www.datascienceacademy.com.br

Introdução à Inteligência Artificial

Vetores, Matrizes e Algebra Linear

Os matemáticos definem **vetor** como um membro de um espaço vetorial, mas utilizaremos uma definição mais concreta: um vetor é uma sequência ordenada de valores. Por exemplo, em um espaço bidimensional, temos vetores como **x** = ⟨3, 4⟩ e **y** = ⟨0, 2⟩ . Seguimos a convenção habitual de usar caracteres em negrito para representar nomes de vetores, embora alguns autores utilizem setas ou barras sobre os nomes: **x** ou **y**. Os elementos de um vetor podem ser acessados com a utilização de subscritos: **z** = ⟨z_1, z_2, ..., z_n⟩ . Um ponto confuso: este livro é um trabalho sintético de muitos subcampos, que de diferentes maneiras chamam seus vetores de sequências, listas ou tuplas e, frequentemente, utilizam as notações ⟨1, 2⟩ , [1, 2], ou (1, 2).

As duas operações fundamentais sobre vetores são a adição vetorial e a multiplicação escalar. A
adição vetorial x + y é a soma dos elementos correspondentes dos vetores: x + y = ⟨3 + 0, 4 + 2⟩ = ⟨3, 6⟩ . A multiplicação escalar multiplica cada elemento por uma constante: 5x = ⟨5 × 3, 5 × 4⟩ = ⟨15, 20⟩ .

O comprimento de um vetor é indicado por |x| e é calculado tomando-se a raiz quadrada da soma dos quadrados dos elementos: $|\mathbf{x}| = \sqrt{(3^2 + 4^2)} = 5$. O produto de ponto (também chamado produto escalar) de dois vetores x · y é a soma dos produtos dos elementos correspondentes, isto é, x · y = $\Sigma_i x_i y_i$ ou, em nosso caso específico, x · y = 3 × 0 + 4 × 2 = 8.

Os vetores frequentemente são interpretados como segmentos de reta orientados (setas) em um espaço euclidiano n dimensional. Então, a adição vetorial é equivalente a conectar o final de um vetor ao início do outro, e o produto pontual x · y é igual a |x| |y| cos θ, onde θ é o ângulo entre x e y. Uma matriz é um array retangular de valores organizados em linhas e colunas. Aqui temos uma matriz A de tamanho 3 × 4:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} & \mathbf{A}_{1,3} & \mathbf{A}_{1,4} \\ \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2} & \mathbf{A}_{2,3} & \mathbf{A}_{2,4} \\ \mathbf{A}_{3,1} & \mathbf{A}_{3,2} & \mathbf{A}_{3,3} & \mathbf{A}_{3,4} \end{pmatrix}$$

O primeiro índice de Ai,j especifica a linha e o segundo especifica a coluna. Em linguagem de programação, Ai,j frequentemente é escrito como A[i,j] ou A[i][j].

A soma de duas matrizes é definida pela adição de elementos correspondentes; desse modo, (A+B)i,j = Ai,j + Bi,j (a soma é indefinida se A e B têm tamanhos diferentes). Também podemos definir a multiplicação de uma matriz por um escalar: (cA)i,j = cAi,j. A multiplicação de matrizes (o produto de duas matrizes) é mais complicada. O produto AB é definido apenas se A tem o tamanho a × b e B tem o tamanho b × c (isto é, a segunda matriz tem um número de linhas igual ao número de colunas da primeira matriz); o resultado é uma matriz de tamanho a × c. Se as matrizes tiverem tamanho apropriado, o resultado será:

$$(\mathbf{AB})_{i,k} = \sum_j \mathbf{A}_{i,j}\mathbf{B}_{j,k}$$

A multiplicação de matrizes não é comutativa, mesmo para matrizes quadradas: AB ≠ BA em geral. No entanto, é associativa: (AB)C = A(BC). Observe que o produto escalar pode ser expresso em termos de uma transposição e uma multiplicação de matrizes: x · y = xTy.

A matriz identidade I tem elementos Ii,j iguais a 1 quando i = j e iguais a 0 em caso contrário. Ela tem a propriedade de que AI = A para todo A. A transposta de A, escrita como AT é formada transformando-se as linhas em colunas e vice-versa ou, de modo mais formal, por ATi, j = Aj,i. O inverso de uma matriz quadrada A é outra matriz quadrada A−1 tal que A−1 A = I. Para uma matriz singular, o inverso não existe. Para uma matriz não singular, pode ser calculado no tempo $O(n^3)$.

As matrizes são usadas para resolver sistemas de equações lineares no tempo $O(n^3)$; o tempo é dominado pela inversão de uma matriz de coeficientes. Considere o conjunto de equações a seguir, para o qual queremos encontrar uma solução em x, y e z:

+2x + y – z = 8
–3x – y + 2z = −11
–2x + y + 2x = –3

Podemos representar esse sistema como a equação matricial A x = b, onde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Para resolver A x = b, multiplicamos ambos os lados por A−1, produzindo A−1Ax = A−1b, que, simplificando, dá x = A−1b. Depois de inverter A e multiplicar por b, obtemos a resposta:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Referências:

Livro: Inteligência Artificial
Autor: Peter Norvig