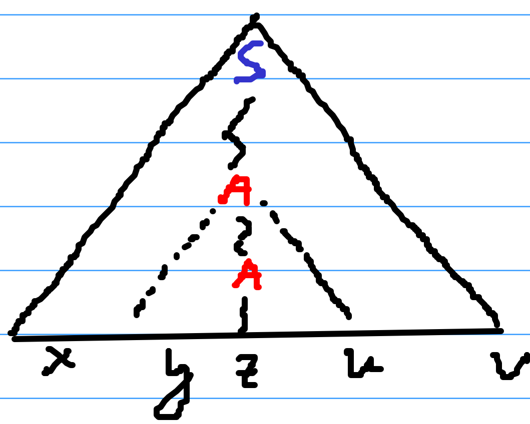
15

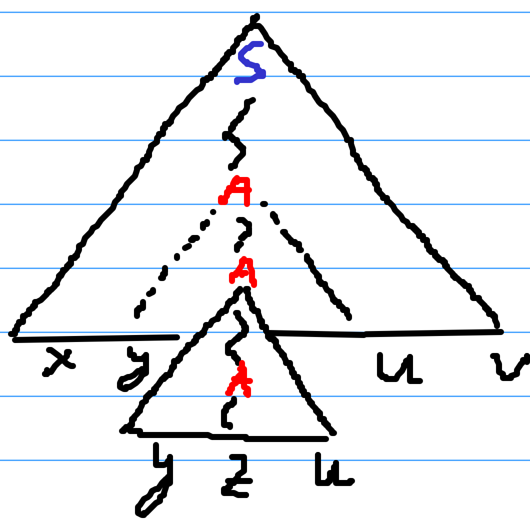
Лема за покачването

Ако L е к.-с., то:

$\exists p \in \mathbb{N}^+ \, (\forall w \in L) \, |w| \geq p \quad w = xyzuv$

- $|yzu| \leq p$
- $|yu| \geq 1$
- $(\forall i \in \mathbb{N}) \; xy^i z u^i v \in L$



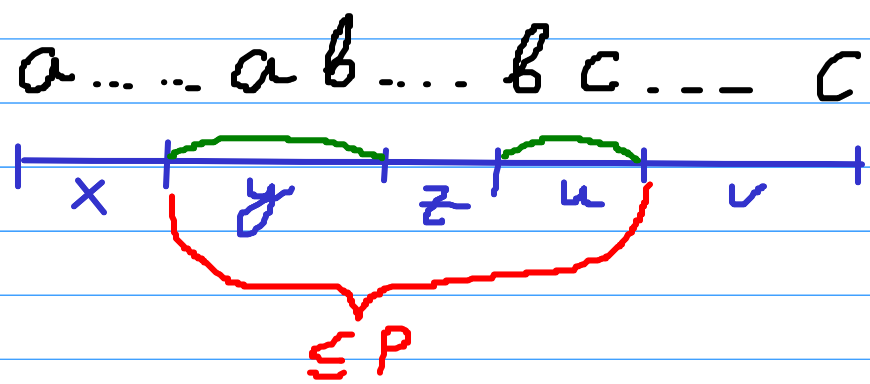


зад1 Докажете, че $L=\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е к.-с.

Допускаме, че е к.-с.

=> изпълнена е р. L (пишем я)

$w = a^p b^p c^p$ $\quad |w| = 3p > p$ ✓ $\quad w \in L$ ✓



1 сл. y започва в a-тата.

$|yzu| \le p$ =>

1.1 сл. u завършва в a-тата

=> $yu = a^r$ $(r \geq 1)$ $\quad$ a..ab...bc...c $\quad$ yzu

=> $xy^2zu^2v = a^{p+r} b^p c^p \notin L$

$a \ldots a b \ldots b c \ldots c$

$\underbrace{\quad}_{yzu}$

1.2 u завършва в b-тата

$yu = a^r b^s \qquad r \geq 1,\ s \geq 1$

(!) Винаги в междинния случай помпваме надолу, ако е възможно

разглеждаме

$xy^0zu^0v = xzv = a^{p-r} b^{p-s} c^p \notin L$

$p-r \neq p$

$p-s \neq p$

2сл. Ако y започва в b-тата

$|yzu| \leq p$

2.1) u завършва в b-тата

$yu = b^s \qquad s \geq 1$

$a \ldots a b \ldots b c \ldots c$

$\underbrace{\quad}_{yzu}$

$xy^2zu^2v = a^p b^{p+s} c^p \notin L$

$p+s \neq p$

$a..ab..bc..c$

$\underbrace{\quad}_{yzu}$

2.2) u завършва в c-тата

$yu = b^r c^s \quad r \geq 1 \quad s \geq 1$

$xy^0zu^0v = a^p b^{p-r} c^{p-s} \notin L$

$p \neq p-r \quad p \neq p-s$

3 сл) y започва в c-тата

$a..ab..bc..c$

$\underbrace{\quad}_{yzu}$

$\Rightarrow yu = c^r \quad r \geq 1$

$xy^2uz^2v = a^p b^p c^{p+r} \notin L$

$p+r \neq p$

$\Rightarrow$ P. L не е изпълнена

$\Rightarrow$ L не е к.с.

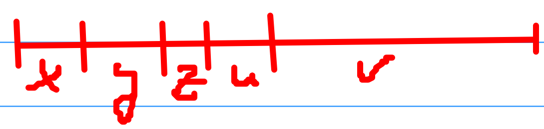
зад 2 Докажете, че $L=\{a^n b^k c^t \mid n>k>t\}$ не е к.-с.

Допускаме, че е к.-с.

$\Rightarrow$ изпълнена е р. L (пишем Я)

$$w = a^{p+2} b^{p+1} c^p \quad |w| = 3p+3 > p, \ \in L$$

$$a^{p+2} b^{p+1} c^p$$



• 1сл. y започва в а-тата

$|yzu| \le p$

1.1) u завършва в а-тата

$yu = a^r \quad r \ge 1$

$xy^0zu^0v = a^{p-r+2} b^{p+1} c^p \notin L$

$p-r+2 \not> p+1$

$r \ge 1$

1.2) u завършва в b-тата

$$yu = a^r b^s \qquad r \ge 1, \; s \ge 1$$

$$xy^0zu^0v = a^{p+2-r} \underbrace{b^{p+1-s} c^p} \notin L$$

$$p+1-s \not> p$$

$$s \ge 1$$

2 сл) y започва в b-тата

$$|yzu| \le p$$

2.1) u завършва в b-тата

$$yu = b^r \qquad r \ge 1$$

$$xy^2zu^2v = \underbrace{a^{p+2} b}^{p+1+r} c^p \notin L$$

$$r \ge 1$$

$$p+2 \not> p+1+r$$

2.2) u завършва в c-тата

$$yu = b^r c^t \qquad r \ge 1, \; t \ge 1$$

При xy^2zu^2v броят на b-тата

ще се увеличи с r $(r \geq 1)$

$\Rightarrow$ $\underbrace{\text{броят на a-тата}}_{p+2} \cancel{>} \underbrace{\text{броят на b-тата}}_{p+1+r}$

3 сл. y започва в c-тата

$yu = c^r \quad (r \geq 1)$

$$xy^2zu^2v = a^{p+2}\underbrace{b^{p+1}c^{p+r}}\notin L$$

$p+1 \cancel{>} p+r$

$r \geq 1$

зад Докажете или опровергайте, че

$L = \{a^n b^k c^k \mid n, k \in \mathbb{N}\}$

е к.-с.

Езикът е к.-с.

$$L = \underbrace{\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}}_{\text{рег}} \cdot \underbrace{\{b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}}_{\text{к.-с.}}$$

a^k

$\Rightarrow L$ е к.-с.

$$\overbrace{\{a^n b^k c^k \mid n,k \in \mathbb{N}\}}^{\text{к.-с.}} \cap \overbrace{\{a^k b^k c^n \mid n,k \in \mathbb{N}\}}^{\text{к.-с.}}$$

$$= \underbrace{\{a^n b^n c^n \mid n,k \in \mathbb{N}\}}_{}$$

не е к.-с.

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$

Ако допълненията запазваше к.-с, то и сеченията щеше да запазва к.-с.

Зад $L_1 = \{u!v!y \mid |u| = N_a(y) \wedge (\exists k)\ |v| = 2k \wedge N_b(v) = |v|/2\}$

$L_2 = \{u!v!y \mid N_a(u) = N_b(v) \wedge N_a(v) = 2N_c(y)\}$

L_1 е к.-с.

$$S \to aSa \mid bSa \mid Sb \mid A$$

$$A \to aAb \mid bAa \mid \varepsilon \mid AA$$

$\Rightarrow$ трябва доказалство!

L_2 не к.-с.

$$\underbrace{a^p}_{u}!\underbrace{b^p a^{2p}}_{v}!\underbrace{b^p}_{y}$$

С P. L.

$$a\ldots \underset{y}{\underline{a}}\,\underset{z}{\underline{!}}\,\underset{u}{\underline{b}}\ldots b\; a\ldots a\; a\ldots \underset{y}{\underline{a}}\,\underset{z}{\underline{!}}\,\underset{u}{\underline{b}}\ldots b$$

$$a^p!a^{2p}b^p!b^p \in L$$

$$|w| \geq p$$

1 сл. ! е част y или u.

тогава при ↑ ще имаме повече ! $\notin L$

2 сл. ! не е част от y и u.

2.1) y започва в първите a-та

$|yzu| \le p$

2.1.1) u завършва в първите a-та

$yu = a^r \qquad r \ge 1$

$xy^2zu^2v = a^{p+r}!\,a^{2p}b^p!\,b^p \notin L$

$p+r \ne p \quad (r \ge 1)$

2.1.2) u завършва във вторите a-та.

$yu = a^r \qquad r \ge 1$

$xy^0zu^0v = a^{p-t}!\,a^{2p-s}b^p!\,b^p \notin L$

2.2 u започва във вторите a-та

2.2.1. u завършва във вторите a-та.

$$yu = a^r \quad (r \geq 1)$$

$$xy^0zu^0v = a^p ! a^{2p-r} b^p ! b^p \notin L$$

$$2p - r \neq 2 * p$$

$$r \geq 1$$

2.2.2) u завършва в първите b-та

$$yu = a^r b^s \qquad r \geq 1,\ s \geq 1$$

$$xy^0zu^0v = a^p ! a^{2p-r} b^{p-s} ! b^p \notin L$$

- $p \neq p - s \qquad s \geq 1$
- $2p - r \neq 2p \qquad r \geq 1$

2.3 y започва в първите b-та

2.3.1) u завършва в първите b-та

$yu = b^r \quad r \geq 1$

$xy^2zu^2v = a^p ! a^{2p} b^{p+r} ! b^p \notin L$

$p \neq p + r \quad r \geq 1$

2.3.2 u зав. във вторите b-та

$xy^0zu^0v = a^p ! a^{2p} b^{p-r} ! b^{p-s} \quad r \geq 1, s \geq 1$

$\notin L$

- $p \neq p - r \quad r \geq 1$
- $2p \neq 2(p-s) \quad s \geq 1$

2.4 y започва във вторите b-та

$yu = b^r \quad r \geq 1$

$xy^2zu^2v = a^p ! a^{2p} b^p ! b^{p+r} \notin L$

$2p \neq 2(p+r) \quad r \geq 1$

$\Rightarrow$ P.L не е изпълнено

$\Rightarrow$ L не е к.-с.

Зад $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ к.-с. ?

> Th. Parikh.
>
> Нека L е унарен език.
>
> L е рег $\Leftrightarrow$ L е к.-с.

$\Rightarrow$ Не е к.-с. (от Th. Parikh)

Зад $\Sigma = \{a, b\}$

$L = \{x!y \mid x$ е инфикс на $y\}$

- $a^p ! a^p$ ✗ $\quad \underbrace{a \ldots a}_{y}\underbrace{!}_{u}\underbrace{a}_{v} \ldots a$
- $a^p ! b^p a^p$ ✗ $\quad a \ldots a ! \overline{b \ldots b}^{yuv} a \ldots a$
- $a^p b^p ! a^p b^p$ ✓