Manuel Gachs Ballegeer 1ºDGIIM

LMD: LENGUAJES DE PRIMER ORDEN

Forma prenexa. Equivalencias lógicas

(También sirven las equivalencias de lógica proposicional)

1. $\neg\forall x\alpha \equiv \exists x\neg\alpha$
2. $\neg\exists x\alpha \equiv \forall x\neg\alpha$
3. $\forall x\alpha \wedge \beta \equiv \forall x(\alpha \wedge \beta)$ si x no es libre en β
4. $\forall x\alpha \vee \beta \equiv \forall x(\alpha \vee \beta)$ si x no es libre en β
5. $\exists x\alpha \wedge \beta \equiv \exists x(\alpha \wedge \beta)$ si x no es libre en β
6. $\exists x\alpha \vee \beta \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$ si x no es libre en β
7. $\exists x\alpha \vee \exists x\beta \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$
8. $\forall x\alpha \wedge \forall x\beta \equiv \forall x(\alpha \wedge \beta)$
9. $\forall x\alpha \equiv \forall y\alpha_{x|y}$ si y no aparece en la fórmula α
10. $\exists x\alpha \equiv \exists y\alpha_{x|y}$ si y no aparece en la fórmula α
11. $\exists x\alpha \equiv \alpha$ si x no es libre en α
12. $\forall x\alpha \equiv \alpha$ si x no es libre en α

Ejemplo: $\forall x[(M(x) \wedge D(x)) \rightarrow \neg\exists y(\neg C(y) \wedge A(x,y))]$

Aplicamos **2**: $\forall x[(M(x) \wedge D(x)) \rightarrow \forall y\neg(\neg C(y) \wedge A(x,y))]$

Aplicamos **8** de lógica proposicional: $\forall x[\neg(M(x) \wedge D(x)) \vee \forall y\neg(\neg C(y) \wedge A(x,y))]$

Aplicamos **9** de lógica proposicional: $\forall x[(\neg M(x) \vee \neg D(x)) \vee \forall y(C(y) \vee \neg A(x,y))]$

Aplicamos **4**: $\forall x\forall y(\neg M(x) \vee \neg D(x) \vee C(y) \vee \neg A(x,y))$

Forma normal de Skolem

Se trata de eliminar los cuantificadores existenciales de una forma prenexa. Para ello se sustituye la variable del cuantificador en cada una de las ocurrencias por una función con todas las variables de cuantificadores universales anteriores a ella. Cuando se encuentra en primer lugar, se sustituye por una constante.

Ejemplos:

- $\exists x\forall y(\neg S(x) \vee R(x,y)) \implies \forall y(\neg S(a) \vee R(a,y))$
- $\forall x\exists y(S(x,f(y),y) \vee R(y) \implies \forall x(S(x,f(g(x)),g(x)) \vee R(f(x)))$
- $\forall x\exists y\forall z\exists u(\neg S(x,u) \vee R(y,z,u)) \implies \forall x\forall z(\neg S(x,g(x,z)) \vee R(f(x),z,g(x,z)))$

Sustituciones

En una fórmula, se puede sustituir una variable por otra o por una función. Se llama unificador a la sustitución que hace dos fórmulas iguales. Una sustitución se expresa de la siguiente forma: $(x|a)$, donde x se cambia por a. Una sustitución o conjunto de sustituciones es universal único si actúa como unificador para un conjunto de fórmulas.

Ejemplo: $c_1 = P(x,a,f(x),z) \text{ y } \Phi = [(x|y),(z|g(u)] \implies c_1\Phi = P(y,a,f(g(u)))$