Comparação de duas médias: teste t-Student
(Amostras independentes)

Uma questão que aparece com frequência é: "O método A é melhor do que o método B?"

Em termos estatísticos, ela equivale a comparar dois conjuntos de informações, resultantes das medidas obtidas da aplicação dos dois métodos a dois conjuntos de objetos ou indivíduos.

O teste t-Student, ou simplesmente teste t, é o método mais utilizado para se avaliarem as diferenças entre as médias de dois grupos para os casos em que as variâncias populacionais são desconhecidas.

Suponha que queremos comparar duas médias de duas populações independentes e ambas com distribuição Normal. Da população 1 retiramos uma amostra aleatória de tamanho n_1 e da população 2 retiramos uma amostra aleatória de tamanho n_2.

Suposições:

- ✓ **As duas amostras são independentes;**
- ✓ As duas amostras são extraídas aleatoriamente de populações distribuídas normalmente. Caso a suposição de normalidade não seja comprovada pode-se optar por realizar testes não-paramétricos. Estes não necessitam de pressupostos sobre a distribuição dos dados.

Consideramos dois casos distintos para o teste de hipóteses para comparação de duas médias. O primeiro caso em que as variâncias das populações são desconhecidas, porém iguais (homocedasticidade) e o segundo caso em que as variâncias são desconhecidas e distintas (heterocedasticidade).

Caso 1: As duas populações parecem ter variâncias iguais (*Homocedásticas*):

Notação utilizada:

$\bar{x}_1$ = média da 1ª amostra
$\bar{x}_2$ = média da 2ª amostra
n_1 = tamanho da 1ª amostra
n_2 = tamanho da 2ª amostra
s_1^2 = variância da 1ª amostra
s_2^2 = variância da 2ª amostra

Hipóteses:

H_0: $\mu_1 = \mu_2$	versus	H_A: $\mu_1 \neq \mu_2$	→ Hipótese bilateral
H_0: $\mu_1 \leq \mu_2$	versus	H_A: $\mu_1 > \mu_2$	→ Hipótese unilateral à direita
H_0: $\mu_1 \geq \mu_2$	versus	H_A: $\mu_1 < \mu_2$	→ Hipótese unilateral à esquerda

Estatística de teste:

$$t_0 = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{s_{comb}^2}{n_1} + \frac{s_{comb}^2}{n_2}}}$$

Como a variância populacional σ^2 é desconhecida, precisará ser estimada. Tendo em vista que s_1^2 e s_2^2 são ambos estimadores não viciados dessa variância, usaremos como estimativa para σ^2 uma combinação deles, a variância combinada, que é encontrada da seguinte maneira:

$$s^2_{comb} = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{(n_1-1)+(n_2-1)}$$

Valor p:

Tipo de teste	Valor p
Unilateral direito	Área à direita da estatística de teste
Bilateral	2 x a área à direita do módulo da estatística de teste.
Unilateral esquerdo	Área à esquerda da estatística de teste

Número de graus de liberdade quando as variâncias amostrais são combinadas: $gl = n_1 + n_2 - 2$

Concluindo um teste de hipótese utilizando o valor p:

- Se valor p > α, então aceitamos H_0;
- Se valor p $\leq \alpha$, então rejeitamos H_0.

Conclusão utilizando o intervalo de confiança (somente para hipóteses bilaterais):

Intervalo de confiança: $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm \left(t_{gl;\frac{\alpha}{2}}\right) \cdot \sqrt{\frac{s^2_{comb}}{n_1} + \frac{s^2_{comb}}{n_2}}$

Por meio desse intervalo de confiança é possível obter duas respostas:

✓ Verificar se as duas médias são iguais ou diferentes:

Podemos rescrever as hipóteses estatísticas da seguinte maneira:

H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ versus H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Ou seja, se o intervalo contém 0 (zero) há indícios de que as duas médias são iguais, caso contrário, se o intervalo não contém 0 (zero) pode-se concluir com 100(1-α)% de confiança que as duas médias são diferentes.

✓ Se o intervalo de confiança indicar que as duas médias são diferentes é possível verificar qual média é maior ou menor:

- Se os limites do intervalo do confiança apresentam sinal negativo (-) pode-se dizer que a média da 2ª amostra é maior do que a média da 1ª amostra.

- Ao contrário, se os limites do intervalo apresentarem sinal positivo (+) conclui-se que a média da 1ª amostra é maior que a média da 2ª amostra.

Caso 2: As duas populações parecem ter variâncias desiguais (*Heterocedásticas*):

Notação utilizada:

$\bar{x}_1$ = média da 1ª amostra

$\bar{x}_2$ = média da 2ª amostra

n_1 = tamanho da 1ª amostra

n_2 = tamanho da 2ª amostra

s_1^2 = variância da 1ª amostra

s_2^2 = variância da 2ª amostra

Hipóteses:

H_0: $\mu_1 = \mu_2$ versus H_A: $\mu_1 \neq \mu_2$ → Hipótese bilateral
H_0: $\mu_1 \leq \mu_2$ versus H_A: $\mu_1 > \mu_2$ → Hipótese unilateral à direita
H_0: $\mu_1 \geq \mu_2$ versus H_A: $\mu_1 < \mu_2$ → Hipótese unilateral à esquerda

Estatística de teste:

$$t_0 = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Valor p:

Tipo de teste	Valor p
Unilateral direito	Área à direita da estatística de teste
Bilateral	2 x a área à direita do módulo da estatística de teste.
Unilateral esquerdo	Área à esquerda da estatística de teste

Número de graus de liberdade: ***o menor dos dois $n_1 - 1$*** e ***$n_2 - 1$***

Intervalo de confiança (para hipóteses bilaterais):

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm \left(t_{gl;\frac{\alpha}{2}}\right) \cdot \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

A conclusão do teste de hipóteses utilizando o valor p ou o intervalo de confiança deve ser feita da mesma maneira como descrito no Caso 1.

Como saber se as duas populações têm variâncias iguais (homocedásticas) ou não (heterocedásticas)?
Veja o material: "Comparação de duas variâncias: Teste bilateral"

Exemplo 1:

Digitadores são treinados em uma empresa em duas turmas distintas. Na primeira, denominada turma J, utiliza-se um método japonês de ensino, ao passo que na segunda turma, denominada turma A, utiliza-se um método alemão. Deseja-se comparar os dois métodos e para tanto, 16 alunos de cada turma foram escolhidos aleatoriamente e uma mesma tarefa foi atribuída a cada um. Ao final do experimento, o tempo gasto na realização da tarefa, para cada aluno, foi anotado. No processo, dois computadores utilizados pelos alunos selecionados da turma J e três da turma A apresentaram problemas que impediram a realização da tarefa; o tamanho da amostra foi assim reduzido para 14 e 13, respectivamente, para as turmas J e A. Os dados obtidos encontram-se resumidos a seguir:

Turma	n	Média	Desvio padrão
J	14	11,57	4,1
A	13	15,38	4,3

Considerando-se um nível de 5% de significância, verifique se há evidências suficientes para afirmar que os dois métodos são equivalentes, ou seja, o tempo médio para as duas turmas são iguais.

Precisamos verificar se existe diferença entre duas médias e, para isso, é necessário avaliar se estamos trabalhando com duas populações homocedásticas ou heterocedásticas. Dessa forma, primeiramente, executaremos o teste bilateral para duas variâncias:

Hipóteses estatísticas: Ho: $\sigma_J^2 = \sigma_A^2$ HA: $\sigma_J^2 \neq \sigma_A^2$

Estatística de teste:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{4{,}1^2}{4{,}3^2} = 0{,}9091$$

Para obter os valores críticos devemos consultar a tabela F:

$F_{n_2-1;n_1-1;\frac{\alpha}{2}} = F_{13-1;14-1;\frac{0{,}05}{2}} = 3{,}153$

$F_{n_1-1;n_2-1;\frac{\alpha}{2}} = F_{14-1;13-1;\frac{0{,}05}{2}} = 3{,}239$

Assim, encontramos:

$F_L = \dfrac{1}{F_{n_2-1;n_1-1;\frac{\alpha}{2}}} = \dfrac{1}{3{,}153} = 0{,}3172$

$F_R = F_{n_1-1;n_2-1;\frac{\alpha}{2}} = 3{,}239$

Para este teste, a regra de decisão considerando-se $\alpha=0{,}05$ é definida por:

Rejeitar H_0 se: $F < 0{,}3172$ ou se $F > 3{,}239$

Como $F = 0{,}9091$, então NÃO devemos rejeitar H_0, ou seja, pode-se concluir a um nível de 5% de significância que NÃO existe diferença na variância dos tempos das duas turmas estudadas (são homocedásticas).

A partir daí, podemos prosseguir com o teste para comparação das duas médias, considerando que as duas variâncias são iguais:

Hipóteses:

H_0: $\mu_J = \mu_A$ versus H_A: $\mu_J \neq \mu_A$ → Hipótese bilateral

Estatística de teste:

$$t_0 = \frac{(\bar{x}_J - \bar{x}_A)}{\sqrt{\frac{s_{comb}^2}{n_J} + \frac{s_{comb}^2}{n_A}}} = \frac{(11{,}57 - 15{,}38)}{\sqrt{\frac{17{,}6164}{14} + \frac{17{,}6164}{13}}} = -2{,}3568$$

Como a variância populacional σ^2 é desconhecida, foi preciso ser estimada. Tendo em vista que s_1^2 e s_2^2 são ambos estimadores não viciados dessa variância, usamos como estimativa para σ^2 uma combinação deles, a variância combinada, que foi encontrada da seguinte maneira:

$$s_{comb}^2 = \frac{(n_J - 1)s_J^2 + (n_A - 1)s_A^2}{(n_J - 1) + (n_A - 1)} = \frac{(14-1)4{,}1^2 + (13-1)4{,}3^2}{(14-1)+(13-1)} = 17{,}6164$$

Valor p:

Como estamos trabalhando com um teste bilateral, nosso valor p será obtido por: (2 x a área à direita do módulo da estatística de teste).

Na tabela t-Student o número de graus de liberdade, quando as variâncias amostrais são combinadas, é dado por gl = $n_1 + n_2 - 2 = 14 + 13 - 2 = 25$.

g.l	0,25	0,125	0,1	0,05	$\boxed{0,025}$	0,0125	0,01	0,005
1	1	2,414	3,078	6,314	12,71	25,45	31,82	63,66
2	0,817	1,604	1,8856	2,92	4,303	6,205	6,965	9,925
.								
.								
.								
24	0,685	1,179	1,3178	1,7109	2,064	2,391	2,492	2,797
g.l. = 25 → 25	0,684	1,178	1,3164	1,7081	2,06	2,385	2,485	2,787
26	0,684	1,177	1,315	1,7056	2,056	2,379	2,479	2,779

Valor mais próximo do módulo da estatística de teste (2,3568).

O valor p para o teste é: 2 x 0,0125 = 0,025. Como o valor p < α, podemos rejeitar a hipótese nula. Concluímos então que existe diferença no tempo médio de execução da tarefa entre os dois grupos estudados.

Podemos utilizar o intervalo de confiança para identificar essa diferença, já que estamos trabalhando com um teste bilateral.

Intervalo de confiança:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm \left(t_{gl;\frac{\alpha}{2}}\right) \cdot \sqrt{\frac{s_{comb}^2}{n_1} + \frac{s_{comb}^2}{n_2}} = (11{,}57 - 15{,}38) \pm (2{,}06) \cdot \sqrt{\frac{17{,}6164}{14} + \frac{17{,}6164}{13}} = [-7{,}1402\ ;\ -0{,}4798]$$

Como o intervalo NÃO contém 0 (zero) há indícios de que as duas médias são diferentes, além disso, como os limites do intervalo do confiança apresentam sinal negativo (-) pode-se dizer que o tempo médio gasto pelos alunos da turma A é maior do que os da turma J.

.

Exemplo 2:

Uma empresa avaliadora de imóveis está estudando as regiões central e oeste da cidade de São Paulo. O objetivo principal é verificar se o preço médio (em R$10.000,00), praticado para imóveis comerciais de um dado tamanho, é o mesmo nas duas áreas. Duas amostras aleatórias foram selecionadas de cada região. As medidas resumo para esse estudo encontram-se a seguir:

Região	n	Média	Desvio padrão
Central	20	40,2	0,7
Oeste	15	36,7	1,9

Considerando-se um nível de 5% de significância, o que você pode concluir?

Assim como no exemplo 1, estamos trabalhando com a comparação de duas médias em dois grupos distintos (região central e oeste). Para isso, é necessário avaliar se estamos trabalhando com duas populações homocedásticas ou heterocedásticas. Dessa forma, primeiramente, executaremos o teste bilateral para duas variâncias:

Hipóteses estatísticas: H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ H_A: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Estatística de teste: $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0{,}7^2}{1{,}9^2} = 0{,}1357$

Obtendo os valores críticos a partir da tabela F:

$F_{n_2-1;n_1-1;\frac{\alpha}{2}} = F_{15-1;20-1;\frac{0{,}05}{2}}$ = 2,647

$F_{n_1-1;n_2-1;\frac{\alpha}{2}} = F_{20-1;15-1;\frac{0{,}05}{2}}$ = 2,861

Assim, encontramos:

$F_L = \frac{1}{F_{n_2-1;n_1-1;\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{2{,}647} = 0{,}3778$

$F_R = F_{n_1-1;n_2-1;\frac{\alpha}{2}} = 2{,}861$

Para este teste, a regra de decisão considerando-se α=0,05 é definida por:

Rejeitar H_0 se: F < 0,3778 ou se F > 2,861

Como F = 0,1357, então, 0,11357 < 0,3778, devemos rejeitar H_0, ou seja, pode-se concluir a um nível de 5% de significância que existe diferença na variância dos preços dos imóveis, dependendo da região (são heterocedásticas).

A partir daí, podemos prosseguir com o teste para comparação das duas médias, considerando que as duas variâncias são diferentes:

Hipóteses:

H_0: $\mu_1 = \mu_2$ versus H_A: $\mu_1 \neq \mu_2$ → Hipótese bilateral

Estatística de teste:

$$t_0 = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{(40{,}2 - 36{,}7)}{\sqrt{\frac{0{,}7^2}{20} + \frac{1{,}9^2}{15}}} = 6{,}7969$$

Valor p:

Estamos trabalhando com um teste bilateral, nosso valor p será obtido por: (2 x a área à direita do módulo da estatística de teste).

Na tabela t-Student o número de graus de liberdade, quando as populações são heterocedásticas, é dado pelo menor entre os dois: $n_1 - 1 = 20 - 1 = 19$ e $n_2 - 1 = 15 - 1 = 14$, ou seja, g.l. será igual a 14.

g.l	0,25	0,125	0,1	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005
1	1	2,414	3,078	31,82	63,66	127,3	318,3	636,6
2	0,817	1,604	1,8856	6,965	9,925	14,09	22,33	31,6
.								
.								
.								
12	0,695	1,209	1,3562	2,681	3,055	3,428	3,93	4,318
13	0,694	1,204	1,3502	2,65	3,012	3,372	3,852	4,221
g.l. = 14 → **14**	0,692	1,2	1,345	2,625	2,977	3,326	3,787	4,14
15	0,691	1,197	1,3406	2,602	2,947	3,286	3,733	4,073

Valor mais próximo do módulo da estatística de teste (6,7969).

O valor p para o teste é: 2 x 0,0005 = 0,001. Como o valor p < α, podemos rejeitar a hipótese nula. Concluímos então que existe diferença no valor médio dos imóveis nas duas regiões estudadas.

Podemos utilizar o intervalo de confiança para identificar essa diferença, já que estamos trabalhando com um - teste bilateral.

$\alpha/2 = 0,025$

g.l	0,25	0,125	0,1	0,05	0,025	0,0125	0,01
1	1	2,414	3,078	6,314	12,71	25,45	31,82
2	0,817	1,604	1,8856	2,92	4,303	6,205	6,965
.							
.							
.							
12	0,695	1,209	1,3562	1,7823	2,179	2,56	2,681
13	0,694	1,204	1,3502	1,7709	2,16	2,533	2,65
g.l. = 14 → **14**	0,692	1,2	1,345	1,7613	2,145	2,51	2,625
15	0,691	1,197	1,3406	1,7531	2,131	2,49	2,602

Intervalo de confiança (para hipóteses bilaterais):

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm \left(t_{gl;\frac{\alpha}{2}}\right) . \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = (40{,}2 - 36{,}7) \pm (2{,}145) . \sqrt{\frac{0{,}7^2}{20} + \frac{1{,}9^2}{15}} = [2{,}3954 \quad ; \quad 4{,}6046]$$

Como o intervalo NÃO contém 0 (zero) há indícios de que as duas médias são diferentes, além disso, como os limites do intervalo do confiança apresentam sinal positivo (+) pode-se dizer que o valor médio dos imóveis comerciais na região central é maior do que na região oeste.

Exercícios:

1. Uma nova técnica de impressão 3D foi desenvolvida. Para comparar a eficiência entre a técnica tradicional e a nova técnica foi feita uma análise do tempo de secagem (em minutos). Uma amostra de 14 cubos impressos pelo método tradicional (método 1) apontou uma média de 121 minutos e um desvio padrão de 16 minutos. 10 cubos impressos pelo novo método (método 2) indicaram uma média de 112 minutos e um desvio padrão de 15 minutos. Ao nível de significância de 5%, podemos afirmar que existe diferença nos tempos de secagem das duas técnicas? Assuma que os desvios padrões populacionais são iguais.

2. Uma empresa realizou um estudo para avaliar o tempo médio de adaptação de funcionários recém formados e de funcionários que atuam no mercado há mais tempo. Foram selecionados aleatoriamente 26 recém formados, obtendo-se um tempo médio de adaptação de 2,8 anos e um desvio padrão de 0,6 anos.; 26 funcionários que atuam no mercado há mais tempo, obtendo-se um tempo médio de adaptação de 2,3 anos e um desvio padrão de 0,7 anos. Teste a hipótese de que existe diferença entre os tempos médios de adaptação, considerando um nível de 5% de significância. Assuma que os desvios padrões populacionais são iguais.

3. Deseja-se saber se 2 máquinas de empacotar café estão fornecendo o mesmo peso médio em kg. Extraem-se duas amostras, uma de cada máquina (supondo que os pesos das amostras sigam uma distribuição normal):

   Máquina Nova: 36 amostras, média = 0,81 kg, variância = 0,00020 kg^2.

   Máquina Velha: 39 amostras, média = 0,78 kg, variância = 0,00135 kg^2.

   Qual é a sua conclusão a 5% de significância? Assuma que os desvios padrões populacionais são diferentes.

4. Os dados a seguir referem-se ao conteúdo médio de material sólido em suspensão ($mg\ L^{-1}$) nas águas dos rios Verde e Crespo. O material sólido em suspensão difere nos dois rios? Utilize um nível de 5% de significância e assuma que os desvios padrões populacionais são diferentes. Comente o resultado.

Rio Verde	Rio Crespo
210	410
242	390
226	501
268	420
251	480
206	456
218	495
215	507
207	385

Gabarito

1. Hipótese bilateral
   Variância combinada = 243,3194
   Estatística de teste = 1,39
   Grau de liberdade = 22
   Valor p = 0,2 -> Como o valor p é superior ao nível de significância (α) NÃO devemos rejeitar a hipótese nula, ou seja, pode-se afirmar com 5% de significância que não há diferença nos tempos médios de secagem das duas técnicas.

2. Hipótese bilateral
   Variância combinada = 0,425
   Estatística de teste = 2,77
   Grau de liberdade = 50
   Valor p = 2x0,005 = 0,010 -> Como o valor p é inferior ao nível de significância (α) devemos rejeitar a hipótese nula, ou seja, pode-se afirmar com 5% de significância que existe diferença entre os tempos médios de adaptação.
   Intervalo de confiança =

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm \left(t_{gl;\frac{\alpha}{2}}\right).\sqrt{\frac{s^2_{comb}}{n_1} + \frac{s^2_{comb}}{n_2}} = (2{,}8 - 2{,}3) \pm (2{,}03).\sqrt{\frac{0{,}425}{26} + \frac{0{,}425}{26}} =$$

   [0,133 ; 0,867] -> Como os limites do intervalo apresentam sinal positivo (+) conclui-se que o tempo médio de adaptação dos recém formados é maior do que tempo médio de adaptação dos funcionários que atuam no mercado há mais tempo.

3. Hipótese bilateral
   Estatística de teste = 4,73
   Grau de liberdade = 35
   Valor p = 2x0,0005=0,0010 -> Como o valor p é inferior ao nível de significância (α) devemos rejeitar a hipótese nula, ou seja, pode-se afirmar com 5% de significância que há diferença nos pesos médios dos pacotes das duas máquinas.
   Intervalo de confiança:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm \left(t_{gl;\frac{\alpha}{2}}\right).\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = (0{,}81 - 0{,}78) \pm (2{,}03).\sqrt{\frac{0{,}0002}{36} + \frac{0{,}00135}{39}} =$$

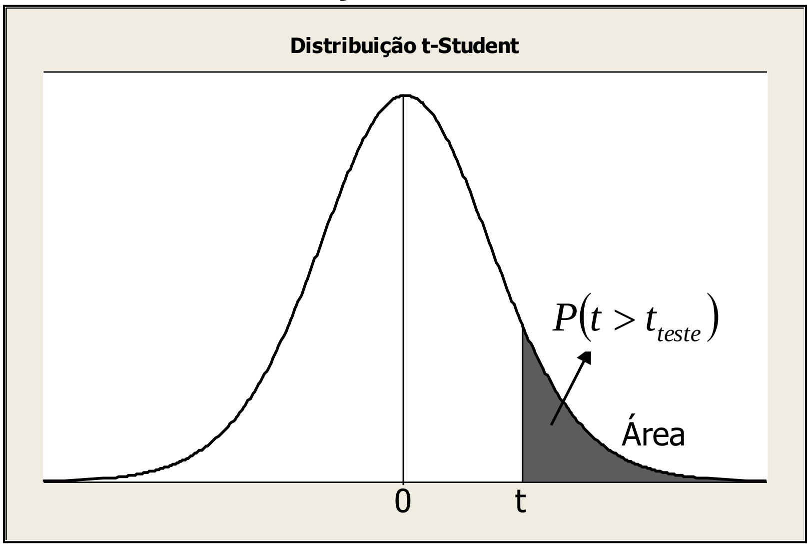
   [0,0171 ; 0,0429] Como os limites do intervalo apresentam sinal positivo (+) conclui-se que o peso médio dos pacotes de café empacotados pela máquina nova é maior do que aqueles empacotados pela máquina velha.

4. Rio Verde: n=9, *média da amostra* = 227 , s=21,9
   Rio Crespo: n=9, *média da amostra* = 449,3 , s=48,9
   Hipótese bilateral
   Estatística de teste = -12,45
   Grau de liberdade = 8
   Valor p = 2x0,0005=0,0010 Como o valor p é inferior ao nível de significância (α) devemos rejeitar a hipótese nula, ou seja, pode-se afirmar com 5% de significância que há diferença no conteúdo médio de material sólido em suspensão (mg L^{-1}) nas águas dos rios Verde e Crespo.
   Intervalo de confiança:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm \left(t_{gl;\frac{\alpha}{2}}\right).\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = (227 - 449{,}3) \pm (2{,}306).\sqrt{\frac{21{,}9^2}{9} + \frac{48{,}9^2}{9}} = [-263{,}4852; -181{,}1148]$$

   Como os limites do intervalo apresentam sinal negativo (-) conclui-se que o conteúdo médio de material sólido em suspensão (mg L-1) nas águas do rio Verde é menor do que nas águas do rio Crespo.

DISTRIBUIÇÃO t-STUDENT



g.l	0,25	0,125	0,1	0,05	0,025	0,0125	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005
1	1	2,414	3,078	6,314	12,71	25,45	31,82	63,66	127,3	318,3	636,6
2	0,817	1,604	1,8856	2,92	4,303	6,205	6,965	9,925	14,09	22,33	31,6
3	0,765	1,423	1,6377	2,3534	3,182	4,177	4,541	5,841	7,453	10,21	12,92
4	0,741	1,344	1,5332	2,1319	2,776	3,495	3,747	4,604	5,598	7,173	8,61
5	0,727	1,301	1,4759	2,0151	2,571	3,163	3,365	4,032	4,773	5,893	6,869
6	0,718	1,273	1,4398	1,9432	2,447	2,969	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959
7	0,711	1,254	1,4149	1,8946	2,365	2,841	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408
8	0,706	1,24	1,3968	1,8596	2,306	2,752	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041
9	0,703	1,23	1,383	1,8331	2,262	2,685	2,821	3,25	3,69	4,297	4,781
10	0,7	1,221	1,3722	1,8125	2,228	2,634	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587
11	0,697	1,214	1,3634	1,7959	2,201	2,593	2,718	3,106	3,497	4,025	4,437
12	0,695	1,209	1,3562	1,7823	2,179	2,56	2,681	3,055	3,428	3,93	4,318
13	0,694	1,204	1,3502	1,7709	2,16	2,533	2,65	3,012	3,372	3,852	4,221
14	0,692	1,2	1,345	1,7613	2,145	2,51	2,625	2,977	3,326	3,787	4,14
15	0,691	1,197	1,3406	1,7531	2,131	2,49	2,602	2,947	3,286	3,733	4,073
16	0,69	1,194	1,3368	1,7459	2,12	2,473	2,583	2,921	3,252	3,686	4,015
17	0,689	1,191	1,3334	1,7396	2,11	2,458	2,567	2,898	3,222	3,646	3,965
18	0,688	1,189	1,3304	1,7341	2,101	2,445	2,552	2,878	3,197	3,611	3,922
19	0,688	1,187	1,3277	1,7291	2,093	2,433	2,539	2,861	3,174	3,579	3,883
20	0,687	1,185	1,3253	1,7247	2,086	2,423	2,528	2,845	3,153	3,552	3,85
21	0,686	1,183	1,3232	1,7208	2,08	2,414	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819
22	0,686	1,182	1,3212	1,7172	2,074	2,405	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792
23	0,685	1,18	1,3195	1,7139	2,069	2,398	2,5	2,807	3,104	3,485	3,768
24	0,685	1,179	1,3178	1,7109	2,064	2,391	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745
25	0,684	1,178	1,3164	1,7081	2,06	2,385	2,485	2,787	3,078	3,45	3,725
26	0,684	1,177	1,315	1,7056	2,056	2,379	2,479	2,779	3,067	3,435	3,707
27	0,684	1,176	1,3137	1,7033	2,052	2,373	2,473	2,771	3,057	3,421	3,69
28	0,683	1,175	1,3125	1,7011	2,048	2,368	2,467	2,763	3,047	3,408	3,674
29	0,683	1,174	1,3114	1,6991	2,045	2,364	2,462	2,756	3,038	3,396	3,659
30	0,683	1,173	1,3104	1,6973	2,042	2,36	2,457	2,75	3,03	3,385	3,646
31	0,682	1,172	1,3095	1,6955	2,04	2,356	2,453	2,744	3,022	3,375	3,633
32	0,682	1,172	1,3086	1,6939	2,037	2,352	2,449	2,738	3,015	3,365	3,622
33	0,682	1,171	1,3077	1,6924	2,035	2,348	2,445	2,733	3,008	3,356	3,611
34	0,682	1,17	1,307	1,6909	2,032	2,345	2,441	2,728	3,002	3,348	3,601
35	0,682	1,17	1,3062	1,6896	2,03	2,342	2,438	2,724	2,996	3,34	3,591