10

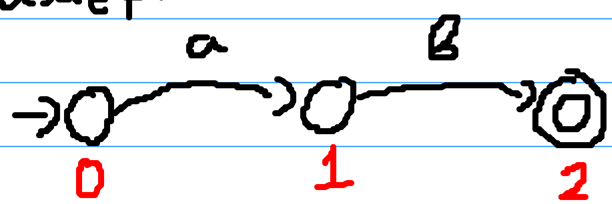
Задачи за рег. езици и автомати

def: $A = \langle Q, \Sigma, s, F, \delta \rangle$

$Reach: Q \longrightarrow 2^Q$

$Reach(q) = \{ t \in Q \mid t$ е достижимо от q в $A \}$

пример:



$Reach(0) = Q$

$Reach(1) = \{1, 2\}$

$Reach(2) = \{2\}$

Зад 1 Нека L е регулярен език над Σ

а) Вярно ли е, че $Pref(L)$ е регулярен?

б) Дайте пример за неподвижна точка на $Pref$.

$$Pref(L) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid (\exists \beta \in \Sigma^*)\ \alpha\beta \in L\}$$

! $L \subseteq Pref(L)$

а) Щом L е рег, то $\exists$ К.Д.А за L

Нека е $A = \langle Q, \Sigma, s, F, \delta \rangle$ $(L(A) = L)$

Ще построим автомат A^{pref} такъв че $L(A^{pref}) = Pref(L)$.

$$A^{pref} = \langle Q, \Sigma, s, F', \delta \rangle$$

$$F' = \{q \mid Reach(q) \cap F \neq \emptyset\}$$

Трябва да се докаже, че $L(A^{pref}) = pref(L)$

$\Rightarrow$ $Pref(L)$ е регулярен

б) Неподвижни точки – $\{\varepsilon\}, \emptyset, a^*, a^*(a+b)^* \ldots$

~~зад 2~~ Вярно ли е, че $Suff(L)$ е регулярен?

$$Suff(L) = \{\beta \in \Sigma^* \mid (\exists \alpha \in \Sigma^*)\ \alpha\beta \in L\}$$

$$Suff(L) = Pref(L^{rev})^{rev}$$

$\Rightarrow Suff(L)$ е рег.

~~зад 3~~ Вярно ли е, че $Inf(L)$ е регулярен?

$$Inf(L) = \{\beta \in \Sigma^* \mid (\exists \alpha, \gamma \in \Sigma^*)\ \alpha\beta\gamma \in L\}$$

$$Inf(L) = Pref(Suff(L)) = Suff(Pref(L))$$

$\Rightarrow Inf(L)$ е рег.

зад 4 Нека L е регулярен. $(\Sigma = \{a, b\})$

Вярно ли е че: $Perm(L)$ е регулярен?

$Perm(L) = \{ w \in \Sigma^* \mid (\exists u \in \Sigma^*) N_a(w) = N_a(u) \wedge N_b(w) = N_b(u) \}$

Решение:

Не винаги $Perm(L)$ е рег.

Нека $L = (ab)^*$

тогава $Perm(L) = \{ w \in \Sigma^* \mid N_a(w) = N_b(w) \}$,

който не е регулярен.!

зад 5

def: Подредица на дума

Нека $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ $(w_i \in \Sigma)$

$Subseq(w) = \{ u \mid u = w_{i_1} w_{i_2} w_{i_3} \cdots w_{i_k} \}$

$(1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \cdots < i_k \leq |w|)$

Нека L е регулярен

Вярно ли е че:

$L' = \{u \mid (\exists w \in L)\ u \in Subseq(w)\}$

Решение:

Щом L е регулярен, то $\exists$ КДА за L

$A = \langle Q, \Sigma, s, F, \delta \rangle \quad L(A) = L$

ще построим (без док.) автомат за L'

$A' = \langle 2^Q, \Sigma, Reach(s), 2^Q \setminus 2^{Q \setminus F}, \delta' \rangle$

$$\delta'(M, a) = \bigcup_{x \in M} Reach(\delta(x, a))$$

Наистина $L(A') = L'$

зад ~~6~~ 9

Нека L е регулярен. $(\Sigma = \{a, b\})$

Вярно ли е, че $L' = \{ w^{|w|} \mid w \in L \}$ е рег?

Решение:

Да разгледаме $L = a^*$

тогава $L' = \{ a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \}$, за който знаем, че не е рег.

зад ~~10~~ X

Нека L_1 и L_2 са рег.

Докажете, че $L_1 ш L_2$ е рег.

$$L_1 ш L_2 = \{ \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \dots \alpha_n \beta_n \mid \alpha_1 \dots \alpha_n \in L_1 \wedge \beta_1 \dots \beta_n \in L_2 \}$$

щом L_1 и L_2 са рег, то

$\exists$ К.Д.А. за тях.

$$A_1 = \langle Q_1, \Sigma, s_1, F_1, \delta_1 \rangle \qquad L(A_1) = L_1$$

$$A_2 = \langle Q_2, \Sigma, s_2, F_2, \delta_2 \rangle \qquad L(A_2) = L_2$$

Да разгледаме $A^{\text{ш}}$

$$A^{\text{ш}} = \langle Q_1 \times Q_2 \times \{1,2\}, \Sigma, \langle s_1, s_2, 1 \rangle, F_1 \times F_2 \times \{1\}, \delta^{\text{ш}} \rangle$$

Кой е на ход?

$$\delta^{\text{ш}}(\langle q_1, q_2, 1 \rangle, a) = \langle \delta_1(q_1, a), q_2, 2 \rangle$$

$$\delta^{\text{ш}}(\langle q_1, q_2, 2 \rangle, a) = \langle q_1, \delta_2(q_2, a), 1 \rangle$$

$$L(A^{\text{ш}}) = L_1 \text{ ш } L_2$$