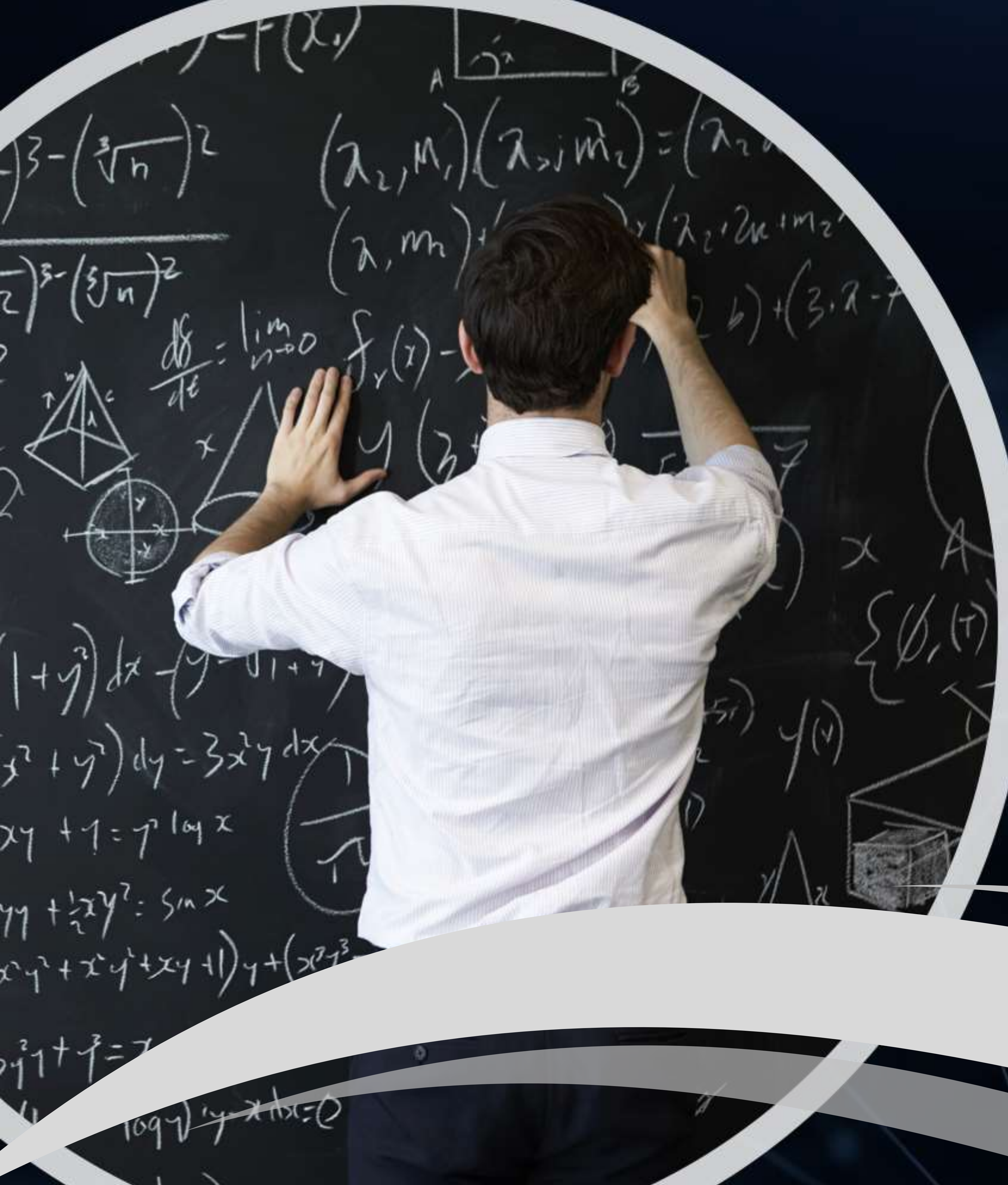


Matemática para Machine Learning

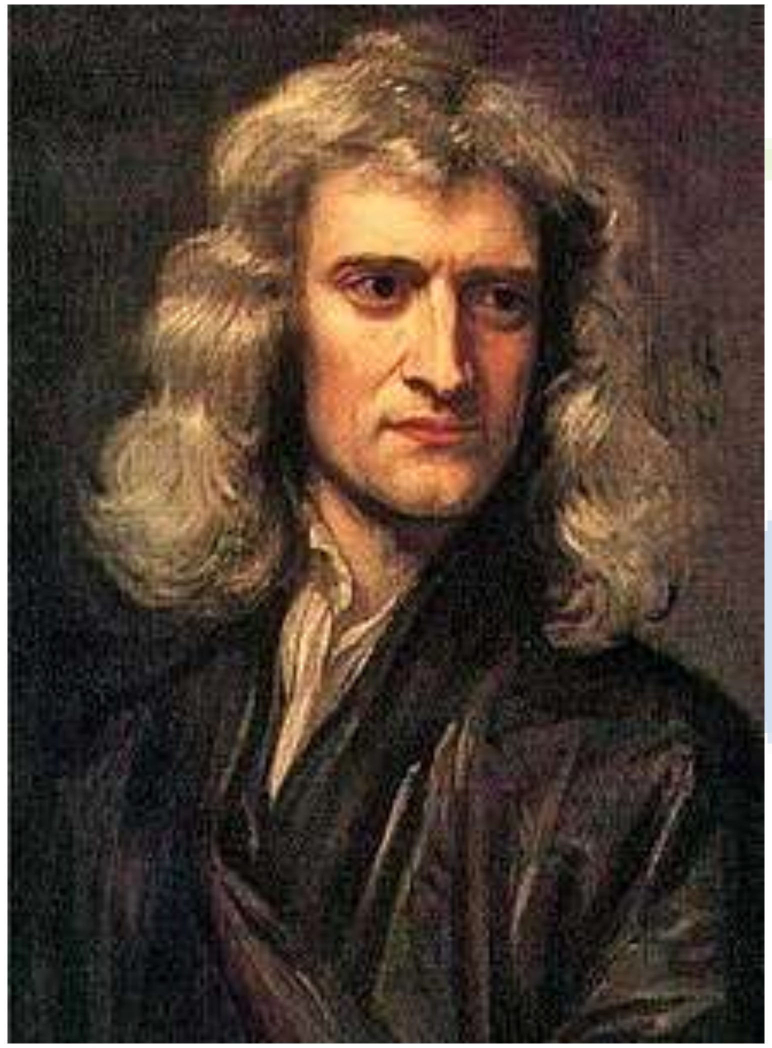
A sua base começa aqui!

Matemática para Machine Learning

Cálculo - Derivadas e Integrais

Data Science Academy

Cálculo - Derivadas e Integrais



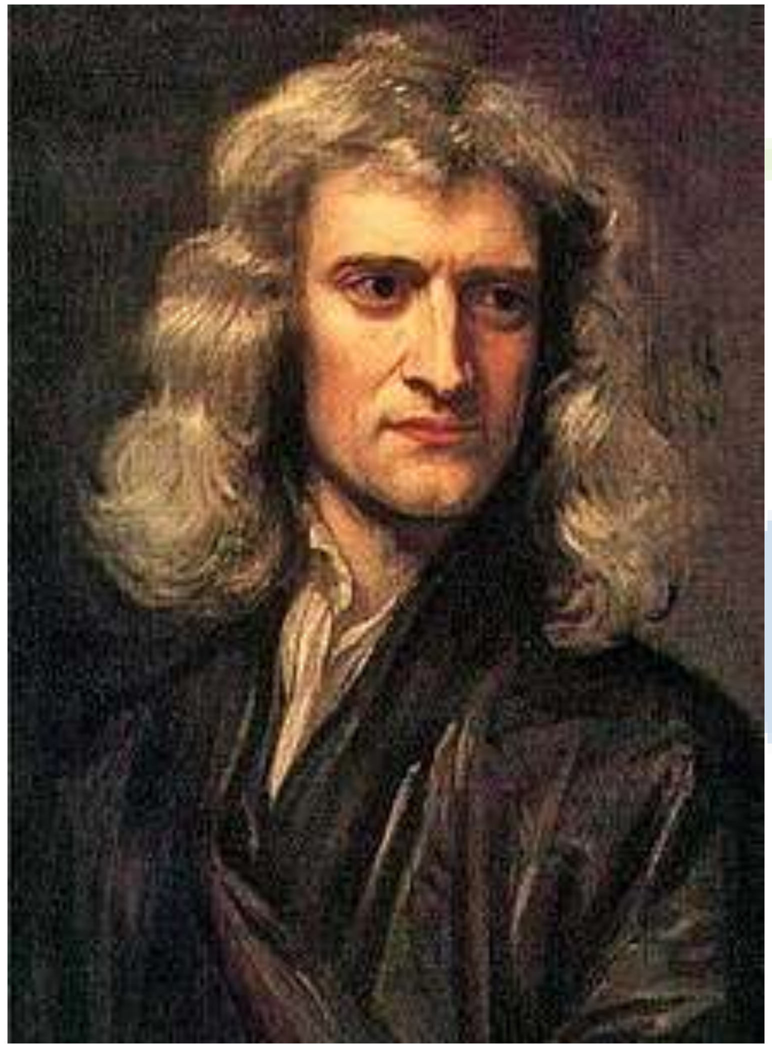
Isaac Newton (1642-1727)

Gottfried Leibniz (1646-1716)

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Cálculo - Derivadas e Integrais

Cálculo - Derivadas e Integrais



Isaac Newton (1642-1727)

Gottfried Leibniz (1646-1716)

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

O Cálculo Diferencial é o estudo da derivada e suas muitas aplicações.

Cálculo - Derivadas e Integrais

O que é a derivada de uma função?

Cálculo - Derivadas e Integrais

O que é a derivada de uma função?

Essa pergunta tem três respostas igualmente importantes: uma derivada é uma taxa de variação, é a inclinação de uma reta tangente e, mais formalmente, é o limite de uma razão incremental, como veremos logo.

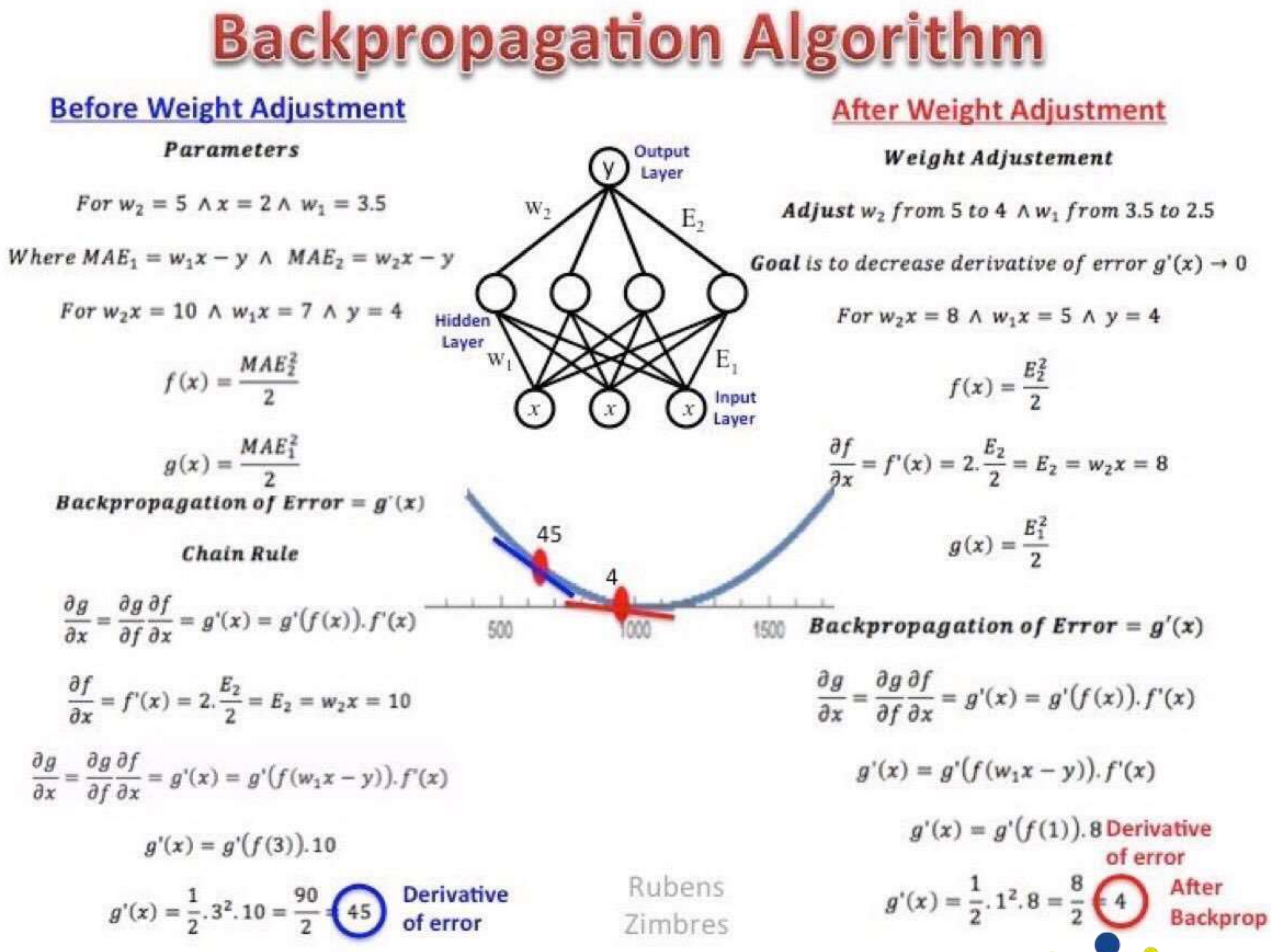
Cálculo - Derivadas e Integrais

No cálculo, a integral de uma função foi criada originalmente para determinar a área sob uma curva no plano cartesiano e também surge naturalmente em dezenas de problemas da física, como por exemplo na determinação da posição em todos os instantes de um objeto, se for conhecida a sua velocidade instantânea em todos os instantes.

Diferentemente da noção associada de derivação, existem várias definições para a integração, todas elas visando a resolver alguns problemas conceituais relacionados a limites, continuidade e existência de certos processos. Estas definições diferem porque existem funções que podem ser integradas segundo alguma definição, mas não podem segundo outra.

O processo de se calcular a integral de uma função é chamado de integração. A integral indefinida também é conhecida como antiderivada.

Cálculo - Derivadas e Integrais



Matemática para Machine Learning

O Conceito de Derivada

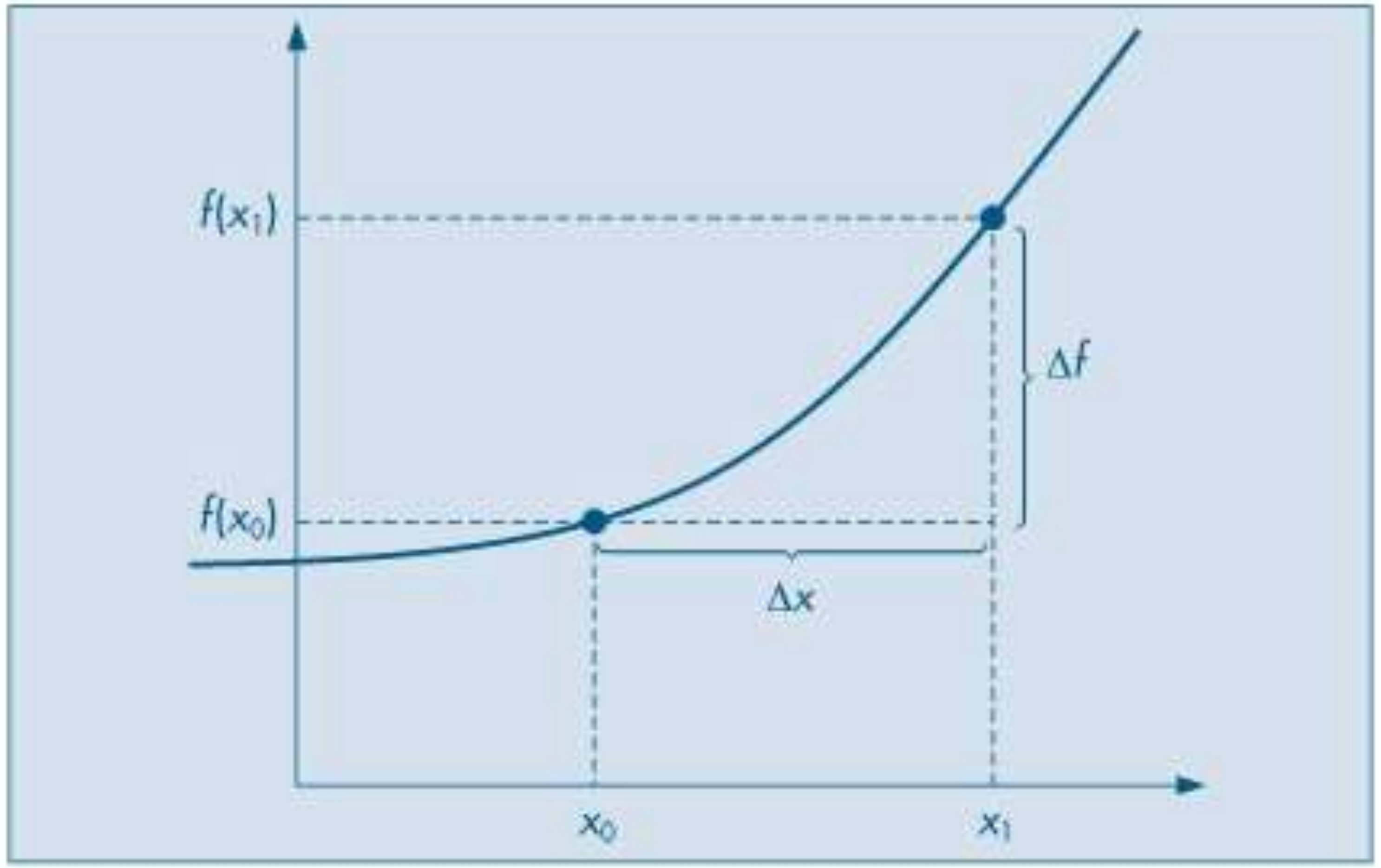
O Conceito de Derivada

Consideremos uma função f(x) e sejam x0 e x1 dois pontos de seu domínio.

Sejam f(x0) e f(x1) as correspondentes imagens.

Chamamos de **taxa média de variação** de f para x, variando de x0 até x1, o quociente:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$



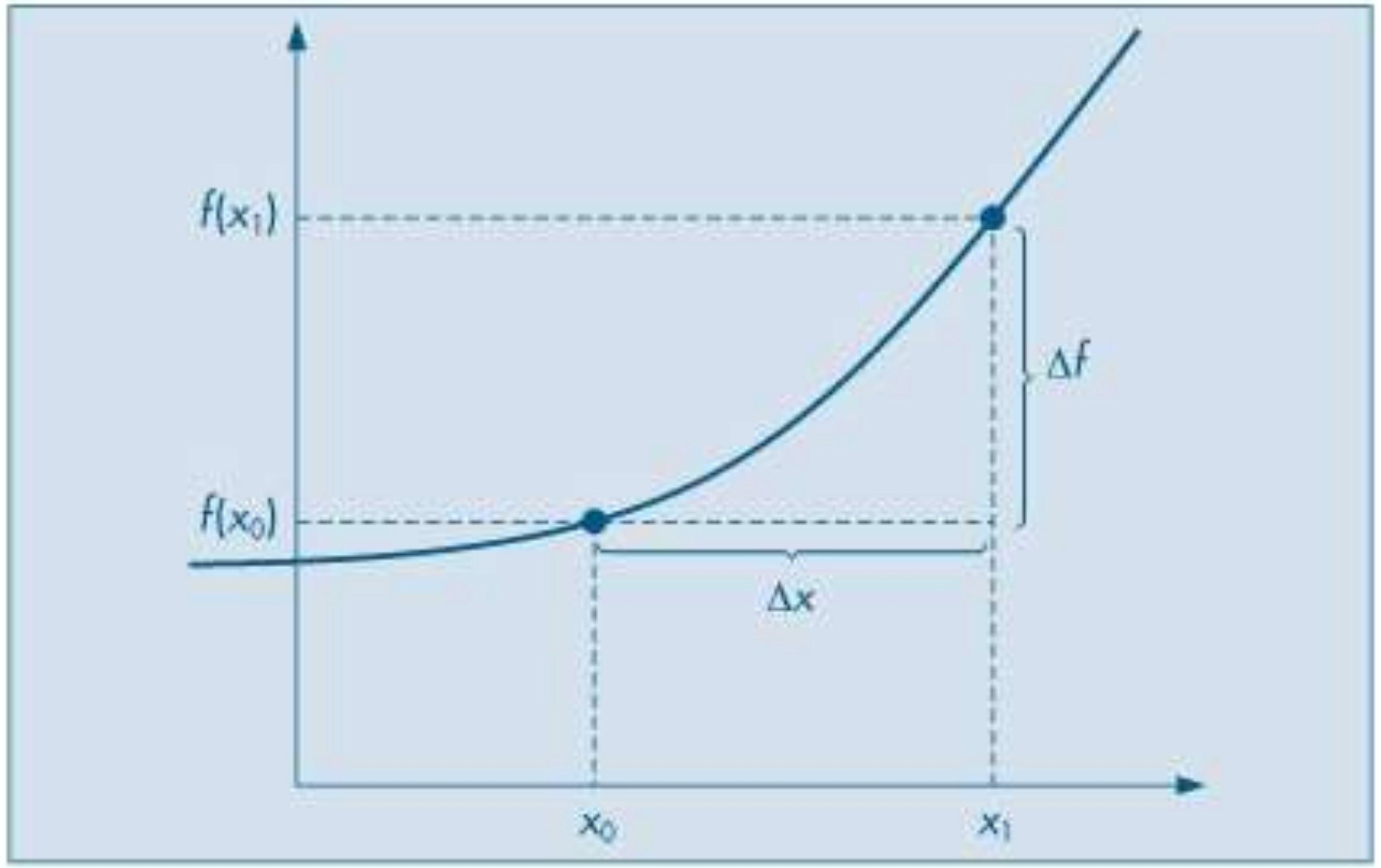
O Conceito de Derivada

Tal taxa mede o ritmo de variação da imagem em relação à variação de x.

Observemos ainda que a taxa média de variação depende do ponto de partida x0 e da variação de x, dada por x1 – x0.

Usando o símbolo Δ para indicar uma variação, podemos indicar a taxa média de variação de f pela relação:

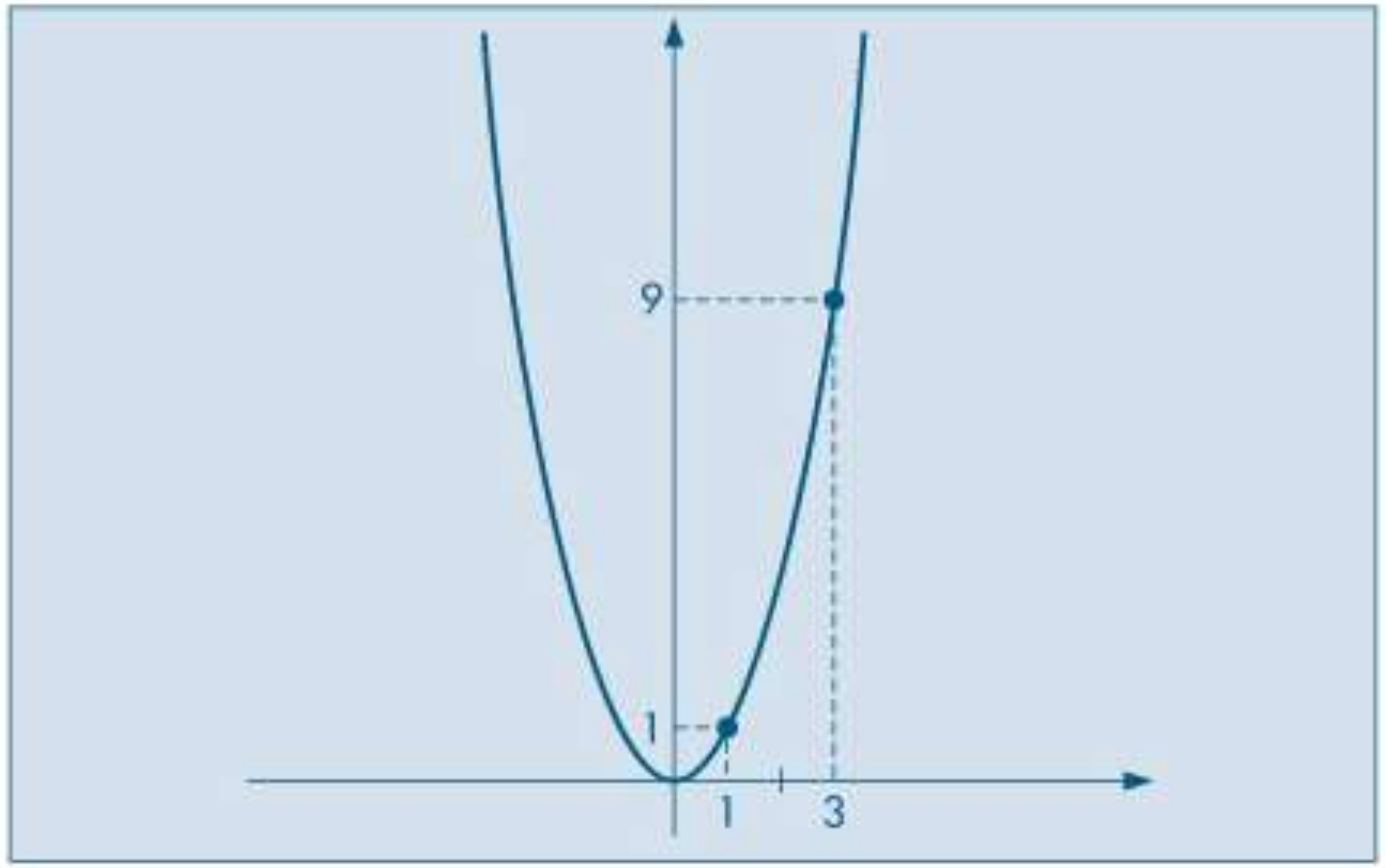
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$



O Conceito de Derivada

Sejam a função $f(x) = x^2$, o ponto inicial de abscissa x0 = 1 e a variação Δx = 2 (isto é, x varia de 1 a 3). A taxa média de variação de f para esses valores é:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{3^2-1^2}{2} = 4$$



Isso significa que, se x variar 2 unidades (a partir de x0 = 1), a variação de f será 4 vezes maior, pois Δf = 8, enquanto Δx = 2.

O Conceito de Derivada

Suponhamos que um objeto seja abandonado a 2.000 m de altura e que a $f(t) = 2.000 - 10t^2$ indique a altura do objeto em relação ao solo, t segundos após ele ser abandonado.

Temos:

- $f(0) = 2.000$ e $f(5) = 1.750$. Logo, nos 5 primeiros segundos, o objeto caiu 250 m, pois $\Delta f1 = 2.000 - 1.750 = -250$.

- Já nos 5 segundos seguintes, quando t varia de 5 a 10, o objeto caiu 750 m, pois $\Delta f2 = f(5) - f(10) = 1.750 - 1.000 = -750$.

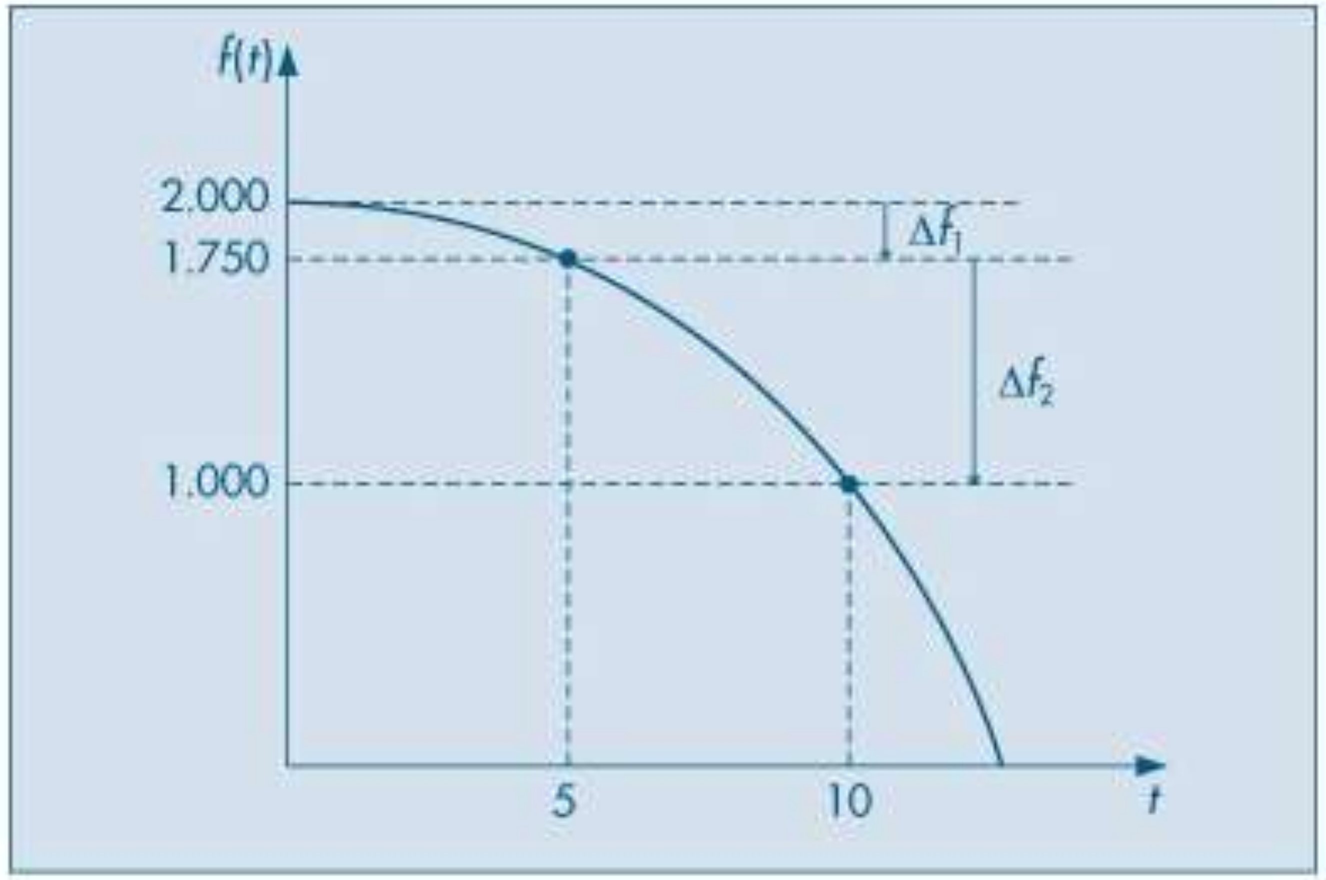
Isso nos mostra que, para uma mesma variação de t (5 segundos), a variação de altura é diferente. A taxa média de variação da função representa a velocidade média do objeto em cada intervalo de tempo considerado.

O Conceito de Derivada

No 1o intervalo, a velocidade média é $\frac{\Delta f_1}{5} = \frac{-250}{5} = -50$ m/s

No 2o intervalo, a velocidade média é $\frac{\Delta f_2}{5} = \frac{-750}{5} = -150$ m/s

O gráfico ao lado ilustra as variações Δf1 e Δf2.



O Conceito de Derivada

Podemos ainda calcular velocidades médias em intervalos de tempo de amplitudes diferentes. Por exemplo, a velocidade média para t variando de 5 a 8 é:

$$\frac{\Delta f_3}{\Delta t} = \frac{f(8) - f(5)}{8 - 5} = \frac{1.360 - 1.750}{3} = -130 \text{ m/s}$$

Muitas vezes estamos interessados na velocidade de um objeto num determinado instante (velocidade instantânea). Assim, no exemplo considerado, calculemos a velocidade instantânea para t = 5 segundos. Para isso, consideremos a velocidade média (taxa média de variação) para amplitudes de variação do tempo cada vez menores. Assim, para o intervalo [5; 5 + Δt], teremos:

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(5 + \Delta t) - f(5)}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{[2.000 - 10(5 + \Delta t)^2] - [2.000 - 10 \cdot (5)^2]}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{-100\Delta t - 10(\Delta t)^2}{\Delta t} = -100 - 10\Delta t$$

O Conceito de Derivada

Verificamos assim que a velocidade média está se aproximando de 100 m/s. A velocidade instantânea é, pois, o limite para o qual tende a velocidade média quando o intervalo de tempo tende a 0. Isto é, a velocidade instantânea no ponto t = 5 é dada por:

$$\lim_{\Delta f \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta f \to 0} (-100 - 10\Delta t) = -100$$

Esse limite da taxa média de variação quando Δt tende a zero é chamado de **derivada da função** f(t) no ponto t = 5.

Matemática para Machine Learning

Derivada de Uma Função Em Um Ponto

Derivada de Uma Função Em Um Ponto

Seja f(x) uma função e x0 um ponto de seu domínio, chamamos de derivada de f no ponto x0, se existir e for finito, o limite dado por:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Indica-se a derivada de f(x) no ponto x0 por f′(x0) ou ainda:

$$\frac{df}{dx}(x_0) \qquad \frac{dy}{dx}(x_0)$$

Derivada de Uma Função Em Um Ponto

Exercício 1: Qual a derivada de $f(x) = x^2$ no ponto x0 = 3?

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3 + \Delta x)^2 - 3^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6 + \Delta x) = 6$$

Isso significa que um pequeno acréscimo Δx dado a x, a partir de x0 = 3, acarretará um correspondente acréscimo Δf que é aproximadamente 6 vezes maior que o acréscimo Δx.

Derivada de Uma Função Em Um Ponto

Exercício 2: Qual a derivada de $f(x) = x^2$ no ponto x0 = –2?

$$f'(-2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-2+\Delta x) - f(-2)}{\Delta x}$$

$$f'(-2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(-2+\Delta x)^2 - (-2)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-4 + \Delta x) = -4$$

Isso significa que um pequeno acréscimo Δx dado a x, a partir de x0 = –2, acarretará um correspondente decréscimo Δf que é aproximadamente 4 vezes maior que o acréscimo Δx, em valor absoluto.

Derivada de Uma Função Em Um Ponto

Exercício 3: Qual a derivada da função f(x) = |x| no ponto x0 = 0?

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

Se Δx tende a 0 pela direita, então Δx > 0 e |Δx| = Δx e, consequentemente, o limite vale 1. Se Δx tende a 0 pela esquerda, então Δx < 0 e |Δx| = −Δx e, consequentemente, o limite vale −1. Como os limites laterais são diferentes, concluímos que não existe o limite para Δx tendendo a zero. **Assim, não existe a derivada de f(x) no ponto x0 = 0.**

Matemática para Machine Learning

Função Derivada

Função Derivada

Dada uma função f(x), podemos pensar em calcular a derivada de f(x) num ponto genérico x, em vez de calcular num ponto particular x0.

A essa derivada, calculada num ponto genérico x, chamamos função derivada de f(x).

O domínio dessa função é o conjunto dos valores de x para os quais existe a derivada de f(x). A vantagem em calcular a função derivada é que com ela poderemos calcular a derivada de f(x) em qualquer ponto x0, bastando para isso substituir, na função derivada, x por x0.

Função Derivada

Exercício: Qual a função derivada d $f(x) = x^2$2. ?

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Assim, por exemplo, se quisermos a derivada no ponto x0 = 5, basta calcular f′(5), que é igual a 10.

Matemática para Machine Learning

Derivada das Principais Funções Elementares

Data Science Academy

Derivada das Principais Funções Elementares

Vimos no item anterior que a função derivada de $f(x) = x^2$ era $f'(x) = 2x$.

Se conseguirmos achar a função derivada das principais funções elementares e se, além disso, soubermos achar as funções derivadas de somas, diferenças, produtos e quocientes dessas funções elementares, poderemos achar as derivadas de muitas funções sem termos que recorrer à definição (que muitas vezes pode dar muito trabalho).

Vejamos então como isso pode ser realizado.

Derivada das Principais Funções Elementares

Derivada da Função Constante

Se $f(x) = c$ (função constante), então $f'(x) = 0$, para todo x.

Derivada das Principais Funções Elementares

Derivada da Função Potência

Se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Derivada das Principais Funções Elementares

Derivada da Função Logarítmica

Se $f(x) = \ln x$, então, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ (para $x > 0$).

Derivada das Principais Funções Elementares

Derivada da Função Seno e da Função Coseno

Se $f(x) = \text{sen}\, x$, então $f'(x) = \cos x$ para todo x real

Se $f(x) = \cos x$, então $f'(x) = \text{sen}\, x$ para todo x

Derivada das Principais Funções Elementares

Propriedades de Operações Para Encontrar Derivadas de Somas, Diferenças, Produtos e Quocientes de Funções Elementares

(P1) Se $f(x) = k \cdot g(x)$, então $f'(x) = k \cdot g'(x)$

(P2) Se $f(x) = u(x) + v(x)$, então $f'(x) = u'(x) + v'(x)$

(P3) Se $f(x) = u(x) - v(x)$, então $f'(x) = u'(x) - v'(x)$

(P4) Se $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, então $f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)$

(P5) Se $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, então $f'(x) = \frac{v(x) \cdot u'(x) - v'(x) \cdot u(x)}{[v(x)]^2}$

Matemática para Machine Learning

Função Composta - Regra da Cadeia (Chain Rule)

Data Science Academy

Função Composta - Regra da Cadeia (Chain Rule)

Consideremos a função $f(x) = (x^2 - 1)^3$.

Poderíamos achar a derivada de f(x), desenvolvendo a expressão cubo de uma diferença. Todavia, poderíamos fazer $u = x^2 - 1$ e nossa função ficaria sob a forma u^3. Assim, para calcularmos uma imagem dessa função, procedemos em duas etapas:

- Para um dado valor de x, uma primeira função calcula a imagem $u = x^2 - 1$.
- Para o valor de u assim encontrado, uma segunda função calcula a imagem u^3. Dizemos que a função f(x) é uma composição dessas duas funções. Para o cálculo da derivada de f(x), podemos usar o seguinte raciocínio intuitivo:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta v}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Função Composta - Regra da Cadeia (Chain Rule)

Sob condições bastante gerais, quando Δx tende a zero, o mesmo ocorre com Δu, de forma que:

$$f'(x) = v'(u) \cdot u'(x)$$

isto é,

$f'(x)$ = (derivada de v em relação a u)·(derivada de u em relação a x)

Essa fórmula é conhecida como regra da cadeia.

Matemática para Machine Learning

Derivadas Sucessivas

Data Science Academy

Derivadas Sucessivas

Seja $f'(x)$ a derivada de $f(x)$. Se calcularmos a função derivada de $f'(x)$, nos pontos em que ela existe, chamaremos de derivada segunda de $f(x)$ essa função e a indicamos por $f''(x)$.

De modo análogo, podemos definir derivada terceira, quarta, etc. A derivada de ordem n de $f(x)$ será representada por:

$$f^{(n)}(x),$$

se n for grande, evitando o uso de muitas “linhas”.

Derivadas Sucessivas

Se $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 6x - 4$, teremos:

Derivadas Sucessivas

Se $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 6x - 4$, teremos:

$$f'(x) = 12x^2 - 4x + 6$$
$$f''(x) = 24x - 4$$
$$f'''(x) = 24$$
$$f^{(4)}(x) = 0 \text{ etc.}$$

Matemática para Machine Learning

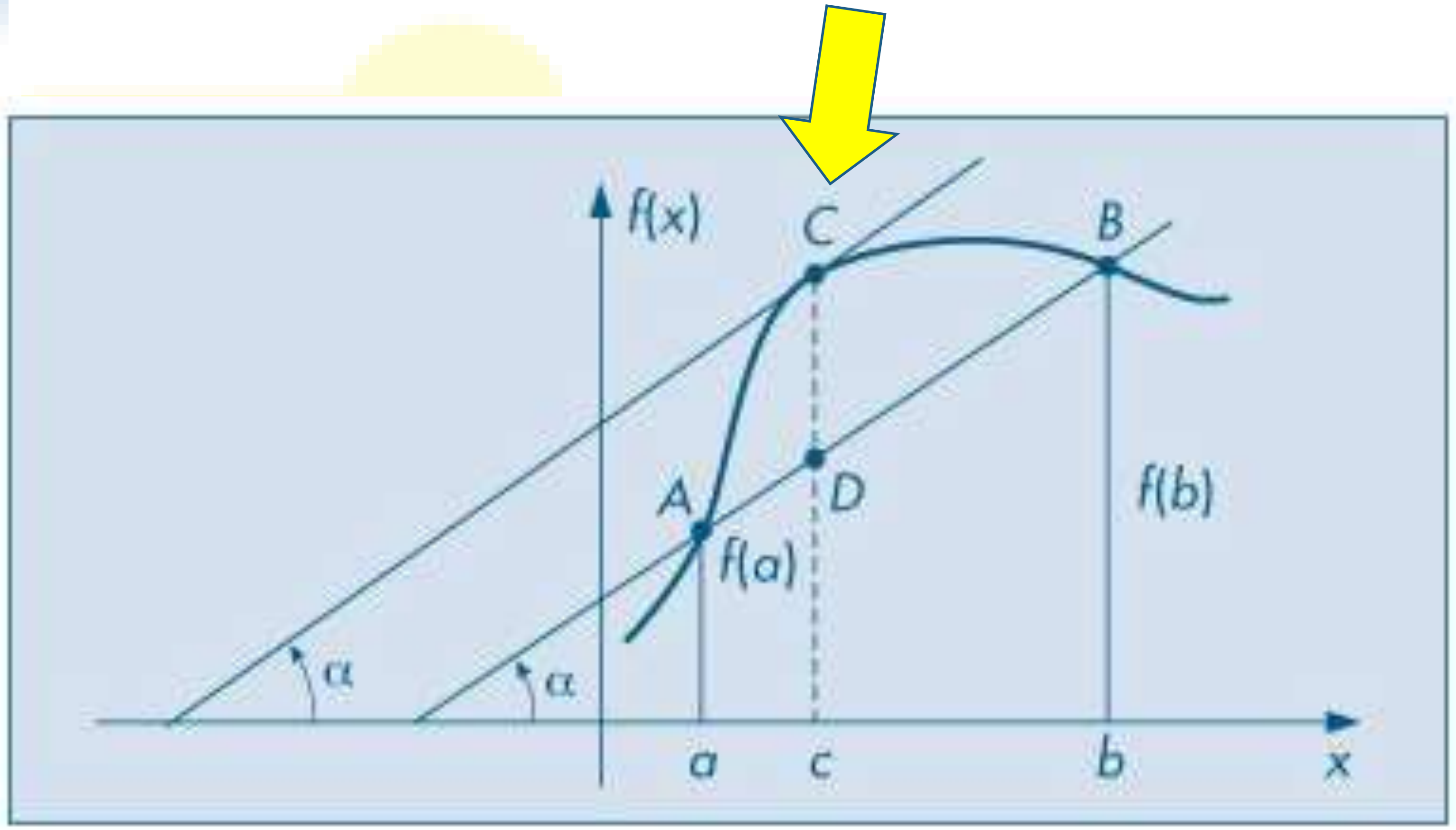
Crescimento e Decrescimento de Funções

Data Science Academy

Crescimento e Decrescimento de Funções

Teorema do valor médio — Suponha que $f(x)$ seja uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo $]a, b[$. Então, existe um ponto c pertencente ao intervalo $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

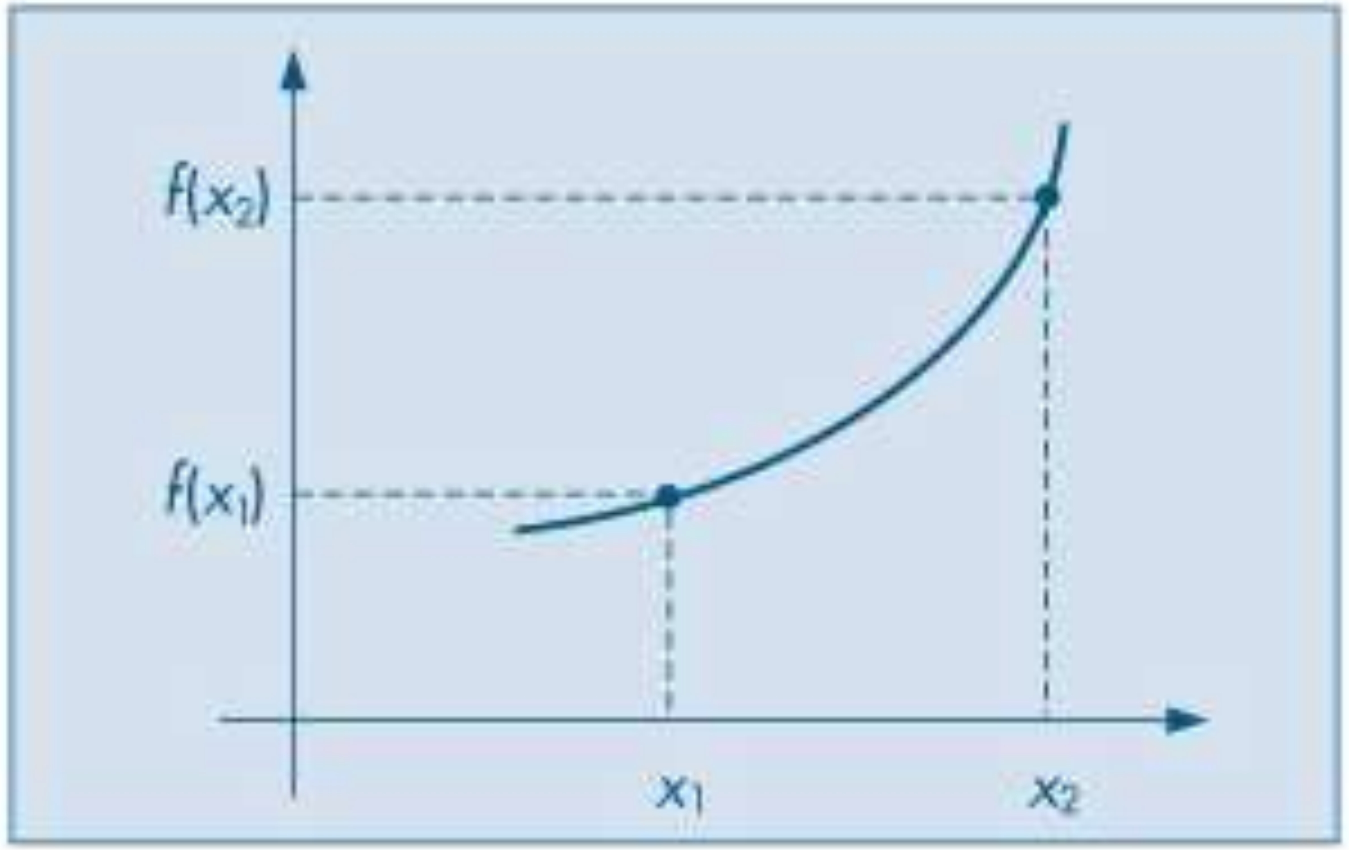
Teorema 1



Crescimento e Decrescimento de Funções

Se, para todo $x \in \,]a, b[$ tivermos $f'(x) > 0$, então $f(x)$ é crescente em todo intervalo $]a, b[$.

Teorema 2



$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

$f(x_2) - f(x_1) > 0$ e, portanto, $f(x_2) > f(x_1)$

Crescimento e Decrescimento de Funções

Se para todo $x \in\ ]a, b[$ tivermos $f'(x) < 0$, então $f(x)$ será decrescente no intervalo $]a, b[$.

Teorema 3

A demonstração é análoga à do Teorema 2. É fácil perceber, então, que os Teoremas 2 e 3 nos fornecem um instrumento para obter os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função, bem como para encontrar seus pontos de máximo e de mínimo, caso existam.

Matemática para Machine Learning

Conceito de Integral

Data Science Academy

Conceito de Integral

Cálculo Diferencial (Derivadas)

Cálculo Integral (Integrais)

Conceito de Integral

Podemos chamar de derivada a taxa de variação de uma função.

Conceito de Integral

Podemos chamar de derivada a taxa de variação de uma função.

Como o próprio nome dela já diz, a derivada representa de onde uma função veio, de onde ela deriva, ou seja, o que deu origem a ela.

Conceito de Integral

A derivada em um ponto de uma função y = f(x) está representada na variação instantânea de y com relação a x neste ponto em questão.

Conceito de Integral

A derivada em um ponto de uma função y = f(x) está representada na variação instantânea de y com relação a x neste ponto em questão.

Um exemplo clássico também pode ser encontrado na física, onde uma função velocidade pode representar uma derivada (a taxa de variação) da função espaço.

Conceito de Integral

Uma integral é o "oposto" de uma derivada.

Conceito de Integral

Dentro do conceito de cálculo, a integral foi criada para delimitar a área localizada sob uma curva em um plano cartesiano.

Conceito de Integral

Dentro do conceito de cálculo, a integral foi criada para delimitar a área localizada sob uma curva em um plano cartesiano.

O processo de cálculo da integrada é denominado integração. A integrada indefinida é chamada de antiderivada.

Matemática para Machine Learning

Integral Indefinida

Integral Indefinida

Da mesma forma que temos a adição e a subtração, a multiplicação e a divisão, a operação inversa da derivação é a **antiderivação** ou **integração indefinida.**

Integral Indefinida

Ao estudar derivadas, resolvemos o seguinte problema: dada a função f(x), determinamos sua derivada f′(x) = g(x).

O problema que estudaremos agora é o inverso: dada a função g(x), obter uma função f(x) tal que f′(x) = g(x). Dizemos que f(x) é uma primitiva de g(x).

Integral Indefinida

Por exemplo, dada a função g(x) = 2x, devemos achar uma função f(x) tal que f′(x) = 2x.

Integral Indefinida

Se f1(x) for outra primitiva de g(x), então f1′(x) = g(x), logo:

$f'(x) - f1'(x) = 0$

Daqui, segue-se que $[f(x) - f1(x)]' = 0$, ou seja, $f(x) - f1(x) = c$, em que c é uma **constante**.

Em resumo, se f(x) e f1(x) forem duas primitivas de g(x), então elas diferem por uma constante, isto é, $f1(x) = f(x) + c$.

Chamamos de **integral indefinida** de g(x) e indicamos pelo símbolo ∫ g(x) dx uma primitiva qualquer de g(x) adicionada a uma constante arbitrária c. Assim:

$$\int g(x)dx = f(x) + c$$

Integral Indefinida

Usando o que vimos até aqui sobre derivadas, podemos obter as integrais indefinidas das principais funções, que decorrem imediatamente das respectivas regras de derivação.

Integral Indefinida

Integral Indefinida

1. Se $f(x) = \frac{x^5}{5}$, então $f'(x) = \frac{5x^4}{5} = x^4 = g(x)$ é a derivada de f(x). Uma das antiderivadas de $f'(x) = g(x) = x^4$ é $\frac{x^5}{5}$.

2. Se $f(x) = x^3$, então $f'(x) = 3x^2 = g(x)$. Uma das antiderivadas ou integrais indefinidas de $g(x) = 3x^2$ é $f(x) = x^3$.

3. Se $f(x) = x^3 + 4$, então $f'(x) = 3x^2 = g(x)$. Uma das antiderivadas ou integrais indefinidas de $g(x) = 3x^2$ é $f(x) = x^3 + 4$.

Integral Indefinida

Propriedades das integrais indefinidas

São imediatas as seguintes propriedades:

1ª. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$, ou seja, a integral da soma ou diferença é a soma ou diferença das integrais.

2ª. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$, ou seja, a constante multiplicativa pode ser retirada do integrando.

3ª. $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)$, ou seja, a derivada da integral de uma função é a própria função.

Matemática para Machine Learning

Como as Integrais São Usadas em Machine Learning?

Data Science Academy

Como as Integrais São Usadas em Machine Learning?

Como as Integrais São Usadas em Machine Learning?

Maximum Likelihood Estimation em Inferência Bayesiana

Deep Q-Learning

(Deep Learning II)

Expectation Maximization

(Machine Learning)

Teoria da Probabilidade

(Análise Estatística I e II)

Matemática para Machine Learning

Integral Definida

Data Science Academy

Integral Definida

Seja f(x) uma função e g(x) uma de suas primitivas. Portanto,

$$\int f(x)\,dx = g(x) + c$$

Definimos a integral definida de f(x) entre os limites a e b como a diferença

g(b) – g(a) e indicamos simbolicamente:

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

Integral Definida

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

onde:

a é o limite inferior de integração;

b é o limite superior de integração;

f(x) é o integrando.

Integral Definida

A diferença g(b) – g(a) também costuma ser indicada pelo símbolo:

$$[g(x)]_a^b$$

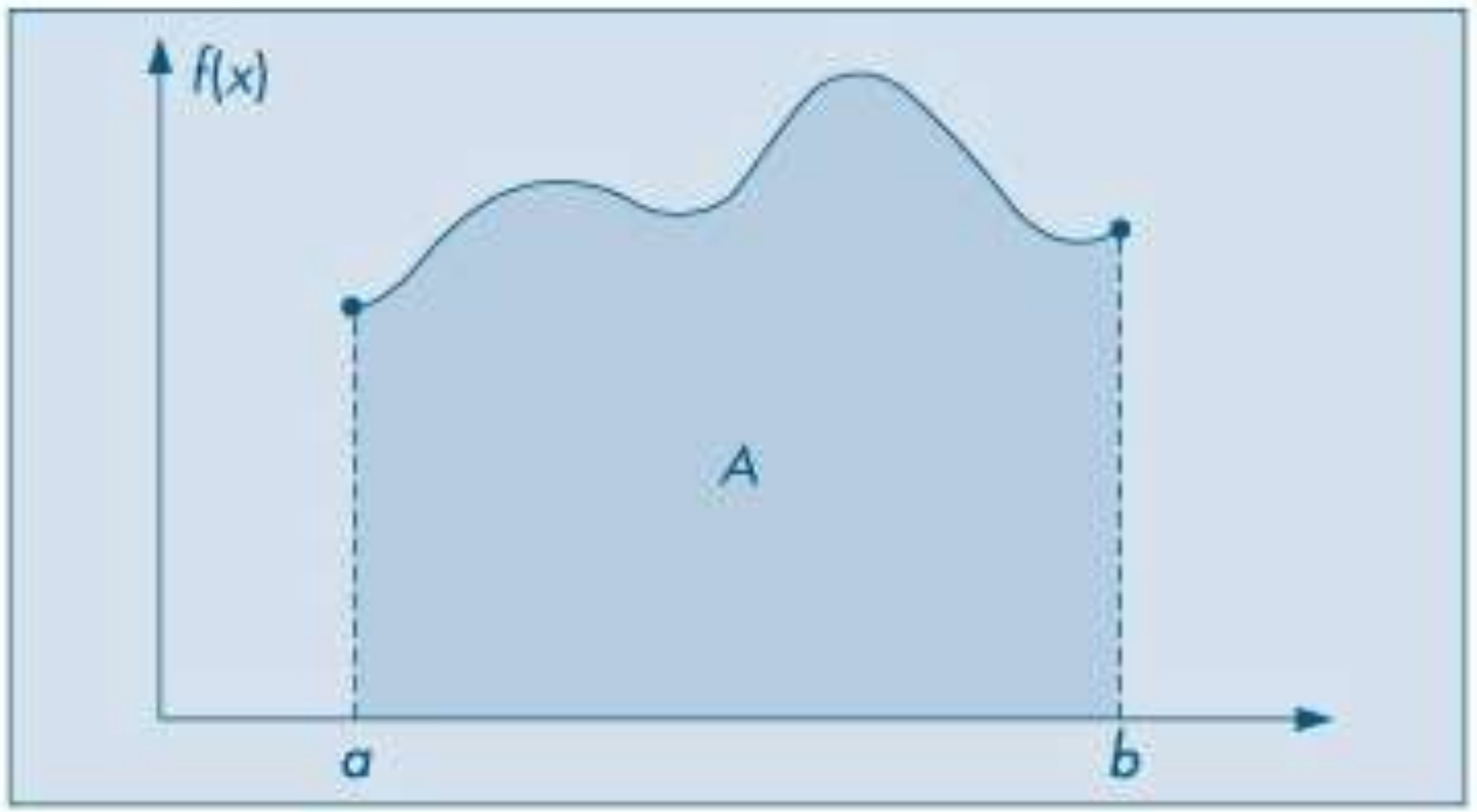
Essa definição não depende da primitiva considerada, pois, se h(x) for outra primitiva de f(x), então a diferença entre h(x) e g(x) é uma constante; consequentemente, g(b) – g(a) = h(b) – h(a).

Matemática para Machine Learning

Significado Geométrico da Integral Definida

Data Science Academy

Significado Geométrico da Integral Definida



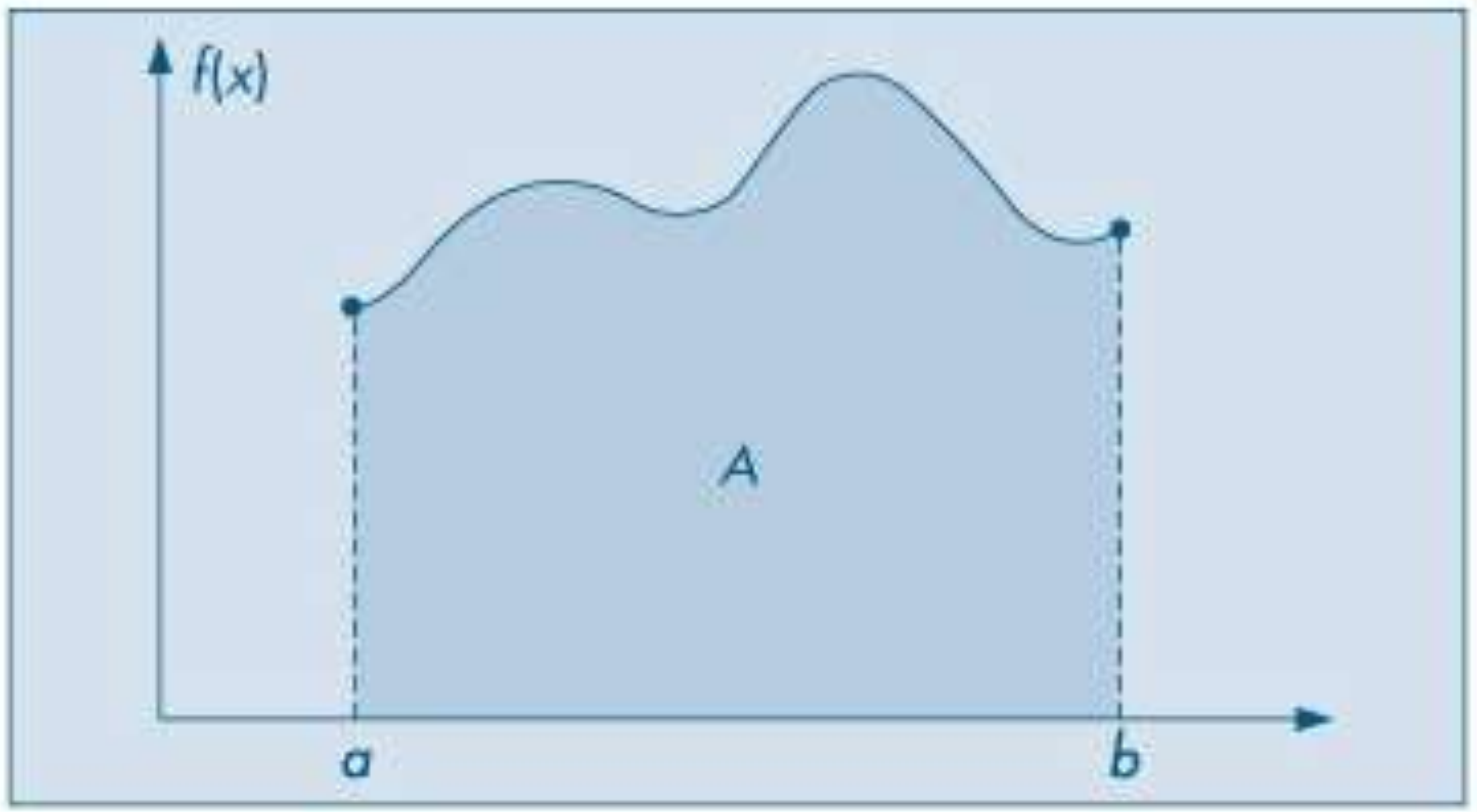
Seja f(x) uma função contínua e não negativa definida num intervalo [a, b].

A integral definida

$$\int_a^b f(x)dx$$

representa a área da região compreendida entre o gráfico de f(x), o eixo x e as verticais que passam por a e b.

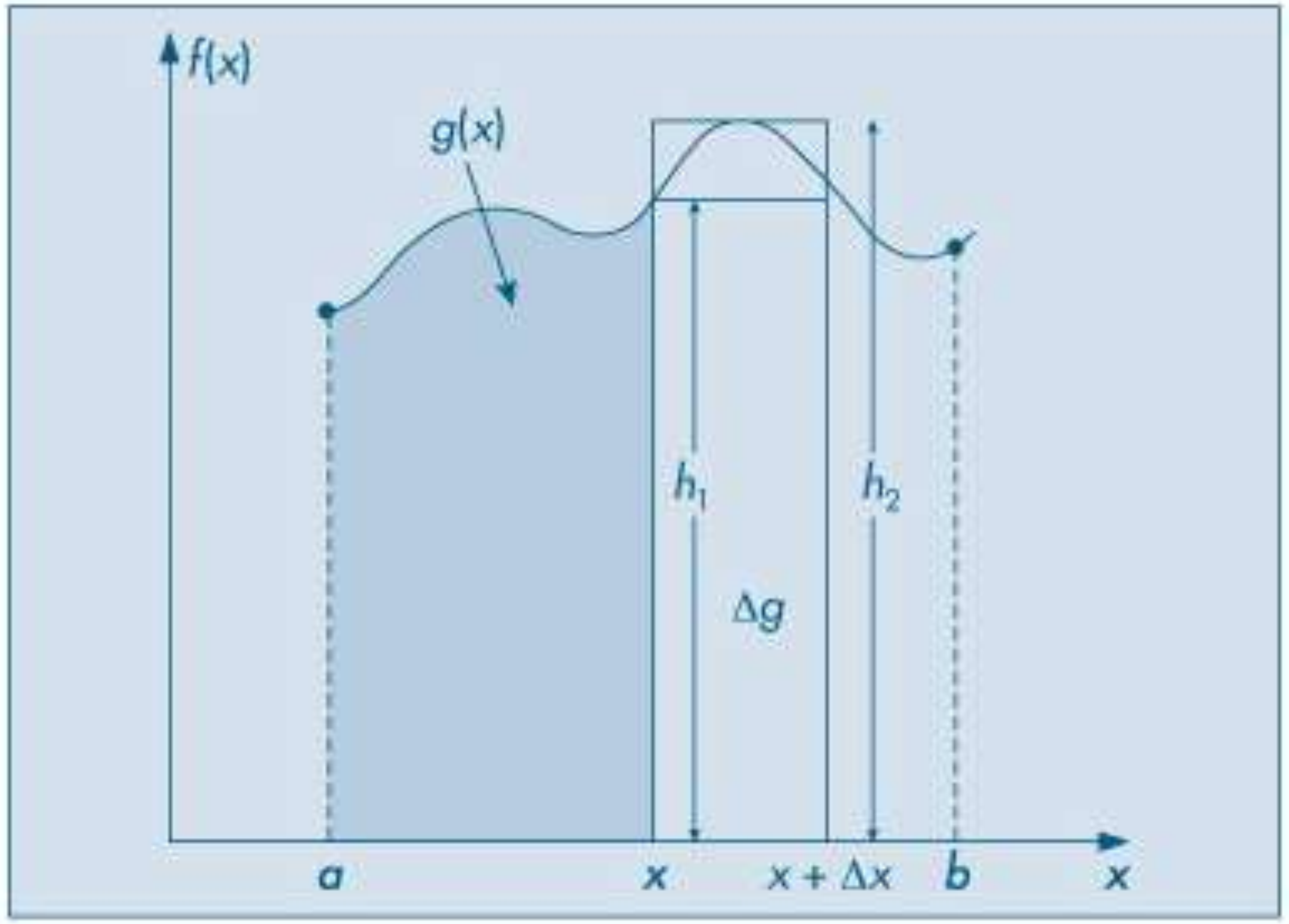
Significado Geométrico da Integral Definida



Assim, indicando por A a área destacada da figura ao lado, teremos:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Significado Geométrico da Integral Definida



Para cada x ∈ [a, b], consideremos uma função g(x) que seja igual à área sob f(x) desde a até x; nessas condições,

g(a) = 0 e g(b) = A.

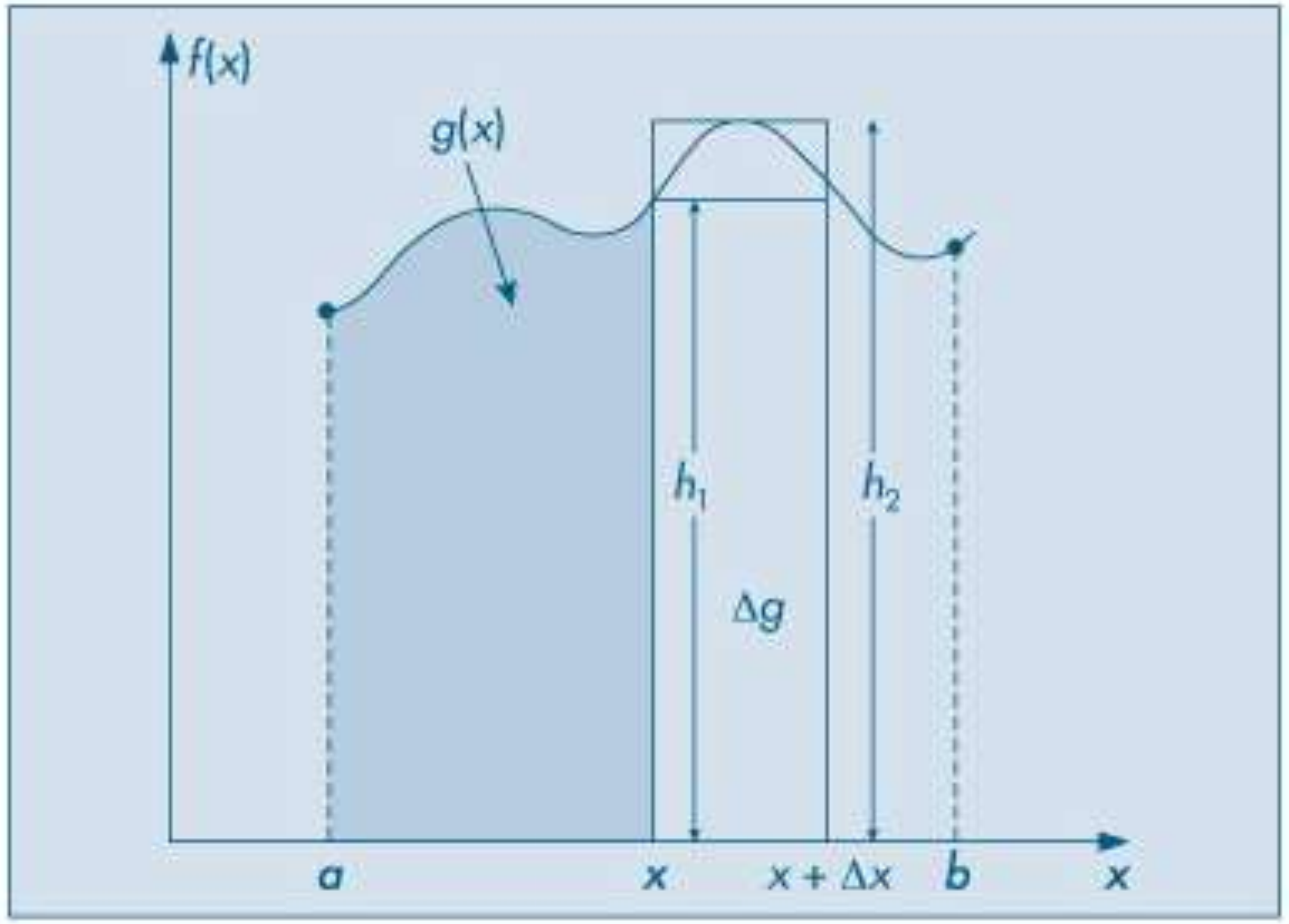
Consideremos agora um acréscimo Δx dado a x, e seja Δg o acréscimo sofrido pela área g(x).

Sejam os retângulos de base Δx e alturas h1 e h2 dados na figura ao lado. Então, temos:

$$h_1 \cdot \Delta x < \Delta g < h_2 \cdot \Delta x$$

$$h_1 < \frac{\Delta g}{\Delta x} < h_2$$

Significado Geométrico da Integral Definida



Quando Δx → 0, tanto h1 como h2 têm por limite o valor de f no ponto x. Portanto:

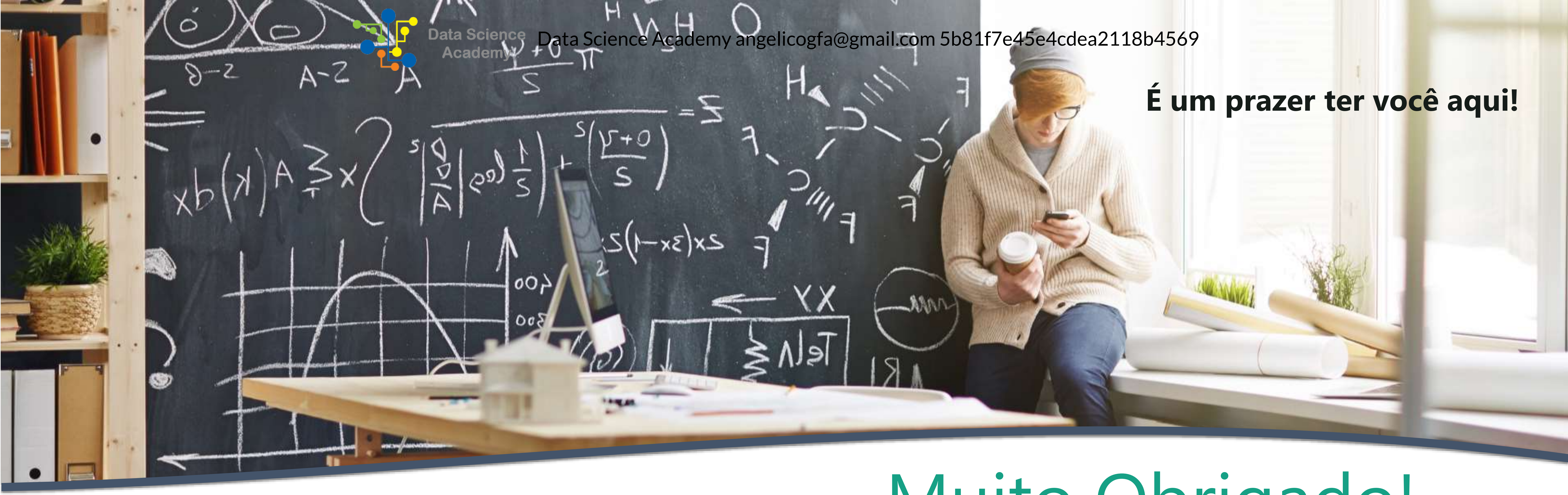
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f(x)$$

ou seja, g′(x) = f(x) Logo, g(x) é uma primitiva de f(x) e

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

Como g(a) = 0 e g(b) = A, segue-se que:

$$\int_a^b f(x)dx = A$$



É um prazer ter você aqui!

Muito Obrigado!

Pela Confiança em Nosso Trabalho.

Continue Trilhando Uma Excelente Jornada de Aprendizagem!

Data Science Academy