Espacios vectoriales euclídeos.

(V, g) eve. $\quad B$ ortonormal $\quad M_B(g) = I_n$

→ ORIENTACIÓN

B y B' dos bases $\quad B \sim B' \iff \det(P_{BB'}) > 0$ → Relación de equivalencia

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "P"] \arrow[rr, bend right, "Q \cdot P"'] & B' \arrow[r, "Q"] & B'' \end{tikzcd}$$

Hay dos clases de equivalencia $\begin{cases} \det(P_{BB'}) > 0 \\ \det(P_{BB'}) < 0 \end{cases}$

Se dice orientación positiva de $(V, g) = [B_c]$

Orientación + de $(V,g) = [B_c] = \{B \text{ bases} : \det(P_{BB_c}) > 0\}$

Orientación − de $(V,g) = [\bar{B}] = \{B \text{ bases} : \det(P_{BB_c}) < 0\}$

→ PROD. VECTORIAL

$\dim V = 3 \quad u, v \in V$ se define el prod. vectorial.

$$\times : \wedge : V \times V \longrightarrow V$$
$$(u, v) \longmapsto u \times v = u \wedge v$$

El nuevo vector verifica:

1) $(u \wedge v) \perp u$ y $(u \wedge v) \perp v$

2) $\| u \wedge v \| = \|u\| \|v\| \operatorname{sen} \widehat{uv}$

3) $\det(u, v, u \times v) \geq 0$ (regla del sacacorchos) / botella / mano derecha

Propiedades:

① $u \times v = -(v \times u)$ Antisimétrico

② $u \times v = \vec{0} \iff u$ y v son LD (utilizada para dem. vectores ld)

③ $(u + w) \times v = (u \times v) + (w \times v)$
$\quad u \times (w + v) = (u \times w) + (u \times v)$

④ $(a u) \times v = a(u \times v)$
$\quad u \times (a v) = a(u \times v)$

} $\times$ es bilineal. (NO ES MÉTRICA)

⑤ B ortonormal $= \{e_1, e_2, e_3\}$

$u = (u_1, u_2, u_3)$
$v = (v_1, v_2, v_3)$ coordenadas en B

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3$$

⑥ $u \times (v \times w) = g(u,w)v - g(u,v)w$

Clasificación de isometrías

(V,g) eve. $f(V,g) \to (V,g)$

1) f isometría $\iff M(f, B_{orton}) = A$ es ortogonal $\iff A^t \cdot A = I$
2) f isometría $\iff \|v\| = \|f(v)\| \ \forall v \in V$
3) f isometría $\iff f$ aplica bases ortonormales en bases ortonormales.
4) f isometría $\Rightarrow \det(f) = \pm 1$
5) Si λ es valor propio de $f \Rightarrow \lambda = \pm 1$ (Dem IMP)
6) Si U es invariante con $f \Rightarrow U^\perp$ es invariante por f

→ $\det(f) = 1 \Rightarrow f$ es movimiento directo o rotación

→ $\det(f) = -1 \Rightarrow f$ es mov. inverso o reflexión.

~Dem prop 5~

Suponemos λ es valor propio $\Rightarrow f(v) = \lambda v \quad (v \neq 0)$

Por ser isometría $\Rightarrow \|v\| = \|f(v)\|$

$$\|v\| = \|\lambda v\|$$

$$\underset{\neq 0}{\|v\|} = |\lambda| \underset{\neq 0}{\|v\|} \Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Sea $v \in V$, vector fijo si $f(v) = v \Rightarrow v$ vector propio asociado a $\lambda = 1$

$V_f = V_1 \to$ subespacio de vectores fijos.

(V,g) eve dim $V = 2$ y $f: V \to V$ isometría $A = M(f,B)$

~> $\det(A) = \det(f) = 1 \Rightarrow f$ rotación o giro de ángulo $\theta \in [0, 2\pi]$

se verifica que la matriz de f en cualquier base ortonormal es:

$\forall B$ ortonormal $M(f,B) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

f NO tiene vectores fijos. Se verifica que si $\theta \neq \pi$, f no es diago.

$\theta = \pi \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ simetría central.

$\rightsquigarrow \det(f) = \det(A) = -1 \Rightarrow f$ es una reflexión = simetría respecto de una $\underbrace{\text{recta vectoria}}$

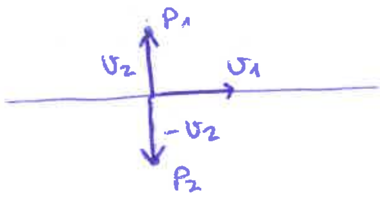
sub propio asociado a 1 = vectores fijos = eje de simetría

$\exists$ B ortonormal : $M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$B = \{v_1, v_2\}$

$f(v_1) = v_1$

$f(v_2) = -v_2$



$v_1 \in$ eje de simetría

$v_2 \perp$ eje de simetría

Ejercicio

$M_{Bu}(g) = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}$

Demostrar que es isometría. Clasificarla.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = (7x - 12y, 4x - 7y)$

$g(u,v) = g(f(u), f(v)) \quad \forall u,v \in \mathbb{R}^2$

$U^t G V = U^t A^t G A V \Rightarrow G = A^t G A$

$f(e_1) = (7,4)$

$f(e_2) = (-12,-7)$ $\quad M(f, Bu) = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = A$

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -12 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Es isometría.}$$

$\det(f) = \begin{vmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow$ reflexión = simetría respecto de una r. vectorial $= V_1$

Podemos calcular el det ya que los det de endomorfismos semejantes coinciden.

$V_1 = \{ (A - 1I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} -$

$x - 2y = 0 \}$ eje de simetría

$(\mathbb{R}^2, g_u)$

Calcular respecto la B_u la expresión matricial

a) giro de $\theta = \frac{\pi}{3}$

b) simetría respecto de la recta vectorial $2x+y=0$

$\parallel$

reflexión

$$a)\ M(f, \underset{\text{ortonormal}}{B_u}) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La base es ortonormal porque estamos en g_u

b) $\exists\ B_{\text{orton}} : M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$B = \{v_1, v_2\}$ $\quad$ $v_1 \in$ eje de simetría $\{2x+y=0$

$v_1 (1,-2)$

$v_2 \perp$ eje de simetría

Cambiamos la posición y un signo $\rightarrow$ $v_2 (2,1)$

pero esto solo valen en g_u.

sino, $g(\ ) = (1,-2)\begin{pmatrix} = \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

Ahora debemos calcular la normal y ortonormalizarlos ya que ya son ortogonales.

$\|v_1\| = \sqrt{5}$ $\quad$ $B_{\text{orton}} = \{\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2), \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)\}$

$\|v_2\| = \sqrt{5}$

En la práctica, podemos coger una base que no sea ortonormal, porque una simetría es diagonalizable y son los vectores propios.

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ B & \xrightarrow{M(f,B)} & B \\ {\scriptstyle P^{-1}}\uparrow & & \downarrow {\scriptstyle M(f,B,B_u)=P} \\ B_u & \xrightarrow[M(f,B_u)]{} & B_u \end{array}$$

$M(f, B_u) = P\ M(f, B_u)\ P^{-1}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = M(f, B, B_u)$

$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

1) Ejercicio tema anterior.

$\mathbb{R}^3$, $f \in End(\mathbb{R}^3)$

$B = \{(1,1,-1), (0,1,0), (2,1,-1)\}$

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 9 & 0 & a \\ 5 & 4 & 10 \\ -5 & 0 & -6 \end{pmatrix} = A$$

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = G$$

Para los valores de **a** para los cuales f autoadj respecto de g, halla una base ort. formada por vectores propios de f.

2) Otro ejercicio

$\mathbb{R}^3$ se considera $U = \langle (1,2,3) \rangle = L\{(1,2,3)\}$

y el s.v $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-2y+z=0\}$

Halla si es posible la matriz en B_u de una métrica no degenerada g, en $\mathbb{R}^3$: $U^\perp = W$

1) Comprobemos que es autoadjunto.

$g(f(u),v) = g(u,f(v)) \quad \forall u,v \in \mathbb{R}^3$

$$(A\,U)^t G\, V = U^t\, G\,(A\,V)$$

$$U^t A^t G\, V = U^t G\, A\, V \qquad \forall u,v \in \mathbb{R}^3 \iff A^t G = G A$$

$$A^t G = \begin{pmatrix} 9 & 5 & -5 \\ 0 & 4 & 0 \\ a & 10 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2a-18 & 4 & 3a-26 \end{pmatrix}$$

$$G A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 0 & a \\ 5 & 4 & 10 \\ -5 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2a-18 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 3a-26 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a-18 = 2 \\ 3a-26 = 3a-26 \end{array}\right\} \text{Porque debe ser simétrica.}$$

Diagonalizamos:

$$p_\lambda(A) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 0 & 10 \\ 5 & 4-\lambda & 10 \\ -5 & 0 & -6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 8\lambda - 16 = 0 \begin{cases} \lambda = -1 \\ a_1 = 1 \\ \lambda = 4 \\ a_2 = 2 \end{cases}$$

$\lambda_1 = -1 \quad a_{\lambda_1} = 1$ Calculamos subespacios propios.

$\lambda_2 = 4 \quad a_{\lambda_2} = 2$

$$V_{-1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 10 \\ 5 & 5 & 10 \\ -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

$$\left. \begin{matrix} x + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{matrix} \right\} \left. \begin{matrix} x = -z \\ y = -z \end{matrix} \right\} (1,1,-1)$$

$B_{V_1} = \{(1,1,-1)\}$

Cuidado!! este vector NO es el mismo de la base del enunciado, ya que el de la base del enunciado está expresado en la canónica, mientras que este que acabamos de calcular está expresado en la base B.

$$1(1,1,-1) + 1(0,1,0) - 1(2,1,-1)$$

$$(-1,1,0)_{Bu} = (1,1,-1)_B$$

$$V_4 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (A-4I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 5 & 0 & 10 \\ -5 & 0 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + 2z = 0 \} = \{(2,0,-1), (0,1,0)\}$$

$B_{V_2} = \{(2,0,1)_B, (0,1,0)_B\}$

Aplicamos GS y conseguimos bases ortonormales.

$$\|(1,1,-1)\| = \sqrt{(1,1,-1)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} = 1$$

B_{V_1} ortonormal $= \{(1,1,-1)_B\}$

Si quisieramos trabajar en la B_u todo el ejercicio, pasaríamos el end y la métrica a la B_u.
para ello,

$$M(f, B_u) = P \; M(f, B) \; P^{-1}$$

$$M(g, B_u) = M_{B_u}(g) = (P^{-1})^t \; M_B(g) \; P^{-1}$$

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "M(f{,}B)"] \arrow[d, "P"] & B \arrow[d, "P"] \\ B_u \arrow[u, bend left, "P^{-1}"] \arrow[r] & B_u \end{tikzcd}$$

$$M_{B_u}(g) = Q^t \; M_B(g) \; Q$$

Donde Q es la matriz de cambio de base de B_u a B.

$$B_{V_4} = \{ \underset{u_1}{(2,0,-1)_B}, \underset{u_2}{(0,1,0)_B} \}$$

Aquí podríamos hacer el prod. escalar si estuviesemos en la métrica usual y B_u.

$\downarrow$ GS

$$v_2 = a_2 - a_{12} v_1 \; ; \quad a_{12} = \frac{g(v_1, u_2)}{g(v_1, v_1)} = \frac{-1}{2}$$

$$v_2 = (0,1,0) - \frac{1}{2}(2,0,1) = \left(-1, 1, \frac{1}{2}\right)$$

$$\|v_1\| = \sqrt{2}$$

$$\|v_2\| = \sqrt{3/2}$$

$$B_{V_4} \text{ orton.} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(2,0,-1), \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \right) \right\}$$

$$\Rightarrow \bar{B} = \left\{ (1,1,-1)_B, \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right)_B, \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \right)_B \right\}$$

$\bar{B}$ es una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, g)$ formada vectores propios de f.

2) ¿$\exists\, g$ no degenerada : $U^\perp = W$? Debemos sacar base de U.

$B_u = \{(1,2,3)\}$ $\rightsquigarrow$ comprobamos que es base.

$B_W = \{(1,0,-1), (0,1,2)\}$

Ahora comprobamos que los 3 forman base.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 + 1 - 4 = 0 \Rightarrow U \subseteq W$$

* Si fuesen independientes, $B_{\mathbb{R}^3} = \{u, w_1, w_2\}$ definimos la métrica.

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$ es no degenerada

teniendo en cuenta que $g_{12} = g_{21} = g(u, w_1) = 0$

$g_{13} = g_{31} = g(u, w_2) = 0$

Ahora cambiamos de base a la usual.

Pero esto NO ocurre porque el det es 0 y no son base de $\mathbb{R}^3$.

$U \subseteq W$

$B_U = \{(1,2,3)\}$ (u)

$B_W = \{(1,0,-1), (0,1,2)\}$ (w_1, w_2)

Como $U^\perp = W$

$g(u, w_1) = 0$

$g(u, w_2) = 0$

$$(1,2,3) = \underset{1}{a}(1,0,-1) + \underset{2}{b}(0,1,2)$$

$u = w_1 + 2w_2$

$$\left.\begin{aligned} g(w_1 + 2w_2, w_1) &= 0 \\ g(w_1 + 2w_2, w_2) &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} g(w_1, w_1) + 2g(w_2, w_1) &= 0 \\ g(w_1, w_2) + 2g(w_2, w_2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} g_{11} + 2g_{21} &= 0 \\ g_{21} + 2g_{22} &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} g_{11} &= -2g_{21} \\ g_{22} &= -\tfrac{1}{2}g_{21} \end{aligned}$$

$B = \{\underbrace{w_1, w_2}_{W}, w_3\}$

$g_{21} = 2$; $g_{11} = -4$ $g_{22} = -1$

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

El det es $\neq 0$, por lo que es no degenerada.

w_3 puede ser el $(0,0,1)$ ya que es l.i. con w_1, w_2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow w_3 = (0,0,1)$$

$M_{B_U}(g) = P^t M_B(g) P$ $\qquad P_{B_U, a\, B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

Ejercicio

(V,g) eve f, h autoadjuntos : $f \circ h = h \circ f$.

a) Probar que los subespacios propios de f son invariantes por h.

V_λ subespacio propio. de f asociado a λ. ¿$h(V_\lambda) = V_\lambda$?

$h(V_\lambda) = V_\lambda \iff h(v) \in V_\lambda \quad \forall v \in V_\lambda$

$$v \in V_\lambda \Rightarrow f(v) = \lambda v.$$
$$h(f(v)) = h(\lambda v)$$
$$(h \circ f)(v) = \lambda\, h(v)$$
$$(f \circ h)(v) = \lambda\, h(v)$$
$$f(h(v)) = \lambda\, h(v) \Rightarrow h(v) \text{ es un vector propio de } f \text{ asociado a } \lambda.$$

b) Dem que $\exists$ base ordenada ortonormal de B de (V,g) tal que $M(f,B)$ y $M(h,B)$ son matrices diagonales.

$\left.\begin{matrix} M(f,B) \\ M(h,B) \end{matrix}\right\}$ diagonales.

$\Updownarrow$

f y h tienen los mismos vectores propios.

$$g((f\circ h)(v), u) = g(f(h(v)), u) = g(h(v), f(u)) = g(v, h(f(u)))$$
$$= g(v, (h\circ f)(u)) = g(v, (f\circ h)(u))$$

Ejercicio

$$M_{Bu}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $B_u \{e_1, e_2, e_3\}$

$U = L\{e_1, e_2\}$

$g_u(x,y) = g(x,y)$

$M(g_U) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ semidef ⊕ degenerada.

$U = L\{e_2, e_3\}$:

$M(g_U) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ det $= -1 \Rightarrow$ no degenerada.

def ⊕ No
def ⊖ No $\Rightarrow$ indefinida.

¿∃ s.v talque la métrica sea no deg def ⊖?

supongamos que si.

$\exists v_3 \neq \vec{0}$: $v_3 \perp v_1$
$v_3 \perp v_2$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ $\begin{pmatrix} - & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & +- \end{pmatrix}$

Aplicamos sylvester y vemos que ocurre

Pero como $\det(g) = -2$

no es def ⊖ y tampoco es def ⊕

para que el det de negativo, las posibles soluciones son:

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ No puede ser ya que no es def ⊖

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ det < 0

es la única posibilidad.

Ejercicio

(V, g) evm dim $= 3$ $B = \{v_1, v_2, v_3\}$

B base g euclidea $\Leftrightarrow$ $a_{33} > 0$ $\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} > 0$ $\det(A) > 0$

$A = M_B(g) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ | g euclidea $\Rightarrow$ $g_{ij} = g_{ji} = g(v_i, v_j)$

reordenamos la base.

$a_{11} > 0$

$B' = \{v_3, v_2, v_1\}$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$

$\det(A) > 0$ ✓

Calculamos la matriz de la métrica en esa base.

$$M_{B'}(g) = P^t M_B(g) P =$$

$B = \{v_1, v_2, v_3\}$

$B' = \{v_3, v_2, v_1\}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$v_3 = (0,0,1)_B$

$v_2 = (0,1,0)_B$

$v_1 = (1,0,0)_B$

$$P_{B' a B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Como la métrica es euclídea, $a_{33} > 0$ $\quad \begin{vmatrix} a_{33} & a_{32} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$ $\quad \det A > 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\quad B' = \{v_3, v_2, v_1\}$

$$M_{B'}(g) = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$ es euclídea. es el mismo razonamiento.

Endomorfismo adjunto (ejercicio)

(V, g) $\quad End(V)$

$G: End(V) \times End(V) \longrightarrow \mathbb{R}$

$G(f, h) = traz(f \circ \hat{h})$ donde $\hat{h}$ es el end. adjunto de h.

Prueba que g es una métrica euclídea.

Sea $h: V \to V$

$\hat{h}: V \to V$ $\quad \forall x, y \in V \quad g(h(x), y) = g(x, \hat{h}(y))$

$A = M(h, B)$ $\quad A^t G = G \hat{A}$

$G = M(g)$ $\quad \hat{A} = G^{-1} A^t G$

$\hat{A} = M(\hat{h}, B)$

El end. adjunto solo tiene sentido si la métrica es no degenerada

1) $G(af + bj, h) \overset{?}{=} a G(f, h) + b G(j, h)$ $\quad a \in b \in \mathbb{R}$, $f, h, j \in End(V)$

$G(af + bj, h) = traz((af + bj) \circ \hat{h}) = traz(a(f \circ \hat{h}) + b(j \circ \hat{h})) =$

$= a\, traz(f \circ \hat{h}) + b\, traz(j \circ h) = a\, G(f, h) + b\, G(j, h)$

Recordemos prop de la traza.

$\text{traz}(f+h) = \text{traz}\, f + \text{traz}\, h$

$\text{traz}(af) = a\, \text{traz}\, f$

$\text{traz}(f \circ h) = \text{traz}(h \circ f)$

2) $G(f, ah+bj) \overset{?}{=} a\,G(f,h) + b\,G(f,j)$

$G(f, ah+bj) = \text{traz}(f \circ (a\hat{h} + b\hat{j})) = \text{traz}(a(f \circ \hat{h}) + b(f \circ \hat{j}))$

$= a\, \text{traz}(f \circ \hat{h}) + b\, \text{traz}(f \circ \hat{j}) = a\, G(f,h) + b\, G(f,j)$

Acabamos de probar que es bilineal.

Veamos que es simétrica:

3) G simétrica $\quad G(f,h) \overset{?}{=} G(h,f) \iff \text{traz}(f \circ \hat{h}) \overset{?}{=} \text{traz}(\hat{h} \circ f)$

$\text{traz}(f) = \text{traz}(M(f,B))$

$A = M(f,B)$

$C = M(h,B)$

$G = M_B(g)$

$\text{traz}(f \circ \hat{h}) = \text{traz}(\underset{f}{A}\, \underbrace{(G^{-1}C^tG)}_{\hat{h}})$

$= \text{traz}((AG^{-1}C^tG)^t) = \text{traz}(\underset{G}{G^t}\, C\, \underset{G^{-1}}{(G^{-1})^t}\, A^t)$

$= \text{traz}(G\, C\, G^{-1}A^t) =$

$= \text{traz}(C\, \underbrace{G^{-1}A^t G}_{\hat{A}}) = \text{traz}(h \circ \hat{f})$

4) G es euclidea, esto es, $G(f,f) \geq 0$

$G(f,f) \overset{?}{\geq} 0$

$G(f,f) = \text{traz}(f \circ \hat{f}) = \text{traz}(A \cdot \underset{I}{G^{-1}}\, A^t\, \underset{I}{G}) = \text{traz}(A \cdot A^t) > 0$

Suponemos que B es ortonormal

IMP!! DIAGONALIZAR UNA MÉTRICA ES HACER SYLVESTER.!!

Clasificación de las isometrías en $\mathbb{R}^3$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ isometría (cualquier esp. vectorial de dim=3)

$A = M(f, B)$

$\rightsquigarrow \det(f) = 1$ (f no es diagonalizable)

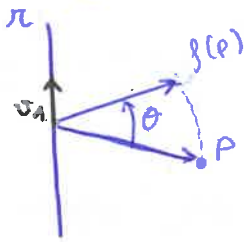
$\Downarrow$

f es una rotación de ángulo θ respecto de una recta vectorial

A la recta vectorial se le llama <u>eje de giro</u>

$\exists\ \bar{B}$ ortonormal : $M(f, \bar{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$\bar{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$



$f(v_1) = v_1$ $v_1 \in$ eje de giro que es V_1 (sub. propio asociado a 1)

$f(v_2) = \cos\theta\, v_2 + \operatorname{sen}\theta\, v_3$
$f(v_3) = -\operatorname{sen}\theta\, v_2 + \cos\theta\, v_3$ $\Big\}$ Estos vectores están en el plano perpendicular al eje de giro

$v_2, v_3 \in (\text{eje de giro})^\perp$ = plano vectorial.

En la práctica, $v_2 \perp v_1$ y $v_3 = v_1 \times v_2$ $\begin{cases} g(v_1, v_3) = 0 \\ g(v_2, v_3) = 0 \end{cases}$

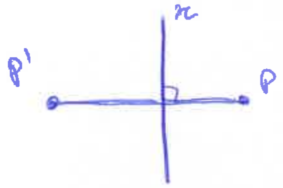
esto solo si es g_u.

luego los ortonormalizamos.

HAY **DOS** EXCEPCIONES:

$\theta = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\theta = \pi \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = M(f, \bar{B})$ ← esto es un giro de 180° o rotación de ángulo π respecto de π pero además es una simetría o reflexión respecto de la recta π.



Hay profesores que usan $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

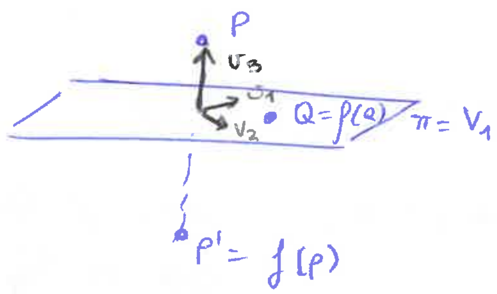
$\rightsquigarrow \det(f) = -1$

1) Hay vectores fijos $\Rightarrow \dim V_1 = 2 \Rightarrow V_1$ (plano de vectores fijos.)
plano vectorial

($M(f, B_{orton})$ es simétrica)

Diremos que f es una reflexión o simetría respecto de un plano vectorial $= V_1 =$ vectores fijos.

$\exists \bar{B}: M(f, \bar{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Aquí no tiene que ser ortonormal.



$\bar{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$

$\left.\begin{array}{l} f(v_1) = v_1 \\ f(v_2) = v_2 \end{array}\right\}$ vectores del plano.
$f(v_3) = -v_3$

$v_1, v_2 \in V_1 =$ plano de simetría.
$v_3 \perp$ plano de simetría. $= V_1$ $\begin{pmatrix} v_1 \perp v_3 \\ v_2 \perp v_3 \end{pmatrix}$

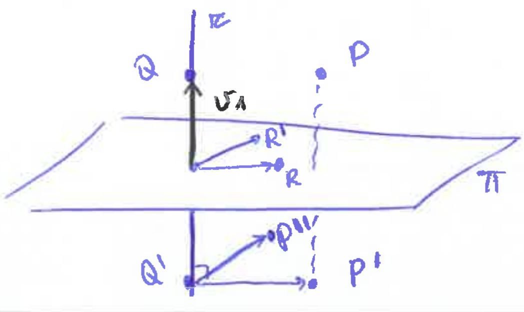
2) No hay vectores fijos (f No es diagonalizable)

$\Downarrow$

f es la composición de una rotación y una reflexión, de manera que el eje de giro y el plano de simetría son ortogonales.

$\exists \bar{B}$ ortonormal: $M(f, \bar{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$\bar{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$



$f(v_1) = -v_1 \Rightarrow v_1 \in$ eje de giro $= V_{-1}$

$v_2, v_3 \in$ plano de simetría $= (V_{-1})^{\perp}$

$v_2 \perp v_1$

$v_3 = \underbrace{v_1 \times v_2}_{g_u}$ o $\begin{pmatrix} g(v_1, v_3) = 0 \\ g(v_2, v_3) = 0 \end{pmatrix}$

Finalmente los hacemos unitarios.

DOS EXCEPCIONES

$\theta = 0 \Rightarrow M(f, \bar{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ simetría respecto de un plano. reflexión. $\dim V_1 = 2$

$\theta = \pi \Rightarrow M(f, \bar{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad (\mathbb{R}^3, g_u)$

$f(x,y,z) = \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z, \ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z, \ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z\right)$

Comprobar que es una isometría en $\mathbb{R}^3$

clasifícala.

Calcula sus elementos distinguidos.

f isometría $\Leftrightarrow g_u(u,v) = g(f(u), f(v)) \ \forall u, v \in \mathbb{R}^3$

$A = M(f, B_u)$ $\qquad u^t I_3 v = (uA)^t I_3 (Av)$

$G = M(g_u, B_c) = I_3$ $\qquad I_3 = A^t \cdot A$

$f(e_1) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$f(e_2) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$f(e_3) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$M(f, B_u) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$A^t \cdot A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I_3$

$\det(f) = \frac{1}{27}(15+12) = 1 \Rightarrow$ rotación $\qquad \det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$

debemos calcular el eje (una recta) y el ángulo.

eje $= V_1$

$$V_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -4/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -4/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

$B_{V_1} = \{(1,1,1)\}$

$$\left.\begin{array}{l} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{array}\right\} \equiv V_1 \text{ eje de giro}$$

$x = 2x - y$

$x = y$

2 forma de calcular el ángulo.

congruentes - métricas

semejantes - endomorf.

~corta~ como es un giro, sabemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = M(f, \bar{B})$$

que es semejante a la matriz de f.

por lo que tienen igual traza

$$-1 = 1 + 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow \underline{\theta = \pi}$$

es la excepción rara, podemos decir que es la simetría respecto de la recta $V_1 = L\{(1,1,1)\}$

IMP!! de la forma "corta" debemos tener en cuenta el sentido de giro, ya que $\cos\theta = \frac{1}{2}$ $\quad \theta = \frac{\pi}{3}$ y $-\frac{\pi}{3}$!!

~larga~ escogemos un vector que no sea del eje de giro

$v \in \mathbb{R}^3$ $v \notin$ eje de giro.

$v = (1,0,0) \Rightarrow f(v) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \qquad \langle v, f(v) \rangle = -\frac{1}{3}$

En este caso da igual por -1 es π.

$g(v \qquad \cos\theta = \dfrac{\langle g(v, f(v) \rangle}{\underset{+}{\|\ \|}\ \underset{+}{\|\ \|}} \longrightarrow$ Miramos el signo de esto para saber el signo del ángulo.

Ejercicio.

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$M(f, B_u) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Comprobamos que es una isometría.

$A^t \cdot A = I.$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\text{yes}}}$$

$$\det(f) = \frac{1}{27}(-15 - 12) = -1$$

$$\dim V_1 = 3 - rg(A - I) = 3 - \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & \frac{2}{3} \\ -2/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

reflexión (simetría) respecto de un plano vectorial $= V_1$

$$V_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$-x - y + z = 0 \} \equiv V_1 \qquad \begin{matrix} (1, 0, 1) \\ (1, -1, 0) \end{matrix}$$

$$B_{V_1} = \{(1, -1, 0), (1, 0, 1)\}$$

Ejercicio

$f(x, y, z) = (y, -z, x)$

para ver que es isometría

f isometría $\Leftrightarrow M(f, B_{ortonormal})$ es ortogonal $\Leftrightarrow A^t A = I$

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$f(e_1)=(0,1,0)$
$f(e_2)=(1,0,0)$
$f(e_3)=(0,-1,0)$

$$\det(f) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Veamos si es diago:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 1 = 0 \ ; \ \lambda = -1 \quad \text{(No diago)}$$

Podemos ver que $\dim V_1 = \text{rang}(A - I) = 0 \to$ No hay vectores fijos

$\Rightarrow$ f composición giro y simetría $\Rightarrow$ $\underbrace{\text{eje de giro}}_{V_{-1}} \perp \underbrace{\text{plano de simetría}}_{(V_{-1})^{\perp}}$

• ángulo $\Rightarrow$ comparando las trazas porque las matrices son semejantes.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ 0 & \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

• Trazas semejantes: $0 = -1 + 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$

• Eje de giro : V_{-1}

$V_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

$\boxed{B_{V_{-1}} = \{(-1,1,1)\}}$ Eje de giro

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{matrix} x+y=0 \\ y-z=0 \\ x+z=0 \end{matrix}\right\} \equiv V_1$$

• Plano de simetría : $V_{-1}^{\perp}$ $(x,y,z) \perp (-1,1,1)$

$g_u((x,y,z),(-1,1,1)) = 0 \Rightarrow \{-x+y+z=0\} \equiv V_{-1}^{\perp}$

$\boxed{B_{V_{-1}^{\perp}} = \{(1,1,0),(0,1,-1)\}}$ plano vectorial.

$$\left.\begin{matrix} \theta = \frac{\pi}{3} \\ B_{V_{-1}} = \{(-1,1,1)\} \\ B_{V_{-1}^{\perp}} = \{(1,1,0),(0,1,-1)\} \end{matrix}\right\} \text{Sol.}$$

Ejercicio.

En $\mathbb{R}^3$ calcula la matriz asociada al giro de ángulo $\frac{\pi}{2}$ respecto de la recta vectorial $R = \begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

$R = \begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}$

Como es rotación $\Rightarrow \exists$ B ortonº

$$M(f, \bar{B}_{orton}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\text{sen}\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sen}\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Debemos obtener $\bar{B}$

$\bar{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$

$f(v_1) = v_1$, v_1 Eeje de giro o rotación (vector fijo) $\Rightarrow v_1(1,1,0)$

$v_2, v_3 \in (\text{eje de rotación})^\perp$

$v_2 = (1,-1,0)$

$$v_3 = \underbrace{v_1 \times v_2}_{(\mathbb{R}^3, gu)} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,-2)$$

$\bar{B} = \{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{2}(1,-1,0), (0,0,-1) \}$ ↙ Dividiendo por la norma.

Ahora hacemos el cambio de base a la canonica.

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ B_u es ortonormal por ser gu.

$$\begin{array}{ccc} \bar{B} & \xrightarrow{M(f,\bar{B})} & \bar{B} \\ & & \downarrow P \\ B_u & \longrightarrow & B_u \end{array}$$

$p^t = p^{-1}$ ↙ esto porque son bases ortonormales.

¿$M(f, B_u)$?

$$M(f, B_u) = P \cdot M(f,\bar{B}) \cdot \overset{P^{-1}}{\overset{\shortparallel}{P^t}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Ejercicio.

$\varphi(x,y,z) = 5x^2 - 16xy - 4xz + 13y^2 + 6yz + 2z^2$

Comprueba g es métrica. euclidea. y calcula respecto a B_u la matriz respecto de la reflexión ortogonal respecto del plano vectorial $U = \{x+2y+2z=0\}$

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -2 \\ -8 & 13 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5 > 0 \\ \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{vmatrix} > 0 \\ |\text{Todo}| > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{euclidea.}$$

Para la simetría.

$$\exists \bar{B} : M(f, \bar{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \bar{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$\left.\begin{array}{l} f(v_1) = v_1 \\ f(v_2) = v_2 \end{array}\right\}$ $v_1, v_2 \in$ plano simetría $\rightsquigarrow$ $\left.\begin{array}{l} v_1 = (2,-1,0) \\ v_2 = (2,0,-1) \end{array}\right\}$ l.i.

$f(v_3) = -v_3$ $\qquad \left.\begin{array}{l} v_1 \perp v_3 \\ v_2 \perp v_3 \end{array}\right. \Rightarrow v_3 \perp$ plano simetría.

$v_3 \neq v_1 \times v_2$ porque B_u no es ortonormal ya que no estamos en g_u

$g(v_1, v_3) = 0 \Leftrightarrow (2,-1,0)\left(\equiv\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 18x - 29y - 7z = 0$

$g(v_2, v_3) = 0 \Leftrightarrow (2,0,-1)\left(\equiv\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 12x - 19y - 6z = 0$

De ambas soluciones $\longrightarrow$ $v_1 = (24, 41, 6)$

$\bar{B} = \{(2,-1,0), (2,0,-1), (24,41,6)\}$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{ccc} \bar{B} & \xrightarrow{M(f,\bar{B})} & \bar{B} \\ P^{-1}\uparrow & & \downarrow P \\ Bu & \xrightarrow[M(f,Bu)]{} & Bu \end{array}$$

$M(f,Bu) = P \cdot M(f,\bar{B}) \cdot P^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 24 \\ -1 & 0 & 41 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Examen final.

a) Enunciar y demostrar la desigualdad de Schwarz

$\forall u, v \in (V, g)$ e.v.e. $g(u,v) \leq \|u\| \|v\|$ y la igualdad $\Leftrightarrow u, v$ l.d

Dem.

$$\cos\theta = \frac{g(u,v)}{\|u\| \|v\|}$$

$$|g(u,v)| = \|u\| \|v\| \underbrace{|\cos\theta|}_{1} \rightsquigarrow \theta = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$

$$|g(u,v)| \leq \|u\| \|v\|$$

b) Sea f isometría en un esp. vectorial euclídeo. (V,g) eve.

¿$f + f^{-1}$ autoadjunto? Hecho con anterioridad.

c) Sea $B = \{(1,1,-1), (2,0,1), (0,0,-1)\}$

$u = (1,3,0)_B$ $v = (0,1,2)_B$ ¿$u \wedge v$? Prod. vectorial

Suponemos que $\Rightarrow$ B no es ortonormal

Por lo que pasamos a la canonica $\to$ ortonormal.

$$P_{B\,a\,Bu} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{Bu} \quad u = (7,0,2)_{Bu}$$

$$\begin{pmatrix} \equiv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{Bu} \quad v = (2,0,-1)_{Bu}$$

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 7 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = e_2 \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (0, 11, 0)_{Bu}$$

$$(0,11,0) = \alpha(1,1,-1) + \beta(2,0,1) + \gamma(0,0,-1)$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \alpha + 2\beta \\ 11 &= \alpha \\ 0 &= -\alpha + \beta - \gamma \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \alpha &= 11 \\ \beta &= -\tfrac{11}{2} \end{aligned} \quad \gamma = -\frac{33}{2} \quad u \times v = \left(11, -\frac{11}{2}, -\frac{33}{2}\right)_B$$

d) Es cierto que dos isometrías de un plano vectorial euclideo con el mismo det y la misma traza son iguales?

Falso

$\underline{\mathbb{R}^2}$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad det = 1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M(f_2, B)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad det = -1$$

$B = \{\overset{u_1}{\underset{e_2}{(0,1)}}, \overset{e_2}{\underset{e_1}{(1,0)}}\}$

reflexion $\{x=0$

$f(u_1) = u_1$ | $f(e_1) = -e_1$

$f(u_2) = -u_2$ | $f(e_2) = e_2$

$\parallel$

$M(f, B) = \{(1,0)(0,1)\}$

reflexion respecto a la recta. $\{y=0$.

$f_1(3,4) = (3,-4)$

$f_2(3,4) = (-3,4)$ $\neq$ contraej

Recordamos algo del cambio de base

$\mathbb{R}^2$ $B = \{v_1(3,2),\ v_2(1,3)\}$ Cambio de base de B a B'

$B' = \{u_1(1,0),\ u_2(1,1)\}$

- Expresamos los vectores de B en la base B'.

$v_1 = u_1 + 2u_2 = (1,2)\ B'$

$v_2 = -2u_1 + 3u_2 = (-2,3)\ B'$

cuando queremos pasar a la base usual se ponen directamente.

- Expresamos los vectores por columnas. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = P'_{B\ a\ Bu}$

$$Q'_{B\ a\ B'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}_{B'}$$

- Aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} f: V & \longrightarrow & V' \\ B & \xrightarrow[M(f,B,B')]{} & B' \\ P \uparrow & & \downarrow Q \\ \bar{B} & \longrightarrow & \bar{B}' \end{array}$$

$M(f,B,B') = Q\, M(f,B,B') \cdot P$

¿$M(f,\bar{B},\bar{B}')$?

Probar la siguiente desigualdad en $\mathbb{R}^n$

Esto NO

$\forall\ x_1, x_2 \dots x_n \geq 0$ se verifica $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

desigualdad de Schwartz.

$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$ Hemos dem esta.

(V, g) eve. $|g(x,y)| \leq \|x\|\,\|y\|$

Supongamos que estamos en $(\mathbb{R}^n, g_u)$

$x = (x_1, x_2 \dots x_n)$

$y = (1, 1 \dots 1)$ ← normalmente es uno con todas las coordenadas iguales.

$g(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} x_i$

$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Aplicando la des. Schwartz.

$\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2} = \sqrt{n}$

$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,\sqrt{n}$

no ponemos el valor abs porque son ≥ 0.

$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) n$

$g(x,y) = \|x\|\,\|y\| \iff x\ y$ son l.d.

$x = \lambda y \Rightarrow (x_1, x_2 \dots x_n) = \lambda (1 \dots 1)$

Para cada $A \in M^{n\times n}$ simétrica dem.

$\operatorname{traz}(A)^2 \leq n \operatorname{traz}(A^2)$ y la igualdad $\iff A = \lambda I$

Recordemos.

$A \in S_2(\mathbb{R})$

$g(A,B) = \operatorname{traz}(A \cdot B)$

$A \notin S_2(\mathbb{R})$

$g(A,B) = \operatorname{traz}(A^t \cdot B)$

$\left.\begin{array}{l} A \in S_n(\mathbb{R}) \\ B = I_n \end{array}\right\}$ $g(A,B) = \operatorname{traz}(A)$

$\|A\| = \sqrt{\operatorname{traz}(A \cdot A)} =$

$\|B\| = \|I_n\| = \sqrt{n} = \sqrt{\operatorname{tr}(I_n \dots}$

$\operatorname{traz}(A) \leq \sqrt{\operatorname{traz}(A^2)} \cdot \sqrt{n}$

$\operatorname{traz}(A)^2 \leq \operatorname{traz}(A^2) \cdot n$

$\operatorname{traz}(A)^2 = \operatorname{traz}(A)^2 \cdot n \iff A$ y I_n son l.d.

Ejercicio

U_1, U_2 rectas vectoriales.

(V, g) eve dim $V=2$

$s_i \to$ simetría respecto de U_i

Probar que S_1 y S_2 conmutan. $\Leftrightarrow U_1 = U_2$ o $U_1 = U_2^{\perp}$

Que conmutan significa $S_1 \circ S_2 = S_2 \circ S_1$

$\Rightarrow$ | $U_1 = \langle u_1 \rangle$ supongamos que son conmutativas.

$U_2 = \langle u_2 \rangle$

$¿(S_1 \circ S_2)(u_1) = (S_2 \circ S_1)(u_1)?$

$$S_1(S_2(u_1)) = S_2(\underbrace{S_1(u_1)}_{u_1})$$

$$S_1(S_2(u_1)) = S_2(u_1) \Rightarrow S_2(u_1) \begin{cases} \text{vector propio asociado a } \lambda = 1 \\ \text{vector fijo. } (S_2(u_1) \in U \end{cases}$$

ya que $f(v) = \lambda v$.

Esto significa que $S_2(u_1) = \lambda u_1 \Rightarrow u_1$ vector propio de S_2

Por lo que ocurre una de estas dos cosas.

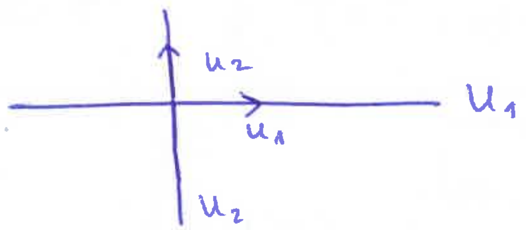
$S_2(u_1) = u_1 \Rightarrow u_1$ vector fijo de $S_2 \Rightarrow u_1 \in U_2$
$\Rightarrow U_1 = U_2$

o

$S_2(u_1) = -u_1 \Rightarrow u_1 \in U_2^{\perp} \Rightarrow U_1 \perp U_2$

$\Leftarrow$ | Suponemos que son iguales $U_1 = U_2 \Rightarrow S_1 = S_2 \Rightarrow$
$(S_1 \circ S_2) = (S_2 \circ S_1)$

Suponemos que son $\perp$.



$B = \{u_1, u_2\}$

$S_1(u_1) = u_1$
$S_1(u_2) = -u_2$ $\Rightarrow M(S_1, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$S_2(u_1) = -u_1$
$S_2(u_2) = u_2$ $\Rightarrow M(S_2, B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Comprobamos que la composición es la misma.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Hemos demostrado además que la composición de isometrías es la denominada "simetría central" o el giro de 180°

$$\begin{pmatrix} \cos \pi & -\operatorname{sen} \pi \\ \operatorname{sen} \pi & \cos \pi \end{pmatrix}$$

Mismo ejercicio en $\mathbb{R}^3$

U_1, U_2 planos vectoriales.

(V,g) eve $\dim V = 3$

$S_i \to$ simetría respecto U_i

$S_1 \circ S_2 = S_2 \circ S_1 \iff U_1 = U_2$ o $U_1^\perp \subset U_2$

$\boxed{\Rightarrow}$ $U_1 = \langle x_1, x_2 \rangle$ $\quad (S_1 \circ S_2)(x_i) = (S_2 \circ S_1)(x_i)$

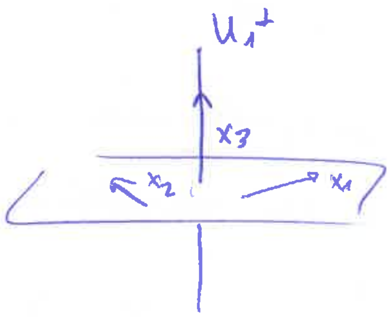
$U_2 = \langle y_1, y_2 \rangle$ $\quad (S_1(S_2(x_i)) = (S_2(S_1(x_i))$

S_2 es un vector fijo o vector propio asociado a $\lambda = 1$ $\Leftarrow$ $S_1(S_2(x_i)) = S_2(x_i)$

$\Downarrow$

$S_2(x_i) \in U_1 \Rightarrow \quad S_2(x_i) = a_1 x_1 + a_2 x_2$

pero no llegamos a decir que es un vector propio porque hay 2 valores.



sea $U_1^\perp = \langle x_3 \rangle$

$(S_1 \circ S_2)(x_3) = (S_2 \circ S_1)(x_3)$

$S_1(S_2(x_3)) = S_2(S_1(x_3))$

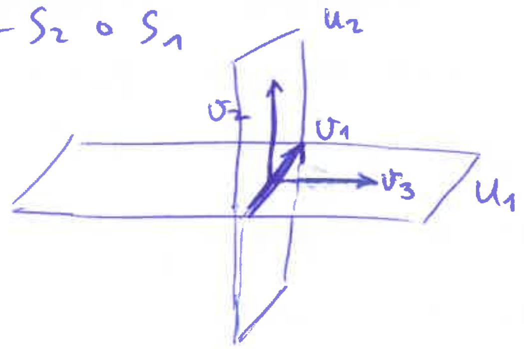
$S_1(S_2(x_3)) = S_2(-x_3) = -S_2(x_3)$

$S_2(x_3)$ vector propio asociado a -1 de S_1

$S_2(x_3) \perp U_1 \Rightarrow S_2(x_3) \in U_1^\perp$

$S_2(x_3) = \lambda x_3 \Rightarrow \begin{cases} S_2(x_3) = x_3 \Rightarrow x_3 \in U_2 \Rightarrow U_1^\perp \subset U_2 \\ S_2(x_3) = -x_3 \Rightarrow x_3 \in U_2^\perp \Rightarrow U_2 = U_1 \end{cases}$

$\Leftarrow$ si $S_1 = S_2 \Rightarrow S_1 \circ S_2 = S_2 \circ S_1$



Si $U_1^{\perp} \subseteq U_2$

$\exists v_1 : v_1 \in U_1 \cap U_2$

$v_2 \in U_1^{\perp}$ y $v_2 \in U_2$

$v_3 \in U_1 \quad v_3 \in U_2^{\perp}$

$B = \{v_1, v_2, v_3\}$

$S_1(v_1) = v_1$

$S_1(v_2) = -v_2 \qquad M(S_1, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$S_1(v_3) = v_3$

$S_2(v_1) = v_1$

$S_2(v_2) = v_2 \qquad M(S_2, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

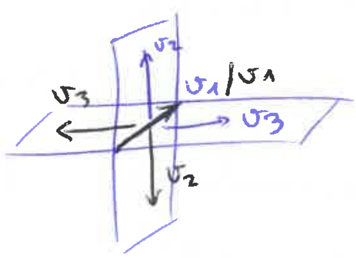
$S_2(v_3) = -v_3$

$$M(S_1 \circ S_2, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M(S_2 \circ S_1, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Interpretación. en $\mathbb{R}^3$ es el giro de ángulo π o la simetría respecto de la recta intersección.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi & -\operatorname{sen}\pi \\ 0 & \operatorname{sen}\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$$



al aplicar el giro o la simetría respecto de la recta intersección..

V o F (Enunciados en mi relación del tema 3)

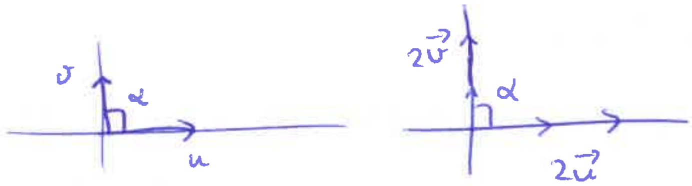
a) (V,g) eve Contraejemplo $M_{Bu}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

b) verdadero. Consecuencia directa de Sylvester.

c) (V,g) eve

¿$u, v \Rightarrow$ forman $\overset{\text{un ángulo}}{\alpha} \Rightarrow 2u$ y $2v$ es 2α?

Falso!



$$\cos \widehat{2\vec{u}\, 2\vec{v}} = \frac{g(2u, 2v)}{\|2u\|\,\|2v\|} = \frac{4\, g(u,v)}{2\|u\| 2\|v\|} = \frac{g(u,v)}{\|u\|\,\|v\|} = \cos \widehat{uv}$$

d) $\forall B$ de V es ortonormal para alguna métrica euclídea.

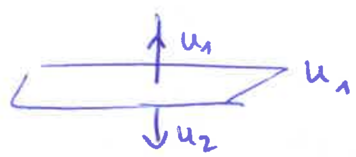
verdadero.

Sea $B = \{(3,7), (-5,6)\}$ $\quad M_{B'}(g) = P^t \underset{I_n}{\underset{\shortparallel}{M_B(g)}} P = P^t P$

$M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) U hiperplano $\dim U = n-1$ siendo n dim del espacio.
hay justamente 2 vectores unitarios y $\perp$ a U?

verdadero. Ej para entenderlo $\mathbb{R}^3$



$\dim U^\perp = \dim V - \dim U = 1$

$U^\perp = \langle u \rangle \quad \dfrac{u}{\|u\|}$ ó $\dfrac{-u}{\|u\|}$

f) $|A| = \pm 1 \Rightarrow A$ es ortogonal. Falso.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^t A \neq I$

g) $U \perp W$

B_U orton $= \{u_1 \dots u_r\}$

B_W orton $= \{w_1 \dots w_s\}$

$$\Rightarrow \{\underbrace{u_1 \dots u_r}_{Li}, \underbrace{w_1, \dots w_s}_{Li}\} = B_{U+W}$$

verdadero.

$\forall u, w \in U, W$

$u_1 = a_1 w_1 + \dots + a_s w_s$

$$\begin{cases} g(u_1, w_1) = 0 \\ g(a_1 w_1 + \dots + a_s w_s, w_1) = a_1 \overbrace{g(w_1, w_1)}^{1} + \overbrace{\dots + a_s g(w_s, w_1)}^{0} \\ \qquad = a_1 \end{cases}$$

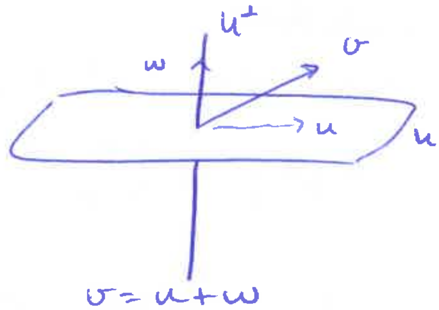
$$\begin{cases} g(u_1, w_2) \\ g(u_1, \dots) \Rightarrow a_2 = 0 \end{cases}$$

h) U $\qquad I_V = 2\pi_U - \sigma_U$

π_U = proy. ortog sobre U

σ_U = simetría ortog. sobre U

verdadero.



$B_U = \{u_1 \dots u_r\}$

$$B_V = \{\underbrace{u_1 \dots u_r}_{U}, \underbrace{u_{r+1} \dots u_n}_{U^\perp}\}$$

$$M(\pi_U, B) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

$\pi_U(v) = P_U(v) = u$

$$M(\sigma_U, B) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

π_U end. autoadj. $\nearrow 1 \quad V_1 = U$; $\searrow 0 \quad V_0 = U^\perp$

v. propios

$V_1 = U$

$V_{-1} = U^\perp$

Hacemos la cuenta

$$2\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix} = I_n \quad ✓$$

Entonces siempre va a salir la identidad independientemente de la base.

Ejercicio.

$(\mathbb{R}^3, g_u)$ Isometría que lleve U a W.

$U = \{ x - z = 0$ en B_u y clasifícala y elementos

$W = \{ z = 0$

$B_W = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$

$B_u = \{(1,0,1),(0,1,0)\}$

$B_{W\,ort} = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$

$B_{U\,ort} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1),(0,1,0)\}$

Ampliamos a $\mathbb{R}^3$ $\qquad U^\perp = L((1,0,-1))$

$B_{\mathbb{R}^3}(W) = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$B_{\mathbb{R}^3}(U) = \{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1),(0,1,0)}_{U}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)}_{U^\perp} \}$

$f: (\mathbb{R}^3, g_u) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, g_u)$

$\left.\begin{array}{l} f(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = (1,0,0) \\ f(0,1,0) = (0,1,0) \end{array}\right\} f(U) = W$

$f(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}) = (0,0,1) \quad \} f(U^\perp) = W^\perp$

Clasifiquemosla. $\qquad$ ~Cuenta de la vieja para obtener B_u~

$f(\frac{2}{\sqrt{2}}, 0, 0) = (1,0,1) \Rightarrow f(1,0,0) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$

suma 1º y 3º $\qquad$ resta 1º y 3º $\qquad f(0,1,0) = (0,1,0)$

$f(0,0,\frac{2}{\sqrt{2}}) = (0,0,1) \Rightarrow f(0,0,1) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{-\sqrt{2}}{2})$

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Podríamos aplicar el cambio de base

$$M(f, B', B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ siendo B' la $B_{\mathbb{R}^3}(u)$

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{array}{ccc} & B' \longrightarrow B_u & \\ Q & \left(\quad M(f,B',B_u) \quad \right) & I \\ \| & B_u \longrightarrow B_u & \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1}$$ $M(f, B_u)$?

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\det(f) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = -\frac{2}{4} - \frac{2}{4} = -1$$

$$\dim(V_1) = 3 - \text{rang}(A - I) = 3 - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \end{pmatrix}}_{\text{rang} = 1} = 3 - 1 = 2$$

Simetría respecto de un plano vectorial

$$V_1 = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) x + \frac{\sqrt{2}}{2} z = 0 \right.$$

V o F. Toda Antisimétrica de orden dos es la matriz asociada a una isometría en alguna base.

Falso porque

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = M(f, B) \qquad \det(f) = +a^2 = \pm 1$$

$$a = \pm 1$$

por tanto ya no es para toda antisimétrica.

$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ Dem

$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = g(u+v, u+v) + g(u-v, u-v)$

$= g(u,u) + g(v,v) + g(u,v) + g(v,u) + g(u,u)$

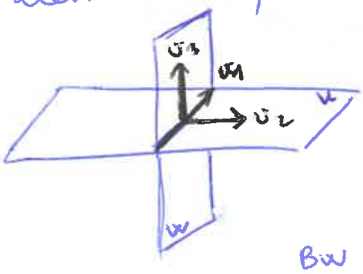
$= g(u,v) - g(v,v) + g(v,v)$

$= 2\,g(u,u) + 2\,g(v,v) = 2\|u\|^2 + \|v\|^2$

Ejercicio

U y W, (V^3, g)

Sean U, W dos planos $\perp$ en ~~un~~ e.v.e. (V^3, g) clasificar la isometría $S_U \circ S_W$ y calcular los elementos que la definen.



$U \cap W = \{v_1\}$

$v_2 \in U$ y $v_2 \in W^\perp$

$v_3 \in W$ y $v_3 \in U^\perp$

$$B_V = \{\underbrace{v_1, \overbrace{v_2}^{B_W^\perp}}_{B_U}, \underbrace{v_3}_{B_U^\perp}\} \qquad \overbrace{v_1, v_2, v_3}^{B_W}$$

$(S_U \circ S_W)(v_1) = S_U(S_W(v_1)) = S_U(v_1) = v_1$

$(S_U \circ S_W)(v_2) = S_U(S_W(v_2)) = S_U(-v_2) = -v_2$

$(S_U \circ S_W)(v_3) = S_U(S_W(v_3)) = S_U(v_3) = -v_3$

$$M(S_U \circ S_W, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\det(f) = 1$ rotación.

$1 + 2\cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi$

Rotación giro de ángulo π y eje $\{\langle v_1 \rangle = U \cap W$

simetría respecto de la recta $= \langle v_1 \rangle$

V o F.

1) $\forall f$ endomorfismo : $M(f, B) \in O(n)$ es una isometría.

Verdadero

(V^n, g) g métrica euclídea : $M_B(g) = I_n$, esto es, B es ortogonal.

2) $\forall f \in End$: $M(f, B)$ es simétrica $\Rightarrow$ f es autoadjuntos.

Verdad $\Leftrightarrow$ B es ortonormal.

3) Toda isometría diago es una simetría ortogonal.

Falso

$\exists$ isometría diag.

$$\left(\begin{array}{c|c} I_n & \\ \hline & -I_s \end{array}\right)$$

vect. fijos

vect. perpend.

si $f = -I$ $\begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$

diago. pero no hay vectores fijos. $\Rightarrow$ No es simetría.

Ejercicio

$(\mathbb{R}^3, g)$

$$M(g, B_U) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$U \equiv \{x + y + z = 0$

$\vec{v} = (2, 1, 0)$

$B_U = \{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$

$B_{U^\perp}$

$$\left.\begin{array}{l} (x, y, z) \perp (1, -1, 0) \\ (x, y, z) \perp (1, 0, -1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} (1, -1, 0)\left(\equiv\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ (1, 0, -1)\left(\equiv\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x - 2y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\} U^\perp \equiv (1, 2, 0)$$

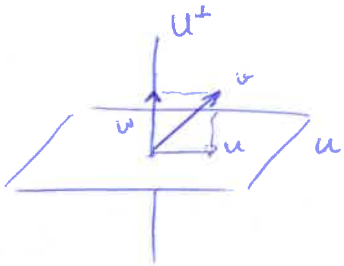
$\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp \Rightarrow B_{\mathbb{R}^3} = \{(1,-1,0),(1,0,-1),(1,2,0)\}$

$$(2,1,0) = \alpha(1,-1,0) + \beta(1,0,-1) + \lambda(1,2,0)$$

$$\left.\begin{aligned} 2 &= \alpha + \beta + \lambda \\ 1 &= -\alpha + 2\lambda \\ 0 &= -\beta \end{aligned}\right\} \quad \beta = 0 \quad \lambda = 1 \quad \alpha = 1$$

$$= 1(1,-1,0) + 0(1,0,-1) + 1(1,2,0)$$

$$(2,1,0) = \underbrace{(1,-1,0)}_{\in U} + \underbrace{(1,2,0)}_{\in U^\perp}$$



$P_U(v) = (1,-1,0)$

Ejercicio

$(\mathbb{R}^3, g) \quad B = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,0,1)\}$ ortonormal.

$U = \{x + y = 0$

Halla la expresión respecto de B_U, de la proy. ortog. sobre U y la reflexión ortogonal sobre U.

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{B_U}(g) = P^t M_B(g) P \qquad P_{B_U \text{ a } B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 - F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 - F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$M_{Bu}(g) = P^t \, M_B(g) \, P$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{Bu}(g) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$U = \{ x + y = 0 \equiv B_u = \{(1,-1,0), (0,0,1)\}$

$$\left.\begin{array}{l} (x,y,z) \perp (1,-1,0) \\ (x,y,z) \perp (0,0,1) \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} (1,-1,0)\begin{pmatrix} \equiv \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ (0,0,1)\begin{pmatrix} \equiv \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x - 5y - 7z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{array}\right\} \equiv U^{\perp} \qquad B_{u^\perp} = \{(3,2,1)\}$$

$P_u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$P_u(e_1) = \left(\frac{2}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$ $\qquad (1,0,0) = \alpha(1,-1,0) + \beta(0,0,1) + \lambda(3,2,1)$

$P_u(e_2) = \vdots$

$P_u(e_3) =$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = \alpha + 3\lambda \\ 0 = -\alpha + 2\lambda \\ 0 = \beta + \lambda \end{array}\right\} \qquad \lambda = \frac{1}{5} \quad \alpha = \frac{2}{5} \quad \beta = -\frac{1}{5}$$

~Otra forma de hacerlo.~

$$B_{\mathbb{R}^3} = \{\underbrace{\overset{u_1}{(1,-1,0)}, \overset{u_2}{(0,0,1)}}_{\in U = V_1}, \underbrace{\overset{u_3}{(3,2,1)}}_{\in U^\perp = V_0}\}$$

Recordemos:

$P_u : V \longrightarrow V \qquad \lambda = 1 \quad V_1 = U$

$P_u(v) = u \qquad \lambda = 0 \quad V_0 = U^{\perp}$

$\downarrow$

$v = u + w$

$\quad \downarrow \quad \downarrow$

$\quad u \quad u^{\perp}$

$S_u = 2P_u - I$

No es necesario saberlo.

$$M(P_u, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(S_u, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{M(f,B)} & B \\ {\scriptstyle P^{-1}} \uparrow & & \downarrow {\scriptstyle P} \\ B_u & \xrightarrow[M(f,B_u)]{} & B_u \end{array} \Longrightarrow$$

$M(P_u, B_u) = P \, M(P_u, B) \, P^{-1}$

$M(S_u, B_u) = P \, M(S_u, B) \, P^{-1}$

Ejercicio

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P \in O_3(\mathbb{R}) : P^t A P = \text{Diagonal}$$

$(\mathbb{R}^3, g_u)$ $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$: $M(f, B_u) = A$

Podemos aplicar Sylvester siempre y cuando tomemos la base ortonormal. y luego P es por columnas.
Además, podemos aplicar el teorema f. de diag de end. aut.

$$g(f(u), v) = g(u, f(v))$$

$$A^t G = G A \Rightarrow f \text{ autoadjunto}$$

$$\exists B_{ort} : M(f, B_{orton}) = D$$

$$D = P^{-1} A P$$
$$= P^t A P$$

$$p(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda + 4$$

$\lambda = -1 \quad a = 1 \qquad B_{V_{-1}} = \{(1,1,1)\}$

$\lambda = -2 \quad a = 1$

$\lambda = 2 \quad a = 1$

$$V_{-1} = \left\{ (A + I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \equiv (1,1,1)$$

$$V_{-2} = \left\{ (A + 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \equiv (1,-1,0)$$

$$V_{2} = \left\{ (A - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \equiv (1,1,-2)$$

Recordemos que los vectores propios asociados a un end. aut. son perpendiculares.

$$\left.\begin{array}{l} B_{V_{-1}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \right\} \\ B_{V_{-2}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \right\} \\ B_{V_2} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2) \right\} \end{array} \right\} B.\ \text{orton.}$$

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2) \right\}$$

↳ base ortonormal. de $(\mathbb{R}^3, g_u)$ formada por vect. propios. de f.

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

A y D son semejantes, esto es, $D = P^{-1} A P$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \rightarrow$$ cambio de base entre bases ortonormales.

$P \in O_3(\mathbb{R}) \qquad P^{-1} = P^t$

V o F. Relación de problemas.

Calcula la matriz f en la B_u. siendo f una isometría que verifique

$f(1,-1,0) = (1,-1,0)$

$f(1,1,5) = (3,3,-3)$

$\det(f) = 1 \Rightarrow f$ rotación

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta\ ? = \sphericalangle\left((1,1,5), \underset{\underset{(3,3,-3)}{\|}}{f(1,1,5)}\right) \\ \text{eje}\ ? = V_1 = \{(1,-1,0)\} \end{array} \right.$$

$$\cos\theta = \frac{3+3-15}{\sqrt{27}\sqrt{27}} = \frac{-1}{3} \qquad \operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$ 2 sol.

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \frac{\overset{v_1}{(1,-1,0)}}{\|v_1\|}, \frac{\overset{v_2}{(1,1,5)}}{\|v_2\|}, \frac{\overset{v_3}{(v_1 \times v_2)}}{\|v_3\|} \right\}$$

y luego debemos hacer el cambio de base a la B_u.

Ejercicio del examen de matemáticas.

$g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$g(x,y) = \sum_{k=1}^{n} k\, x_k y_k$ Demuestra que es métrica euclídea.

① $g(ax+bz,y) = a\,g(x,y) + b\,g(z,y)$

② $g(x, ay+bz) = a\,g(x,y) + b\,g(x,z)$ } f. bilineal.

③ $g(x,y) = g(y,x)$ } simétrica.

④ $g(x,x) \geq 0$ y $g(x,x) = 0 \iff x = 0$ } def ⊕

métrica

1] $x = (x_1 \dots x_n)$

$y = (y_1 \dots y_n)$

$z = (z_1 \dots z_n)$

$$g(ax+bz,y) = \sum_{k=1}^{n} k\,(a x_k + b z_k)\, y_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k\, a x_k y_k + \sum_{k=1}^{n} k\, b z_k y_k$$

$$= a \sum_{k=1}^{n} k\, x_k y_k + b \sum_{k=1}^{n} k\, z_k y_k = a\,g(x,y) + b\,g(z,y)$$

3] $$g(x,y) = \sum_{k=1}^{n} k\, x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} k\, y_k x_k = g(y,x)$$

2] $$g(x, ay+bz) \underset{3}{=} g(ay+bz, x) \underset{1}{=} a\,g(y,x) + b\,g(z,x)$$

$$\underset{3}{=} a\,g(x,y) + b\,g(x,z)$$

4] $g(x,x) \geq 0$ "=" $\iff x = 0$

$$g(x,x) = \sum_{k=1}^{n} k\, x_k x_k = \sum_{k=1}^{n} k\, x_k^2 \geq 0$$

$$g(x,x) = 0 \iff \sum_{k=1}^{n} k\,(x_k)^2 = 0 \iff x_k = 0$$ ya que k varía de $1 \dots n$.

Dem que sea $x \in \mathbb{R}^n$, $\left(\sum_{k=1}^{n} k x_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} k x_k^2\right)$

Cauchy-Schwarz (V, g) eve.

$$|g(x,y)| \leq \|x\| \|y\|$$

$x = (x_1 \dots x_n)$

$y = (1 \dots 1) \leftarrow$ generalmente podemos tomar todo 1, pero si no tomamos $(a \dots a)$.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} k x_k \cdot 1\right| \leq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} k x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} k \cdot 1^2\right)}$$

y a que $0 \leq a \leq b$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k x_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} k x_k^2 \sum_{k=1}^{n} k \cdot 1$$

$\boxed{\Rightarrow}$ $$\left(\sum_{k=1}^{n} k x_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} k x_k^2\right)$$

Podemos desarrollar la cuenta o hacer inducción.

$$(x_1 + 2x_2 + \dots + n x_n)^2 = (1 + 2 + \dots + n)(x_1^2 + 2x_2^2 + \dots + n x_n^2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 x_k^2 + \sum_{i<j}^{n} 2ij \cdot x_i x_j = \sum_{k=1}^{n}$$ debemos terminarlo.

$\boxed{\Leftarrow}$ sup que $x_1 = \dots = x_n = a$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k a\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} k a^2\right)$$

$$a^2 \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)\left(a^2 \sum_{k=1}^{n} k\right)$$

es igual

El segundo ejercicio de Mates

$\pi_1 = \{ x=0$ $\quad (\mathbb{R}^3, g_0)$ $\quad S_1, S_2$ simetrías respecto π_1, π_2

$\pi_2 = \{ x-y=0$ $\quad$ Calcula $M(S_1 \circ S_2, B_u) = M(S_1, B_u) \cdot M(S_2, B_u)$

$$\exists B_i : M(S_i, B_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \{ \underbrace{(0,1,0),(0,0,1)}_{B\pi_1}, \underbrace{(1,0,0)}_{B\pi_1^\perp} \}$$

$$M(S_1, B_u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \{ \underbrace{(1,1,0),(0,0,1)}_{B\pi_2}, (1,-1,0) \}$$

$$\left.\begin{array}{l} g_0((1,1,0),(x,y,z)) = 0 \\ g_0((0,0,1),(x,y,z)) = 0 \end{array}\right\} (1,-1,0)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ B_2 & \xrightarrow{M(S_2,B_2)} & B_2 \\ P^{-1} \uparrow & & \downarrow P \\ B_u & \longrightarrow & B_u \\ & M(S_2,B_u) & \end{array}$$

$$M(S_2, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & - \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nuestro ejercicio de geometría del último examen.

$M_2(\mathbb{R})$

$$g(X, Y) = \text{traz}\left(X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} Y^t \right) \quad \forall\ X, Y \in M_2(\mathbb{R})$$

Calcula base ortonormal al sub. ortogonal de U.

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \begin{array}{l} -6x + 7y - 2z + 3t = 0 \\ -9x + 8y - 3z + 7t = 0 \\ -3x + 5y - z = 0 \end{array} \right\} \boxed{z = -3x + 5y}$$

$$\left.\begin{array}{l} -3y + 3t = 0 \\ -7y + 7t = 0 \end{array}\right\} \boxed{y = t} \qquad \dim U = 2$$

$$B_u = \{ (1,0,-3,0), (0,1,5,1) \}$$

$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ son l i

Sea $X \in U^{\perp} \Rightarrow X \perp \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, X \perp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow g\left(X, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0 = \text{traz}\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$

$g\left(X, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0 = \text{traz}\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$$\left.\begin{aligned} &= \text{traz}\begin{pmatrix} x-y & -3x+3y \\ z-t & -3z+3t \end{pmatrix} = x-y-3z+3t \\ &= \text{traz}\begin{pmatrix} -x+2y & 4x-3y \\ -z+2t & 4z-3t \end{pmatrix} = -x+2y+4z-3t \end{aligned}\right\} \equiv U^{\perp}$$

$\boxed{x = y+3z-3t}$; $y+z=0 \Rightarrow \boxed{y=-z}$

$$B_{U^{\perp}} = \left\{ \overset{m_1}{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}, \overset{m_2}{\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \right\} \quad ; \quad B_{U^{\perp}} = \{v_1, v_2\}$$

Aplicamos GS. a esta Base.

$v_1 = m_1$

$v_2 = m_2 - a_{12} v_1$; $\qquad a_{12} = \dfrac{g(v_1\, m_2)}{g(v_1\, v_1)}$

$g(v_1\, m_2) = \left(\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 10$

$g(v_1\, v_1) = \left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1$

$v_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 10 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -10 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$

$B_{U^{\perp}}$ ortonormal = dividir por las normas

$= \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{17}{a} & \frac{-10}{a} \\ \frac{10}{a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio

(V, g) eve $\dim = 3$, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$

$\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1$

$\sphericalangle e_1 e_2 = \sphericalangle e_1, e_3 = \frac{\pi}{2}$ $\quad\quad \sphericalangle e_2, e_3 = \frac{\pi}{4}$

Calcular en la base B las ecuaciones de la simetría ortogonal respecto del plano $\pi \equiv \{x + y - 2z = 0$

Calcumos primero

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$g_{ij} = g_{ji} = g(e_i, e_j) = \|e_i\| \|e_j\| \cos \widehat{e_i e_j}$

$g_{11} = \|e_1\| \|e_1\| \cos \widehat{e_1 e_1} = 1$

$g_{12} = g_{21} = 0$

$g_{31} = g_{13} = 0$

$g_{23} = g_{32} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$g_{33} = 1$

$g_{22} = 1$

$$\exists B' : M(f, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$B' = \{\underbrace{v_1, v_2}_{\text{fijos}}, v_3\}$ $\quad \begin{cases} v_1 v_2 \in \text{plano simetría} \\ v_3 \in \text{plano}^\perp \end{cases}$

$v_1 = (1, -1, 0) \quad v_2 = (2, 0, 1)$

$$\left.\begin{array}{l} g(v_1, v_3) = 0 \Rightarrow (1, -1, 0)\left(\equiv\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x - y - \frac{\sqrt{2}}{2} z = 0 \\ g(v_2, v_3) = 0 \Rightarrow (2, 0, 1)\left(\equiv\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} y + z = 0 \end{array}\right\}$$

$v_3 = (4\sqrt{2} + 3, 2\sqrt{2} + 2, \sqrt{2} + 4)$

Solo queda hacer el cambio de base a la base B.

// Pedir ejercicios anteriores (examen MP)

Ejercicio

En $\mathbb{R}^4$ se considera

$f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

a) Calcula sus valores y vectores propios. ¿Es diago?

b) ¿Puedes encontrar alguna métrica en $\mathbb{R}^4$: f sea un end. autoadjunto?

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

Pero hay una excepción que ya vimos.

Si $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = \det(M) = \det(AD-BC)$ si $\begin{cases} AD = DA \\ \text{y} \\ BC = CD \\ \text{Alguno es } 0 \end{cases}$

Entonces en este caso se verifica.

$\det(AD-0)$
$= \det(AD)$
$= \det(A)\det(D)$

Por tanto,

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5-\lambda & -9 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda^2+\lambda-6)(\lambda^2-\lambda-2) = 0 \quad \begin{cases} \lambda^2+\lambda-6=0 & \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases} \\ \lambda^2-\lambda-2=0 & \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \end{cases}$$

$\lambda_1 = -3 \qquad a_1 = 1 \qquad \Rightarrow g_1 = 1$

$\lambda_2 = -1 \qquad a_2 = 1 \qquad \Rightarrow g_2 = 1$

$\lambda_3 = 2 \qquad a_3 = 2$

$$\dim V_{\lambda_3} = 4 - rg(A-2I) = 4 - rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} = 2$$

Sí es diago.

Calculamos vectores propios

b) Suponemos calculados $B_{V_{\lambda_1}} = \{v_1\}$ $B_{V_2} = \{v_2\}$ $B_{V_3} = \{v_3, v_4\}$

$B' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ base de vectores propios, esto es,

$$M(f, B') = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Definimos g métrica euclídea en $\mathbb{R}^4$: $M_{B'}(g) = I_4$

Como f diagonaliza $\Rightarrow \exists B$ de vectores propios.

Para que f sea autoadjunto B debe ser ortonormal.

Así, se verifica que

$$M(f, B')^t I = I M(f, B')$$

Por lo que siempre existe una métrica euclídea tal que, si f es diag lo hace end. aut.

Ejercicio. V o F?

Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$: $A^3 + 4 I_3 = 0$ Entonces A diag

Teorema de Caley-Hamilton

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, $p(\lambda)$ es su polinomio característico.

Entonces $p(A) = 0$

Sabemos que $p(\lambda) = \lambda^3 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \sqrt[3]{-4}$ $(\exists)$

De esto obtenemos que el valor propio es $\sqrt[3]{-4}$ pero solo tiene multiplicidad 1, por lo que no es diago.

Otro ejercicio

$f \in End(V)$

$B = \{v_1, v_2 v_3\}$

1) $U = \{v \in V : x + 6y - z = 0\}$ es sub propio de f

2) $f(u) = u$ siendo $u = (6, 2, 5)_B$

3) $traz(f) = 5$

Es f diago? calcula $M(f, B)$

$B_u = \{(1,0,1),(0,1,6)\}$ base de V_λ con $\lambda \neq 1$

u es un vector propio $\Rightarrow \lambda = 1$ $\quad B_{V_1} = \{(6,2,5)\}$

$\lambda_1 = 1 \quad a_1 = 1 = \dim V_1$

$\lambda_2 = x \quad 2 = \dim V_1 \Rightarrow a_2 = 2$ ya que 3 no puede ser ya que $\exists$ otro subespacio propio.

lo que implica que f es diago.

Como es diago $\Rightarrow B' = \{(1,0,1),(0,1,6),(6,2,5)\}$ base de vectores propios.

$$M(f, B') = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{traz} = 2\lambda + 1 = 5$$

$$\underline{\underline{\lambda = 2}}$$

$$f: V \longrightarrow V$$

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r, "M(f{,}B')"] & B' \arrow[d, "P"] \\ B \arrow[r, "M(f{,}B)"'] \arrow[u, "P^{-1}"] & B \end{tikzcd}$$

$$M(f,B) = P\, M(f,B')\, P^{-1}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad M(f,B') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$