



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА _____ «Теоретическая информатика и компьютерные технологии»

Лабораторная работа № 5.1
по курсу «Численные методы линейной алгебры»
«Вычисление собственных значений и собственных векторов
симметричной матрицы методом А.М. Данилевского»

Студент группы ИУ9-72Б Виленский С. Д.

Преподаватель Посевин Д. П.

Москва 2024

1 Задание

Реализовать метод поиска собственных значений действительной симметричной матрицы A размером 4×4 . Проверить корректность вычисления собственных значений по теореме Виета. Проверить выполнение условий теоремы Гершгорина о принадлежности собственных значений соответствующим объединениям кругов Гершгорина. Вычислить собственные вектора и проверить выполнение условия ортогональности собственных векторов. Проверить решение на матрице приведенной в презентации. Продемонстрировать работу приложения для произвольных симметричных матриц размером $n \times n$ с учетом выполнения пунктов приведенных выше.

2 Результаты

Исходный код программы представлен в листингах ??- ??.

Листинг 1 — Код

```
1 using LinearAlgebra
2 using PolynomialRoots
3
4 function I_matrix(n::Int)::Matrix{Float64}
5     I = Matrix{Float64}(zeros(n, n))
6     for i in 1:n
7         I[i, i] = 1.0
8     end
9     return I
10 end
11
12 function danilevsky_method(A::Matrix{Float64})
13     n = size(A, 1)
14
15     B_i = Vector{Matrix{Float64}}(undef, n - 1)
16     D = copy(A)
17
18     for k in n:-1:2
19         B_inv = I_matrix(n)
20         B_inv[k - 1, :] = D[k, :]
21         B_i[n - k + 1] = inv(B_inv)
22
23         D = B_inv * D * B_i[n - k + 1]
24     end
25     P = D[1, :]
26     eigen_vals = real.(roots(push!(-reverse(P), 1)))
27
28     B = I_matrix(n)
29     for B_ in B_i
```

Листинг 2 — Код

```

1      B *= B_
2      end
3
4      y_i = [[eigen_val ^ i for i in (n-1):-1:0] for eigen_val in
eigen_vals]
5
6      x_i = [B * y for y in y_i]
7
8      return eigen_vals, normalize.(x_i)
9 end
10
11 function check_by_Viet(A::Matrix{Float64}, eigen_vals::Vector{Float64})
::Float64
12     return abs(tr(A) - sum(eigen_vals))
13 end
14
15 function check_by_Gershgorin(A::Matrix{Float64}, eigen_vals::Vector{
Float64})::Bool
16     n = size(A, 1)
17
18     start_union = undef
19     stop_union = undef
20     for i in 1:n
21         diag_elem = A[i, i]
22         line_sum = sum(abs.(A[i, :])) - abs(diag_elem)
23
24         start = diag_elem - line_sum
25         if start_union == undef || start < start_union
26             start_union = start
27         end
28
29         stop = diag_elem + line_sum
30         if stop_union == undef || stop > stop_union
31             stop_union = stop
32         end
33     end
34
35     return all(start_union <= eigen_val <= stop_union for eigen_val in
eigen_vals)
36 end
37
38 function check_ortogonal(eigen_vectors::Vector{Vector{Float64}})::Bool
39     n = size(eigen_vectors, 1)
40     for i in 1:(n-1)
41         for j in (i+1):n
42             if abs(eigen_vectors[i]'eigen_vectors[j]) > 1e-5
43                 return false
44             end
45         end
46     end
47     return true
48 end
49
50 A = [
51     2.2  1.0  0.5  2.0;

```

Листинг 3 — Код

```
1      1.0  1.3  2.0  1.0;
2      0.5  2.0  0.5  1.6;
3      2.0  1.0  1.6  2.0
4  ]
5
6  eigen_vals, eigen_vectors = danilevsky_method(A)
7  println("Eigenvalues: ", eigen_vals)
8  error_viet = check_by_Viet(A, eigen_vals)
9  println("Error in calculating eigenvalues using Vieta's theorem: ",
    error_viet)
10 check = check_by_Gershgorin(A, eigen_vals)
11 println("Verification of Gershgorin's theorem: ", check)
12 println("Eigenvectors:")
13 for eigen_vector in eigen_vectors
14     println(eigen_vector)
15 end
16 check_vects = check_ortogonal(eigen_vectors)
17 println("Orthogonality of eigenvectors: ", check_vects)
18
19 n = 5
20 A = Matrix{Float64}(Symmetric(rand(-10.0:0.1:10.0,n,n)))
21 eigen_vals, eigen_vectors = danilevsky_method(A)
22 println("Eigenvalues: ", eigen_vals)
23 error_viet = check_by_Viet(A, eigen_vals)
24 println("Error in calculating eigenvalues using Vieta's theorem: ",
    error_viet)
25 check = check_by_Gershgorin(A, eigen_vals)
26 println("Verification of Gershgorin's theorem: ", check)
27 println("Eigenvectors:")
28 for eigen_vector in eigen_vectors
29     println(eigen_vector)
30 end
31 check_vects = check_ortogonal(eigen_vectors)
32 println("Orthogonality of eigenvectors: ", check_vects)
```

Результат работы программы представлен в листингах ??- ??.

Листинг 4 — Результат работы программы

```
1 Eigenvalues: [5.652032331764589, -1.420086593950619, 1.5454183350534156,
    0.22263592713261507]
2 Error in calculating eigenvalues using Vieta's theorem:
    1.7763568394002505e-15
3 Verification of Gershgorin's theorem: true
4 Eigenvectors:
5 [0.5317360693095499, 0.44619412190869223, 0.40881553418500616,
    0.5924841071103837]
6 [-0.2220428365454722, 0.5159103236551117, -0.7572742312071333,
    0.3332705439047439]
7 [0.62892976467108, -0.5725742255591189, -0.48565379676310105,
    0.2018576157239048]
8 [-0.5219205710113896, -0.45486932161400195, 0.1534470183752563,
    0.705086399217363]
9 Orthogonality of eigenvectors: true
```

Листинг 5 — Результат работы программы

```
1 Eigenvalues: [18.176061276778213, -8.924899361398401, 5.39378895734575,  
2 1.874589613387166, -0.5195404861127171]  
3 Error in calculating eigenvalues using Vieta's theorem:  
4 1.2434497875801753e-14  
5 Verification of Gershgorin's theorem: false  
6 Eigenvectors:  
7 [0.3996021709709015, -0.665653553721814, 0.5558056083971021,  
8 -0.17477433349077834, 0.2403279205586481]  
9 [-0.5492894758466208, -0.10766023132451748, 0.24684288967053,  
10 0.6180553989016193, 0.4937271088597009]  
11 [-0.5156957615883632, -0.37662692283972776, -0.392079500533507,  
12 -0.5966956605656002, 0.28712017761845604]  
13 [-0.2019522237982415, 0.5759766479137343, 0.5948706624020939,  
14 -0.48096669550969695, 0.20558728848053778]  
15 [0.48153126322413037, 0.2678015740412564, -0.350073240577105,  
16 0.009315724023380937, 0.7574773283713271]  
17 Orthogonality of eigenvectors: true
```

3 Выводы

Метод Данилевского нахождения собственных значений и векторов симметричной матрицы является достаточно точным.