

**Лабораторная работа №2**  
**«Параллельная реализация решения системы линейных алгебраических уравнений с помощью MPI»**  
**РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**  
**ИТЕРАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ**

Пусть есть система из  $N$  линейных алгебраических уравнений в виде  $Ax=b$ , где  $A$  – матрица коэффициентов уравнений размером  $N \times N$ ,  $b$  – вектор правых частей размером  $N$ ,  $x$  – искомый вектор решений размером  $N$ . Решение системы уравнений итерационным методом состоит в выполнении следующих шагов.

1. Задается  $x_0$  – произвольное начальное приближение решения (вектор с произвольными начальными значениями).
2. Приближение многократно улучшается с использованием формулы вида  $x_{n+1} = f(x_n)$ , где функция  $f$  определяется используемым методом.
3. Процесс продолжается, пока не выполнится условие  $g(x_n) < \varepsilon$ , где функция  $g$  определяется используемым методом, а величина  $\varepsilon$  задает требуемую точность.

Ниже представлено несколько итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений.

***Метод простой итерации***

В методе простой итерации преобразование решения на каждом шаге задается формулой:

$$x_{n+1} = x_n - \tau(Ax_n - b).$$

Здесь  $\tau$  – константа, параметр метода. В зависимости от значения параметра  $\tau$  последовательность  $\{x_n\}$  может сходиться к решению быстрее или медленнее, или вообще расходиться. В качестве подходящего значения  $\tau$  можно выбрать  $0.1/N$  или  $-0.1/N$ ; знак зависит от задачи. Если с некоторым знаком решение начинает расходиться, то следует сменить его на противоположный.

Критерий завершения счёта:

$$\frac{\|Ax^n - b\|_2}{\|b\|_2} < \varepsilon$$

где  $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} u_i^2}$ . Подбирать значения параметра  $\varepsilon$  лучше всего исходя из задачи, начиная со значения 0.00001. Если, начиная с определенной

итерации значение этого параметра перестаёт меняться, значит, можно выбрать в качестве критерия завершения счёта именно это установившееся значение.

### ***Метод минимальных невязок***

В методе минимальных невязок преобразование решения на каждом шаге задается следующими формулами:

$$y^n = Ax^n - b,$$

$$\tau^n = \frac{(y^n, Ay^n)}{(Ay^n, Ay^n)},$$

$$x^{n+1} = x^n - \tau^n y^n,$$

где  $(u, v) = \sum_{i=0}^{N-1} u_i v_i$ . В отличие от метода простой итерации, метод минимальных невязок содержит два умножения матрицы на вектор на каждой итерации, однако сходится до нужной точности за меньшее число итераций. Критерий завершения счета можно взять такой же, как в методе простой итерации.

### ***Метод сопряженных градиентов***

В методе сопряженных градиентов преобразование решения на каждом шаге задается следующими формулами:

$$r^0 = b - Ax^0,$$

$$z^0 = r^0,$$

$$\alpha^{n+1} = \frac{(r^n, r^n)}{(Az^n, z^n)},$$

$$x^{n+1} = x^n + \alpha^{n+1} z^n,$$

$$r^{n+1} = r^n - \alpha^{n+1} Az^n$$

$$\beta^{n+1} = \frac{(r^{n+1}, r^{n+1})}{(r^n, r^n)},$$

$$z^{n+1} = r^{n+1} + \beta^{n+1} z^n,$$

где  $(u, v) = \sum_{i=0}^{N-1} u_i v_i$ . Метод сопряженных градиентов на каждой итерации содержит только одно умножение матрицы на вектор и, кроме того, сходится быстрее, чем предыдущие два метода. Однако метод сопряженных

градиентов работает только для симметричных матриц коэффициентов. Критерий завершения счета в методе сопряженных градиентов следующий:

$$\frac{\|r^n\|_2}{\|b\|_2} < \varepsilon,$$

где  $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} u_i^2}$ . Значение  $\varepsilon$  подбирать аналогично с методом простой итерации.

## ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Исходные данные для тестирования реализаций представленных методов и выполнения лабораторной работы можно взять следующие.

### *Модельная задача с заданным решением*

Элементы главной диагонали матрицы  $A$  равны 2.0, остальные равны 1.0. Все элементы вектора  $b$  равны  $N+1$ . В этом случае решением системы будет вектор, элементы которого равны 1.0. Начальные значения элементов вектора  $x$  можно взять равными 0.

### *Модельная задача с произвольным решением*

Элементы главной диагонали  $A$  равны 2.0, остальные равны 1.0. Формируется вектор  $u$ , элементы которого заполняются произвольными значениями, например  $u_i = \sin \frac{2\pi i}{N}$ . Элементы вектора  $b$  получаются путем умножения матрицы  $A$  на вектор  $u$ . В этом случае решением системы будет вектор, равный вектору  $u$ . Начальные значения элементов вектора  $x$  можно взять равными 0.

## ЗАДАНИЕ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

1. Написать программу, которая реализует итерационный алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений вида  $Ax=b$  в соответствии с выбранным вариантом. Здесь  $A$  – матрица размером  $N \times N$ ,  $x$  и  $b$  – векторы длины  $N$ . Тип элементов – double.
2. Программу распараллелить с помощью MPI с разрезанием матрицы  $A$  по строкам на близкие по размеру, возможно не одинаковые, части. Соседние строки матрицы должны располагаться в одном или в соседних MPI-процессах. Реализовать два варианта программы:  
1: векторы  $x$  и  $b$  дублируются в каждом MPI-процессе,  
2: векторы  $x$  и  $b$  разрезаются между MPI-процессами аналогично матрице  $A$ . (только для сдающих после срока)  
Уделить внимание тому, чтобы при запуске программы на различном числе MPI-процессов решалась одна и та же задача (исходные данные заполнялись одинаковым образом).
3. Замерить время работы двух вариантов программы при использовании различного числа процессорных ядер: 1, 2, 4, 8, 16. Построить графики

зависимости времени работы программы, ускорения и эффективности распараллеливания от числа используемых ядер. Исходные данные, параметры  $N$  и  $\varepsilon$  подобрать таким образом, чтобы решение задачи на одном ядре занимало не менее 30 секунд. Также параметр  $N$  разрешено подобрать таким образом, чтобы он нацело делился на 1, 2, 4, 8 и 16.

4. На основании полученных результатов сделать вывод о целесообразности использования одного или второго варианта программы.

### **ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ**

1. Метод простой итерации.
2. Метод минимальных невязок.
3. Метод сопряженных градиентов.