ЕАИ

1. Оценяване

- Контролно 1 (зад. + Теория)
- Контролно 2 (зад + Теория)
- Изпит - задачи (≥ 3.00)
- Изпит - Теория (≥ 3.00)

Преди всяко контролно - тест в moodle

1

- def: Азбука - Крайно мн-во от символи бележим с Σ

$\Sigma_{cyrilic} = \{а, б, в \dots я\}$

- def: дума над азбука (Σ)

$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n : \forall i \{1 \dots n\} \ \alpha_i \in \Sigma$

n - дължина на думата

При $n=0$ - празната дума ε

- def: Език - множество от думи над Σ

$\Sigma = \{a, b\}$ $\quad L = \{ab, bb, \varepsilon\}$

Операции над езици.

(f(език$_1$, език$_2$) = език$_3$)

1) Обединение

L_1, L_2 - езици над Σ

$L_1 \cup L_2 = \{w \mid w \in L_1 \lor w \in L_2\}$

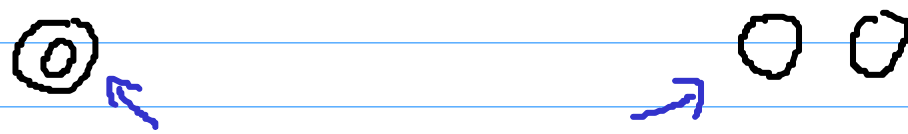
Пример:

$L_1 = \{a\}$ $\quad$ $L_2 = \{ba, b\}$

$L_1 \cup L_2 = \{a, ba, b\}$

$|L_1| = n \wedge |L_2| = m \Rightarrow$

$\Rightarrow \max(n,m) \le |L_1 \cup L_2| \le n+m$



диаграми на Вен

2) Конкатенация

L_1, L_2 езици над Σ

$L_1 . L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\}$

$L_1 = \{\underline{ab}, \underline{b}\}$ $\quad$ $L_2 = \{\underline{bb}, \underline{a}\}$

$L_1 . L_2 = \{aba, abbb, ba, bbb\}$

$\left.\begin{matrix} L_1 = n \\ L_2 = m \end{matrix}\right\} \Rightarrow |L_1 . L_2| \le n . m$

Неутрални елементи на $\cup$ и $.$?

def: Неутрален елемент на $op: A \times A \to A$ е θ, ако $\forall a \in A\ (a \text{ op } \theta = \theta \text{ op } a = a)$

Примери:

Неутрален елемент на:

1) $+$ $\quad 0$

2) $\cap$ $\quad \cup$

3) $*$ (умножение) $\quad 1$

! 4) $\cup$ $\quad \emptyset$

! 5) $.$ (конкатенация) $\quad \{\varepsilon\}$

3) Звезда на Клини

! унарна операция

L - език над Σ

$$L^* = \{w_1 w_2 \dots w_n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \forall i \in \{1..n\}\ \alpha_i \in L\}$$

пример: $L = \{ab, b, aa\}$

$$L^* = \{\underbrace{\varepsilon}_{\in L_0}, \underbrace{ab}_{\in L_1}, \underbrace{b}_{\in L_1}, \underbrace{aa}_{\in L_1}, \underbrace{abb}_{\in L_2}, \underbrace{abaa}_{\in L_2}, \underbrace{aab}_{\in L_2} \dots$$

$$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n \qquad L^n = \underbrace{L \cdot L \cdot L \cdot \dots L}_{n \text{ пъти}}$$

$L^* = L^0 \cup L^1 \cup \dots$

! За всеки език L: $L^0 = \{\varepsilon\}$

$L^0 \to 0$ пъти конкатенирай $L \Rightarrow \{\varepsilon\}$

неутр. ел.

($x^0 \to 0$ пъти умножи $x \Rightarrow 1$)

неутр. ел.

! $|L| = n \Rightarrow |L^*| = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \infty & n > 0 \end{cases}$ $(L = \emptyset)$

Индуктивно дефинирани мн-ва

- Пример – четните цели числа.

База: 0 е четно.

И.С: Ако α е четно, то

$\alpha - 2$ е четно
$\alpha + 2$ е четно

$\dots 6 \quad 4 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \dots$

def Регулярен език над Σ

База: • $\emptyset$ е рег. език.

• $\{a\}$ е рег. език $(\forall a \in \Sigma)$ → синглетони

И.С. Ако L_1 и L_2 са рег езици, то

• $L_1 \cup L_2$ е рег. език

• $L_1 . L_2$ е рег. език

• L_1^* и L_2^* са рег. езици

(!) Тези операции се прилагат краен брой пъти.

~~зад~~ Докажете, че $L = \{ab, bba\}$ е регулярен $(\Sigma = \{a, b\})$

$\{a\}_p$ $\{b\}_p$ — от базата

$\{ab\}_p$ $\{bb\}_p$

$\{ab, bba\}_p$ $\cup$ $\{bba\}_p$ $\cdot$

Твърдение

Всеки краен език е регулярен

Скица на доказателството:

- КРАЕН брой обединения на думи
- дума - краен брой конкатенации на $\underbrace{\text{синглетони}}_{\text{регулярен}}$ $(\{a\})$

Зад $\Sigma = \{a\}$ Докажете, че

$$L = \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ е четно}\}$$

е регулярен.

Решение:

$\{aa\}_p$ (защото е краен)

Да разгледаме $\{aa\}^*_p$ (* запазва регулярността)

$$\{aa\}^* = \{\varepsilon, aa, aaaa, aaaaaa \dots\} =$$

$$= \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ е четно}\} = L$$

$\Rightarrow$ L е регулярен

Зад. Нека $\Sigma = \{a\}$. Докажете, че $L = \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ е нечетно}\}$ е регулярен.

Решение:

Доказахме, че $\{a^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ е четно}\}$ е регулярен.

Разглеждаме:

$$\{a\} \cdot \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ е четно}\} =$$

$$= \{aa^0, aa^2, aa^4, aa^6 \dots\} =$$

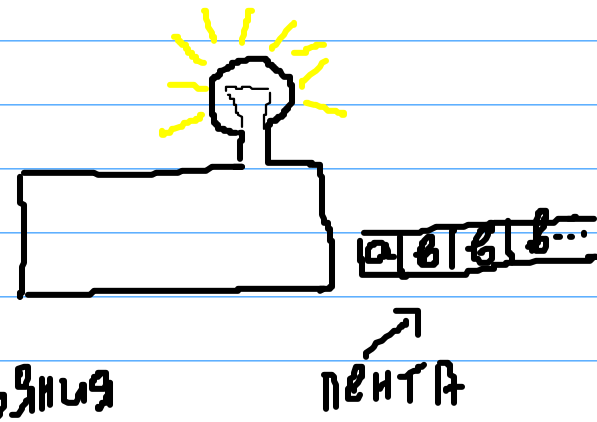
$$= \{a^1, a^3, a^5, a^7 \dots\} =$$

$$= \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ е нечетно}\}$$

$\Rightarrow$ регулярен.

def: Краен автомат

$A = \langle Q, \Sigma, s, F, \delta \rangle$



- Q – крайно мн-во от състояния
- Σ – азбука на автомата
- $s \in Q$ – начално състояние
- $F \subseteq Q$ – мн-во от заключителни състояния
- $\delta: Q \times \Sigma \to Q$ – ф-я на преходите

Пример 1:

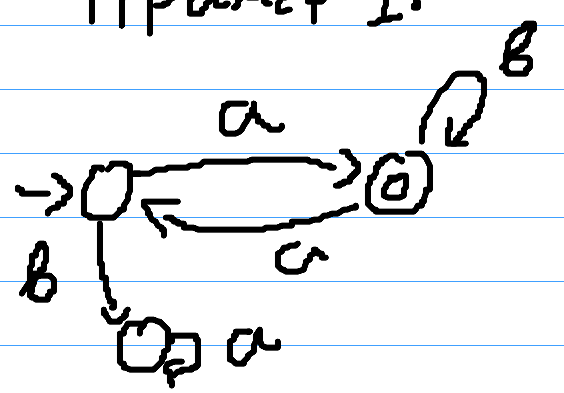
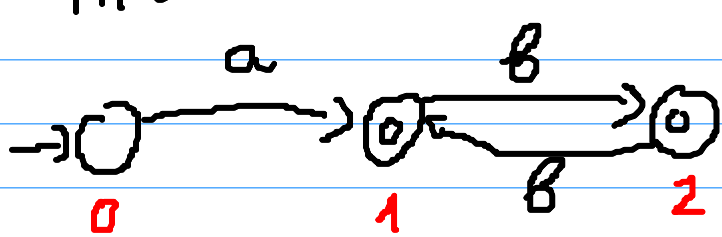


abb ✓

aba ✗

Пример 2:



$A = \langle \{0,1,2\}, \{a,b\}, 0, \{1,2\}, \delta \rangle$

$\delta = \{ \langle\langle 0,a\rangle,1\rangle, \langle\langle 1,b\rangle,2\rangle, \langle\langle 2,b\rangle,1\rangle \}$

Неформално:

$L(A) = \{ w \mid$ съществува път от стартовото състояние до някое фин. състояние с етикет w в A. $\}$

По-формално:

Разпознава ли A думата aab?

$\delta(\delta(\delta(0,a),a),b) \overset{?}{\in} F$

def: $\delta^* : Q \times \underbrace{\Sigma^*}_{\text{дума}} \rightarrow Q$

разширение на δ

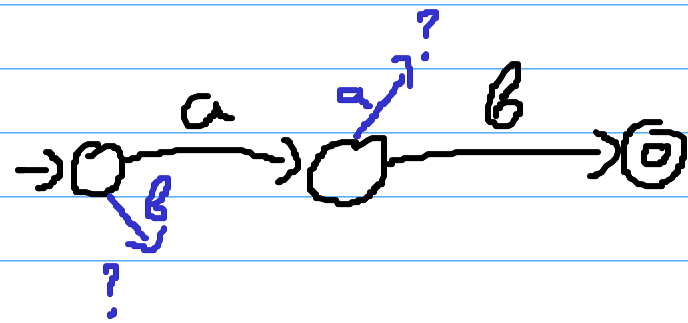
$$\delta^*(q,w) = \begin{cases} q & w = \varepsilon \quad (|w| = 0) \\ \delta^*(\delta(q,a),u) & w = au \quad (|w| \geq 1) \end{cases}$$

(!) $L(A) = \{ w \in \Sigma^* \mid \delta^*(s,w) \in F \}$

def: Тотален автомат

$A = \langle Q, \Sigma, s, F, \delta \rangle$ е тотален $\Leftrightarrow$ δ е тотална

пример:



"Тотализация"

не тотална

Даден е автомат $A\langle Q, \Sigma, s, F, \delta \rangle$

Търсим тотален автомат A',

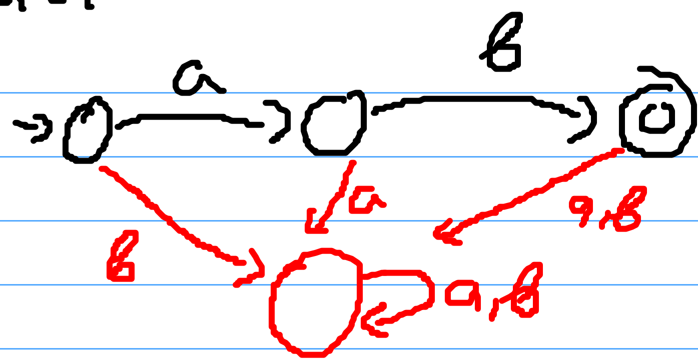
такъв че $L(A') = L(A)$

$$A' = \langle Q \cup \{e\}, \Sigma, s, F, \delta' \rangle$$

$e \notin Q$

$$\delta'(q,a) = \begin{cases} \delta(q,a) & q \neq e \wedge \neg\delta(q,a) \\ e & q \neq e \wedge !\neg\delta(q,a) \\ e & q = e \end{cases}$$

Пример:



(error состояние)