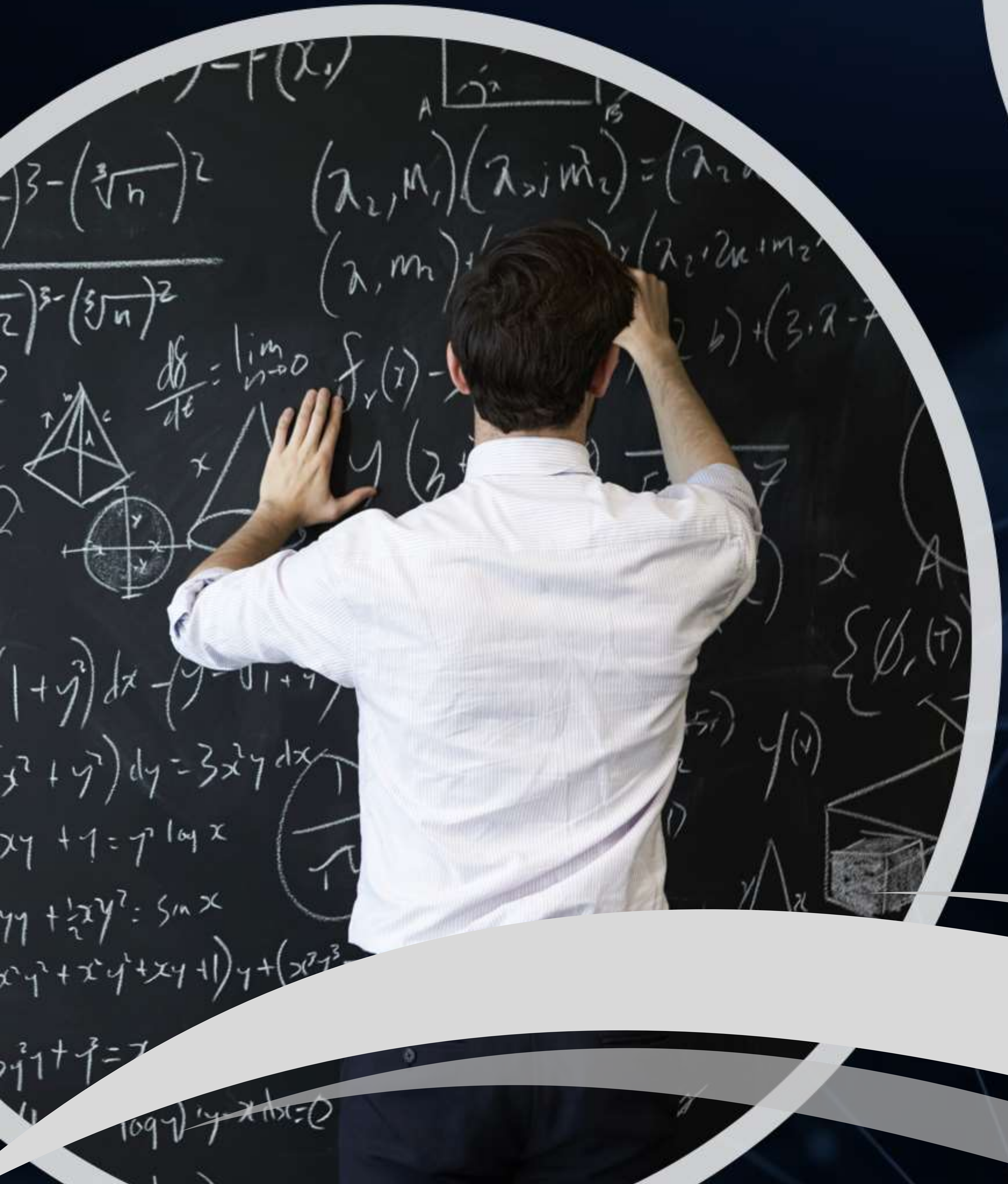


Matemática para Machine Learning

A sua base começa aqui!

Matemática para Machine Learning

Fundamentos da Matemática

Data Science Academy

Fundamentos da Matemática

Continuando...

Data Science Academy

Matemática para Machine Learning

Polinômios

Data Science Academy

Polinômios

Os polinômios são uma família de funções, com diversas utilidades. Por exemplo, polinômios quadráticos da forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

surgem frequentemente ao descrever fenômenos físicos. A equação geral para um função polinomial de grau **n** é escrita como:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

Polinômios

As constantes **a** são conhecidas como coeficientes do polinômio e podemos definir os seguintes parâmetros:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

- x: a variável
- a0: o termo constante
- a1: o coeficiente linear ou coeficiente de primeira ordem
- a2: o coeficiente quadrático
- a3: o coeficiente cúbico
- an: o enésimo coeficiente de ordem
- n: o grau do polinômio. O grau de f(x) é a maior potência de x que aparece no polinômio.

Um polinômio de grau n tem n + 1 coeficientes: a0, a1, a2,. . . , a.

Polinômios

O polinômio de primeiro grau você já conhece: $f(x) = mx + b$

O polinômio de segundo grau também: $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

Polinômios

Em geral, um polinômio de grau n tem a seguinte equação:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Polinômios

E podemos adicionar 2 polinômios, somando seus coeficientes:

$$
\begin{aligned}
f(x) + g(x) &= (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) \; + \; (b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0) \\
&= (a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 +
\end{aligned}
$$

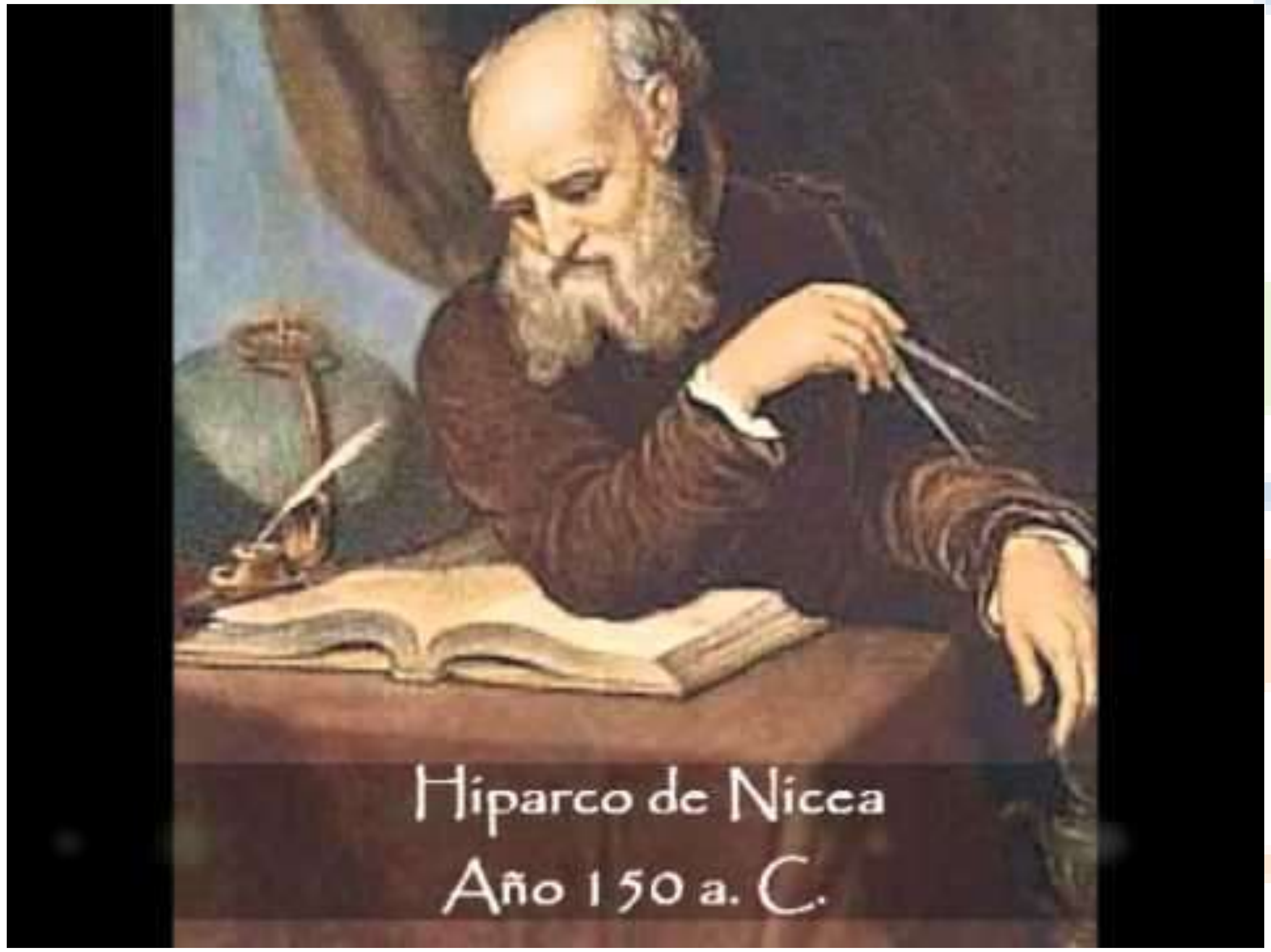
Data Science Academy

Matemática para Machine Learning

Seno, Cosseno e Tangente

Data Science Academy

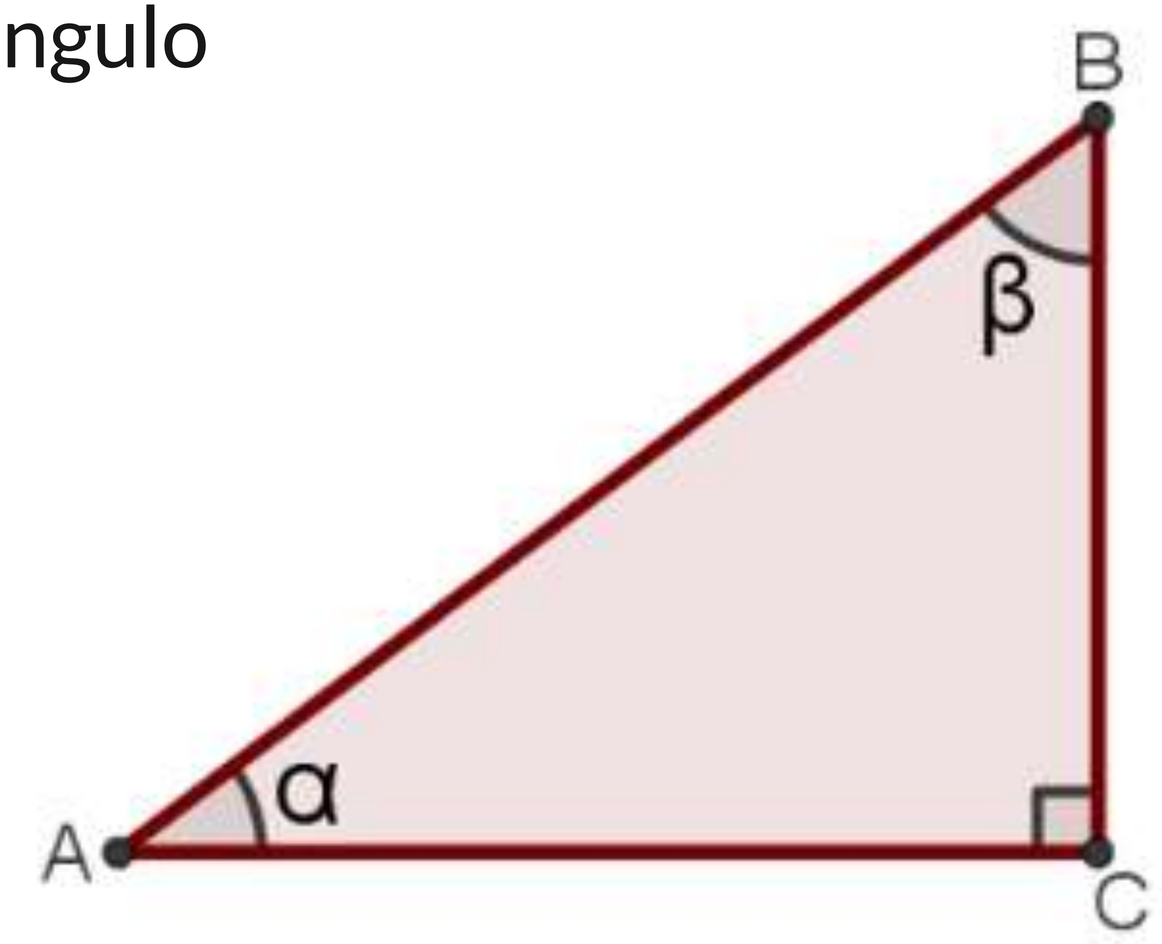
Seno, Cosseno e Tangente

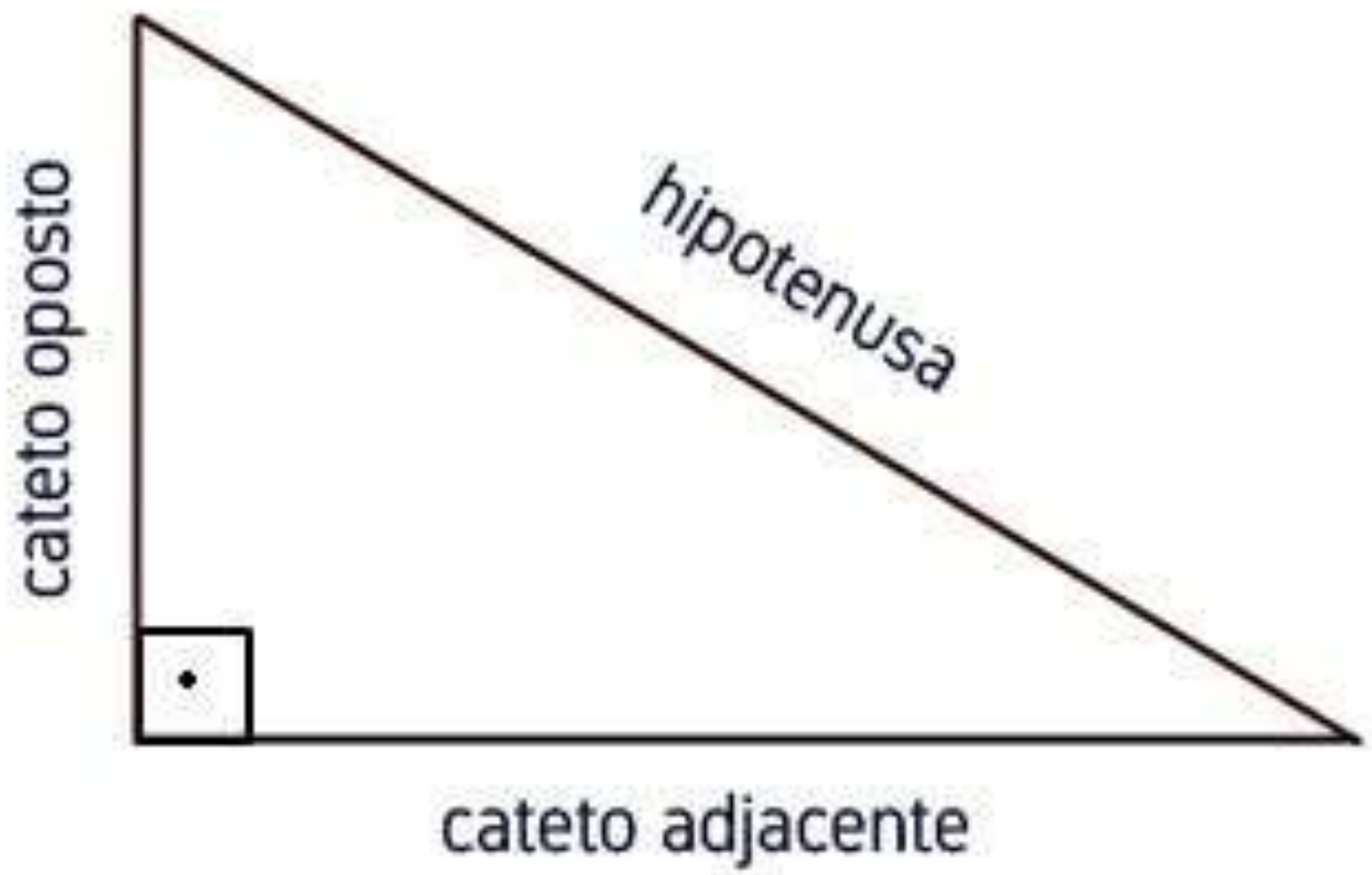


Os estudos iniciais sobre a trigonometria são associados ao grego Hiparco, que relacionou os lados e os ângulos de um triângulo retângulo.

Seno, Cosseno e Tangente

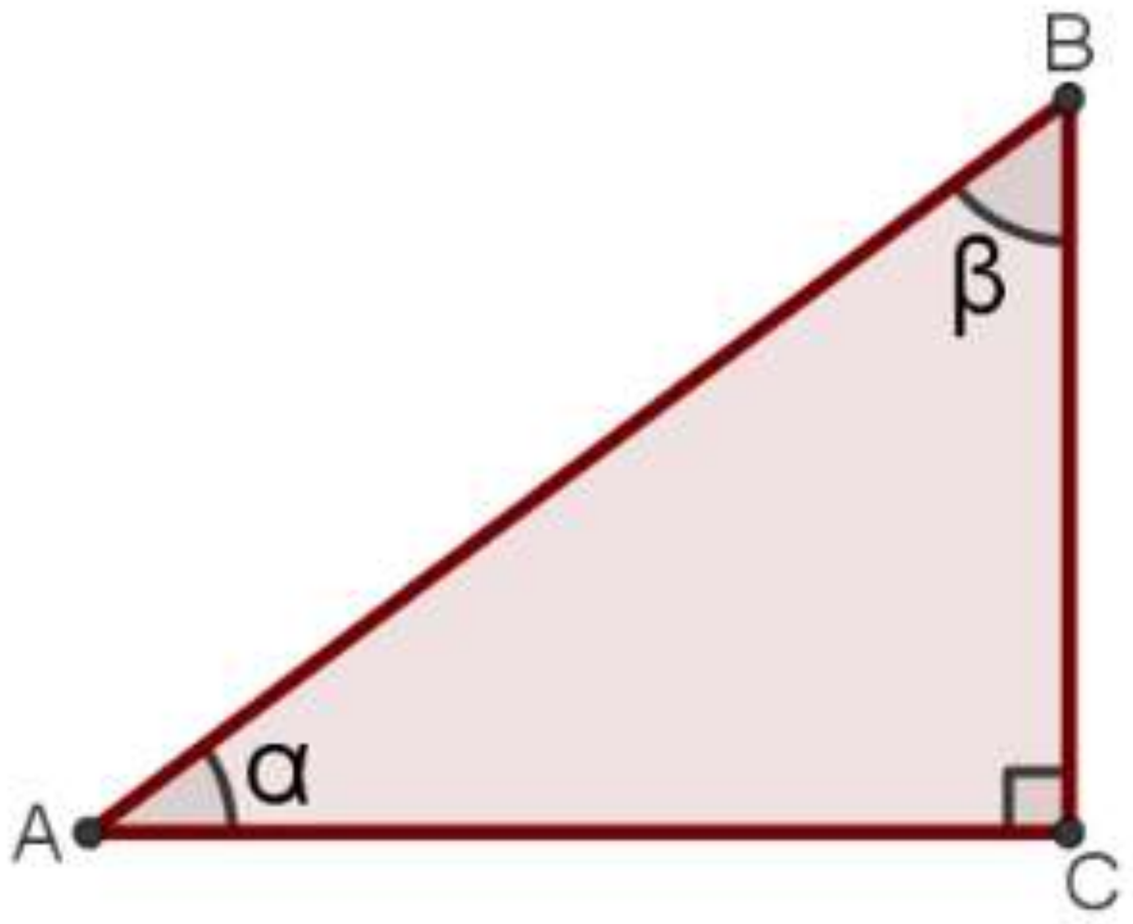
Triângulo retângulo





Seno, Cosseno e Tangente

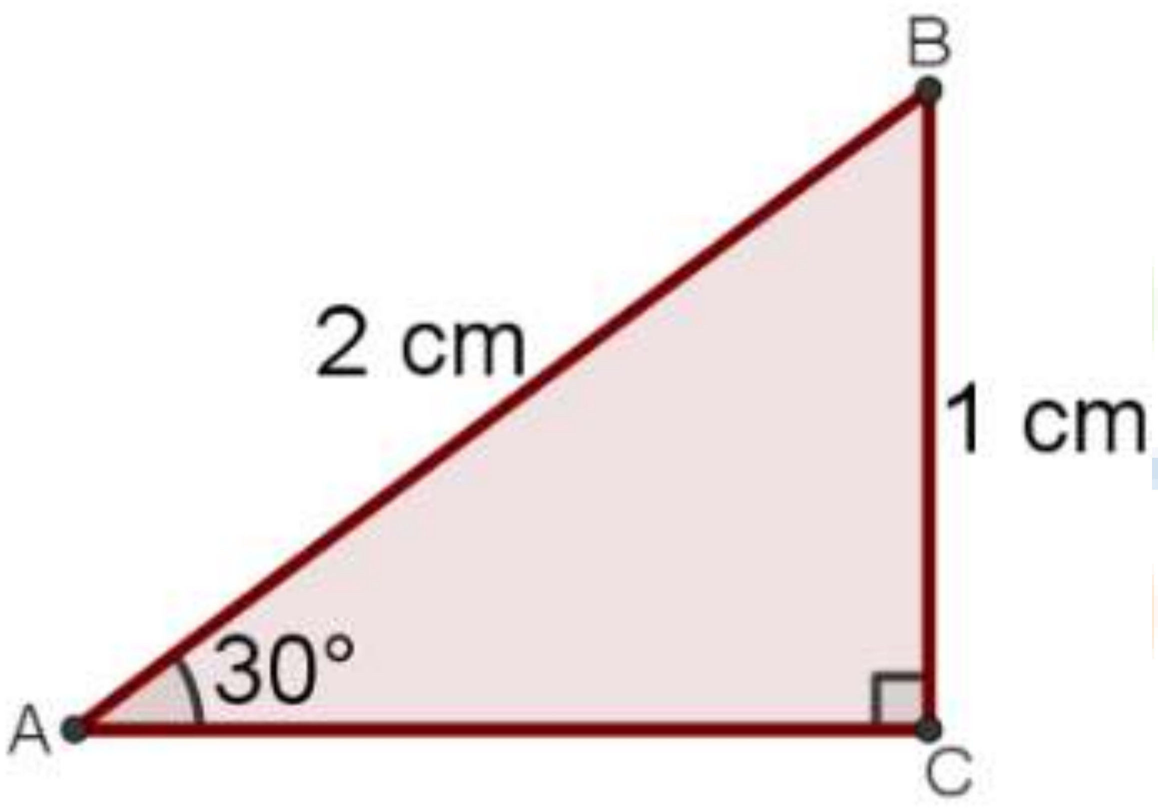
Seno



$$\text{Sen}\alpha = \frac{\text{Cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

Seno, Cosseno e Tangente

Seno

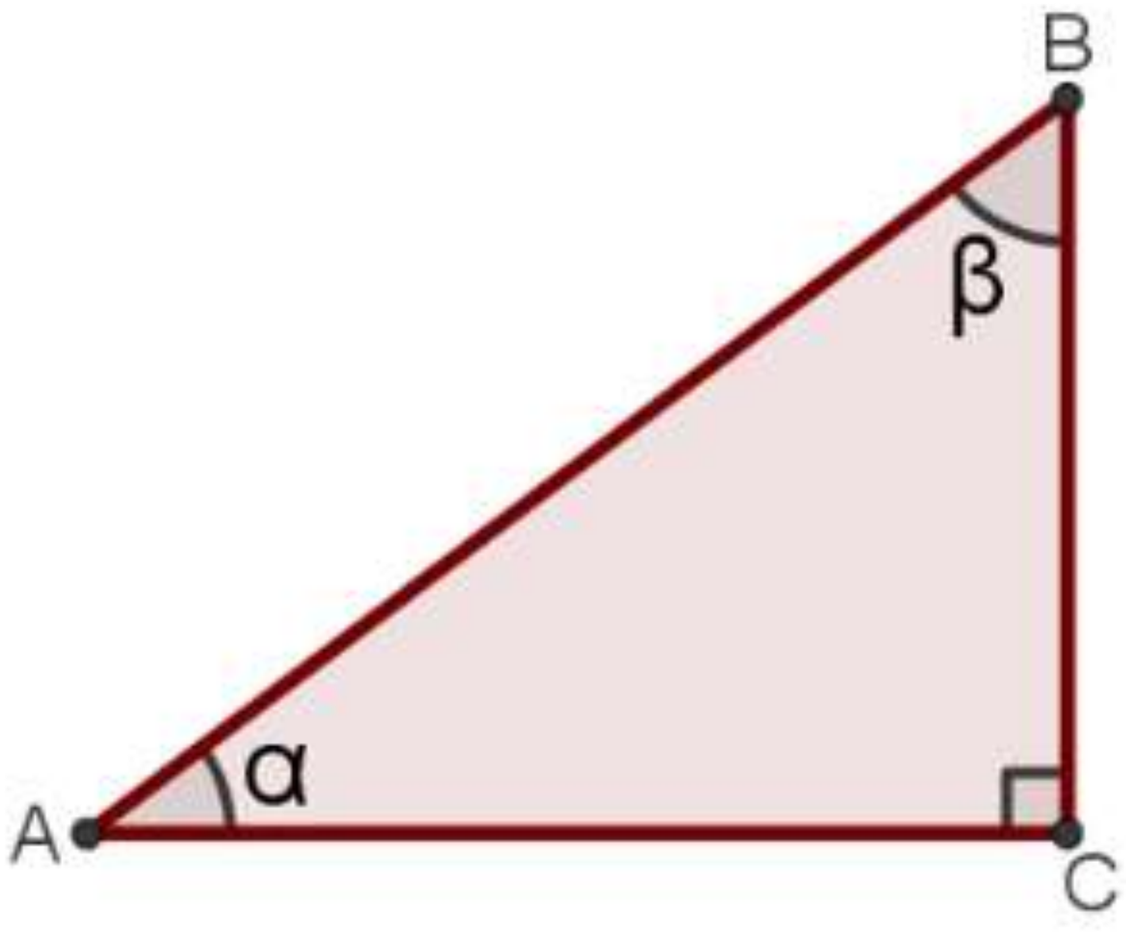


$$\text{Sen}\alpha = \frac{\text{Cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{Sen}30° = \frac{1}{2}$$

Seno, Cosseno e Tangente

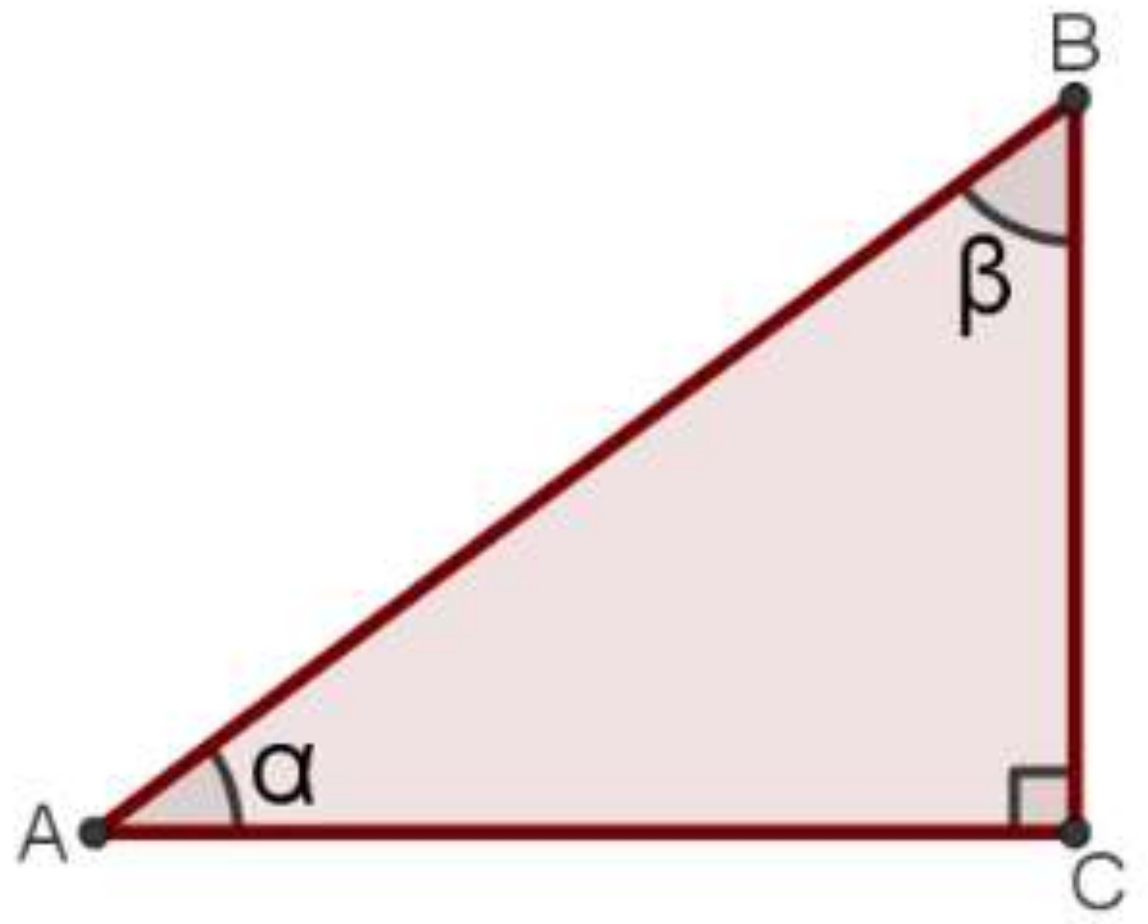
Cosseno



$$\cos\alpha = \frac{\text{Cateto adjacente a } \alpha}{\text{Hipotenusa}}$$

Seno, Cosseno e Tangente

Tangente

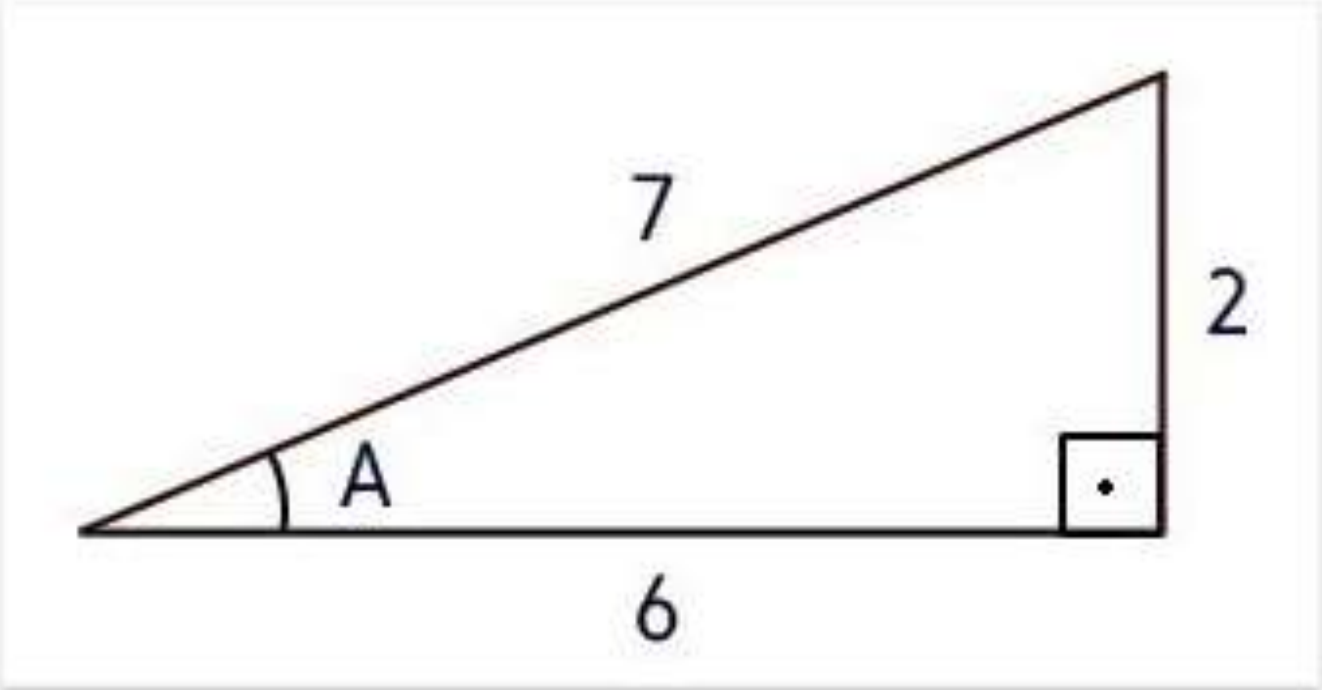


$$tg\alpha = \frac{\text{Cateto oposto a } \alpha}{\text{Cateto adjacente a } \alpha}$$

Seno, Cosseno e Tangente

Relações Trigonométricas	30º	45º	60º
Seno	1/2	√2/2	√3/2
Cosseno	√3/2	√2/2	1/2
Tangente	√3/3	1	√3

Seno, Cosseno e Tangente



$$\text{Seno} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

sen = 2/7

sen = 0,29

$$\text{Cosseno} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

cos = 6/7

cos = 0,86

$$\text{Tangente} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

tg = 2/6

tg = 0,33

Seno, Cosseno e Tangente

Qual a razão trigonométrica do triângulo retângulo abaixo que possui um ângulo de 45º?

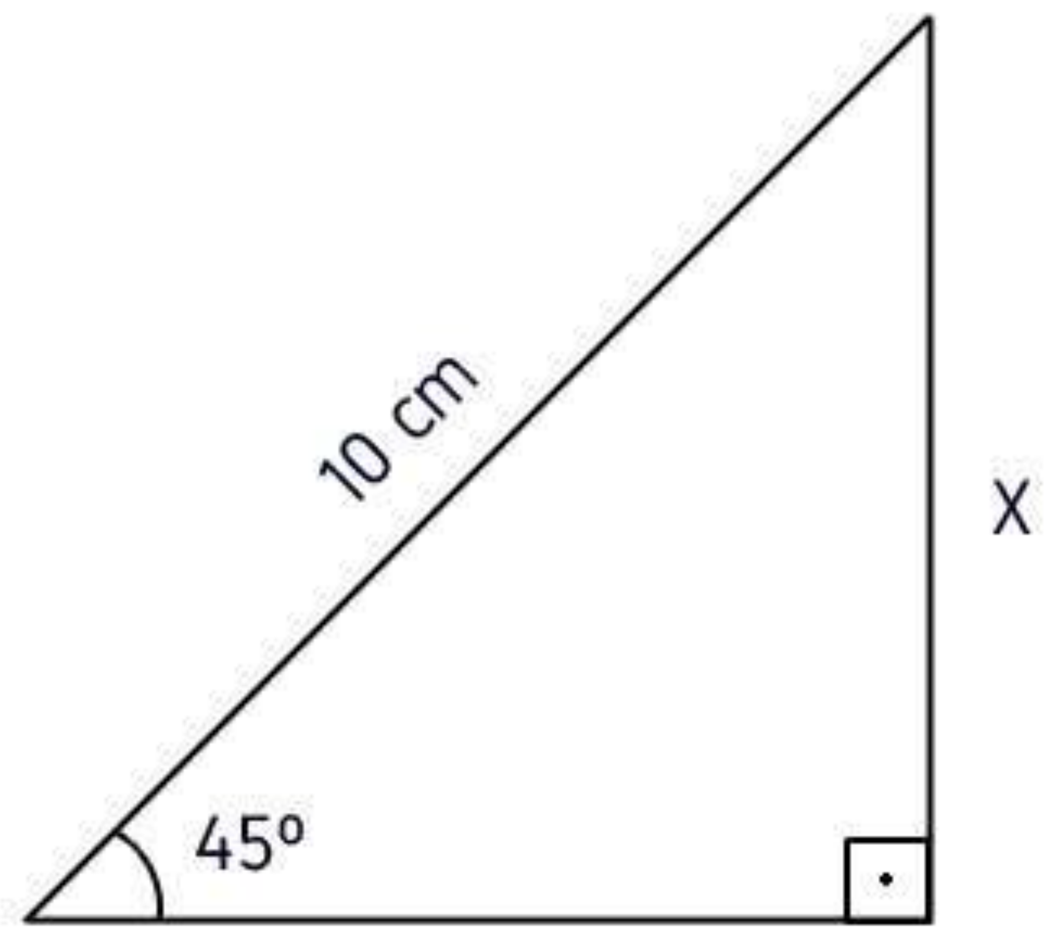
Relações Trigonométricas	30º	45º	60º
Seno	1/2	√2/2	√3/2
Cosseno	√3/2	√2/2	1/2
Tangente	√3/3	1	√3

sen 45º = x/ 10

0,7071 = x/ 10

0,7071 . 10 = x

x = 7,071



Matemática para Machine Learning

Logaritmos e Logaritmos Naturais

Data Science Academy

Logaritmos e Logaritmos Naturais

Sendo a e b números reais positivos, chama-se logaritmo de b na base a, o expoente em que a deve ser elevado de modo que a potência obtida de base a seja igual a b.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

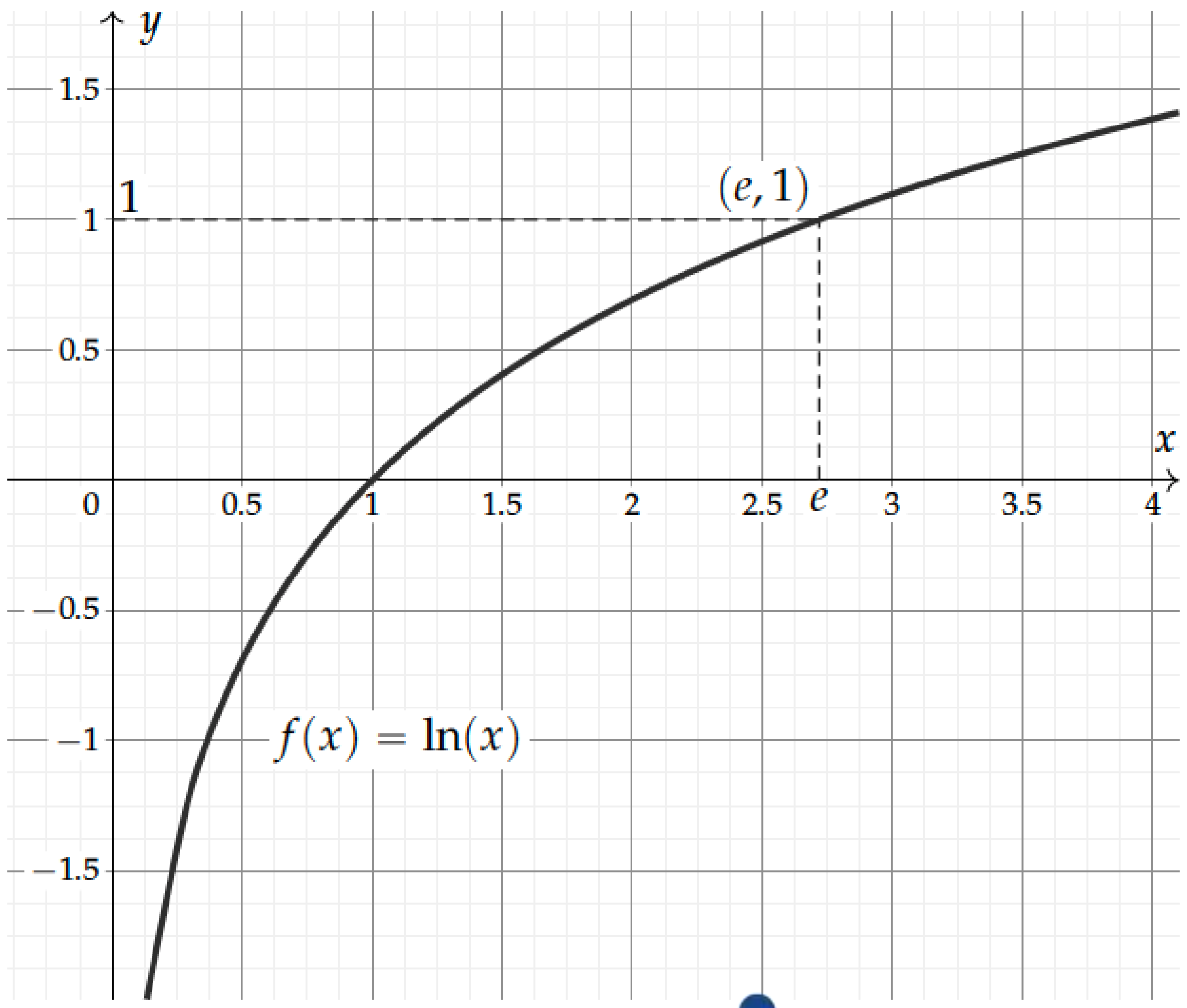
com $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$

Exemplo: $\log_2 16 = 4$, pois $2^4 = 16$

Logaritmos e Logaritmos Naturais

O logaritmo natural é indicado por: $f(x) = \ln(x) = \log_e(x)$

A função ln(x) é a função inversa do exponenci e^x



Data Science Academy

Logaritmos – Propriedades e Mudança de Base

Propriedade	Fórmula	Exemplo
Logaritmo do produto	$\log_c(a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$	$\log_3(9 \cdot 27) = \log_3 9 + \log_3 27 = 2 + 3 = 5$
Logaritmo do quociente	$\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$	$\log_3\left(\frac{27}{9}\right) = \log_3 27 - \log_3 9 = 3 - 2 = 1$
Logaritmo da potência	$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$	$\log_3 9^5 = 5 \cdot \log_3 9 = 5 \cdot 2 = 10$
Logaritmo de uma raiz	$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$	$\log_5 \sqrt[3]{25} = \frac{1}{3} \cdot \log_5 25 = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$

Logaritmos – Propriedades e Mudança de Base

Mudança de Base

Se **a**, **b** e **c** são números reais positivos, então:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \ a \neq 1 \text{ e } c \neq 1$$

Exemplo: $\log_3 5$ transformado para a base 2 fica:

$$\log_3 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 3}$$

Logaritmos – Propriedades e Mudança de Base

Mudança de Base

Se a e b são reais positivos e quisermos transform$\log_a b$ para a base b, temos:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a},\ a \neq 1 \text{ e } b \neq 1$$

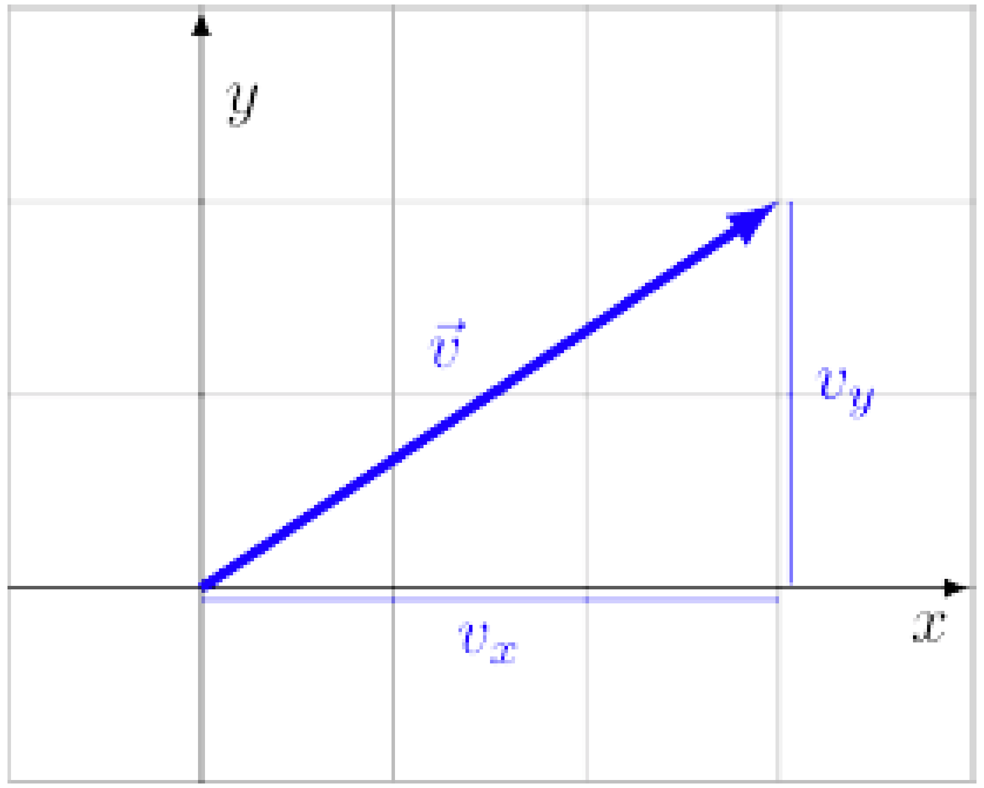
Exemplo: $\log_3 4 = \frac{1}{\log_4 3}$

Matemática para Machine Learning

Vetores

Data Science Academy

Vetores



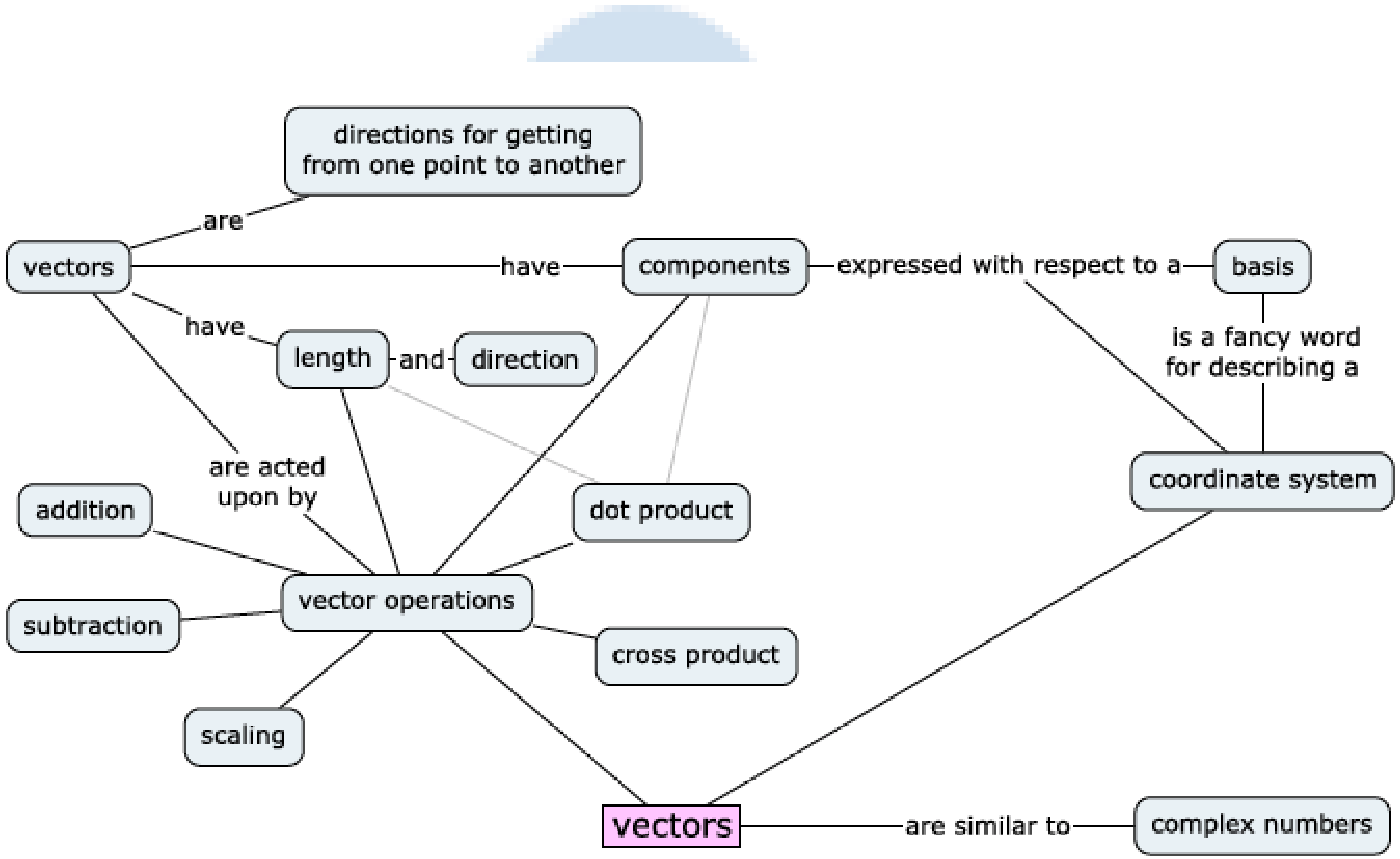
Vetores são construídos a partir de componentes, que são números comuns.

Você pode pensar em um vetor como uma lista de números, e álgebra vetorial como operações executadas nos números da lista.

Vetores também pode ser manipulados como objetos geométricos, representados por setas no espaço.

Data Science Academy

Vetores



Data Science Academy

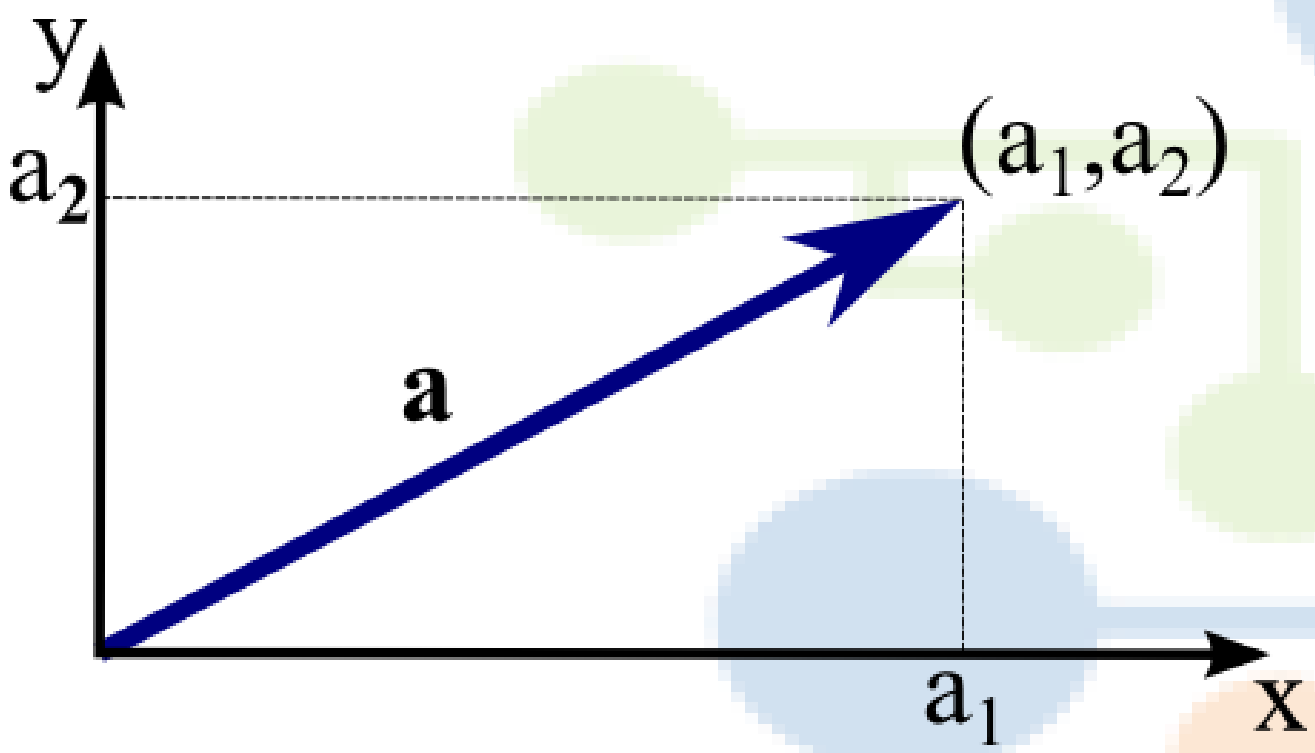
Operações com Vetores

Considerando os 2 vetores:

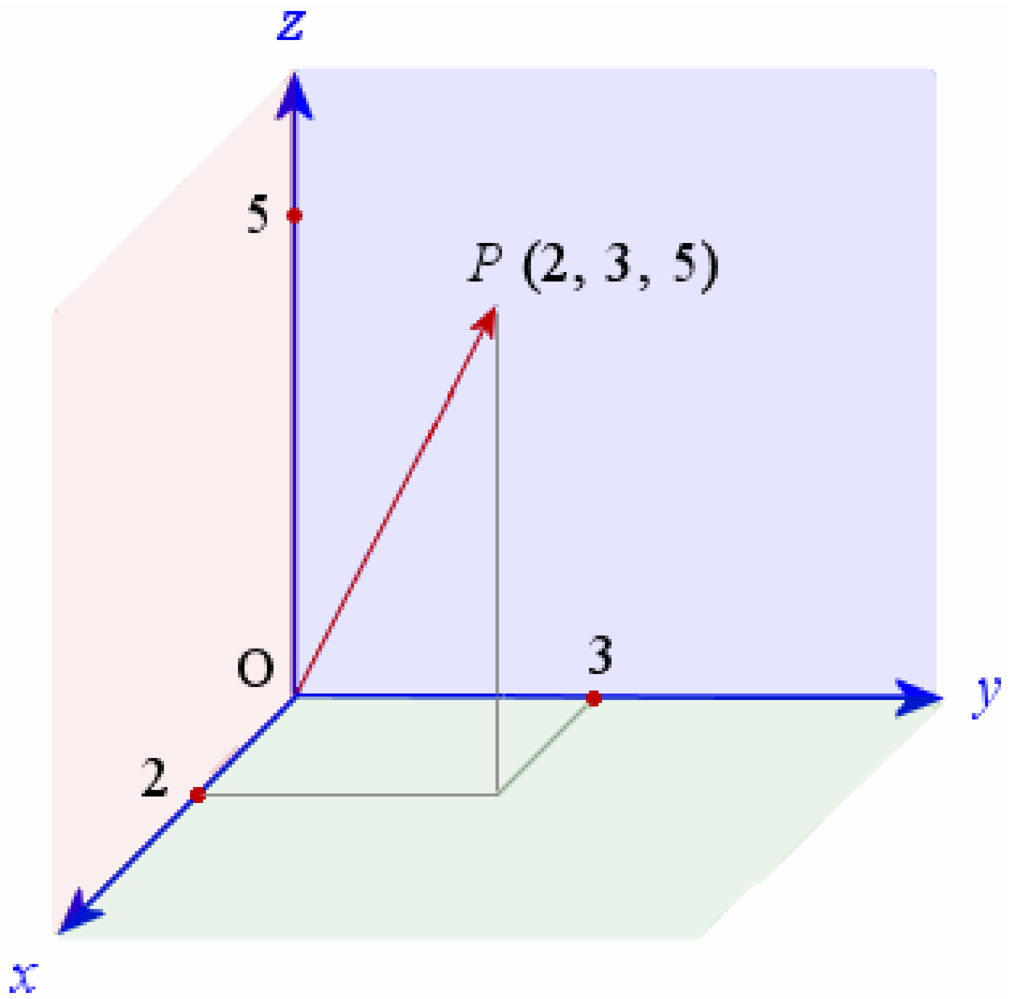
$\vec{u} = (u_x, u_y)$ $\vec{v} = (v_x, v_y)$

Operação	Fórmula
Adição	$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y)$
Subtração	$\vec{u} - \vec{v} = (u_x - v_x, u_y - v_y)$
Escala	$\alpha\vec{u} = (\alpha u_x, \alpha u_y)$
Dot Product	$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y$
Length (Comprimento)	$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$
Cross Product	$\vec{u} \times \vec{v} = (u_y v_z - u_z v_y,\ u_z v_x - u_x v_z,\ u_x v_y - u_y v_x)$

Dimensões de Vetores



Vetor Bidimensional

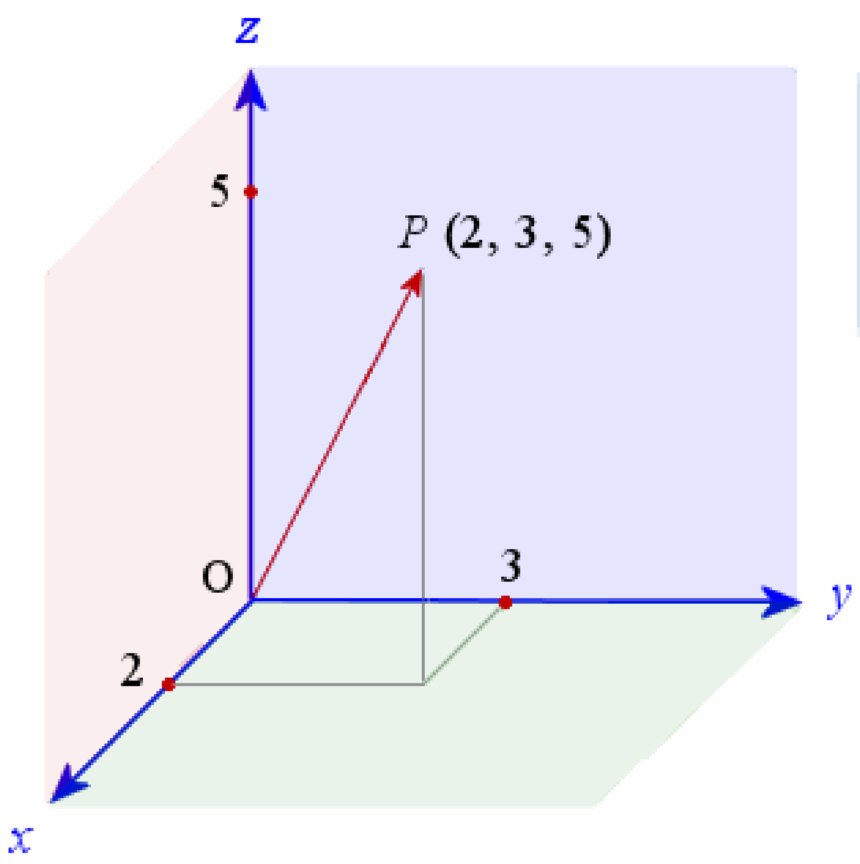


Vetor Tridimensional

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

Sistema de Coordenadas

Os componentes vetoriais dependem do sistema de coordenadas em que o vetores são representados.



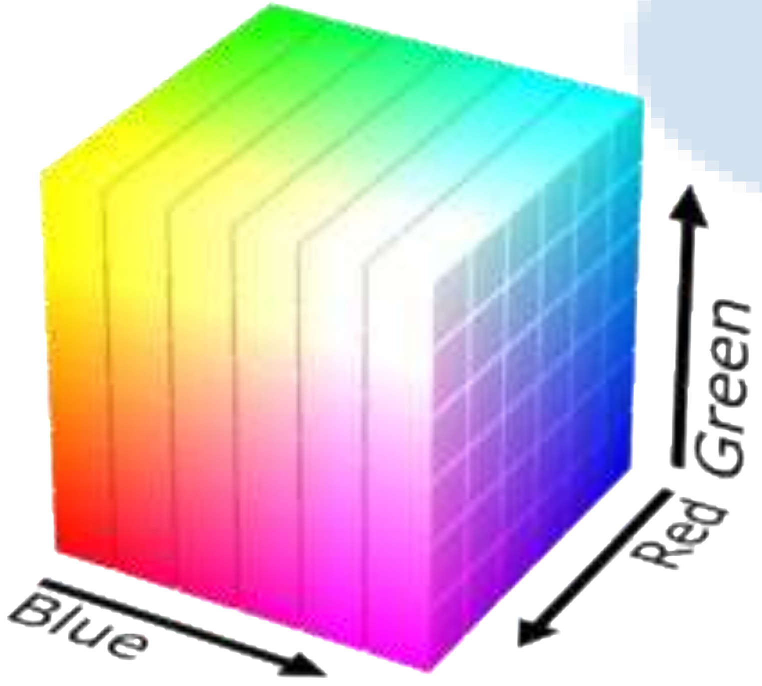
$$\vec{v} = v_1\hat{e}_1 + v_2\hat{e}_2 + v_3\hat{e}_3$$

Base de Vetores

$$\vec{v} = v_1\hat{e}_1 + v_2\hat{e}_2 + v_3\hat{e}_3$$

$$\vec{v} \in \mathbb{R}^3$$

#336699
(33, 66, 99)
RGB
Red Green Blue



(33, 66, 99)RGB = 33R + 66G + 99B

Uma base é necessária para converter objetos matemáticos como a tripla (a, b, c) em ideias do mundo real, como cores. Como exemplificado acima, para evitar qualquer ambiguidade, podemos usar um subscrito após os parêntesis para indicar a base associada a cada tripla de coeficientes.

Matemática para Machine Learning

Números Complexos

Data Science Academy

Números Complexos

Números Naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$

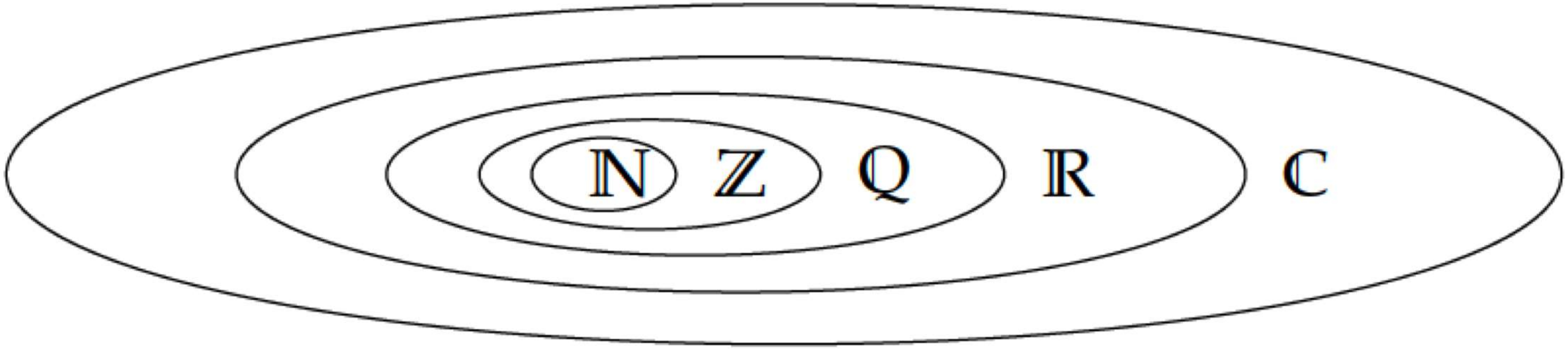
Números Inteiros: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Números Racionais: $\mathbb{Q} = \{\frac{5}{3}, \frac{22}{7}, 1.5, 0.125, -7, \ldots\}$

Números Reais: $\mathbb{R} = \{-1, 0, 1, \sqrt{2}, e, \pi, 4.94\ldots, \ldots\}$

Números Complexos: $\mathbb{C} = \{-1, 0, 1, i, 1+i, 2+3i, \ldots\}$

Números Complexos



Matemática para Machine Learning

Operações com Números Complexos

Data Science Academy

Operações com Números Complexos

Números Naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$

Números Inteiros: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Números Racionais: $\mathbb{Q} = \{\frac{5}{3}, \frac{22}{7}, 1.5, 0.125, -7, \ldots\}$

Números Reais: $\mathbb{R} = \{-1, 0, 1, \sqrt{2}, e, \pi, 4.94\ldots, \ldots\}$

Números Complexos: $\mathbb{C} = \{-1, 0, 1, i, 1+i, 2+3i, \ldots\}$

Operações com Números Complexos

$$x^2 + 1 = 0$$

$$i^2 = -1$$

Onde i é uma unidade imaginária.

$$x_1 = i$$
$$x_2 = -i$$

assim, enquanto a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem soluções reais (dentro do conjunto de números reais), podemos encontrar uma solução se permitirmos que as respostas sejam números imaginários.

Operações com Números Complexos

Logo, um número complexo que chamamos de Z, tem a forma:

$$z = a + bi, \ a, b \in \mathbb{R}$$

Chamamos o número **a** de parte real, Re(Z) = a, e **b** de parte imaginária, Im(Z) = b. Esta notação é chamada de forma algébrica.

Operações com Números Complexos

Adição de Números Complexos

Definiremos a adição de z_1 e z_2 da seguinte forma:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di)$$

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

Exemplo:

Se $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 5 - 3i$ a soma será:

$$z_1 + z_2 = (3 + 5) + (2 - 3)i$$

$$z_1 + z_2 = 8 - i$$

Operações com Números Complexos

Subtração de Números Complexos

Sejam z_1 e z_2 dois números complexos, tais que: $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$.

Definiremos a subtração de z_1 e z_2 da seguinte forma:

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di)$$

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

Exemplo:

Se $z_1 = 7 + 10i$ e $z_2 = 3 + 6i$ a diferença será:

$$z_1 - z_2 = (7 - 3) + (10 - 6)i$$

$$z_1 - z_2 = 4 - 4i$$

Operações com Números Complexos

Multiplicação de Números Complexos

Sejam z_1 e z_2 dois números complexos, tais que: $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$.

Definiremos a multiplicação de z_1 e z_2 da seguinte forma:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Exemplo:

Se $z_1 = 2 + 5i$ e $z_2 = 1 + 3i$ o produto será:

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 5i) + (1 + 3i)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3i + 5i \cdot 1 + 5i \cdot 3i$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2 + 6i + 5i + 15i^2$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2 + 6i + 5i + 15 \cdot (-1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2 + 6i + 5i - 15$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 15) + (6 + 5)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = -13 + 11i$$

Operações com Números Complexos

Divisão de Números Complexos

Sejam z_1 e z_2 dois números complexos, tais que: $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$

Definiremos a divisão de z_1 e z_2 da seguinte forma:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{c^2-(di)^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac-bd)+(ad+bc)i}{c^2+d^2} = \frac{ac-bd}{c^2+d^2} + \frac{ad+bc}{c^2+d^2}i$$

Exemplo

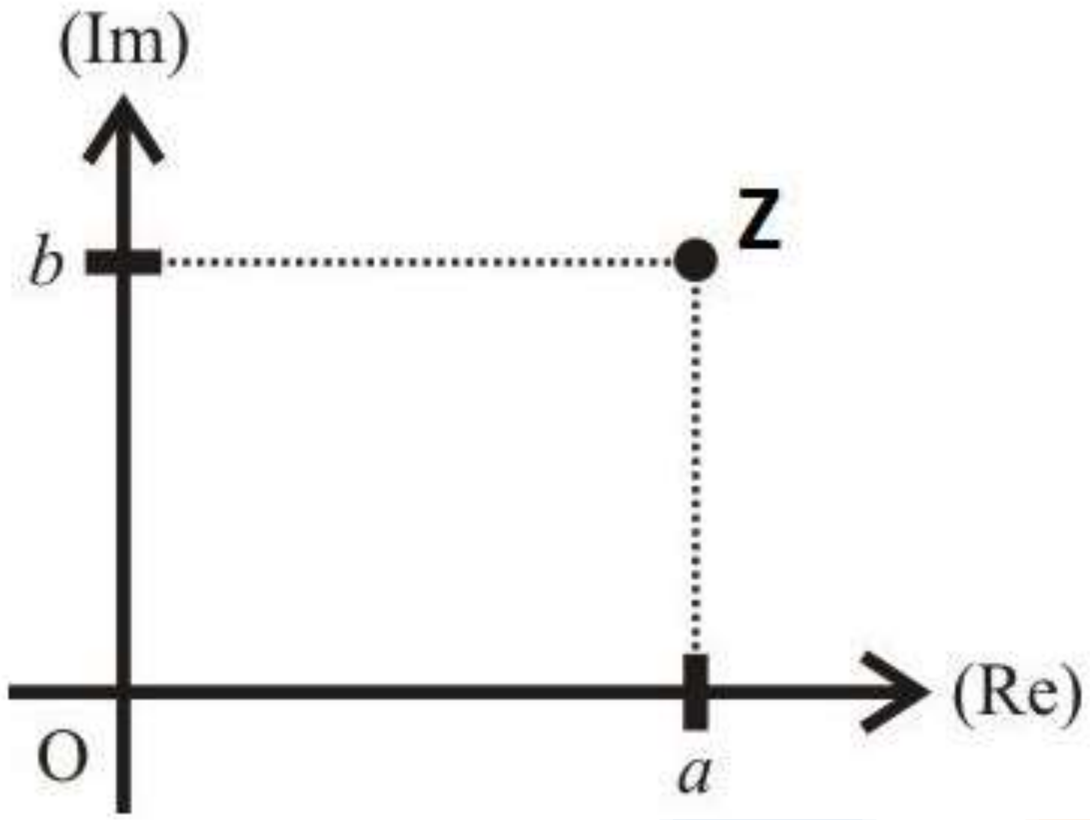
Se $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 2 + 3i$ a divisão será:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1+2i)\cdot(2-3i)}{2^2-(3i)^2}$$

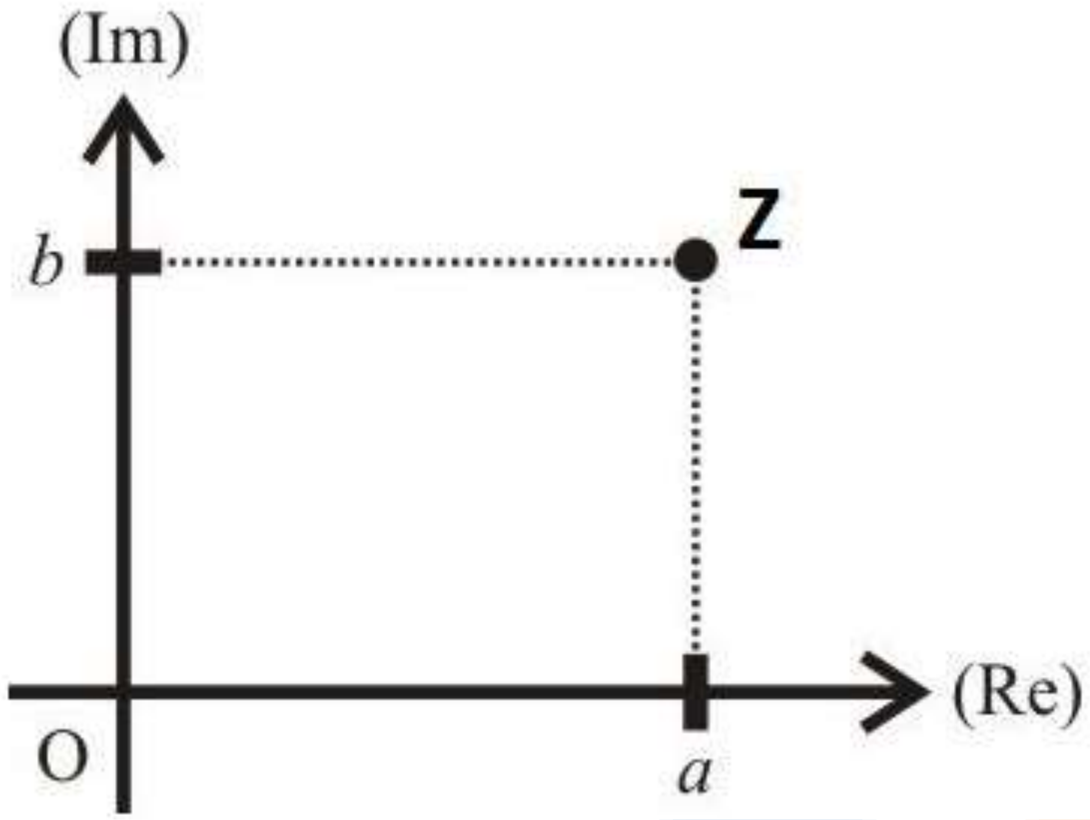
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8-i}{4+9} = \frac{8-i}{13} = \frac{8}{13} - \frac{1}{13}i$$

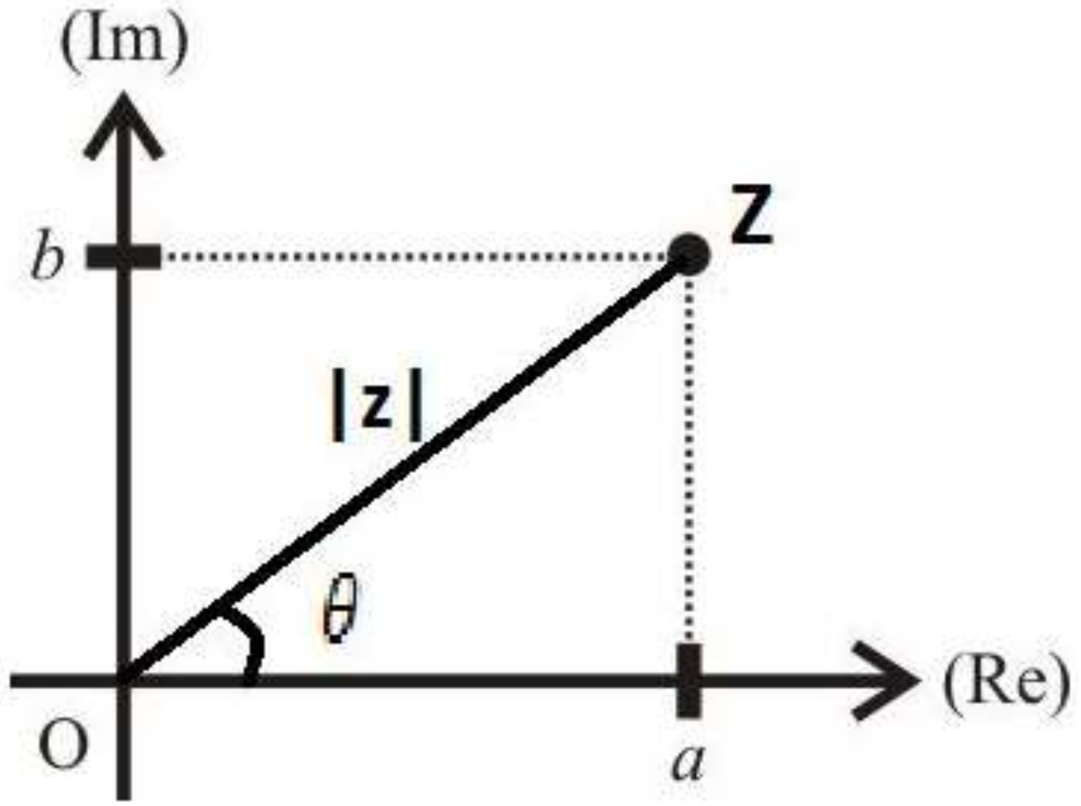
Argumento



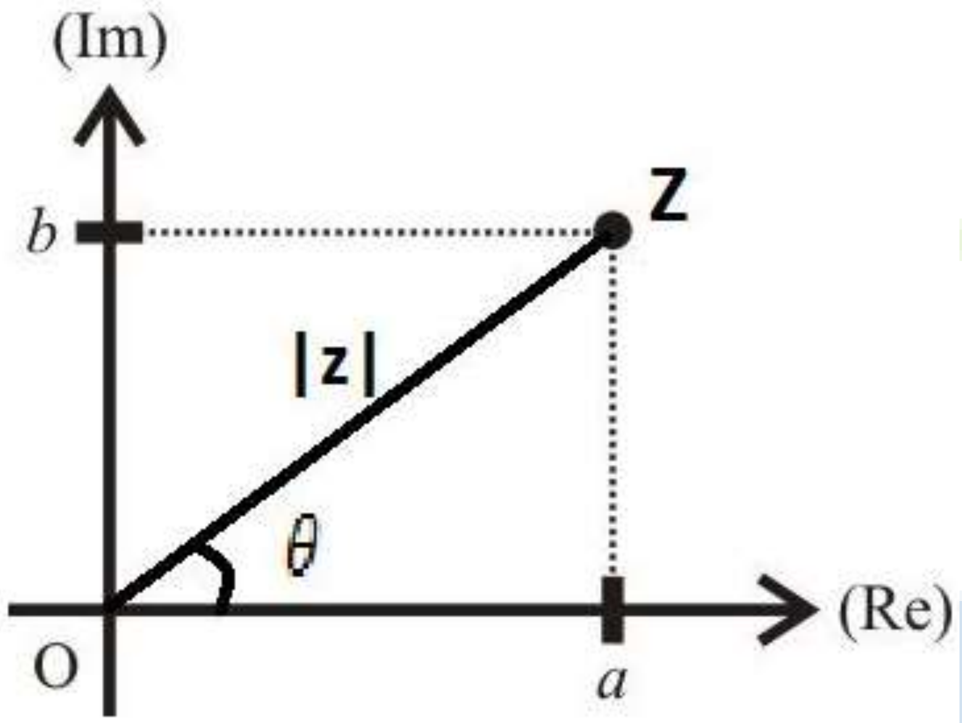
Plano de Argand-Gauss

Argumento





Argumento



No Triângulo retângulo formado pelos vértices OâZ, temos que:

$$sen(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

$$cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$$

Sendo θ o argumento de Z.

Para encontrar o argumento de Z, podemos utilizar:

θ=arcsen(b|z|) ou θ=arcos(a|z|)

Aplicando o teorema de Pitágor

$$(|z|)^2 = a^2 + b^2 \qquad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Matemática para Machine Learning

Teorema Fundamental da Álgebra

Data Science Academy

Teorema Fundamental da Álgebra

A solução de qualquer equação polinomial na forma:

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

É igual a:

$$z = a + bi$$

Logo, um polinômio de qualquer ordem pode ser escrito como:

$$P(x) = (x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n)$$

$$z_i \in \mathbb{C}$$

Teorema Fundamental da Álgebra

$$x^2 + 1 = 0$$

$$z_1 = i \qquad z_2 = -i$$

Qualquer equação polinomial - não importa quão complicada seja - tem soluções que são números complexos C.

Matemática para Machine Learning

Resolvendo Sistemas de Equações Lineares

Data Science Academy

É um prazer ter você aqui!

Muito Obrigado!

Pela Confiança em Nosso Trabalho.

Continue Trilhando Uma Excelente Jornada de Aprendizagem!

Data Science Academy