Manuel Gachs Ballegeer 1ºDGIIM

LDM: RESUMEN LÓGICA PROPOSICIONAL

Forma normal conjuntiva. Lista de equivalencias lógicas.

1. $\alpha \equiv \alpha \vee \alpha$
2. $\alpha \equiv \alpha \wedge \alpha$
3. $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$
4. $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$
5. $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$
6. $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$
7. $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$
8. $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$
9. Leyes de Morgan
    - $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$
    - $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$
10. $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \equiv (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$
11. $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \equiv (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$
12. $\alpha \equiv \alpha \vee (\beta \wedge \neg\beta) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta)$
13. $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

Ejemplo: $(a \rightarrow b) \rightarrow c$

Usando **8**: $\neg(\neg a \vee b) \vee c$

Usando **9**: $(a \wedge \neg b) \vee c$

Usando **10**: $(a \vee c) \wedge (\neg b \vee c)$

Teorema de la deducción y consecuencias

Sea $\Sigma = \{\gamma_0, \ldots, \gamma_n\}$ un conjunto de cláusulas, es equivalente:

1. $\Sigma \models \alpha \rightarrow \beta$
2. $\Sigma, \alpha \models \beta$
3. $\{\gamma_0, \ldots, \gamma_n, \alpha, \neg\beta\}$ es insatisfacible.
4. $\{\gamma_0 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \wedge \alpha \wedge \neg\beta\}$ es insatisfacible

Método de Davis-Putnam

Se trata de conseguir averiguar si un conjunto Σ de cláusulas es insatisfacible o no.

- **Regla 1**: Si se encuentra una cláusula unitaria λ, se elimina en TODAS las cláusulas las ocurrencias de λ
    - Si $\Sigma' = \varnothing$, entonces Σ es satisfacible.

- **Regla 2**: Si se encuentra un literal puro (aparece λ pero en al menos una cláusula y λ^c en ninguna), se eliminan todas las ocurrencias de ese literal puro.
  - Si $\Sigma'' = \{\square\}$, entonces Σ es insatisfacible.
- **Regla 3:** Si no hay literales unitarios o puros, entonces se divide el conjunto en dos dependiendo de un literal (explicado en el ejemplo, no soy capaz de formalizarlo sin que quede medianamente claro). Ambas partes deben ser satisfacibles para que Σ sea satisfacible.

Ejemplo:

$\Sigma = \{a \vee c \vee \neg d \vee e, \neg b \vee c \vee \neg d \vee e, \neg c \vee e, \neg e \vee \neg b, \neg e \vee a, \neg a \vee b, d\}$

Aplicamos la regla **1**: $\lambda = d$

$\Sigma' = \{a \vee c \vee \neg d \vee e, \neg b \vee c \vee \neg d \vee e, \neg c \vee e, \neg e \vee \neg b, \neg e \vee a, \neg a \vee b\} \neq \varnothing$

Aplicamos la regla **2**: $\lambda^c = \neg d$

$\Sigma'' = \{a \vee c \vee e, \neg b \vee c \vee e, \neg c \vee e, \neg e \vee \neg b, \neg e \vee a, \neg a \vee b\}$

Como no podemos aplicar ni la regla **1** ni la **2**, aplicamos la regla **3**: $\lambda_i = e, \lambda_i^c = \neg e$

$\lambda_i \implies \Sigma_1 = \{a \vee c, \neg b \vee c, \neg c, \neg a \vee b\}$ Hemos cogido las cláusulas en las que no se encontraba λ^c, en las que se encontraba λ pero quitándola y en las que no se encontraban ninguna de las dos.

Aplicamos la regla **1**: $\lambda = \neg c$

$\Sigma_1' = \{a \vee c, \neg b \vee c, \neg a \vee b\} \neq \varnothing$

Aplicamos la regla **2**: $\lambda^c = c$

$\Sigma_1'' = \{a, \neg b, \neg a \vee b\}$

Aplicamos la regla **1**: $\lambda = a$

$\Sigma_1''' = \{\neg b, \neg a \vee b\} \neq \varnothing$

Aplicamos la regla **2**: $\lambda^c = \neg a$

$\Sigma_1'''' = \{\neg b, b\}$ Este conjunto es **insatisfacible**.

$\lambda_i^c \implies \Sigma_2 = \{\neg b, a, \neg a \vee b\}$ Al contrario que Σ_1.

Aplicamos la regla **1**: $\lambda = \neg b$

$\Sigma_2' = \{a, \neg a \vee b\} \neq \varnothing$

Aplicamos la regla **2**: $\lambda^c = b$

$\Sigma_2' = \{a, \neg a\}$ Este conjunto es **insatisfacible**.

Como Σ_1 y Σ_2 son insatisfacibles, entonces Σ'' es insatisfacible, por lo que Σ' es insatisfacible, por lo que concluimos que Σ es **insatisfacibe**.