www.datascienceacademy.com.br

Matemática Para Machine Learning

Método de Eliminação de Gauss (Escalonamento)

As operações elementares sobre as linhas de uma matriz são importantes, não só para o cálculo da matriz inversa, como também serão úteis na resolução de sistemas lineares. As operações elementares são utilizadas para reduzir uma matriz dada na forma escalonada e, neste caso, o procedimento é chamado de escalonamento.

O método de Eliminação de Gauss é um dos métodos mais usados para resolver um sistema linear. E a versão adaptada denominada de Eliminação de Gauss-Jordan é um dos métodos mais práticos para inverter matrizes. Além de resolver o sistema linear e inverter matrizes, a Eliminação de Gauss é usada frequentemente para diversos outros cálculos tais como determinantes, base do núcleo e da imagem de uma transformação linear, base do espaço gerado, etc.

O procedimento é converter a matriz aumentada do sistema dado, em uma matriz escalonada, aplicando uma sequência de operações denominados de operações elementares. Tais operações são escolhidas de forma que a solução do sistema não seja alterada. São três as operações elementares básicas:

1. Somar e substituir com o múltiplo de outra linha (Substituir): Equivale a somar o múltiplo da outra equação que também não altera a solução do sistema. A mesma coisa que: Substituir a i-ésima linha por α vezes a j-ésima linha somada com a i-ésima linha, onde α for diferente de 0.

2. Troca de linhas (Permutar): A troca de linhas corresponde a troca da posição das equações, o que não influência na solução do sistema.

3. Multiplicar uma linha por número não nulo (Multiplicar): Equivale a multiplicar um número não nulo na equação correspondente que também não altera a solução. Esta operação não é necessária na Eliminação de Gauss, mas faz-se necessário no Gauss-Jordan.

Uma matriz de ordem n é chamada matriz elementar se ela pode ser obtida da matriz identidade de ordem n, através de uma única operação elementar sobre as linhas de I. Por exemplo, considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quais delas são elementares?

As matrizes A, B e C são elementares, pois a matriz A é obtida da matriz identidade multiplicando-se a 1a linha de I por 5. A matriz B é obtida da matriz identidade permutando-se a 2a com a 3a linha e, finalmente, a matriz C é obtida da matriz identidade, substituindo-se L1 por L1 + 5L2, onde Li indica a linha i da matriz I. A matriz D não é elementar, pois foram efetuadas duas operações elementares sobre as linhas de I: permutou-se a 2a com a 3a linha e substituiu-se L1 por L1 + 3L2.

Se uma matriz A é pré-multiplicada por uma matriz elementar, então o resultado desta operação é equivalente ao de executar uma operação elementar sobre as linhas de A. Se várias operações elementares são efetuadas em uma matriz A e se a cada operação realizada associarmos uma matriz elementar Ek, então o resultado das operações elementares é equivalente a pré-multiplicarmos a matriz A por uma sequência de matrizes elementares.

Aplicando o Escalonamento

Escalonar uma matriz é aplicar as operações elementares descritas acima. As notações usadas são:

- $L_i \leftarrow L_i + \mu L_k$ somar linha k multiplicado por μ. Não altera o determinante.
- $L_i \leftrightarrow L_k$ é a troca de linha i por linha k. Caso estiver calculando o determinante por método de escalonamento, lembrar que isto muda o sinal do determinante.
- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ multiplicar a linha i com λ. Não esquecer que λ não podem ser nulo. No caso de estiver calculando o determinante, lembrar que o determinante é multiplicado por λ.

No caso do cálculo numérico, deverá escalonar usando somente estas três operações, o que é adequado para uma implementação computacional eficiente. Para o cálculo manual, costuma-se trocar a segunda operação por:

- $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_k$ combinação de multiplicar e somar o múltiplo. Lembrar que λ não pode ser nulo. Quando $\lambda = 1$, será operação usada no cálculo numérico. No caso de estiver calculando o determinante, lembrar que determinantes será multiplicado por λ.

Todo de escalonamento é efetuado em etapas, escolhendo as linhas de cima para baixo. Na primeira etapa, escolhemos a linha 1, na segunda etapa escolhemos a linha 2 e assim por diante. A linha escolhida em cada etapa é denominada de linha pivô (chave). Após escolher a linha de pivô, um elemento especial desta linha denominado de elemento de pivô será escolhido.

Quando a linha de pivô for a primeira linha, inicialmente o primeiro elemento será considerado elemento de pivô. Quando a linha de pivô for outras linhas, o elemento de uma coluna a direita do pivô anterior (da linha imediatamente acima) é denominado de elemento de pivô. Quando o elemento de pivô e todos os elementos da linha de baixo nesta coluna forem nulas, o pivô será deslocado para a direita. Mais precisamente, um elemento da linha de pivô é denominado de elemento pivô se todas elementos das linhas dele e de baixo dele nas colunas a esquerda são nulas, mas existe pelo menos um elemento não nulo na linha ou abaixo dela na coluna dele.

O objetivo de cada etapa é anular os elementos abaixo (Gauss) ou acima e abaixo (Gauss-Jordan) do elemento pivô através dos operadores elementares usando a linha desejada e a linha pivô. A eliminação gaussiana é usada, por exemplo, para converter imagens. Uma imagem nada mais é do que uma matriz e a inversão de cores de uma imagem corresponde a inversão da matriz por eliminação gaussiana.

A melhor forma de entender o processo de eliminação de Gauss é através de exemplos explicados. Nos acompanhe!

Referência:

Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares
https://www.amazon.com.br/Introduction-Applied-Linear-Algebra-Matrices-ebook/dp/B07CN2ZX7D?keywords=vectores+and+matrix&qid=1536919980&sr=8-1&ref=sr_1_1