1)$

И. С. разглеждаме произволна дума w от L: $|w| = k$

$$w = a^t b^t \quad (t + t = k)$$

$$w = a\underbrace{a^{t-1} b^{t-1}}_{<k \quad \in L} b$$

$$S \to a\boxed{S}b \xrightarrow[\text{и.п.}]{} a\,a^{t-1} b^{t-1} b = w \ ✓$$

$\Rightarrow (\forall i \in \mathbb{N})\ S \xrightarrow[G]{*} a^i b^i$

$\Rightarrow L \subseteq L(G)$

$\Rightarrow L = L(G)$

$\Rightarrow L$ е к.-с.

Домашно: $L = \{a^n b^k \mid n, k \in \mathbb{N} \wedge n > k\}$

Покажете, че L е к.-с.

Напишете к.-с. граматика за:

1) $L = \{a^n b^{n+3} \mid n \in \mathbb{N}\}$

$S \to aSb \mid bbb$

$S \xrightarrow{*} \{a^n S b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a^n b^{n+3} \mid n \in \mathbb{N}\}$

2) $L = \{a^n b^k c^t \mid n = k + t\}$

$$\underbrace{a\,a\,\underbrace{a\,b}_{R}\,c\,c}_{S}$$

$$G: \begin{cases} S \to aSc \mid A \\ A \to aAb \mid \varepsilon \end{cases}$$

$$S \to aSc \to aaScc \to aaAcc \to$$
$$\to aaaAbcc \to aaabcc$$

3) $L = \{ a^n b^{2k} c^k d^{2n} \mid n, k \in \mathbb{N} \}$

$$\underbrace{a\,\underbrace{bbbbcc}_{A}\,dd}_{S}$$

$$G: \begin{cases} S \to aSdd \mid A \\ A \to bbAd \mid \varepsilon \end{cases}$$

! Твърдение: Всеки регулярен език е К.-С.

! Крайни $\subseteq$ рег. $\subseteq$ К.-С. $\subseteq$ ... !

S → <подлог> <сказуемо> <допълнение>

риба лети сладолед

??? ???

→ няма контекст!