TEMA 2: FORMAS BILINEALES | CUADRÁTICAS

0 INTRODUCCIÓN

Sean $x, y \in \mathbb{R}^3$:

$x = (x_1, x_2, x_3)$

$y = (y_1, y_2, y_3)$

$\langle x, y \rangle = x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$

$\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \longmapsto xy$

i) $(x + x') \cdot y = xy + x'y$ // $x \cdot (y + y') = xy + xy'$

ii) $(\alpha x) \cdot y = \alpha x \cdot y$ // $x (\alpha y) = \alpha xy$

iii) $xy = yx$

iv) $x \cdot x \geq 0 \Rightarrow x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

1 FORMA BILINEAL. EXPRESIÓN MATRICIAL. CONVERGENCIA DE MATRICES

__Definición__. Sea V un ev sobre $\mathbb{R}$, diremos que una aplicación $b: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal si b verifica:

- $b(\lambda u + \mu v, w) = \lambda b(u, w) + \mu b(v, w)$ $\quad \forall u, v, w \in V$
- $b(u, \lambda v + \mu w) = \lambda b(u, v) + \mu b(u, w)$ $\quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Observación La única aplicación lineal y bilineal es la cero

Dem.

$$\left.\begin{array}{l} b(2(u,v)) \underset{\text{lineal}}{=} 2\cdot b(u,v) \\ \quad \| \\ 2b(u,2v) \underset{\text{biln}}{=} 4b(u,v) \end{array}\right\} \Longrightarrow (u,v)=0$$

Definición. Denotaremos $B(V)$ al conjunto de las formas bilineales en un ev V.

$$b_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u,v) \longmapsto u_{1\times n}\, A \cdot v_{n\times 1}$$

$\forall u,v \in \mathbb{R}^n$

$A \in M_n(\mathbb{R})$

- $b_A(\lambda u+\mu v, w) = \lambda b_A(u,w) + \mu b_A(v,w)$

Dem.

$$b_A(\lambda u+\mu v, w) = (\lambda u+\mu v)\cdot A w = \lambda u A w + \mu A v w =$$
$$= \lambda \cdot b_A(u,w) + \mu b_A(v,w)$$

- Propiedades

i) $b(0,v) = b(u,0) = 0$

ii) $b(-u,v) = -b(u,v)$

$b(u,-v) = -b(u,v)$

iii) $b\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i , \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \; b(u_i, v_j)$

Dem.

i)

$$b(0,v) = b(0\cdot v, v) = 0\, b(v,v) = 0$$

ii)

$$b(-u,v) = b((-1)\cdot u, v) = -b(u,v)$$

iii) Por inducción:

Para $n=1$, $m=1$ es cierto:

$$b(\alpha u_1, \beta v_1) = \alpha\beta b(u_1, v_1)$$

Suponemos que es cierto para $n-1$ y $m-1$ y veamos que es cierto para n y m.

$$b\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i + \alpha_n u_n, \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j v_j + \beta_m v_m\right) =$$

$$= b\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j v_j + \beta_m v_m\right) + \alpha_n \cdot b\left(u_n, \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j v_j + \beta_m v_m\right) =$$

$$= b\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j v_j\right) + \beta_m \cdot b\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i, v_m\right) + \alpha_n b\left(u_n, \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j v_j\right) +$$

$$+ \alpha_n \beta_m b(u_n, v_m) =$$

$$\underset{\text{hip. ind.}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_i \beta_j b(u_i, v_j) + \beta_m \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i b(u_i, v_m) + \alpha_n \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j b(u_n, v_j) +$$

$$+ v_n \beta_n \cdot b(u_n, v_m)$$

EJEMPLOS.

- En el ev de $M_n(\mathbb{R})$

$M \in M_n(\mathbb{R})$

$b_1, b_2, b_3, b_4 : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$b_1(X, Y) = tr(XMY)$$

$$b_2(X, Y) = tr(XMY^t)$$

$$b_3(X, Y) = tr(X^t M Y)$$

$$b_4(X, Y) = tr(X^t M Y^t)$$

$\forall X, Y \in M_n(\mathbb{R})$

Dem.

Son formas bilineales:

- $b_4(\lambda X + \mu Y, Z) = \lambda b_4(X, Z) + \mu b_4(Y, Z)$

$b_4(\lambda X + \mu Y, Z) = tr\left((\lambda X + \mu Y)^t \cdot M \cdot Z^t\right) \underset{t\ lineal}{=} tr\left((\lambda X^t + \mu Y^t) M Z^t\right) =$

$= tr\left(\lambda X^t \cdot M \cdot Z^t + \mu Y^t M Z^t\right) \underset{tr\ lin.}{=} \lambda tr\left(X^t M Z^t\right) + \mu tr\left(Y^t M Z^t\right) =$

$= \lambda b_4(X, Z) + \mu b_4(Y, Z)$

- En el ev de $\mathbb{R}_n[x]$

Sea $f(x)$ cta en $[a, b]$

$b: \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(p(x), q(x)) \longmapsto \int_a^b p(x) \cdot q(x) \cdot f(x)\, dx$

Dem.

¿b es bilineal?

- $b(\lambda p(x) + \mu q(x), r(x)) = \lambda b(p(x), r(x)) + \mu b(q(x), r(x))$

$b(\lambda p(x) + \mu q(x), r(x)) = \int_a^b (\lambda p(x) + \mu q(x)) \cdot r(x) f(x)\, dx =$

$= \int_a^b \left(\lambda p(x) r(x) \cdot f(x) + \mu q(x) r(x) f(x)\right) dx =$

$= \int_a^b \lambda p(x) r(x) f(x)\, dx + \int_a^b \mu q(x) r(x) f(x)\, dx =$

$= \lambda \int_a^b p(x) r(x) f(x)\, dx + \mu \int_a^b q(x) r(x) f(x)\, dx =$

$= \lambda b(p(x), r(x)) + \mu b(q(x), r(x))$

- Otras formas bilineales:

$$b: \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(p(x), q(x)) \longmapsto \int_a^b p'(x)\, q(x)\, f(x)\, dx$$

$$\longmapsto \int_a^b p'(x)\, q''(x)\, f(x)\, dx$$

$$\longmapsto p(3) \cdot q(7)$$

$$\longmapsto p'(3) \cdot q''(e)$$

1.1 Expresión matricial

Sea V un ev sobre $\mathbb{R}$, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V

$u, v \in V$: $u = (a_1, \dots, a_n)_B$, $v = (b_1, \dots, b_n)_B$

Dada $b \in B(V)$ tenemos que:

$$b(u,v) = b\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i , \sum_{j=1}^n b_j v_j\right) = \sum_{i=1}^n a_i \; b\left(v_i , \sum_{j=1}^n b_j v_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i \left[\sum_{j=1}^n b_j \; b(v_i, v_j)\right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \cdot b(v_i, v_j)$$

A la matriz cuya entrada (i,j) es $b(v_i, v_j)$ la denotamos $M(b, B)$ y la llamamos matriz de la forma bilineal b en la base B.

$$M(b,B) = \left(b(v_i, v_j)\right)_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{R})$$

$b(u,v) =$

$$= (a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b(v_1,v_1) & b(v_1,v_2) & \cdots & b(v_1,v_n) \\ b(v_2,v_1) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ b(v_n,v_1) & \cdots & & b(v_n,v_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = u^t \cdot M(b,B) \cdot v$$

Observación.

Sean $b, b' \in B(V)$, B base de V $\Bigg\}$ $\quad b = b' \iff M(b, B) = M(b', B)$

Proposición.

Dada B base de V, tenemos

$$\varphi : B(V) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$$
$$b \longmapsto M(b, B)$$

isomorfismo (apl. lin. biy.)

Luego $\dim(B(V)) = n^2$

Dem.

- $\varphi(\lambda b + \mu b') = \lambda \varphi(b) + \mu \varphi(b')$, $\forall b, b' \in B(V)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\varphi(\lambda b + \mu b') = M(\lambda b + \mu b', B) = (a_{ij})$

$\lambda M(b, B) + \mu M(b', B)$, $M(b,B) = (b_{ij})$, $M(b',B) = (c_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$

$a_{ij} = (\lambda b + \mu b')(v_i, v_j) = \lambda b(v_i, v_j) + \mu \cdot b'(v_i, v_j)$

$b_{ij} = b(v_i, v_j)$

$c_{ij} = b'(v_i, v_j)$

- Calculamos $\ker(\varphi) = \{ b \in B(V) : \varphi(b) = 0 \} = \{ b \in B(V) : M(b, B) = 0 \} = \{0\} \Rightarrow \varphi$ es inyect.

- ¿φ sobrey.?

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, $b : V \times V \to \mathbb{R}$ con $b(u, v) = (a_1, \ldots, a_n) A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

aaa

Observación. Si V es un ev real, B base de V y $A \in M_n(\mathbb{R})$

Podemos definir $b : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal como:

$b(u, v) = x^t \cdot A \cdot y$, donde x, y son coord. de u, v en la base B

aaa

$b(\lambda u+\mu v, w) = \lambda b(u,w) + \mu b(v,w)$

$u = (a_1, \ldots, a_n)_B$
$v = (b_1, \ldots, b_n)_B$
$w = (c_1, \ldots, c_n)_B$

Entonces:

$\lambda u+\mu v = (\lambda a_1 + \mu b_1, \ldots, \lambda a_n + \mu \cdot b_n)_B$

Por lo que:

$b(\lambda u+\mu v) = (\lambda a_1 + \mu b_1, \ldots, \lambda a_n + \mu b_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

$\lambda b(u,w) + \mu b(v,w) = \lambda (a_1, \ldots, a_n) A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \mu (b_1, \ldots, b_n) A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

Usando las props. de matrices:

$(\lambda a_1 + \mu b_1, \ldots, \lambda a_n + \mu b_n) \cdot A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \left[\lambda (a_1, \ldots, a_n) + \mu (b_1, \ldots, b_n)\right] A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} =$

$= \lambda (a_1, \ldots, a_n) A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \mu (b_1, \ldots, b_n) A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \lambda b(u,v) + \mu b(v,w)$

Lo mismo con la linealidad en la segunda variable

$b(u, \lambda v + \mu w) = \lambda b(u,v) + \mu b(u,w)$

etc

Ahora vamos a probar que $\varphi(b) = A$

$\varphi(b) = M(b, B)$

$b(v_i, v_j)$

$$b(u,v) = \begin{array}{c} i \\ \downarrow \\ (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0) \end{array} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$$

Concluimos que φ es un isomorfismo

EJEMPLOS

- $V = \mathbb{R}^3$

$B_u = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$M(b_0, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

$V = \mathbb{R}^n \Rightarrow b_0$ forma bilineal asociada a I_n si $B = B_u$

- $\mathbb{R}^2$

$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\underline{b_1}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$

$= (x_2 \; x_1) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underline{x_2 y_1 + x_1 y_2}$

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{b_2}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underline{x_1 y_1 - x_2 y_2}$

$A_3 = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{b_3}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$

$= (-5x_1 + 3x_2 \quad x_1 + 2x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$

$= \underline{-5x_1 y_1 + 3x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2x_2 y_2}$

- $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$b((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 5x_1 y_1 + 3x_1 y_2 - 4x_2 y_1 + 10 x_2 y_2$

$= (x_1 \; x_2) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$b((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1^2 x_2 - x_2 y_1 \Rightarrow$ No es bilineal (x_1^2)

$b((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 x_2 + 1 \Rightarrow$ No es bilineal (hay una cte)

Métrica de Lorentz - Minkowski

$b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$b((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} - x_n y_n =$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n$$

$$M(b, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & O_{(n-1)\times 1} \\ \hline O_{1\times(n-1)} & -1 \end{array}\right)$$

Cuando $n=4$ $\Rightarrow$ b es la métrica de Minkowski $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- $V = M_n(\mathbb{R})$

$b : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$(M, N) \longmapsto b(M, N) = tr(M \cdot N^t)$

$n=2$

$M(b, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$ $\Rightarrow$ En general $\Rightarrow$ $\boxed{M(b, B) = I_{n^2}}$

- $C = ([a,b], \mathbb{R}) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cta $\}$ ev sobre $\mathbb{R}$

$b : C([a,b], \mathbb{R}) \times C([a,b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$(f, h) \longmapsto \int_a^b f(t) h(t) \, dt$

A b se le llama producto L^2 en $C([a,b], \mathbb{R})$

$S \subset V$

b forma bilineal de V

$$\begin{cases} b: V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \\ b_{|S\times S}: S \times S \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow b_{|S\times S} \text{ es forma bil en } S$$

b_1 forma b. en V_1 : $b_1 : V_1 \times V_1 \longrightarrow \mathbb{R}$

b_2 forma b. en V_2 : $b_2 : V_2 \times V_2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Entonces:

$$b_1 \times b_2 : (V_1 \times V_2) \times (V_1 \times V_2) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u_1, u_2), (v_1, v_2) \longmapsto (b_1 \times b_2)((u_1, u_2), (v_1, v_2)) =$$

$$= b_1(u_1, v_1) + b_2(u_2, v_2)$$

$b_1 \times b_2$ es una forma bilineal en $V_1 \times V_2$

$V(\mathbb{R})$

$\varphi, \psi \in V^*$

$\varphi, \psi : V \to \mathbb{R}$ apl. lin.

$$\left\{ \begin{array}{l} b: V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \mapsto \varphi(u) \cdot \psi(v) \end{array} \right. \quad \text{siendo } b \text{ bilineal}$$

1.2 Congruencia de matrices

Sea $V(\mathbb{R})$ ev

$b \in B(V)$

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base V

$B' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ base V

$u = (a_1, \dots, a_n)_B = (a'_1, \dots, a'_n)_{B'}$

$w = (b_1, \dots, b_n)_B = (b'_1, \dots, b'_n)_{B'}$

Entonces:

$$b(u,w) = (a_1, \dots, a_n) \cdot M(b,B) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a'_1, \dots, a'_n)\, M(b,B') \cdot \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

Si $P = M(I_V, B', B) \in Gl(n, \mathbb{R})$:

$$P \cdot \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} , \quad P \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$b(u,v) = \left[P \cdot \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} \right]^t \cdot M(b,B) \cdot P \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} = (a'_1, \dots, a'_n) \cdot P^t \cdot M(b,B) \cdot P \cdot \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

Por lo que:

$$\boxed{M(b,B) = P^t \cdot M(b,B') \cdot P}$$

<u>Definición</u>. $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ son congruentes si $\exists P \in Gl(n, \mathbb{R})$:

$$A = P^t \cdot B \cdot P$$

Observaciones

1) Cualquier matriz es congruente a sí misma

2) Dos matrices son congruentes $\Rightarrow$ tienen el mismo rango

(por ser equivalentes)

3) ¿ A es congruente a C ?

$$\left.\begin{array}{l} A = P^t B P \\ B = Q^t C Q \end{array}\right\} \quad A = P^t \cdot Q^t C Q P = (QP)^t \cdot C (QP)$$

Luego A es congruente a C

4) Dos matrices congruentes no tienen por qué tener el mismo determinante ni la misma traza

Ej.:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$C = P^t A P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 2 \neq \det(C) = 18$

$tr(A) = 3 \neq tr(C) = 11$

5) Dos matrices congruentes tienen el mismo signo del determ.

$$\det(C) = \det(P^t A P) = \underbrace{\det(P^t)}_{= \det(P)} \cdot \det(A) \cdot \det(P) = \underbrace{\det(P)^2}_{> 0} \cdot \det(A)$$

6) Dos matrices con distinto rango no son congruentes

7) La simetría se conserva en la congruencia

$$A = P^t B P \Rightarrow A^t = (P^t B P)^t = P^t B^t \cdot (P^t)^t = P^t B^t P$$

8) A simétrica y C antisimétrica $\Rightarrow$ A y C no congruentes

9) A y C semejantes no tienen por qué ser congruentes

Ej.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

10) Dos matrices congruentes no tienen por qué ser semejantes

Ej.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposición. A y C congruentes:

$$\left.\begin{array}{l} A = P^t \cdot C \cdot P \\ A, C \in M_n(\mathbb{R}) \\ P \in Gl(n, \mathbb{R}) \\ B = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ base } V \\ b \in B(V) \\ C = M(b, B) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists!\ B' \text{ base de } V: \quad M(b, B') = A$$

Por lo que:

$$M(b, B') = P^t \cdot M(b, B) \cdot P \qquad \Rightarrow \quad P = M(I_V, B', B)$$

Proposición

$$\left.\begin{array}{l} V(\mathbb{R}) \\ \dim V = n \\ B(V) \neq \emptyset \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} + : B(V) \times B(V) \longrightarrow B(V) \\ \qquad (b, b') \longmapsto b + b' : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad\qquad\qquad (u, v) \longmapsto b(u,v) + b'(u,v) \end{array}$$

Dem. $(b+b')$ es bilineal

$$¿\ (b+b')(\lambda u + \mu v, w) = \lambda (b+b')(u, w) + \mu (b+b')(v, w)\ ?$$

$$(b+b')(\lambda u + \mu v, w) = b(\lambda u + \mu v, w) + b'(\lambda u + \mu v, w) =$$

$$= \lambda \cdot b(u, w) + \mu \cdot b(v, w) + \lambda b'(u, w) + \mu b'(v, w) =$$

$$= \lambda \cdot (b(u,w) + b'(u,w)) + \mu \cdot (b(v,w) + b'(v,w)) =$$

$$= \lambda \cdot (b+b')(u,w) + \mu (b+b')(v,w)$$

Lo mismo para:

$$(b+b')(u, \lambda v + \mu w) = \lambda (b+b')(u, v) + \mu (b+b')(u, w)$$

EJEMPLOS DE FORMAS BILINEALES

- $\mathbb{R}^n$ $\quad A \in M_n(\mathbb{R})$

$b_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$(u,v) \longmapsto uAv \quad . \quad \forall u,v \in \mathbb{R}^n$

$B_u = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

$M(b_A, B_u) = (c_{ij})$

Como $\underset{\substack{\| \\ a_{ij}}}{c_{ij}} = b_A(e_i, e_j) = \underbrace{\begin{array}{c} \scriptstyle (i) \\ (0\,0 \dots 0\,1\,0 \dots 0) \end{array}}_{\substack{i\text{-ésima} \\ \text{fila de } A}} \cdot A \cdot \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \scriptstyle (j) \end{array}$

Entonces

$$M(b_A, B_u) = (c_{ij}) = A$$

- $b \in B(\mathbb{R}^n)$

$B_u, \quad M(b, B_u)$

$u, v \in \mathbb{R}^n$

$u = (a_1, \dots, a_n)_{B_u}$

$v = (b_1, \dots, b_n)_{B_u}$

$(a_1, \dots, a_n) \cdot M(b, B_u) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b(u,v)$

$\qquad \|$

$b_{M(b,B_u)}(u,v)$

$b = b_{M(b,B_u)}$

$M_2(\mathbb{R})$: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$b_1(M)(X,Y) = tr(XMY)$

$b_2(M)(X,Y) = tr(XMY^t)$ $\qquad \forall X, Y \in M_2(\mathbb{R})$

$b_3(M)(X,Y) = tr(X^tMY)$

$b_4(M)(X,Y) = tr(X^tMY^t)$

Calcular una matriz de las formas bilineales en la base usual

$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B_u = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ base ordenada

$$\begin{pmatrix} b_1[E_{11}, E_{11}] & b_1[E_{11}, E_{21}] & \cdots \\ b_1[E_{21}, E_{11}] & \cdots & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

- $b_1[X,Y] = tr[XMY]$

$$M(b_1, B_u) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

- $b_2[X,Y] = tr[XMY^t]$

$$M(b_2, B_u) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$$

- $b_3[X,Y] = tr[X^tMY]$

$$M(b_3, B_u) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

$b_4[X,Y] = tr(X^t M Y^t)$

$$M(b_4, B_u) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} \quad , \quad M(b_3, B_2) = M(b_1, B_u)$$

- ¿Coinciden las formas bilineales?

  - ¿$b_1(M) = b_2(M)$?

    $M(b_1, B_u) = M(b_2, B_u) \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases} \iff \underline{M=0}$

  - $b_1(M) = b_3(M) \iff \underline{M=0}$

  - $b_1(M) = b_4(M) \iff \begin{matrix} a=d \\ b=c=0 \end{matrix} \iff \underline{M = a I_2}$

  - $b_2(M) = b_3(M) \iff \begin{matrix} a=d \\ b=c=0 \end{matrix} \iff \underline{M = a I_2}$

  - $b_2(M) = b_4(M) \iff \underline{M=0}$

  - $b_3(M) = b_4(M) \iff \underline{M=0}$

<u>Proposición</u>. $(B(V), +)$ es un grupo abeliano.

i) $(b+b')+b'' = b + (b'+b'')$

ii) $\left[(b+b')+b''\right](u,v) = (b+b')(u,v) + b''(u,v) = \left[b(u,v) + b'(u,v)\right] + b''(u,v)$

<u>Proposición</u>.

$$\cdot : \mathbb{R} \times B(V) \longrightarrow B(V)$$
$$(\lambda, b) \longmapsto \lambda \cdot b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u,v) \longmapsto \lambda \cdot b(u,v)$$

<u>Dem</u>.

¿ $(\lambda \cdot b)(\mu u + \gamma v, w) = \mu(\lambda b)(u,w) + \gamma(\lambda b)(v,w)$?

$$(\lambda b)(\mu u + \gamma v, w) = \lambda \cdot b(\mu u + \gamma v, w) = \lambda \cdot \left[\mu b(u,w) + \gamma b(v,w)\right] =$$

$$= \mu \cdot \lambda b(u,w) + \gamma \lambda b \cdot (v,w) =$$

$$= \mu(\lambda b)(u,w) + \gamma(\lambda b)(v,w)$$

<u>Proposición</u>.

i) $(\lambda + \mu) b = \lambda b + \mu b$

ii) $\lambda \cdot (b+b') = \lambda b + \lambda b'$

iii) $(\lambda \mu) \cdot b = \lambda \cdot (\mu \cdot b)$

iv) $1b \cdot b$

Dem.

i)

$$¿\left[(\lambda+\mu)\cdot b\right](u,v) = \left[\lambda b+\mu\cdot b\right](u,v)\ ?$$

$$\left[(\lambda+\mu)\cdot b\right](u,v) = (\lambda+\mu)\cdot b(u,v) = \lambda b(u,v)+\mu b(u,v) =$$

$$= (\lambda b)(u,v) + (\mu b)(u,v) =$$

$$= \left[\lambda b+\mu b\right](u,v)$$

2.1 Formas bilineales simétricas y antisimétricas

Sea V un ev real y $b \in B(V)$. Se dice que b es una forma bilineal simétrica o métrica si:

$$\boxed{b(u,v) = b(v,u)} \qquad \forall u,v \in V$$

b es una forma bilineal antisimétrica si:

$$\boxed{b(u,v) = -b(v,u)} \qquad \forall u,v \in V$$

Recordemos que teníamos dada B base de V un isomorfismo

$$\begin{aligned} \overset{F_B}{\varphi}: B(V) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}) \\ b &\longmapsto M(b,B) \end{aligned}$$

- $S_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t = A\}$ $\Rightarrow$ $\dim(S_n) = \frac{(n+1)n}{2}$
- $A_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t = -A\}$ → diag 0 siempre $\Rightarrow$ $\dim(A_n) = \frac{n(n-1)}{2}$

$$A = \underset{\underset{S_n(\mathbb{R})}{\cap}}{\frac{1}{2}(A+A^t)} + \underset{\underset{A_n(\mathbb{R})}{\cap}}{\frac{1}{2}(A-A^t)}$$

- φ envía matrices simétricas a las matrices simétricas
- φ " " antisimétricas " " antisimétricas.

<u>Definición</u> Denotaremos $B_S(V)$ y $B_A(V)$ a las formas bilineales simétricas y antisimétricas de V.

Proposición.

$$T: B(V) \longrightarrow B(V)$$
$$b \longmapsto T(b): V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u,v) \longmapsto T(b)(u,v) = b(v,u)$$

Dem.

$T(b) \in B(V)$

- ¿ $T(b)(\lambda u + \mu v, w) = \lambda T(b)(u,w) + \mu T(b)(v,w)$?

$$b(w, \lambda u + \mu v) = \lambda b(w,u) + \mu b(w,v)$$

etc

- ¿ $T(\lambda b + \mu b') = \lambda T(b) + \mu T(b')$?

$$T(\lambda b + \mu b')(u,v) = (\lambda b + \mu b')(v,u) = \lambda b(v,u) + \mu b'(v,u) =$$
$$= \lambda T(b)(u,v) + \mu T(b)(u,v) = [\lambda T(b) + \mu T(b')](u,v)$$

- ¿ $T^2 = I_{B(V)}$?

$$T^2(b) = b \quad , \forall b \in B(V)$$
$$T^2(b)(u,v) = b(u,v)$$
$$T(T(b))(u,v) = T(b)(v,u) = b(u,v)$$

Formas bilineales simétricas:

$B_S(V) = Ker(T - I_{B(V)}) = \{ b \in B(V) : T(b) = b \} = \{ b \in B(V) : b(u,v) = b(v,u), \forall u,v \in V \}$

Formas bilineales antisimétricas:

$B_A(V) = Ker(T - I_{B(V)}) = \{ b \in B(V) : T(b) = -b \} = \{ b \in B(V) : b(u,v) = -b(v,u), \forall u,v \in V \}$

Proposición $B(V) = B_S(V) \oplus B_A(V)$

Dem.

Si $b \in B_S(V)$ y $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ entonces:

$$(M(b,B))_{ij} = b(u_i, u_j) = b(u_j, u_i) = (M(b,B))_{ji} \Rightarrow M(b,B) \in S_n(\mathbb{R})$$

Si $b \in B_A(V) \Longrightarrow M(b;B) \in A_S(\mathbb{R})$

Es más, $\psi(B_S(V)) = S_n(\mathbb{R})$

$\psi(B_A(V)) = A_n(\mathbb{R})$

Sea $A \in S_n(\mathbb{R})$ y $b(u,v) = x^t A y$

x, y coord. de u y v en la base B:

$$b(u,v) = y^t A^t x \underset{A^t = A}{=} y^t A x = b(v,u) \Longrightarrow b \in B_S(V)$$

Luego $B_S(V)$ y $B_A(V)$ son <u>subespacios vectoriales</u> de $B(V)$

Además, si $b \in B(V)$ entonces:

$$b(u,v) = \underbrace{\frac{1}{2}\overbrace{(b(u,v) + b(v,u))}^{b+T(b)}}_{\in B_S(V)} + \underbrace{\frac{1}{2}\overbrace{(b(u,v) - b(v,u))}^{b-T(b)}}_{\in B_A(V)}$$

simétrica porque si la invierto queda =

antisim. pq si la invierto queda - lo que ya hay

Por lo que

$$B(V) = B_S(V) \oplus B_A(V)$$

2.2 Caracterización de las formas bilineales antisimétricas

Proposición

$$b \in B_A(V) \iff b(u,u) = 0 \quad , \quad \forall u \in V$$

Dem.

$\Rightarrow$ | $b(u,v) = -b(v,u)$, $v=u$, entonces:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{invertir}}}{b(u,u) = -b(u,u)} \Rightarrow b(u,u) = 0$$

$\Leftarrow$ |

$u,v \in V$

$$0 = b(u+v, u+v) \underset{\substack{\uparrow \\ b \text{ bilin.}}}{=} \overset{0}{b(u,u)} + b(u,v) + b(v,u) + \overset{0}{b(v,v)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b(u,v) = -b(v,u)$$

EJEMPLOS

- $b_0 \in B_S(\mathbb{R}^n)$ porque $M(b_0, B_u) = I_n$

- $M(b_1, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow b_1 \in B_S(\mathbb{R}^n)$ y $M(b, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

- $(\mathbb{R}^n, b)$, $M(b, B_u) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$ Métrica de Lorentz-Minkowski

- $b: M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

  $b(A,C) = tr(A \cdot C^t)$

  $b(C,A) = tr(C, A^t) = tr((A \cdot C^t)^t) = tr(A \cdot C^t) = b(A,C)$

- $b: C([a,b], \mathbb{R}) \times C([a,b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

  $f \times h \longmapsto \int_a^b f(t)\, h(t) \cdot dt$