Data Science Academy

www.datascienceacademy.com.br

Matemática Para Machine Learning

Limite Exponencial Fundamental e o Número de Euler

Consideremos a função abaixo.

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

À medida que x cresce, tendendo a infinito, a fração tende a zero, porém tal fração somada a 1 e o resultado elevado a x não tem um valor de convergência evidente.

O matemático suíço Leonardo Euler (1707– 1783) parece que foi o primeiro a perceber a importância dessa função. Além disso, ele demonstrou que o limite daquela função para x tendendo a infinito era um número irracional compreendido entre 2 e 3, simbolizado por **e** (número de Euler). Euler também foi o criador da Teoria dos Grafos, estudada no curso Análise em Grafos Para Big Data aqui na DSA. A Teoria dos Grafos é amplamente usada em análise de redes sociais.

Usando uma calculadora, é possível ter uma ideia da convergência da função acima; a tabela abaixo fornece alguns valores de f(x):

x	$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
1	2
2	2,250000
5	2,488320
10	2,593742
20	2,653298
50	2,691588
100	2,704814
200	2,711517
500	2,715569
1.000	2,716924

Pode-se provar ainda que o limite da função também dá o número e. Uma forma equivalente de escrever o número e é por meio do limite. Isto é:

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Vejamos um exemplo de como o número e é aplicado na prática. Consideremos um capital de $ 1.000,00 aplicado a juros compostos à taxa de 12% ao ano pelo prazo de 2 anos. Se os juros forem capitalizados anualmente, o montante será:

$$M = 1.000(1 + 0{,}12)^2 = 1.254{,}40$$

Se os juros forem capitalizados semestralmente a uma taxa semestral proporcional a 12% ao ano, a taxa semestral será de 6% ao semestre, e o montante será:

$$M = 1.000(1 + 0{,}06)^4 = 1.262{,}48$$

Se os juros forem capitalizados mensalmente a uma taxa mensal proporcional a 12% ao ano, a taxa mensal será de 1% ao mês, e o montante será:

$$M = 1.000(1 + 0{,}01)^{24} = 1.269{,}73$$

Se os juros forem capitalizados diariamente a uma taxa diária proporcional a 12% ao ano, a taxa diária (considerando um ano de 360 dias) será de 12%/360 ao dia, e o montante será:

$$M = 1.000\left(1 + \frac{0{,}12}{360}\right)^{720} = 1.271{,}20$$

Poderíamos pensar em capitalização por hora, por minuto, por segundo, e assim por diante. Cada vez que diminui o prazo de capitalização, o número de capitalizações (k) em um ano aumenta, de modo que a taxa proporcional a 12% ao ano nesse período de capitalização é igual a 12%/k e o prazo de aplicação de 2 anos expresso de acordo com o prazo de capitalização vale 2k. Consequentemente, o montante é dado por:

$$M = 1.000\left(1 + \frac{0{,}12}{k}\right)^{2k}$$

Dizemos que o capital é capitalizado continuamente, quando o montante M é dado por:

$$M = \lim_{k \to \infty} 1.000\left(1 + \frac{0{,}12}{k}\right)^{2k}$$

Para calcularmos tal limite, podemos chamar $\frac{0{,}12}{k}$ de $\frac{1}{x}$ e, consequentemente, x será igual a k/0,12 (e com isso temos a função do início desta aula). Quando k tende a infinito, x também tende, de modo que o limite acima pode ser expresso por:

$$M = \lim_{x \to \infty} 1.000\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2 \cdot (0{,}12) \cdot x} = 1.000\left[\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2 \cdot (0{,}12)} = 1.000 \cdot e^{2 \cdot (0{,}12)} =$$

= 1.271,25,

pois a expressão entre colchetes é o **limite exponencial fundamental**. De modo geral, se um capital C é capitalizado continuamente a uma taxa proporcional a uma taxa i anual, pelo prazo de n anos, o montante é dado pela fórmula abaixo com o número de Euler:

$$M = C \cdot e^{i \cdot n}$$

Tudo se resume a Matemática!

Referências:

Elements Of The Differential And Integral Calculus
por J. M. Taylor

Número de Euler
https://www.mathsisfun.com/numbers/e-eulers-number.html