Ejercicio 1: *Calcula los límites de las sucesiones*

1.a)

$$x_n = \left(1 + \log\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)\right)^n$$
$$= \left(1 + \log\left(1 - \frac{n}{n^2+n+1}\right)\right)^n \sim \left(1 - \frac{n}{n'' + n + 1}\right)^n \to e^L$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{-n^2}{n^2+n+1}\right\} = -1$$
$$x_n \to e^{-1} = \frac{1}{e}$$

1.b)

$$y_n = \frac{1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3}{n^4} = \frac{a_n}{b_n} \to L; \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to L;$$
$$\frac{(2(n+1))-1)^3}{(n+1)^4 - n^4} = \frac{(2n+1)^3}{4n^3+6n^2+4n+1} = \frac{8n^3+12n^2+6n+1}{4n^3+6n^2+4n+1} \to 2;$$
$$y_n \to 2$$

Ejercicio 2: *Estudia la convergencia absoluta y la convergencia de las siguientes series:*

2. a)

$$\sum_{n\geq 1} \frac{5^n n!}{\sqrt[4]{n}\cdot 9\cdot 14\cdot 19\ldots(4+5n)};$$

Para esta serie no es necesario estudiar la convergencia absoluta porque no tiene términos negativos.

$$\frac{5^{n+1}(n+1)!}{\sqrt[4]{n+1}\cdot 9\cdot 14\cdot 19\ldots(9+5n)} \cdot \frac{\sqrt[4]{n}\cdot 9\cdot 14\cdot 19\ldots(4+5n)}{5^n n!} = \frac{5(n+1)}{9+5n} \cdot \sqrt[4]{\frac{n}{n+1}} \to 1;$$

Tiende a uno por la izquierda, por tanto necesitamos más información. Aplicamos el criterio de Raabe:

> Supongamos $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y pongamos $R_n = n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$.
> Supongamos que $\lim R_n = L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$: Entonces:
>
> i) Si $L > 1$ o $L = +\infty$, la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente.

> ii) Si $L < 1$ o $L = -\infty$ o si existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $R_n \leq 1$ para todo $n \geq k$, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es divergente.

$$n\left(1 - \frac{5(n+1)}{5(n+9)} \cdot \sqrt[4]{\frac{n}{n+1}}\right) = \left(\frac{5(n+1)}{5n+9} \cdot \sqrt[4]{\frac{n}{n+1}}\right)^{-n} = \left(\frac{5n+9}{5(n+1)} \cdot \sqrt[4]{\frac{n+1}{n}}\right)^{n}$$

$$\sqrt[4]{\frac{n+1}{n}} \to e^{\frac{1}{4}};$$

$$x_n^{y_n} \to e^L \Leftrightarrow y_n(x_n - 1) \to L$$

$$\left(\frac{5n+9}{5n+5}\right)^n = \left(1 + \frac{4}{5n+5}\right)^n \to e^L \Leftrightarrow n\left(\frac{4}{5n+5}\right) \to \frac{4}{5};$$

$$e^{\frac{4}{5}} \cdot e^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{21}{20}} > 1;$$

Según el criterio de Raabe la serie converge.

2.b)

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1}\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right);$$

> Aplicamos el criterio de Leibniz:
> Dada una serie alternada $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}a_n$, converge si $\{a_n\}$ es decreciente y $\{a_n\} \to 0$
>
> $$a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{n+1}\left(1 - \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+1}}\right) = \sqrt[3]{n+1}\left(1 - \sqrt[3]{\frac{n}{n+1}}\right)$$
>
> Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt[3]{x+1}\left(1 - \sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}\right)$ Se tiene que:
>
> $$\lim_{x\to+\infty} f(x) \to L \implies \lim_{x\to+\infty} a_n = L$$

Calculamos $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x+1}\left(1 - \sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}}{\sqrt[3]{x+1}} = (\text{L}'\text{Hôpital})$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{2/3}(x+1)^{2/3}} = 0 \implies \{a_n\} \to 0$$

Se verifica el criterio de Leibniz, así que la serie estudiada converge. Ahora nos centramos en la convergencia absoluta. Para ello estudiamos

$$\sum_{n\geq 1} \left|(-1)^{n+1} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})\right| = \sum_{n\geq 1} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) \,;$$

Comenzamos manipulando $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$

$$\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{n} \, (\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} - 1)$$

Sea $x_n = \frac{1}{n}$ aplicamos la equivalencia asintótica $(1 + x_n)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x_n$, ya que $x_n = \frac{1}{n} \to 0$

$$\sqrt[3]{n} \, [(1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{3}} - 1] \sim n^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n^{1/3}}{n} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3n^{2/3}}$$

Comparamos esta serie con una serie de Rienman de la formma $\frac{1}{n^{\alpha}}$, en este caso $\alpha = \frac{2}{3} < 1$ por lo tanto la serie no converge. Concluimos que la serie no es absolutamente convergente.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y creciente. Prueba que para todo conjunto acotado y no vacío, $A \subset \mathbb{R}$, se verifica que $\sup f(A) = f(\sup A)$.

Definamos $\alpha = \sup A$, entonces $\sup f(A) = f(\alpha)$.

Sabemos que $f(n) \geq f(m) \Leftrightarrow n \geq m$, por ser f creciente. Además, por ser $\alpha = \sup A$, tenemos que $\alpha \geq a, \ \forall a \in A$ así que nos queda que $f(\alpha) \geq f(a), \ \forall a \in A$ que equivale a decir que $f(\alpha) = \sup f(A)$ como se pedía.