Matemática Aplicada a la Computación

Tema: Modelado con Ecuaciones Diferenciales

Daniel Alexis Gutierrez Pachas, Ph.D.
dgutierrezp@ucsp.edu.pe

Departamento de Ciencia de la Computación
Universidad Católica San Pablo

Considerando el problema con valores iniciales (PVI)

$$\frac{dx}{dt} = kx, \ \forall \geq 0 \quad , \quad x(0) = x_0$$

donde k es una constante de proporcionalidad, sirve como modelo para diferentes fenómenos que tienen que ver con el crecimiento o el decaimiento.

La solución a este problema es:

$$x(t) = x_0 e^{kt}, \ \forall \, t \geq 0.$$

Ejemplo 1: Crecimiento de bacterias

Inicialmente un cultivo tiene un número P_0 de bacterias. En $t = 1h$ se determina que el número de bacterias es $\frac{3}{2}P_0$. Si la razón de crecimiento es proporcional al número de bacterias $P(t)$ presentes en el tiempo t, determine el tiempo necesario para que se triplique el número de bacterias.

Ejemplo 2: Vida media del plutonio

Un reactor de cría convierte uranio 238 relativamente estable en el isótopo plutonio 239. Después de 15 años, se ha determinado que el 0.043 % de la cantidad inicial A_0 de plutonio se ha desintegrado. Determine la vida media de ese isótopo, si la razón de desintegración es proporcional a la cantidad que queda.

La ley empírica de Newton del enfriamiento/calentamiento de un objeto, se expresa con la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \ \forall \geq 0 \quad , \quad T(0) = T_0,$$

donde k es una constante de proporcionalidad, $T(t)$ es la temperatura del objeto para $t > 0$, y T_m es la temperatura ambiente, es decir, la temperatura del medio que rodea al objeto. Luego la solución es:

$$T(t) = (T_0 - T_m)e^{kt}.$$

Ejemplo 3: Enfriamiento

Al sacar un pastel del horno, su temperatura es 300° F. Tres minutos después su temperatura es de 200° F. ¿Cuánto tiempo le tomará al pastel enfriarse hasta la temperatura ambiente de 70° F?

Para un circuito en serie que sólo contiene un resistor y un inductor, la segunda ley de Kirchhoff establece que la suma de la caída de voltaje a través del inductor (L(di/dt)) más la caída de voltaje a través del resistor (iR) es igual al voltaje aplicado (E(t)). Por lo tanto, obtenemos la ecuación diferencial lineal que para la corriente

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t),$$

donde L y R son constantes conocidas como la inductancia y la resistencia, respectivamente. La corriente $i(t)$ se llama, también respuesta del sistema.

Pero la corriente i y la carga q están relacionadas por $i = dq/dt$, así tenemos la ecuación diferencial lineal

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t).$$

Ejemplo 4: Circuito en serie

Una batería de 12 volts se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de $\frac{1}{2}$ henry y la resistencia es de 10 ohms. Determine la corriente i, si la corriente inicial es cero.

La hipótesis de que la tasa con que crece (o decrece) una población sólo depende del número presente P y no de mecanismos dependientes del tiempo, tales como los fenómenos estacionales, y que puede modelar como:

$$\frac{dP}{dt} = Pf(P).$$

Supóngase que un medio es capaz de sostener, como máximo, una cantidad K determinada de individuos en una población. La cantidad K se llama capacidad de sustento del ambiente, y que verifica $f(0) = r$ y $f(K)$. Entonces, el modelo se define como:

$$\frac{dP}{dt} = P\left(r - \frac{r}{k}P\right).$$

De la ecuación anterior, la redefinimos como:

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP).$$

Alrededor de 1840, P. F. Verhulst, matemático y biólogo belga, investigó modelos matemáticos para predecir la población humana en varios países. Una de las ecuaciones que estudió fue la definida previamente, con $a > 0$ y $b > 0$. Esa ecuación se llegó a conocer como ecuación logística y su solución se denomina función logística. La gráfica se denomina curva logística. Luego si $P(0) = P_0$ y $P_0 = \frac{a}{b}$ y la solución es:

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}}.$$

Ejemplo 5: Crecimiento Logístico

Suponga que un estudiante es portador del virus de la gripe y regresa a un campus aislado de 1 000 estudiantes. Si se supone que la razón con que se propaga el virus no sólo a la cantidad x de estudiantes infectados sino también a la cantidad de estudiantes no infectados, determine la cantidad de estudiantes infectados después de 6 días si además se observa que después de cuatro días $x(4) = 50$.

Variaciones, como $\frac{dP}{dt} = P(a - bP) - h$ y $\frac{dP}{dt} = P(a - bP) + h$. Esta ecuación puede servir como modelos de poblaciones humanas que decrecen por emigración o que crecen por inmigración, respectivamente. La razón h puede depender de t o la población. Por ejemplo, se podría pescar periódicamente o con una razón proporcional a la población P al tiempo t. Este modelo puede ser

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP) - cP.$$

Otra modificación es la ecuación diferencial de Gompertz, dada

$$\frac{dP}{dt} = P(a - b \ln P) - cP.$$

Esta ecuación se usa como un modelo en el estudio del crecimiento o decrecimiento de poblaciones, el crecimiento de tumores sólidos y cierta clase de predicciones actuariales.