

7.

$$8 \mid 3^n + 7^n - 2 \quad n \geq 1$$

1) Paso base:

$$P(1) = 3^1 + 7^1 - 2 = 8 \rightarrow \text{es divisible por } 8$$

Por lo que para $n=1$ es cierta

2) Paso de inducción: supongamos que $n \geq 1$ y que $P(n)$ es cierta (hip. inducción) y demos­tramos que de ello se deduce que $P(n+1)$ es cierta:

$$\text{¿ } 8 \mid 3^{n+1} + 7^{n+1} - 2 \text{ ?}$$

$$3^n \cdot 3 + 7^n \cdot 7 - 2 - (3^n + 7^n - 2) = 3^n \cdot 3 + 7^n \cdot 7 - 2 - 3^n - 7^n + 2 =$$

$$= 3^n(3-1) + 7^n(7-1) = 3^n \cdot 2 + 7^n \cdot 6 = 2(3^n + 7^n \cdot 3) \Rightarrow 8 \mid 2(3^n + 7^n \cdot 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \mid 3^n + 7^n \cdot 3 \rightarrow \text{otra inducción}$$

2.1) Paso base:

$$n=1; \quad 3^1 + 7^1 \cdot 3 = 24 \rightarrow \text{es divisible por } 4$$

Por lo que para $n=1$ es cierta

2.2) Paso de inducción: supongamos que $n \geq 1$ y que $P(n)$ es cierta (hip. inducción) y demos­tramos que de ello se deduce que $P(n+1)$ es cierta:

$$\text{¿ } 4 \mid 3^{n+1} + 7^{n+1} \cdot 3 \text{ ?}$$

$$3^n \cdot 3 + 7^n \cdot 7 \cdot 3 - (3^n + 7^n \cdot 3) = 3^n(3-1) + 7^n \cdot (7 \cdot 3 - 3) = 3^n \cdot 2 + 7^n \cdot 18 =$$

$$= 2 \cdot (3^n + 7^n \cdot 9) \Rightarrow 4 \mid 2(3^n + 7^n \cdot 9) = 2 \mid 3^n + 7^n \cdot 9 \rightarrow \text{otra inducción}$$

2.2.1) Paso base:

$$n=1; 3^1 + 7^1 \cdot 9 = 66 \rightarrow \text{es divisible por 2}$$

Por lo que para $n=1$ es cierta

2.2.2) Paso de inducción: Supongamos que $n \geq 1$ y que $P(n)$ es cierta (hipótesis de inducción) y demostramos que de ello se deduce que $P(n+1)$ es cierta:

$$\text{¿ } 2 \mid 3^{n+1} + 7^{n+1} \cdot 9 \text{?}$$

$$\begin{aligned} 3^{n+1} + 7^{n+1} \cdot 9 &= (3^n + 7^n \cdot 9) = 3^n \cdot (3-1) + 7^n \cdot (7 \cdot 9 - 9) = \\ &= 3^n \cdot 2 + 7^n \cdot 54 = 2 \cdot (3^n + 7^n \cdot 27) \end{aligned}$$

$$2 \mid 2(3^n + 7^n \cdot 27) = 1 \mid 3^n + 7^n \cdot 27$$

Todo es divisible por 1

Por lo que si se cumple esta, se cumplen todas las demás.

Así que, por el principio de inducción finita, $P(n)$ es cierta para todo $n \geq 0$

! NOTA:

Si divide a $3^n - 3 \cdot 7^n$, divide también a la diferencia $3^{n+1} + 3 \cdot 7^{n+1} - 3^n - 3 \cdot 7^n$