Прости задачи върху неориентирани графи и дървета

Ангел Димитриев

Задача 1

Нека G е неориентиран граф. Докажете, че ако в G всички върхове са от степен ≥ 2, то в G има цикъл.

Решение:

Да допуснем, че в G няма цикъл. Нека тогава $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \ldots \mathbf{v_n}$ е най-дългият път в този граф. Знаем, че има такъв, след като в графа няма цикли. Понеже от v_n излизат поне 2 ребра, то v_n има и друг съсед освен v_{n-1}. Нека това е върхът u.

1 сл: Ако върхът u е част от редицата $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \ldots \mathbf{v_n}$, ще следва, че в графа има цикъл, което е в противорчие с допускането.

2 сл: Ако върхът u не е част от редицата, ще следва, че сме намерили по-дълъг път, който е $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \ldots \mathbf{v_n}, \mathbf{u}$. Но най-дългият път беше $v_1, v_2 \ldots v_n$. Отново стигнахме до противоречие. Следователно в G има цикъл.

Задача 2

Нека T е произволно дърво с n върха. Докажете, че ако всички са от степен 1 или 4, то: $n \equiv 2(mod 3)$.

Решение:

Нека k е броят върхове на дървото от степен 4. Тогава върховете от степен 1 са $n-k$. Щом T е дърво, то ребрата са $n-1$. **Първа теорема в теорията на графите** гласи, че сумата от степените на всички върхове в граф с y ребра е $2y$. От тук получаваме, че:

$4k + 1(n-k) = 2(n-1)$

$4k + n - k = 2n - 2$

$3k + n = 2n - 2$

$3k = n - 2$

$n = 3k + 2$, от което заключваме, че $n \equiv 2(mod 3)$.

Задача 3

Нека T е произволно дърво с поне 2 върха. Докажете, че между всеки 2 върха има **точно един** път.

Решение:

Допускаме, че съществува двойка върхове (u, v) от T, такива че между тях няма точно един път.
1 сл: Ако между тях няма път, то тогава T не е свързан, от което следва, че T не е дърво. Противоречие!.
2 сл: Нека между тях има повече от 1 път. Нека тези 2 пътя са:
$u, u_1, u_2 \dots u_i, \mathbf{s_1}, \mathbf{s_2} \dots \mathbf{s_{j-1}}, \mathbf{s_j}, u_{i+1} \dots v$. и
$u, u_1, u_2 \dots u_i, \mathbf{t_1}, \mathbf{t_2} \dots \mathbf{t_{j-1}}, \mathbf{t_j}, u_{i+1} \dots v$.
където $s_k \neq t_k (k \in \{1, 2 \dots j\})$. Т.е това е частта, в която пътищата се различават. Да разгледаме тогава следния път:
$u_i, \mathbf{s_1}, \mathbf{s_2} \dots \mathbf{s_{j-1}}, \mathbf{s_j}, u_{i+1}, \mathbf{t_1}, \mathbf{t_2} \dots \mathbf{t_{j-1}}, \mathbf{t_j} u_i$. Вижда се, че това е цикъл в T. Но T е дърво! Противоречие!

Следователно между всеки 2 върха има точно един път.

Задача 4

Нека G е неориентиран граф. Докажете, че ако u е връх от нечетна степен, то съществува път от u до друг връх v, който също е от нечетна степен.

Решение:

Строим път от u, без да повтаряме ребра. Може да си представим, че след като минем през някое ребро го изтриваме. Ако стигнем до връх, който е от нечетна степен, то следва че **съществува път до друг връх от нечетна степен.**
Да допуснем обаче, че срещаме само върхове от четна степен. При всяко достигане на такъв връх, то този връх ще е от степен $\geq$2, защото има поне 1 ребро(стигаме до върха по него) и броят ребра, инцидентни с него, е четен. Но щом има поне 2 ребра, то ние винаги ще можем от този връх да продължим пътя по някое от другите ребра (без по това ребро, от което сме дошли).Т.е ако срещаме само върхове от четна степен, то пътят няма да приключи никога. Но понеже графът е краен, то той има краен брой ребра и пътят ще приключи. От тук веднага следва, че **съществува път до друг връх с нечетна степен.**

Задача 5

Неке G $= (V, E)$ е неориентиран граф. Докажете, че броят на циклите в G е поне $|E| - |V| + 1$.

Решение:

1 сл: $|E| \leq |V| - 1$ Тривиално вярно е, че в във всеки граф броят на циклите е ≥ 0.
2 сл: $|E| > |V| - 1$. Ще покажем с индукция по броя ребра, че броят на циклите е $\geq |E| - |V| + 1$. Щом **|E| > |V| - 1**, то G не е дърво. Т.е има поне 1 цикъл. Нека P е произволен цикъл в G и нека (u,v) е някое ребро от P. Тогава разглеждаме G **без това ребро**. От индукционното предположение имаме, че в новия граф **(G - (u,v))** броят на циклите е $\geq (|E| - 1) - |V| + 1$. Връщайки реброто, добавяме поне 1 цикъл (цикълът P), от което следва, че броят на циклите в G е $\geq (|E| - |V| + 1$.