Решения на контролно теория 2 по Дискретни структури, специалност Информационни системи, първи курс, зимен семестър на 2019/2020 г.

Задача 1, Вариант А

Дефинирайте релацията "А е равномощно с В". Обяснете кои от множествата $\mathbb{Z}$ и $2^{\mathbb{N}}$ са равномощни с $N \times N$.

Задача 1, Вариант Б

Дефинирайте кога множеството А е изброимо. Обяснете кои от множествата $\mathbb{Z}$ и $2^{\mathbb{N}}$ са изброими.

Решение

А е равномощно с В $\leftrightarrow$ съществува биекция $f : A \to B$.
А е изброимо $\leftrightarrow$ f е крайна или съществува биекция $f : \mathbb{N} \to A$.
Множеството $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо, $\mathbb{Z}$ също е изброимо, от където следва, че съществува биекция м/у двете множества. $2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо. Следователно не съществува биекция с $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Задача 2, Вариант: А

Нека А е множество с n елемента, а В е множество с k елемента.

а) Колко са функциите $f : A \to B$?

б) Колко са инекциите $f : A \to B$?

Задача 2, Вариант: Б

Нека А е множество с n елемента.

а) Колко са k-елементните подмножества на А?

б) Колко са всички подмножества на А?

Решение

|A| = n, |B| = m.

а) Функциите f : A → B са n^m.
Подмножествата на A с k елемента са $\binom{n}{k}$

б) Инкециите f : A → B са $\frac{m!}{(m-n)!}$, защото всяка инекция е наредена n-орка с различни елементи от m. Броят им е $m*(m-1)*\cdots*(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$
Всички подмножества на A са 2^n.

Задача 3

Нека F е множество от Булеви функции.

а) Дефинирайте [F] и определете кога F е затворено и кога пълно.

б) Възможно ли е F да е затворено множество, ако F не съдържа функцията $f(x, y) = x$?

в) Възможно ли е F да е пълно, ако F не съдържа функцията $f(x, y) = y$?

Решение

а) F е затворено ↔ F = [F].
F е пълно ↔ всяка булева функция f може да бъде представена като композиция на функциите от F.

б) F не може да е затворено множество, ако F не съдържа функцията $f(x, y) = x$. Това следва от критерия за затвореност.
F може да е пълно, ако F не съдържа функцията $f(x, y) = y$. Това следва от теоремата на Бул, която твърди, че $\{\wedge, \vee, \neg\}$ е пълно. В множеството не се съдържа f.

Задача 4

За булевата функция f на n аргумента , различна от константата 0, покажете съвършената дизюнктивна нормална форма в общ вид. Дефинирайте, кога е самодвойнствена и кога е монотонна.

а) Намерете тази форма за функциите (по 1 функция на вариант) $f_1 = (00011011), f_2 = (00100111)$.

б) Самодвойнствени ли са?

в) Монотонни ли са?

Решение

$f(x_1, x_2 \dots x_n)$. СДНФ на f е $(t_1^1 \wedge t_2^1 \dots \wedge t_n^1) \vee (t_1^2 \wedge t_2^2 \dots \wedge t_n^2) \dots \vee (t_1^k \wedge t_2^k \dots \wedge t_n^k)$, където $t_i^j \in \{x_i, \neg x_i\}$.
Двойствена функция на f наричаме функцията $f^*(x_1, \dots, x_n) = \neg f(\neg x_1, \dots, \neg x_n)$.
Булева функция f е самодвойствена, ако f съвпада със своята двойствена функция.
Нека $\alpha = (a_1, a_2 \dots a_n)$ и $\beta = (b_1, b_2 \dots b_n)$. Казваме, че $\alpha \leq \beta \leftrightarrow a_1 \leq b_1 \dots a_n \leq b_n$. Функцията f е монотонна, ако: $\alpha \leq \beta \rightarrow f(\alpha) \leq f(\beta)$.
$f_1 = (00011011)$ и $f_2 = (00100111)$. Представяме ги в таблица:

x	y	z	$f_1(x,y,z)$	$f_2(x,y,z)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

а) СДНФ:
$f_1(x,y,z) = (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z)$
$f_2(x,y,z) = (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z)$

б) Функциите не са самодвойствени.
$f_1(0,1,0) \neq \neg f_1(1,0,1)$
$f_2(0,1,0) \neq \neg f_2(1,0,1)$

в) Функциите не са монотонни.
$f_1(1,0,0) \not\leq f_1(1,0,1)$, но $(1,0,0) \leq (1,0,1)$
$f_2(0,1,0) \not\leq f_2(0,1,1)$, но $(0,1,0) \leq (0,1,1)$