Сортиращи алгоритми

Стойчо Кьосев

7 януари 2024 г.

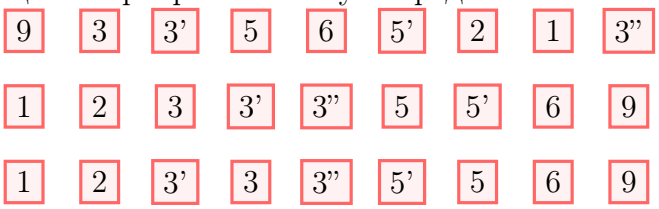
1 Сортиране

Добре познатата на всички задача за сортиране. Като вход на задачата имаме масив $arr = [a_1...a_n]$ от цели числа. Като изход искаме масивът да е сортиран, тоест $a_1 \leq a_2 \cdots \leq a_n$. Забележете, че не е задължително да сортираме цели числа. Можем да сортираме всякакви обекти в които имаме дефинирана релацията $<$. Също така не е задължително контейнера да е масив - може да е свързан списък или всякакъв контейнер, който поддържа някаква наредба.
Сортирането често е само първата стъпка, много алгоритми работят бързо именно върху сортирани колекции. Добре познатия Ви алгоритъм *binary search* работи за време $O(\log(n))$ в най - лошия случай за сортиран масив. Като сравнение, ако за вход имаме масив с 1000000 елемента то на алгоритъма ни ще му отнеме ней - много 20 стъпки. Сравнете производителността му с алгоритъма *линейно търсене*.
Това е само един от многото примери защо сортирането е една от най - основните задачи за всеки програмист.

2 Стабилност

Едно от важните свойства на сортиращите алгоритми е стабилността. В разглежданите примери сортираме само цели числа, но това далеч не са единствените обекти които можем да сортираме. Често ни се налага да сортираме по - големи записи. Пример за по - голям запис би бил резултатите от произволен изпит. В тези резултати е записана оценката

на студента, неговото име, факултетен номер и тн. За различните полета по които можем да сортираме можем да си мислим като ключове.
Стабилен сортиращ алгоритъм е сортиращ алгоритъм, който **не променя разположението на елементи с еднакви ключове.**
Примерно, искам да сортирам студентите положили този изпит по оценки. Напълно възможно да има еднакви оценки. Ако преди това студентите са сортирани по азбучен ред, студентите с еднакви оценки отново ще са сортирани по азбучен ред.



В следния пример първия масив е входен. Втория масив представлява резултатът на стабилен сортиращ алгоритъм Третия представлява резултата на нестабилен такъв.

2.1 Bubble sort

Bubble sort често се дава като първият пример за сортиращ алгоритъм. Причината е, че е лесен за разбиране. Не е особено ефикасен и не се използва практически, но идеята му ни позволява да се запознаем с останалите сортиращи алгоритми.

Първо, нека разгледаме стандартната версия на алгоритъма Bubble sort. След това ще разгледаме няколко оптимицазии.

```
void bubbleSort1(int* arr, unsigned length)
{
    for (size_t i = 0; i < length; i++)
    {
        for (size_t j = 0; j < length - 1; j++)
        {
            if(arr[j] > arr[j + 1])
            {
                swap(arr[j], arr[j + 1]);
            }
        }
```

```
    }
}
```

Забелязваме, че имаме два цикъла. Нека първо разгледаме какво прави вътрешния. **За всеки елемент от 0 до length - 1** ако елементът е по - голям от този в негово дясно, размени ги. Твърдим, че използвайки тази стратегия **след първата итерация** на вътрешния цикъл най-големия елемент от масива ще бъде на последна позиция. Наистина, алгоритъмът ще достигне най-големия елемент и понеже той е най-голям ще продължи да го разменя със съседите му.

Какво се случва на втората итерация? Аналогично втория по големина елемент ще бъде на правилното място. Отново, вътрешния цикъл рано или късно ще стигне до този елемент и ще го разменя със съседите му докато не стигне до предпоследния индекс. След като вече знаем, че най-големия е на последния индекс то той няма да бъде разменен.

Можем да направим същото твърдение и за k-тата итерация. След k-тата итерация k-тия по големина елемент ще бъде на правилното място.

2.2 Оптимизации на Bubble sort

Разбирайки по-добре алгоритъма, можем да предложим няколко оптимизации. Първо, ако не сме направили нито една размяна, то масивът е сортиран. Това е ясно от дефиницията на задачата за сортиране. Там искаме за всеки два съседни елемента $a_i \leq a_{i+1}$. Щом не сме направили нито една размяна, то това изискване е спазено следователно масивът е сортиран.

На k-тата итерация алгоритъмът пославя k-тия по големина елемент на правилното място. Ние обаче знаем, че преди тази k-та итерация сме направили още k-1 итерации. Тоест елементите след k+1 индекс са сортирани. Не само са сортирани, но и са точно най-големите елементи от масива. Тоест **не е нужно да правим каквито и да е проверки за тях**.

Променливата i ни позволява да разберем на коя итерация сме. Сега можем да пренапишем алгоритъма по следния начин.

```
void bubbleSort2(int* arr, unsigned length)
{
    for (size_t i = 0; i < length; i++)
    {
        bool swapped = false;
        for (size_t j = 0; j < length - i - 1; j++)
        {
            if(arr[j] > arr[j + 1])
            {
                swapped = true;
                swap(arr[j], arr[j + 1]);
            }
        }
        if(!swapped)
        {
            return;
        }
    }
}
```

Този код имплементира двете разгледани оптимизации. Променливата swapped проверява дали сме направили разместване. Ако не сме директно прекратяваме изпълнението на функцията. Също така, вместо всеки път да итерираме до края на масива във вътрешния цикъл итерираме до lenght - i - 1 знаейки, че следващите елементи са на правилното място.

2.3 Last swapped index оптимизация

Съществува още една оптимизация, която е нещо като комбинация между двете. Нека p е индекса, където последно сме разменили два елемента. След това не сме правили повече размени и следователно подмасивът, започващ от индекс p и завършващ до индекс lenght - 1 е сортиран по дефиниция. Сега bubble sort поставя елемента на индекс p, но ние знаем, че той е p-тия по големина елемент. Ако това не беше истина bubble sort щеше да направи още размени. Следователно, във вътрешния цикъл има смисъл да разглеждаме не подмасива започващ от 0 и завършващ на length - i - 1 а този започващ от 0 и завършващ на последния индекс

на който сме направили размяна.

Така спестяваме няколко празни проверки. Следния код имплементира и трите оптимизации:

```
void bubbleSort(int* arr, unsigned length)
{
    size_t lastSwappedIndex = length - 1;

    for (size_t i = 0; i < length; i++)
    {
        unsigned lastSwappedIndexTemp = lastSwappedIndex;
        for (size_t j = 0; j < lastSwappedIndex; j++)
        {
            if(arr[j] > arr[j + 1])
            {
                swap(arr[j], arr[j + 1]);
                lastSwappedIndexTemp = j;
            }
        }

        if(lastSwappedIndex == lastSwappedIndexTemp) { break; }
        lastSwappedIndex = lastSwappedIndexTemp;
    }
}
```

2.4 За сложността на Bubble sort

Нека разгледаме сложността на оптимизираната версия на Bubble sort. Най-лошия случай е когато имаме масив сортиран наобратно. За първия елемент алгоритъмът ще направи $n-1$ размени. За втория ще направи $n-2$. За k-тия елемент алгоритъмът ще направи $n-k$ размени. Следователно, сложността е $\sum_{i=0}^{n}(n-i) = O(n^2)$.

Оптимизираната версия ще обходи масива веднъж и виждайки, че не е направил размяна, ще излезе. Следователно сложността е $O(n)$

Каква е средната сложност на алгоритъма? Инверсия наричаме двой-

ка (a_i, a_j) за която $i < j \wedge a_i > a_j$. Очевидно, в сортиран масив нямаме нито една инверсия. Всеки път, когато алгоритъмът прави размяна, той премахва една инверсия. Нека намерим колко е броя на инверсиите в средния случай.

Първо, колко двойки елементи можем да имаме? Това може да се сметне по много начини. Най-разбираемото може би е следното: За елемента на 0 индекс имаме $n-1$ опции (понеже искаме втория индекс да е по-голям от първия). За елемента на втори индекс имаме $n-2$. Аналогично за елемента на k-ти индекс имаме $n-k-1$. Следователно всички възможности са $\sum_{i=1}^{n-1} i$ което от своя страна е $\frac{n(n-1)}{2}$.

Друг начин това да се сметне е да се запитаме по колко начина можем да изберем два елемента от n елементно множество. n елементното множество са индексите а избирайки два елемента от там има точно един начин да ги наредим така, че единия да е строго по-голям от другия. Това е $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Баз значение как смятаме, всички двойки са $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Сега въпросът е, колко от тях образуват инверсия? На този въпрос можем да си отговорим ако знаем каква е вероятността една двойка да е инверсия. В случая не предполагаме нищо за входните данни. Можем да направим предположение, че вероятността $a_i > a_j$ е същата като вероятността $a_j > a_i$. Следователно, приблизително $\frac{1}{2}$ от двойките ще образуват инверсия. Тоест ще имаме $\frac{n(n-1)}{4}$ инверсии, което отново влече $O(n^2)$ сложност в средния случай.

2.5 Insertion sort

Нека си представим, че имаме един сортиран масив $[a_1 \dots a_k]$. Сега искаме да вмъкнем някакъв елемент в него така, че той да остане сортиран. Нека наречем този елемент a_i. Започваме от елемента a_k. Ако той е по - голям от a_i го преместваме една позиция надясно. Ако е по - малък то a_i става последен елемент. Аналогично повтаряме тази идея като изместваме всеки елемент по - голям от a_i с една позиция надясно. След краен брой стъпки масивът би изглеждал по следния начин $[a_1 \dots a_i \dots a_k]$ където елементите вдясно от a_i са по - големи а тези в ляво са по - малки.

Тази идея напомня на начина по който картоиграч сортира картите си. В ръка с 4 наредени карти взема петата и я поставя на правилното ѝ място, като по - малките са вляво а по - големите вдясно.
Как ще използваме тази идея за да сортираме целия масив? Ами вече имаме алгоритъм за добавяне на един елемент в сортиран масив. Алгоритъма също така запазва масива сортиран след добавянето на новия елемент. Нека разгледаме несортиран масив $[a_1 \dots a_n]$. По дефиниция подмасива $[a_1]$ е сортиран. Сега ще приложим идеята върху сортирания подмасив $[a_1]$ и елемента a_2. След като приложихме идеята знаем, че първите два елемента на масива са сортирани. Нека приложим отново тази идея - този път ще вмъкваме третия елемент в подмасива състоящ се от първите два елемента. Правим това вмъкване n пъти докато не получим сортиран масив.
Примерен код на *Insertion Sort*:

```
void insertionSort(int* v, size_t size) {
        for (size_t i = 1; i < size; i++) {
                int elem = v[i];
                int j = i - 1;

                while (j != -1 && v[j] > elem) {
                        v[j + 1] = v[j];
                        j--;
                }

                std::swap(v[j + 1], elem);
        }
}
```

Тук *elem* е елементът, който ще вкарваме в сортирания подмасив а j е индексът на най - десния елемент в сортирания подмасив.
Каква е сложността на insertion sort? В най - лошия случай сложността на алгоритъма е $\Theta(n^2)$. Каква е сложността по памет на Insertion Sort? Insertion sort е стабилен сортиращ алгоритъм. Стабилността му се дължи на строгото неравенство $>$.

2.6 Selection sort

Нека разгледаме примерен код на сортиращия алгоритъм *Selection sort*:

```
1  void selectionSort(int* arr, size_t size) {
2          for (size_t i = 0; i < size - 1; i++) {
3                  size_t minElementIndex = i;
4
5                  for (size_t j = i + 1; j < size; j++)
6                          if (arr[j] < arr[minElementIndex])
7                                  minElementIndex = j;
8
9                  if (i != minElementIndex)
10                         std::swap(arr[i], arr[minElementIndex]);
11         }
12 }
```

На ред 3 създаваме нова променлива наречена *minElementIndex*. Както името подсказва, тя ще пази в себе си индекса на най - малкия елемент. Добър въпрос е обаче от къде вземаме най - малкия елемент. В началото променливата $i = 0$, тоест вътрешния цикъл ще обиколи подмасива $[1 \dots n-1]$ и ако има по - малък елемент ще запише индекса му в променливата. След първата итерация на ред 9 имаме в *minElementIndex* е записан индекса на най - малкия елемент в интервала $[0 \dots n-1]$. Естествено, в сортиран масив най - малкия елемент стои в началото. Сега просто пращаме най - малкия елемент в началото. Повтаряме това действие n - *1* пъти. След втората итерация на ред 9 в *minElementIndex* е записан най - малкия елемент в интервала $[1 \dots n-1]$. Неговото място е на индекс *1*, та точно там го пращаме с кода на ред 9-10. Аналогично, за $i = k$ на ред 9 в *minElementIndex* е записан най - малкия елемент в интервала $[k \dots n-1]$.
Сложността по време на *Selection sort* е $O(n^2)$. Каква е сложността по памет на *Selection sort*?
Струва си да отбележим, че това не е стабилен сортиращ алгоритъм. За да го докажем ще дадем следния контрапример:

Начален масив

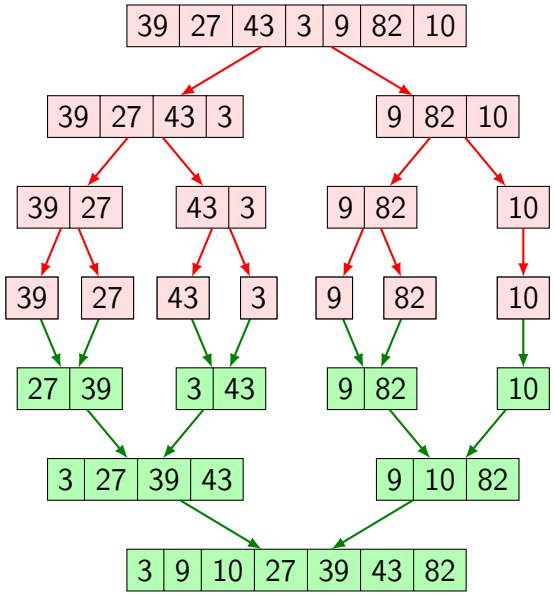
Масивът след първа итерация

Изходен масив

Със зелено означаваме минималните елементи. Забелязваме, че алгоритъма не запазва наредбата на елементите с еднакви ключове, следователно той не е стабилен. Изход на стабилен сортиращ алгоритъм би бил $[1, 2, 2']$. Selection sort е сортиращия алгоритъм който прави най - малко на брой swap - ове. Имаме n - *1* размени на елементи в най - лошия случай. Swap е бърза, но не безплатна операция.

2.7 Merge sort

Това ще е първия рекурсивен сортиращ алгоритъм който ще разгледаме. Първо, нека се запознаем с функцията *merge*. Тя приема два **сортирани** масива и като резултат създава сортиран масив. Важно е да се отбележи, че масивите са сортирани, ако не са то функцията е безполезна.
Нека имаме входен несортиран масив $[a_1 \dots a_n]$. Сега, ако намеря някакъв начин да сортирам подмасивите $[a_1 \dots a_{\frac{n}{2}}]$ и $[a_{\frac{n}{2}+1} \dots n]$ мога да извикам функцията *merge* и имам сортиран масив. Но как да ги сортирам?
Ами спомняме си, че пишем сортиращ алгоритъм. Извиквам mergeSort **рекурсивно** върху лявата и дясната половина на масива и след като ги сортира викаме функцията *merge*. *mergeSort* ще продължи да разбива масива на две, после левия и десния подмасив на още две и т.н. Масивът е краен, та все някъде трябва да спрем. Спомняме си, че масив от един елемент е тривиално сортиран, това звучи като добро място на което да спрем.
Преди да продължим с обяснението, разгледайте следната диаграма:



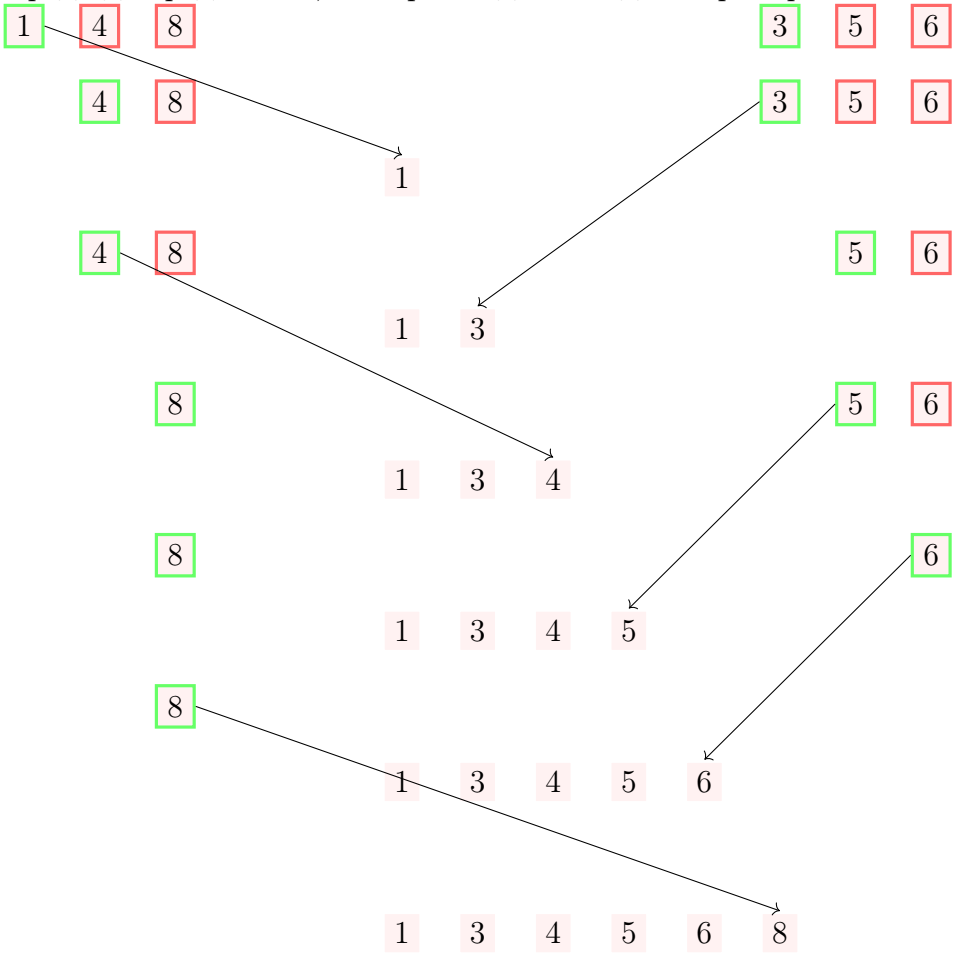
Оцветените в зелено клетки са подмасиви на които вече е бил извикан *merge*! Виждате как *mergeSort* разделя масива на части докато не стигне до подмасиви с дължина едно (които играят роля на листа в дървото на рекурсията) след това викаме *merge* на листата, а после на сортираните масиви възпроизведени от листата и т.н.

Нека сега представим примерен код на *mergeSort*

```
1  // arr и arr2 са сортирани масиви
2  void merge(int* arr, size_t lenOne, int* arr2, size_t lenTwo);
3
4  void mergeSort(int* arr, size_t size) {
5      if(size < 2)
6          return;
7
8      size_t mid = size / 2;
9      mergeSort(arr, mid);
10     mergeSort(arr + mid, size - mid);
11     merge(arr, mid, arr + mid, size - mid);
12 }
```

Този код може да изглежда леко объркващ в началото та нека подробно разгледаме какво се случва. На ред 2 просто дефинираме функцията *merge* - с нея ще се занимаваме малко по - късно. На ред 5 правим проверка дали трябва да разбиваме масива още или сме стигнали до дъното на рекурсията. На ред 8 вземаме средата на масива както се разбрахме. На ред 9 и 10 използваме познатата Ви от курса по УП указателна аритметика. Накратко - указателя сочи към **последователна памет**. Тоест вземам лявата половина на масива като пускам указател към началото му, но казвам на *mergeSort*, че дължината му вече е наполовина. Как да взема дясната половина обаче? Ами пускам указател към средния елемент и отново казвам колко е дължината. Как да получа указател към средния елемент? Помним, че ако имаме масив, то името му е указател към първия му елемент. Синтаксисът $arr[k]$ е синтактична захар за $*(arr + k)$ където $arr + k$ връща указател към к-тия последователен елемент а оператора * взема стойността му. Тоест когато на ред 10 пишем $arr + mid$ не правим нищо повече от да си вземем точно указателя от който имаме нужда!
Сега просто извикваме функцията *merge* която обединява двата сортирани масива.
Знаем какво прави merge - сега въпросът е как да го реализираме. Оказва се, че най - добрия начин за реализация на *merge* е с допълнителна памет. Нека n_1 и n_2 са дължините на входните масиви. Заделяме нов масив с дължина $n_1 + n_2$. Вземаме два индекса които в началото сочат към първите елементи на двата входни масива. Кой би бил най - малкия елемент в новия масив? Ами понеже масивите са сортирани то това ще

е или най - левия елемент на първия масив или най - левия елемент на втория масив. Сравняваме ги и по - малкия записваме на първа позиция. Увеличаваме индекса на масива в който е по - малкия елемент с единица. Сега аналогично итерираме през масивите докато и двата индекса не стигнат края.
Преди да продължим, нека разгледаме следния пример:



Зелените елементи са тези към които сочи съответния индекс. Сивите са вече позиционираните в масива. Виждаме как със сложност $\Theta(n_1 + n_2)$ по време и памет създадохме нов сортиран масив.
Нека да разгледаме как би изглеждала *merge* на код:

```
1  void merge(int* arr, size_t lenOne, int* arr2, size_t lenTwo) {
2          int* resultArray = new int[lenOne + lenTwo];
3
4          int pntOne = 0;
5          int pntTwo = 0;
6          int resArrayIndex = 0;
7
8          while (pntOne < lenOne && pntTwo < lenTwo) {
9                  if (arr[pntOne] <= arr2[pntTwo])
10                         resultArray[resArrayIndex++] = arr[pntOne++];
11                 else
12                         resultArray[resArrayIndex++] = arr2[pntTwo++];
13         }
14
15         while (pntOne < lenOne)
16                 resultArray[resArrayIndex++] = arr[pntOne++];
17
18         while (pntTwo < lenTwo)
19                 resultArray[resArrayIndex++] = arr2[pntTwo++];
20
21         for (int i = 0; i < lenOne + lenTwo; i++)
22                 arr[i] = resultArray[i];
23
24         delete[] resultArray;
25 }
```

While на ред 8 копира елементи в новия масив докато първия или втория входен масив не стигнат края си. Понеже може първия да е по - дълъг от втория или обратното, while циклите на ред 15 и 18 се грижат всеки елемент да отиде на мястото си. След това for цикъла на ред 21 връща сортираните елементи обратно в arr. Понеже паметта е последователна, нямаме проблеми, те ще бъдат на правилните места. И разбира се, изтриваме паметта!

Сложността на рекурсивни алгоритми се определя чрез рекурентни уравнения, но това ще го оставим на друг курс. Сега просто ще кажем, че сложността по време на *mergeSort* е $\Theta(n \log(n))$. Сложността по памет е $O(n)$ понеже никога не заделяме масив по - дълъг от дължината на входния. *mergeSort* е стабилен сортиращ алгоритъм.

2.8 Quick sort

Това е втория рекурсивен сортиращ алгоритъм, който ще разгледаме. Идеята е да изберем някакъв елемент (наричан *pivot*) и да пренаредим масива така, че лявата част на масива да се състои от елементите по - малки от *pivot* а вдясно от тях да бъдат елементите по - големи от *pivot*. Каква точно е наредбата в лявата и дясната част **няма значение**. След това алгоритъма бива пуснат рекурсивно върху всяка от двете части.
Функцията, която пренарежда масива по този начин, се нарича ***partition***. Тя приема масив. След изпълнението ѝ масивът ни е с желаната наредба, а функцията ни връща позицията, която разделя по - малките елементи от по - големите. В случая като *pivot* ще избираме средния елемент. Със същия успех бихме могли да изберем последния елемент или първия.
След като имаме позицията и масив с желаната наредба, пускаме сортиращия алгоритъм рекурсивно върху двете части. Дъното на рекурсията е същото като на *Merge sort* - спираме когато масивът има 1 елемент. Кодът би изглеждал по следния начин:

```
1  size_t partition(int* arr, size_t size) {
2          int pivot = arr[size / 2];
3
4          int i = 0;
5          int j = size - 1;
6
7          while (true) {
8                  while (arr[i] < pivot)
9                          i++;
10                 while (arr[j] > pivot)
11                         j--;
12
13                 if (arr[i] == arr[j])
14                         i++;
15
16                 if (i < j)
17                         std::swap(arr[i], arr[j]);
18                 else
19                         return j;
20         }
21 }
22
23 void quickSort(int* arr, size_t size) {
24     if (size < 2)
25         return;
26     size_t pivotIndex = partition(arr, size);
27
28     quickSort(arr, pivotIndex);
29     quickSort(arr + pivotIndex + 1, size - pivotIndex - 1);
30 }
```

Нека разгледаме този код. Ред 26 подрежда масива и връща индекса на pivot според който после рекурсивно викаме алгоритъма върху лявата и дясната част на масива. Сега остава да разберем как работи partition. На ред 2 избираме *pivot* елемента. Избираме си два индекса - единия на първия елемент а другия на последния. Тези индекси вървят един срещу друг докато не открият елементи от масива, които са неправилно разположени т.е. $arr[i] \geq pivot$ и $arr[j] \leq pivot$. Когато намерим тези

елементи, просто ги разменяме. Мястото на левия е в дясната половина и обратното. Понеже е възможно да работим с еднакви числа, кодът на ред 13-14 предотвратява зацикляне. Проверете какво ще стане ако премахнете този код и опитате да сортирате масив $[1, 10, 1]$.
Сложността на *Quick sort* в най - лошия случай е $\Theta(n^2)$. Има причина обаче този алгоритъм да се нарича *Quick sort*. В общия случай той е по - бърз от други алгоритми за сортиране, със сложност в най - лошия случай $\Theta(n \log(n))$. Квадратичната сложност се достига когато всеки път за *pivot* избираме най - малкия или най - големия елемент на масива. Вероятността това да се случи намалява драстично с нарастване на входа. Средната сложност на *Quick sort* е $\Theta(n \log(n))$. Въпреки привидно лошата си сложност в най - лошия случай, алгоритъма почти винаги работи със сложност $\Theta(n \log(n))$.
Каква е сложността по памет на алгоритъма? Алгоритъма е нестабилен, понеже *partition* не запазва наредбата на елементите с еднакви ключове. Споменахме по - рано, че наредбата не ни интересува, искаме единствено лявата част да е по - малка от *pivot* а дясната по - голяма.

3 Долна граница за сортиращи алгоритми използващи директни сравнения

Разглежданите досега сортиращи алгоритми са базирани на директни сравнения. Неформално, директно сравнение е за два елемента a_i, a_j да си отговорим на въпроса $a_i <_? a_j$. Ако отговорът е да правим нещо ако отговорът е не правим нещо друго и така.
За сортиращи алгоритми използващи директни сравнения имаме долна граница $\Omega(n \log(n))$. Това означава, че е невъзможно да се напише алгоритъм, който използва директни сравнения и сортира масива за по - малко от $n \log(n)$ време.

4 Сортиране в линейно време - Counting sort

Нека сега се концентрираме върху следната задача: като вход имаме някакъв масив $Arr[0 \dots n]$ като за всеки елемент x от масива знаем, че $x \in [0 \dots k]$ където k е някакво естествено число. Примерно, масивът $[1, 4, 3, 4, 6, 10, 12]$ изпълнява това стойство за k = 12. Трябва да сорти-

раме масива във време $O(n+k)$ където n е големината на масива.
Алгоритъма, който решава тази задача се нарича Counting sort. Той използва два работни масива, $Count[0 \dots k]$ и $Result[0 \dots n]$. Нека разгледаме следния код:

```
1  const int K = 100;
2  void countingSort(std::vector<int>& v) {
3          // Създава вектор с големина K и стойности 0
4          std::vector<int> count(K, 0);
5          std::vector<int> result(v.size());
6
7          // O(n)
8          for (size_t i = 0; i < v.size(); i++)
9                  count[v[i]]++;
10         // O(k)
11         for (size_t i = 1; i < 100; i++)
12                 count[i] += count[i - 1];
13         // O(n)
14         for (int i = v.size() - 1; i >= 0; i--) {
15                 result[count[v[i]] - 1] = v[i];
16                 count[v[i]]--;
17         }
18         v = result; // може и v = std::move(result), но все пак това е пример
19 }
```

Цикълът на ред 8 е лесен за разбиране - всеки път когато видя елемент със стойност i увеличи с единица $count[i]$. При приключване на този цикъл ще е вярно следното твърдение:
count[i] е броя на елементите със стойност i във входния масив.
Алгоритъмът се казва counting sort, та е очаквано да ги броим в някакъв момент. Но какво става на ред 12?
Преди да разгледаме цикъла на ред 12 трябва да сме убедени в следното твърдение:
Нека x е произволен елемент от входния масив. Индекса на x е (броя на елементите по - малки от него) + (Броя на елементите равни на него) - 1. Примерно, за масив [1, 2, 2, 2, 3, 3, 3] правилното мясно на най - дясната тройка е 4 + 3 - 1 = 6 (елементите по - малки от него са 4 на брой, тези които са равни са три и вадим 1 заради индексацията).

$count[0]$ пази броя на нулите. Ами от нула няма по - малък елемент според нашето предположение, тоест $count[0]$ пази в себе си сбора на всички елементи по - малки от 0 (които са 0) и всички елементи равни на нула (което го преброихме в горния цикъл).
Също, $count[1]$ пази броя на единиците. За да намерим тези, по - малки от него трябва да видим колко са нулите, но това го пише в $count[0]$. Ако сте съобразителни ще видите, че при първото влизане в for цикъла на ред 12 при i = 1 имаме $count[1] += count[0]$. Сега в $count[1]$ са записани елементите по - малки или равни на 1. Правим същото с две, три и така до к.
След като свършихме с тази магия, можем да твърдим следното:
Нека j е произволен индекс от $[0 \dots k]$**.** $count[j]-1$ **е стойността на най - десния индекс в резултатния масив за елемента j**.
Сега тръгваме отдясно наляво. Щом за всеки елемент имаме записан коректния най - десен индекс, то в result, на този коректен индекс записваме елемента. След това намаляме индекса с единица - щом това е коректния индекс за най - десния, то ако има втори той ще стои от негово ляво. Ако няма втори няма какво да се притесняваме, тази стойност няма да бъде достъпена никога повече.
Важно е защо тръгваме от дясно наляво а не обратното. Това е за да се запази стабилността на counting sort. Щом пазим най - десния коректен индекс, то ще е грешно да запишем най - левия елемент на него, нали така.
Сложността по време и по памет на разгледания алгоритъм е $O(n+k)$. Защо?

Сложности	$Best-Case$	$Avarage-Case$	$Worst-case$	$Memory$	$Stable$
Bubble	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$	Да
Selection	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$	Не
Insertion	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$	Да
Merge	$O(n\log(n))$	$O(n\log(n))$	$O(n\log(n))$	$O(n)$	Да
Quick	$O(n\log(n))$	$O(n\log(n))$	$O(n^2)$	$O(1)$	Не
Count	$O(n+k)$	$O(n+k)$	$O(n+k)$	$O(n+k)$	Да