APELLIDOS: .... GRUPO: ....

NOMBRE: .... NIF: .... Nº HOJAS: ......

LMD

Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

24 de enero de 2018

1. Sea e la función de argumentos naturales dada por:

$$e(a,0) = 1,$$
$$e(a,b) = \begin{cases} e\left(a^2, \frac{b}{2}\right), & \text{si } b \text{ es par.} \\ e\left(a^2, \frac{b-1}{2}\right)a, & \text{si } b \text{ es impar.} \end{cases}$$

Demuestre por inducción que para cualesquiera números naturales a y b, $e(a,b) = a^b$.

2. Resuelva el problema de recurrencia:

$$u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 3\cdot 2^n + 7\cdot 3^n, \quad n \geq 0.$$

y encuentre la solución particular que cumple $u_0 = 1$ y $u_1 = 4$.

3. Demuestre que para todo conjunto de fórmulas proposicionales $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ se cumple:

   a) $\mathrm{Con}(\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\}) = \mathrm{Con}(\Gamma \cup \{\alpha, \beta\})$

   b) $\mathrm{Con}(\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\}) = \mathrm{Con}(\Gamma \cup \{\alpha\}) \cap \mathrm{Con}(\Gamma \cup \{\beta\})$

4. Estudie si el siguiente conjunto de cláusulas:

$$\{\neg a \vee c \vee f, b \vee c \vee f, b \vee \neg c \vee f, \neg b \vee f, a \vee \neg b \vee f, \neg a \vee d \vee f, d \vee f,$$
$$b \vee d \vee e \vee \neg f, b \vee \neg d \vee e \vee \neg f, b \vee \neg e \vee \neg f, a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg f, \neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg f\}$$

es o no insatisfacible y caso de ser satisfacible, de una asignación que lo evidencie.

5. Considere la función booleana de cuatro variables:

$$f(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{c}\bar{d} + cd + \bar{a}\bar{b}d + ab\bar{c}d$$

Si supone que hay también términos "no importa" definidos por $D(a,b,c,d) = \sum d(9,12,14)$, dé para f:

   a) una descomposición minimal como suma de productos,

   b) una descomposición minimal como producto de sumas y

   c) al menos una expresión que mejore el costo de cualquiera de las dos anteriores.

6. Considere las cuatro fórmulas cerradas siguientes:

   - $\gamma_1 \equiv \forall x \forall y (r(x,y) \rightarrow r(y,x))$
   - $\gamma_2 \equiv \forall x \forall y \forall z (r(x,y) \wedge r(y,z) \rightarrow r(x,z))$
   - $\gamma_3 \equiv \forall x \exists y r(x,y)$
   - $\varphi \equiv \forall x r(x,x)$

   Responda razonadamente a las siguientes preguntas:

a) ¿Es φ consecuencia lógica de $\{\gamma_1, \gamma_2\}$?

b) ¿Es φ consecuencia lógica de $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$?

7. Encuentre una fórmula en forma normal prenexa lógicamente equivalente a:

$$\forall x p(x,y) \to \big(\forall y p(y,x) \to \forall x(q(x) \wedge \exists y \forall z r(a,y,z))\big)$$

y que tenga el mínimo número de cuantificadores. Seguidamente dé una forma normal de Skolem para esa forma normal prenexa antes hallada.

8. Demuestre, usando resolución lineal input, que la fórmula:

$$\neg \exists x(r(x) \wedge s(x))$$

es consecuencia de las fórmulas:

- $\forall x((r(x) \wedge s(x)) \to \exists y(q(y) \wedge p(x,y)))$
- $\forall x(q(x) \to t(x))$
- $\forall x(t(x) \to o(x))$
- $\forall x \forall y((r(x) \wedge o(y)) \to \neg p(x,y))$

9. Responda razonadamente a las siguientes preguntas:

a) Demuestre que un árbol finito G (con al menos un vértice) tiene al menos dos vértices de grado 1.

b) Halle el número m de aristas de los grafos: K_8, K_{12} y K_{15}. ¿Cuál es el diámetro de K_n?

c) Dé un grafo de 6 vértices que sea hamiltoniano pero no euleriano. Dé su matriz de adyacencia.