Manuel Gachs Ballegeer 1ºDGIIM

Cálculo I: Límite de sucesiones y convergencia de series.

<u>Límite de sucesiones</u>

Criterios ante indeterminaciones.

- ***Criterio de Stolz:*** Se utiliza cuando tenemos una expresión de $x_n = \frac{a_n}{b_n}$, donde a_n y b_n divergen.

  $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$

- ***Criterio de Stolz:*** Se utiliza cuando tenemos una expresión de $x_n = \sqrt[n]{a_n}$, donde a_n diverge.

  $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

- ***Otras indeterminaciones:***

  $\{x_n^{y_n}\} \to 1^\infty = e^L \implies \{y_n(x_n - 1)\} \to L$

  $\{y_n(x_n - 1)\} \to 0 \cdot \infty = \ln L \implies \{x_n^{y_n}\} \to L$

  $\{x_n - y_n\} \to \infty - \infty = L \implies \{(x_n - y_n)(\frac{x_n + y_n}{x_n + y_n})\} \to L$

<u>Convergencia de series</u>

Dada, una serie $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$, primero debemos estudiar la convergencia de la suceción.

Si $\{a_n\} \to 0$: La serie puede converger, y se aplica uno de los criterios.

Si $\{a_n\} \to L \neq 0$: La serie no converge.

Criterios de convergencia.

- ***Criterio del cociente:*** Se aplica cuando a_n es un cociente.

  $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$

  - Si $L < 1$, entonces la serie converge.
  - Si $L > 1$, entonces la serie no converge.
  - Si $L = 1$, entonces no sabemos si la serie converge o no y tenemos que aplicar Raabe.

- ***Criterio de la raíz:*** Se aplica cuando a_n es una expresión elevada a n.

  $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

  - Si $L < 1$, entonces la serie converge.
  - Si $L > 1$, entonces la serie no converge.
  - Si $L = 1$, entonces no sabemos si la serie converge o no y tenemos que aplicar Raabe.

- ***Criterio de comparación:*** Se trata de realizar el cociente de a_n y una serie de la que sepamos su convergencia.

  $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L$

- b_n más comunes:
  - Serie armónica: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ (normalmente $\alpha = \textbf{diferencia de grados}$ en a_n):
    - Si $\alpha \leq 1$, la serie es divergente.
    - Si $\alpha > 1$, la serie es convergente.
  - Serie geométrica: $\sum_{n\geq 1} a^n$
    - Si $|a| < 1$, la serie es convergente.
    - Si $|a| \geq 1$, la serie es divergente.
- Si $L \neq 0, \infty$, entonces ambas series tienen el mismo carácter.
- Si $L = 0 \implies a_n \leq b_n \implies$ Si b_n converge, entonces a_n también.
- Si $L = \infty \implies b_n \leq a_n \implies$ Si b_n diverge, entonces a_n también.

- ***Criterio de Raabe:*** Se aplica cuando en el criterio de la raíz y el del cociente $L = 1$.

  $\lim_{n\to\infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) = L$

  - Si $L < 1$, entonces la serie no converge.
  - Si $L \geq 1$, entonces la serie converge.

- ***Criterio de Leibnitz:*** Se aplica cuando la serie es de la forma$\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$. Se deben cumplir las siguientes condiciones para poder afirmar que la serie es convergente:
  1. $\{a_n\} \to 0$
  2. a_n es decreciente.

Convergencia absoluta.

$\sum_{n\geq 1} |a_n|$ converge $\implies \sum_{n\geq 1} a_n$ converge absolutamente.

$\sum_{n\geq 1} a_n$ converge absolutamente $\implies \sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

Se aplican los criterios de convergencia para determinar la convergencia absoluta.