Ejercicio 31

Ricardo Ruiz

October 8, 2017

Enunciado

Sea $A = \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Prueba que $\inf A = 1$

Por la observación 1.13.2, si $\alpha = infA = 1$, entonces

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in A : \quad x_\varepsilon < \alpha + \varepsilon$$

Por tanto, $x_\varepsilon < 1 + \varepsilon$, y como $x_\varepsilon \in A$ entonces $x_\varepsilon = 1 + \frac{1}{n_\varepsilon}$
Así, se tiene que:

$$1 + \frac{1}{n_\varepsilon} < 1 + \varepsilon; \quad \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$$

Despejando n_ε:

$$\frac{1}{\varepsilon} < n_\varepsilon$$

Y esto es cierto $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+ \quad \forall n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, ya que según la propiedad arquimediana, dado cualquier número real, se verifica que hay números naturales mayores que él.

¿Tiene A mínimo? ¿Y máximo?