

9 Доказателства, че език не е регулярен.

! Th. на Майхил-Нероуд

L е рег. $\leftrightarrow R_L$ има краен индекс

! Pumping Lemma

Ако L е регулярен, то:

$$(\exists p \in \mathbb{N}^+) (\forall w \in L)$$

$$|w| \geq p \Rightarrow (\exists x, y, z \in \Sigma^*) (xyz = w)$$

$$\cdot |xy| \leq p$$

$$\cdot |y| \geq 1$$

$$\cdot (\forall i \in \mathbb{N}) (xy^iz \in L)$$

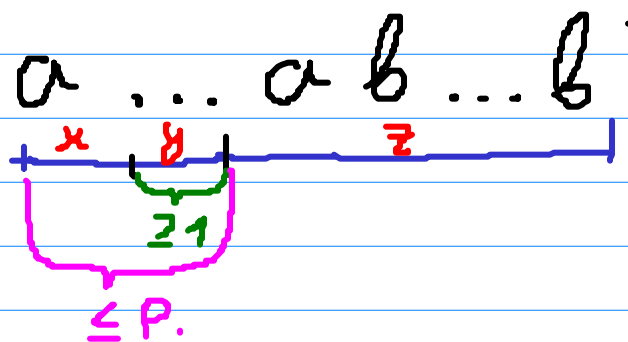
заг¹ Докажете, че L не е рег.

$$L = \{a^n b^k \mid n, k \in \mathbb{N} \wedge n > k\}$$

Допускаме, че е регулярен.

→ изпълнена е Р. Л.

$$w = a^{p+1} b^p \in L \quad \checkmark$$
$$|w| \geq p \quad \checkmark$$



- xy е префикс на думата
- $|xy| \leq p \Rightarrow xy = a^t \quad (t \leq p)$
- $|y| \geq 1 \Rightarrow y = a^r \quad (1 \leq r \leq t)$

$$\text{При } \uparrow \quad xy^i z \in L \quad (i \geq 1)$$

Разделяме ↓

$$xy^p z = a^{p+1-r} b^p \notin L \quad \begin{matrix} p+1-r > p \\ r \geq 1 \end{matrix}$$

⇒ L не е регулярен

~~Заг 2~~

Докажете, че L не е рег.

$$L = \{a^n b^k \mid n, k \in \mathbb{N} \wedge n \leq k\}$$

Допълваме, че е регулярен.

$$L(a^* b^*) \text{ рег}$$

$$\underbrace{L(a^* b^*)}_{\text{рег}} \setminus \underbrace{\{a^n b^k \mid n, k \in \mathbb{N} \wedge n \leq k\}}_{\text{рег от допускането}} =$$

$$= \underbrace{\{a^n b^k \mid n, k \in \mathbb{N} \wedge n > k\}}_{\text{рег (\setminus за пазва регулярността)}} \quad (\text{от Заг 1})$$

Но ние доказваме, че не е



$\Rightarrow L$ не е регулярен

зау³

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$L = \left\{ w \mid \begin{array}{l} \text{Ако всяко срещане на } a \\ \text{се следва от } b, \text{ то } N_a(w) \neq (N_b(w))^2 \end{array} \right\}$$

Разглеждаме $\bar{L} \quad (L \in \text{P}_{E_2} \Leftrightarrow \bar{L} \in \text{P}_{E_2})$

$$\bar{L} = \left\{ w \mid \begin{array}{l} \text{всяко срещане на } a \text{ се следва от } b \\ \text{и } N_a(w) = (N_b(w))^2 \end{array} \right\}$$

$$w = a^{p^2-p} (ba)^p \quad p \in \bar{L} \quad \checkmark$$

$|w| \geq p \quad \checkmark$

$aa \dots a \quad ba \quad ba \dots ba$

$$p^2 - p \geq p \quad \text{при } p \geq 2$$

1 сл. $p \geq 2$

- xy е префикс на думата
- $|xy| \leq p \Rightarrow xy = a^t \quad (t \leq p) \quad |xy| \leq p \leq p^2 - p$
- $|y| \geq 1 \Rightarrow y = a^r \quad (1 \leq r \leq t)$

$$\uparrow xy^2z = a^{p^2-p+r} (ba)^p \notin \bar{L}$$

$p^2-p+r \neq p^2$
 $r \geq 1$

• 2 сл $p=1$ $w = a^{1^2-1} (ba)^1 = ba$

$$|xy| \leq p \wedge |y| \geq 1$$

$$\Rightarrow x = \varepsilon, y = b, z = a$$

$$\uparrow xy^2z = \overset{a?}{bb}a \notin \bar{L}$$



$\Rightarrow \bar{L}$ не е регулярен

$\Rightarrow L$ не е регулярен.

Забележка:

При $w = a^{(p+1)^2-(p+1)} (ba)^{(p+1)}$

⚠ Няма да има нунда от
разглеждане на случаи

$$(p+1)^2 - (p+1) \leq p \quad (\text{при } p \geq 1)$$

задача Докажете, че L не е рег.

$$L = \{ a^n b^m c^k \mid n \neq 2021 \vee m = k \}$$

решение:

$$L = \{ a^n b^m c^k \mid n = 2021 \Rightarrow m = k \}$$

$$w = a^{2021} b^p c^p \in L \quad \checkmark$$

$|w| \geq p \quad \checkmark$

При $x = \varepsilon, y = a, z = a^{2020} b^p c^p$

$$(\forall i \in \mathbb{N}) (xy^i z \in L)$$

Пример:

$$xy^2 z = a^{2022} b^p c^p \in L$$

Р.Л. в изпълнение за L . (групи начин?)

Разглеждаме $L^{rev} \{ L \text{ е рег.} \Leftrightarrow L^{rev} \text{ е рег.} \}$

$$L^{rev} = \{ c^k b^m a^n \mid n = 2021 \Rightarrow m = k \}$$

Допускаме, че е регулярен.

→ изпълнена е P.L.

$$w = c^p b^p a^{2021} \in L^{\text{rev}} \checkmark$$
$$|w| \geq p \checkmark$$

- xy е префикс на думата
- $|xy| \leq p \Rightarrow xy = c^t$ ($t \leq p$)
- $|y| \geq 1 \Rightarrow y = c^r$ ($1 \leq r \leq t$)

$$\downarrow xy^0z = c^{p-r} b^p a^{2021} \notin L^{\text{rev}}$$
$$(T \Rightarrow F \equiv F) \quad p-r \neq p$$
$$(r \geq 1)$$



$\Rightarrow L^{\text{rev}}$ не е регулярен \Rightarrow

$\Rightarrow L$ не е регулярен.

заг 5

$$L = \{w / (\exists k \in \mathbb{N}) | w| = k^2\}$$

а) L регулярен ли е?

б) $L.L.L.L$ регулярен ли е?

а)

Допускаме, че е регулярен.

→ изпълнена е Р.Л.

$$w = a^{p^2} \quad |w| \geq p \quad \checkmark \quad \{p^2 \geq p\}$$

$$xy = a^t \quad (t \leq p)$$

$$y = a^r \quad (1 \leq r \leq t \leq p)$$

Разглеждаме \uparrow

$$xy^2z = a^{p^2+r} \quad \overset{?}{\in} L$$

Дали p^2+r е точен квадрат?

Ще покажем, че

$$p^2 \underset{\textcircled{1}}{<} p^2 + r \underset{\textcircled{2}}{<} (p+1)^2$$

1. $p^2 < p^2 + r$ ($r \geq 1$) ✓

2. $p^2 + r < (p+1)^2 = p^2 + 2p + 1$ ✓

$\Rightarrow p^2 + r$ не е точен квадрат

$\Rightarrow a^{p^2+r} \notin L$



$\Rightarrow L$ не е регулярен

д) $L.L.L.L = \Sigma^4$

Тх. на Лазарани

Всяко ест. число може да се представи като сума от 4 квадрата

\Rightarrow е регулярен.