Comparação de duas variâncias: Teste Bilateral

Esse teste é, muitas vezes, usado em conexão com o teste t-Sudent para duas médias (amostras independentes), em que é necessário verificar a homocedasticidade (igualdade) ou heterocedasticidade (diferença) das variâncias. Suponha que temos duas amostras aleatórias e independentes, de tamanhos n_1 e n_2, retiradas de duas populações normais com variâncias σ_1^2 e σ_2^2. Desejamos testar a hipótese bilateral:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \qquad H_A: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Para isso, utilizaremos a seguinte estatística de teste:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

onde s_1^2 e s_2^2 são as variâncias amostrais correspondentes. Baseado na suposição de que as populações amostradas têm distribuição normal e que a hipótese nula é $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, pode ser mostrado que a estatística de teste F, chamada de razão de variâncias, segue o modelo Fisher-Snedecor, que é caracterizado pelos graus de liberdade associados às quantidades presentes no numerador ($n_1 - 1$) e no denominador ($n_2 - 1$) da estatística de teste.

Para um teste bilateral, a regra de decisão para um nível de significância (α) é:

Rejeitar H_0 se: $F < F_L$ ou se $F > F_R$

onde os valores críticos são obtidos por: $F_L = \frac{1}{F_{n_2-1;n_1-1;\frac{\alpha}{2}}}$ e $F_R = F_{n_1-1;n_2-1;\frac{\alpha}{2}}$

Os valores $F_{n_2-1;n_1-1;\frac{\alpha}{2}}$ e $F_{n_1-1;n_2-1;\frac{\alpha}{2}}$ são encontrados na tabela F.

Caso contrário, não rejeitamos H_0.

Exemplo

Um fabricante de esferas para rolamentos desenvolveu um novo método de produção, mais barato. Entretanto, ele desconfia que os novos lotes apresentam variabilidade diferente daqueles produzidos pelo método antigo (com relação ao diâmetro das esferas). Para cada método, ele selecionou uma amostra aleatória. As medidas descritivas para cada método encontram-se a seguir:

Método antigo: $n_1 = 15$; $\overline{x_1} = 29{,}93$ mm ; $s_1^2 = 0{,}03$ mm^2

Método novo: $n_2 = 10$; $\overline{x_2} = 29{,}89$ mm ; $s_2^2 = 0{,}19$ mm^2

Nesse exemplo vamos construir o teste bilateral para comparação de duas variâncias para um nível de significância de 5%.

Hipóteses estatísticas: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $\qquad H_A: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Estatística de teste: $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0,03}{0,19} = 0,158$

Para obter os valores críticos devemos consultar a tabela F:

$F_{n_2-1;n_1-1;\frac{\alpha}{2}} = F_{10-1;15-1;\frac{0,05}{2}}$ = 3,209

$F_{n_1-1;n_2-1;\frac{\alpha}{2}} = F_{15-1;10-1;\frac{\alpha}{2}}$ = 3,798

Assim, encontramos:

$F_L = \frac{1}{F_{n_2-1;n_1-1;\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{3,209} = 0,312$

$F_R = F_{n_1-1;n_2-1;\frac{\alpha}{2}} = 3,798$

Para este teste, a regra de decisão considerando-se α=0,05 fica definida da seguinte forma:

Rejeitar H_0 se: F < 0,312 ou se F > 3,798

Como F = 0,158, então, 0,158 < 0,312, devemos rejeitar H_0, ou seja, pode-se concluir a um nível de 5% de significância que existe diferença na variância dos diâmetros das esferas, dependendo do método utilizado.

Exercícios

1. Um analista da qualidade quer avaliar se existe diferença na variabilidade da produção de eixo comando desenvolvido por dois sistemas de usinagem. A tabela a seguir apresenta as medidas descritivas de duas populações independentes com distribuição Normal. Podemos dizer que as variâncias de ambas são iguais? Utilize um nível de significância de 5%.

	Tamanho da amostra	Média da amostra	Desvio padrão da amostra
Sistema de usinagem 1	25	19,3266	1,3623
Sistema de usinagem 2	30	24,4729	2,8876

2. Um consultor de saúde deseja comparar os índices de satisfação dos pacientes de dois hospitais. O consultor coleta as classificações de 20 pacientes para cada um dos hospitais. No hospital A a variância observada foi igual a 66,958 e no hospital B foi de 154,537. Execute um teste de duas variâncias para determinar se os desvios-padrão nas avaliações dos pacientes dos dois hospitais são diferentes. Utilize um nível de significância de 5%.

Gabarito:

1. F=0,2225

   $F_L = \frac{1}{F_{29;24;0,025}} = \frac{1}{2,209} = 0,4527$

   $F_R = F_{24;29;0,025} = 2,154$

   Rejeitar H_0 se: $F < 0,4527$ ou se $F > 2,154$

   Como $F < F_L$, rejeitamos a hipótese nula.

2. F=0,4333

   $F_L = \frac{1}{F_{19;19;0,025}} = \frac{1}{2,526} = 0,3959$

   $F_R = F_{19;19;0,025} = 2,526$

   Rejeitar H_0 se: $F < 0,3959$ ou se $F > 2,526$

   Não rejeitamos a hipótese nula.

Distribuição F de Snedecor | área de 2,5% na cauda superior

graus do numerador

graus do denominador

gln/gld	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	30	40	50
1	647,8	799,5	864,2	899,6	921,8	937,1	948,2	956,7	963,3	968,6	973,0	976,7	979,8	982,5	984,9	986,9	988,7	990,3	991,8	993,1	994,3	995,4	996,3	997,2	998,1	1001	1006	1008
2	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,41	39,41	39,42	39,43	39,43	39,44	39,44	39,44	39,45	39,45	39,45	39,45	39,45	39,46	39,46	39,46	39,47	39,48
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,37	14,34	14,30	14,28	14,25	14,23	14,21	14,20	14,18	14,17	14,16	14,14	14,13	14,12	14,12	14,08	14,04	14,01
4	12,22	10,65	9,979	9,605	9,364	9,197	9,074	8,980	8,905	8,844	8,794	8,751	8,715	8,684	8,657	8,633	8,611	8,592	8,575	8,560	8,546	8,533	8,522	8,511	8,501	8,461	8,411	8,381
5	10,01	8,434	7,764	7,388	7,146	6,978	6,853	6,757	6,681	6,619	6,568	6,525	6,488	6,456	6,428	6,403	6,381	6,362	6,344	6,329	6,314	6,301	6,289	6,278	6,268	6,227	6,175	6,144
6	8,813	7,260	6,599	6,227	5,988	5,820	5,695	5,600	5,523	5,461	5,410	5,366	5,329	5,297	5,269	5,244	5,222	5,202	5,184	5,168	5,154	5,141	5,128	5,117	5,107	5,065	5,012	4,980
7	8,073	6,542	5,890	5,523	5,285	5,119	4,995	4,899	4,823	4,761	4,709	4,666	4,628	4,596	4,568	4,543	4,521	4,501	4,483	4,467	4,452	4,439	4,426	4,415	4,405	4,362	4,309	4,276
8	7,571	6,059	5,416	5,053	4,817	4,652	4,529	4,433	4,357	4,295	4,243	4,200	4,162	4,130	4,101	4,076	4,054	4,034	4,016	3,999	3,985	3,971	3,959	3,947	3,937	3,894	3,840	3,807
9	7,209	5,715	5,078	4,718	4,484	4,320	4,197	4,102	4,026	3,964	3,912	3,868	3,831	3,798	3,769	3,744	3,722	3,701	3,683	3,667	3,652	3,638	3,626	3,614	3,604	3,560	3,505	3,472
10	6,937	5,456	4,826	4,468	4,236	4,072	3,950	3,855	3,779	3,717	3,665	3,621	3,583	3,550	3,522	3,496	3,474	3,453	3,435	3,419	3,403	3,390	3,377	3,365	3,355	3,311	3,255	3,221
11	6,724	5,256	4,630	4,275	4,044	3,881	3,759	3,664	3,588	3,526	3,474	3,430	3,392	3,359	3,330	3,304	3,282	3,261	3,243	3,226	3,211	3,197	3,184	3,173	3,162	3,118	3,061	3,027
12	6,554	5,096	4,474	4,121	3,891	3,728	3,607	3,512	3,436	3,374	3,321	3,277	3,239	3,206	3,177	3,152	3,129	3,108	3,090	3,073	3,057	3,043	3,031	3,019	3,008	2,963	2,906	2,871
13	6,414	4,965	4,347	3,996	3,767	3,604	3,483	3,388	3,312	3,250	3,197	3,153	3,115	3,082	3,053	3,027	3,004	2,983	2,965	2,948	2,932	2,918	2,905	2,893	2,882	2,837	2,780	2,744
14	6,298	4,857	4,242	3,892	3,663	3,501	3,380	3,285	3,209	3,147	3,095	3,050	3,012	2,979	2,949	2,923	2,900	2,879	2,861	2,844	2,828	2,814	2,801	2,789	2,778	2,732	2,674	2,638
15	6,200	4,765	4,153	3,804	3,576	3,415	3,293	3,199	3,123	3,060	3,008	2,963	2,925	2,891	2,862	2,836	2,813	2,792	2,773	2,756	2,740	2,726	2,713	2,701	2,689	2,644	2,585	2,549
16	6,115	4,687	4,077	3,729	3,502	3,341	3,219	3,125	3,049	2,986	2,934	2,889	2,851	2,817	2,788	2,761	2,738	2,717	2,698	2,681	2,665	2,651	2,637	2,625	2,614	2,568	2,509	2,472
17	6,042	4,619	4,011	3,665	3,438	3,277	3,156	3,061	2,985	2,922	2,870	2,825	2,786	2,753	2,723	2,697	2,673	2,652	2,633	2,616	2,600	2,585	2,572	2,560	2,548	2,502	2,442	2,405
18	5,978	4,560	3,954	3,608	3,382	3,221	3,100	3,005	2,929	2,866	2,814	2,769	2,730	2,696	2,667	2,640	2,617	2,596	2,576	2,559	2,543	2,529	2,515	2,503	2,491	2,445	2,384	2,347
19	5,922	4,508	3,903	3,559	3,333	3,172	3,051	2,956	2,880	2,817	2,765	2,720	2,681	2,647	2,617	2,591	2,567	2,546	2,526	2,509	2,493	2,478	2,465	2,452	2,441	2,394	2,333	2,295
20	5,871	4,461	3,859	3,515	3,289	3,128	3,007	2,913	2,837	2,774	2,721	2,676	2,637	2,603	2,573	2,547	2,523	2,501	2,482	2,464	2,448	2,434	2,420	2,408	2,396	2,349	2,287	2,249
21	5,827	4,420	3,819	3,475	3,250	3,090	2,969	2,874	2,798	2,735	2,682	2,637	2,598	2,564	2,534	2,507	2,483	2,462	2,442	2,425	2,409	2,394	2,380	2,368	2,356	2,308	2,246	2,208
22	5,786	4,383	3,783	3,440	3,215	3,055	2,934	2,839	2,763	2,700	2,647	2,602	2,563	2,528	2,498	2,472	2,448	2,426	2,407	2,389	2,373	2,358	2,344	2,331	2,320	2,272	2,210	2,171
23	5,750	4,349	3,750	3,408	3,183	3,023	2,902	2,808	2,731	2,668	2,615	2,570	2,531	2,497	2,466	2,440	2,416	2,394	2,374	2,357	2,340	2,325	2,312	2,299	2,287	2,239	2,176	2,137
24	5,717	4,319	3,721	3,379	3,155	2,995	2,874	2,779	2,703	2,640	2,586	2,541	2,502	2,468	2,437	2,411	2,386	2,365	2,345	2,327	2,311	2,296	2,282	2,269	2,257	2,209	2,146	2,107
25	5,686	4,291	3,694	3,353	3,129	2,969	2,848	2,753	2,677	2,613	2,560	2,515	2,476	2,441	2,411	2,384	2,360	2,338	2,318	2,300	2,284	2,269	2,255	2,242	2,230	2,182	2,118	2,079
26	5,659	4,265	3,670	3,329	3,105	2,945	2,824	2,729	2,653	2,590	2,536	2,491	2,451	2,417	2,387	2,360	2,335	2,314	2,294	2,276	2,259	2,244	2,230	2,217	2,205	2,157	2,093	2,053
27	5,633	4,242	3,647	3,307	3,083	2,923	2,802	2,707	2,631	2,568	2,514	2,469	2,429	2,395	2,364	2,337	2,313	2,291	2,271	2,253	2,237	2,222	2,208	2,195	2,183	2,133	2,069	2,029
28	5,610	4,221	3,626	3,286	3,063	2,903	2,782	2,687	2,611	2,547	2,494	2,448	2,409	2,374	2,344	2,317	2,292	2,270	2,251	2,232	2,216	2,201	2,187	2,174	2,161	2,112	2,048	2,007
29	5,588	4,201	3,607	3,267	3,044	2,884	2,763	2,669	2,592	2,529	2,475	2,430	2,390	2,355	2,325	2,298	2,273	2,251	2,231	2,213	2,196	2,181	2,167	2,154	2,142	2,092	2,028	1,987
30	5,568	4,182	3,589	3,250	3,026	2,867	2,746	2,651	2,575	2,511	2,458	2,412	2,372	2,338	2,307	2,280	2,255	2,233	2,213	2,195	2,178	2,163	2,149	2,136	2,124	2,074	2,009	1,968
35	5,485	4,106	3,517	3,179	2,956	2,796	2,676	2,581	2,504	2,440	2,387	2,341	2,301	2,266	2,235	2,207	2,183	2,160	2,140	2,122	2,105	2,089	2,075	2,062	2,049	1,999	1,932	1,890
40	5,424	4,051	3,463	3,126	2,904	2,744	2,624	2,529	2,452	2,388	2,334	2,288	2,248	2,213	2,182	2,154	2,129	2,107	2,086	2,068	2,051	2,035	2,020	2,007	1,994	1,943	1,875	1,832
45	5,377	4,009	3,422	3,086	2,864	2,705	2,584	2,489	2,412	2,348	2,294	2,248	2,208	2,172	2,141	2,113	2,088	2,066	2,045	2,026	2,009	1,993	1,978	1,965	1,952	1,900	1,831	1,788
50	5,340	3,975	3,390	3,054	2,833	2,674	2,553	2,458	2,381	2,317	2,263	2,216	2,176	2,140	2,109	2,081	2,056	2,033	2,012	1,993	1,976	1,960	1,945	1,931	1,919	1,866	1,796	1,752
55	5,310	3,948	3,364	3,029	2,807	2,648	2,528	2,433	2,355	2,291	2,237	2,190	2,150	2,114	2,083	2,055	2,029	2,006	1,986	1,967	1,949	1,933	1,918	1,904	1,891	1,838	1,768	1,723
60	5,286	3,925	3,343	3,008	2,786	2,627	2,507	2,412	2,334	2,270	2,216	2,169	2,129	2,093	2,061	2,033	2,008	1,985	1,964	1,944	1,927	1,911	1,896	1,882	1,869	1,815	1,744	1,699
65	5,265	3,906	3,324	2,990	2,769	2,610	2,489	2,394	2,317	2,252	2,198	2,151	2,111	2,075	2,043	2,015	1,989	1,966	1,945	1,926	1,908	1,892	1,877	1,863	1,850	1,796	1,724	1,678
70	5,247	3,890	3,309	2,975	2,754	2,595	2,474	2,379	2,302	2,237	2,183	2,136	2,095	2,059	2,028	1,999	1,974	1,950	1,929	1,910	1,892	1,876	1,861	1,847	1,833	1,779	1,707	1,660
75	5,232	3,876	3,296	2,962	2,741	2,582	2,461	2,366	2,289	2,224	2,170	2,123	2,082	2,046	2,014	1,986	1,960	1,937	1,916	1,896	1,878	1,862	1,847	1,833	1,819	1,765	1,692	1,645
80	5,218	3,864	3,284	2,950	2,730	2,571	2,450	2,355	2,277	2,213	2,158	2,111	2,071	2,035	2,003	1,974	1,948	1,925	1,904	1,884	1,866	1,850	1,835	1,820	1,807	1,752	1,679	1,632
90	5,196	3,844	3,265	2,932	2,711	2,552	2,432	2,336	2,259	2,194	2,140	2,092	2,051	2,015	1,983	1,955	1,929	1,905	1,884	1,864	1,846	1,830	1,814	1,800	1,787	1,731	1,657	1,610
100	5,179	3,828	3,250	2,917	2,696	2,537	2,417	2,321	2,244	2,179	2,124	2,077	2,036	2,000	1,968	1,939	1,913	1,890	1,868	1,849	1,830	1,814	1,798	1,784	1,770	1,715	1,640	1,592
120	5,152	3,805	3,227	2,894	2,674	2,515	2,395	2,299	2,222	2,157	2,102	2,055	2,014	1,977	1,945	1,916	1,890	1,866	1,845	1,825	1,807	1,790	1,774	1,760	1,746	1,690	1,614	1,565