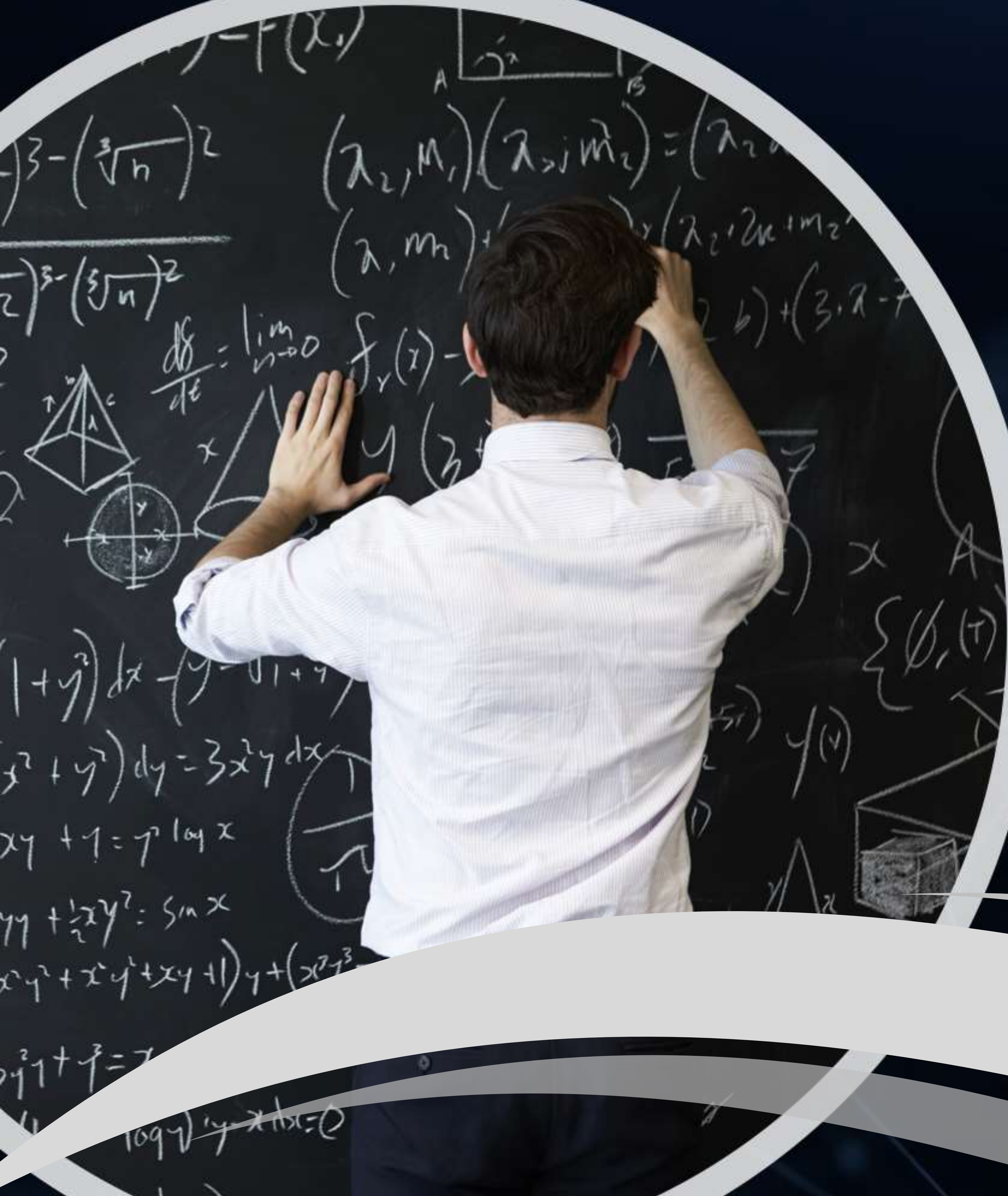


Matemática para Machine Learning

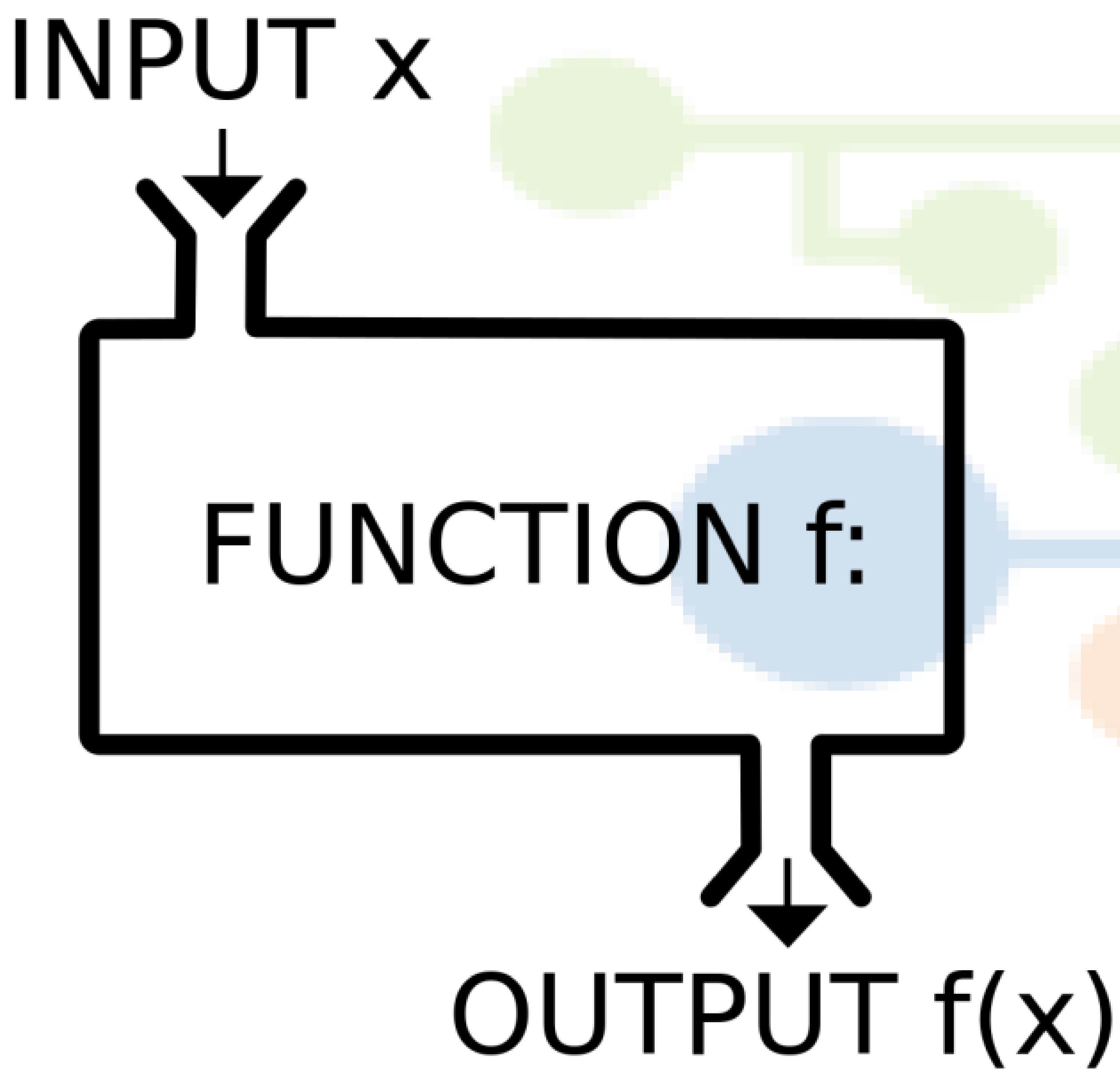
A sua base começa aqui!

Matemática para Machine Learning

Cálculo - Funções e Limites

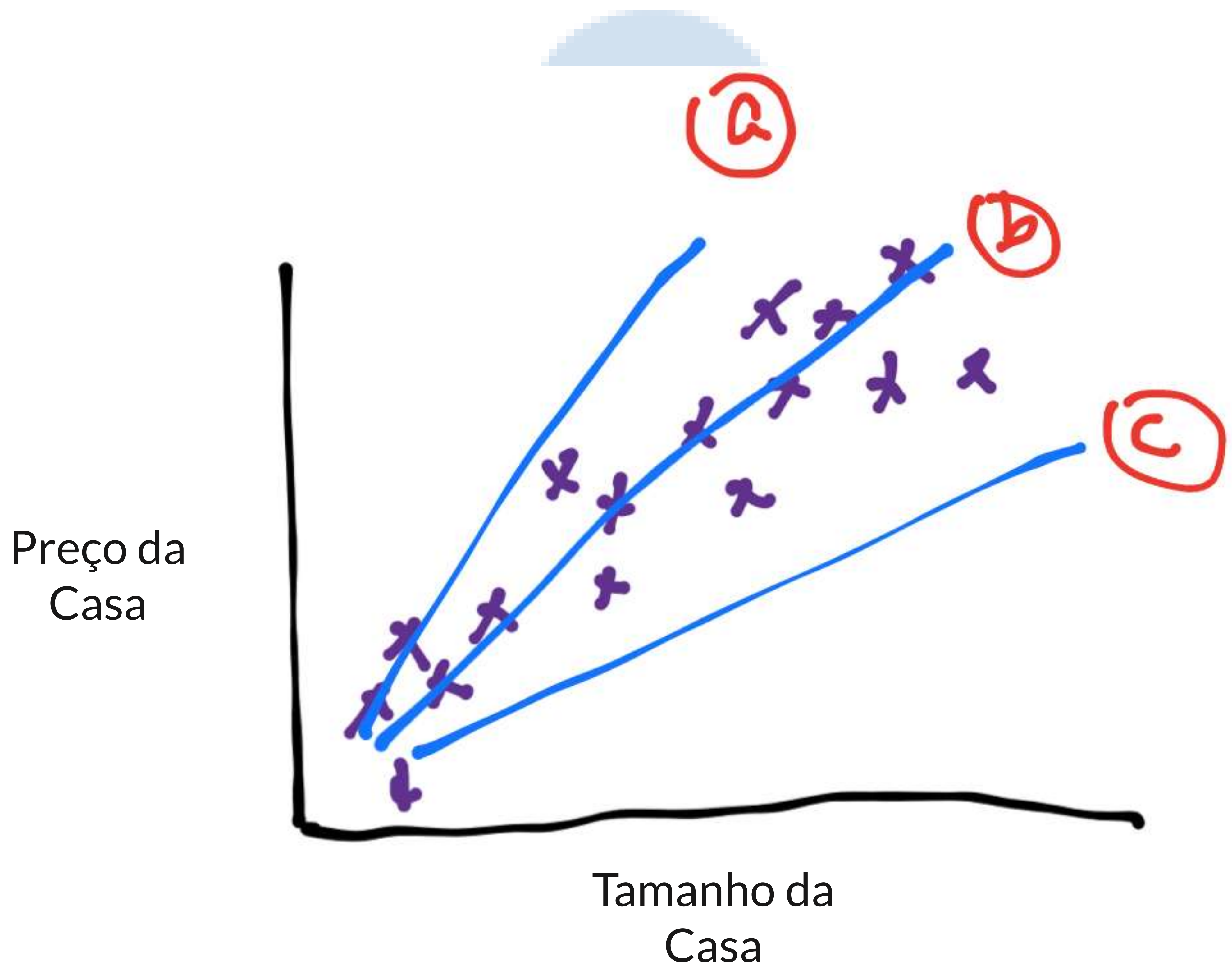
Data Science Academy

Cálculo - Funções e Limites



Grande parte das relações apresenta a propriedade de que a cada valor de uma variável corresponde um único valor da outra; essas relações são chamadas funções.

Cálculo - Funções e Limites

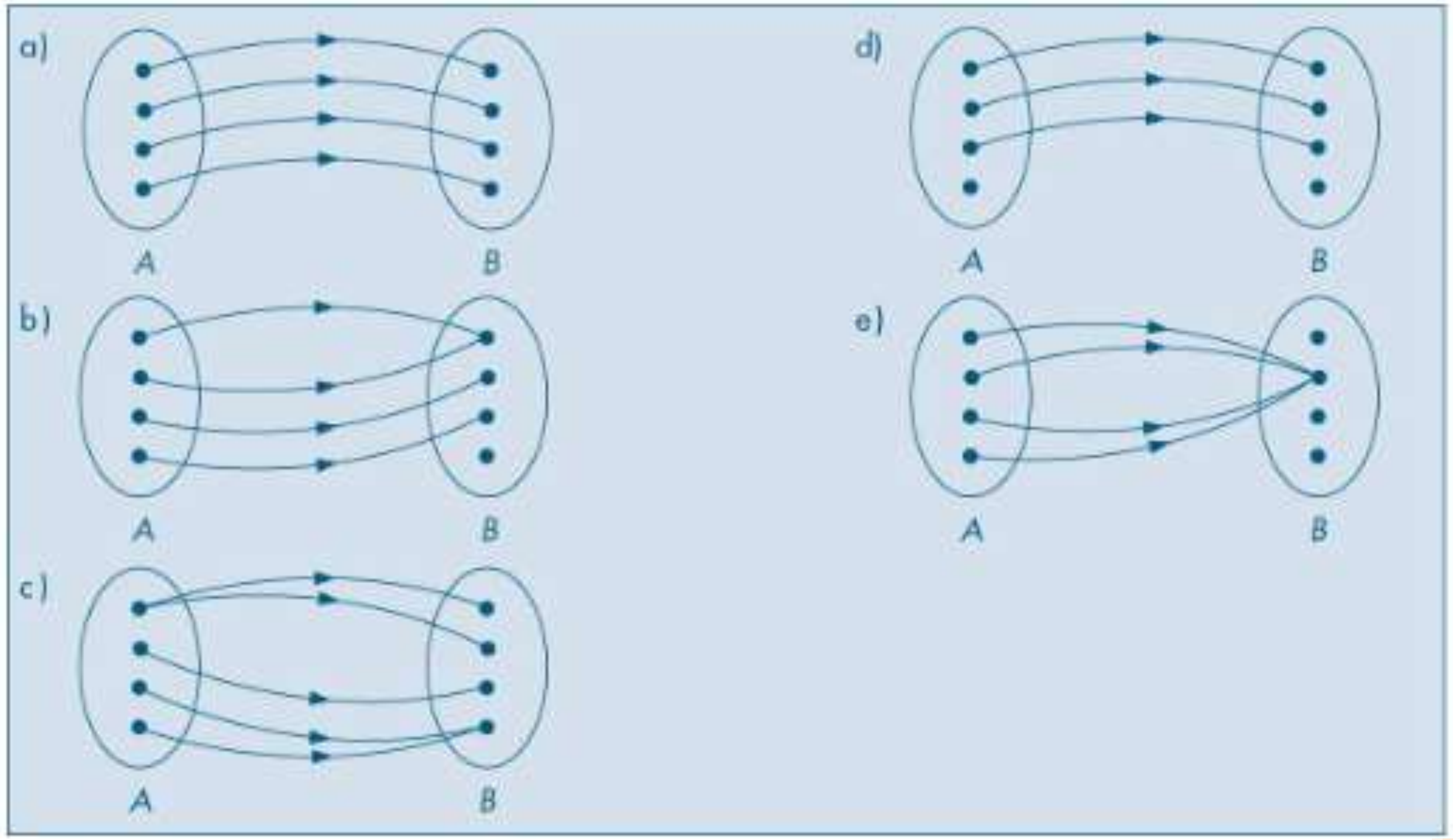


Matemática para Machine Learning

O Conceito de Função

Data Science Academy

O Conceito de Função

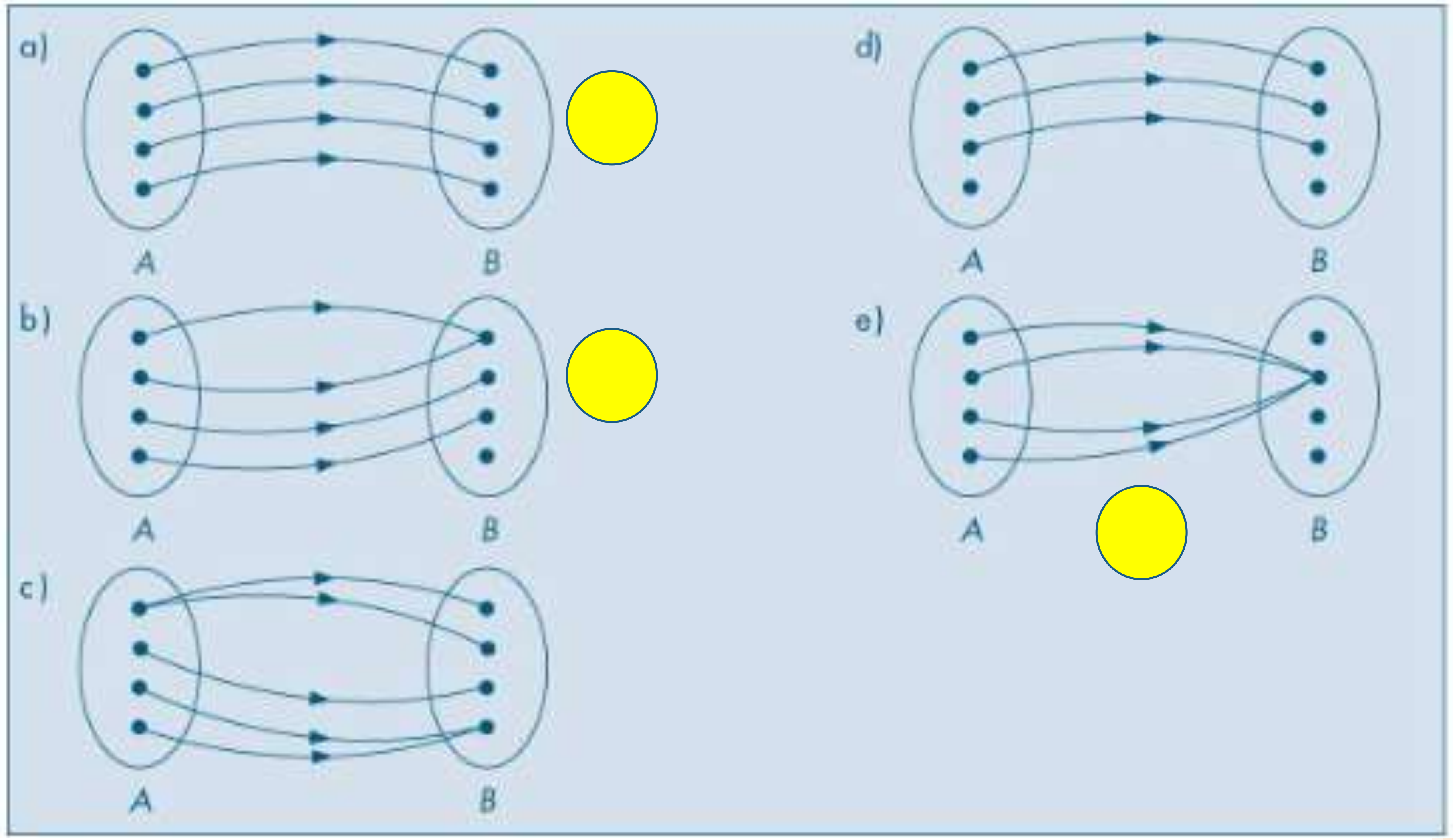


Uma relação f de A em B é uma função se e somente se:

1) Todo elemento x pertencente a A tem um correspondente y pertencente a B definido pela relação, chamado imagem de x;

2) A cada x pertencente a A não podem corresponder dois ou mais elementos de B por meio de f.

O Conceito de Função



Verificamos que as relações (a), (b) e (e) são funções de A em B.

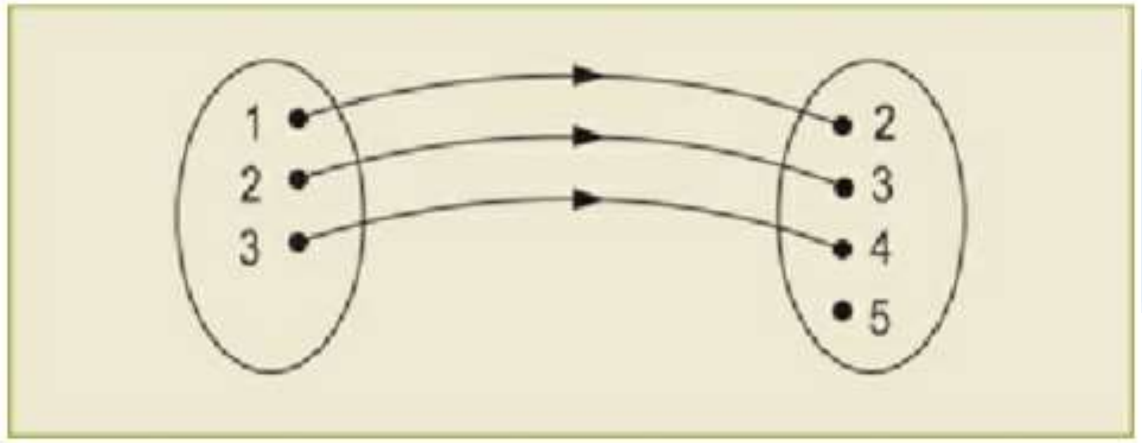
A imagem y também é habitualmente representada por f(x) (lê-se f de x);

x é chamada variável independente e y, variável dependente.

Matemática para Machine Learning

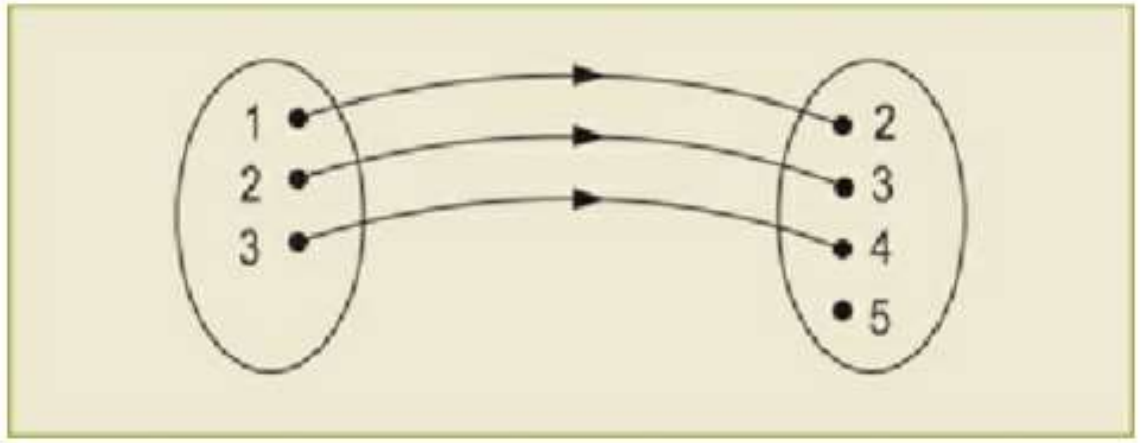
Domínio e Contradomínio

Domínio e Contradomínio



Se f é uma função com **domínio** em A e **contradomínio** em B, dizemos que f é uma função definida em A com valores em B. Se tanto A como B forem subconjunto dos reais, dizemos que f é uma função real de variável real.

Domínio e Contradomínio

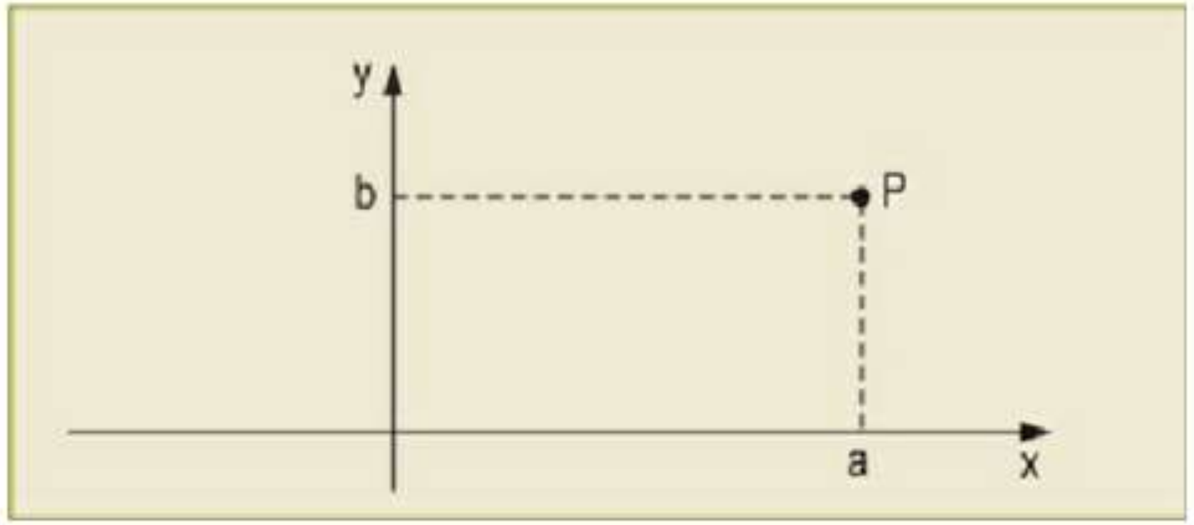


O domínio da função é o conjunto D = {1, 2, 3) e o conjunto imagem (ou contradomínio) é Im = {2, 3, 4}.

Quando os conjuntos A e B são numéricos, as relações são formadas de pares ordenados de números.

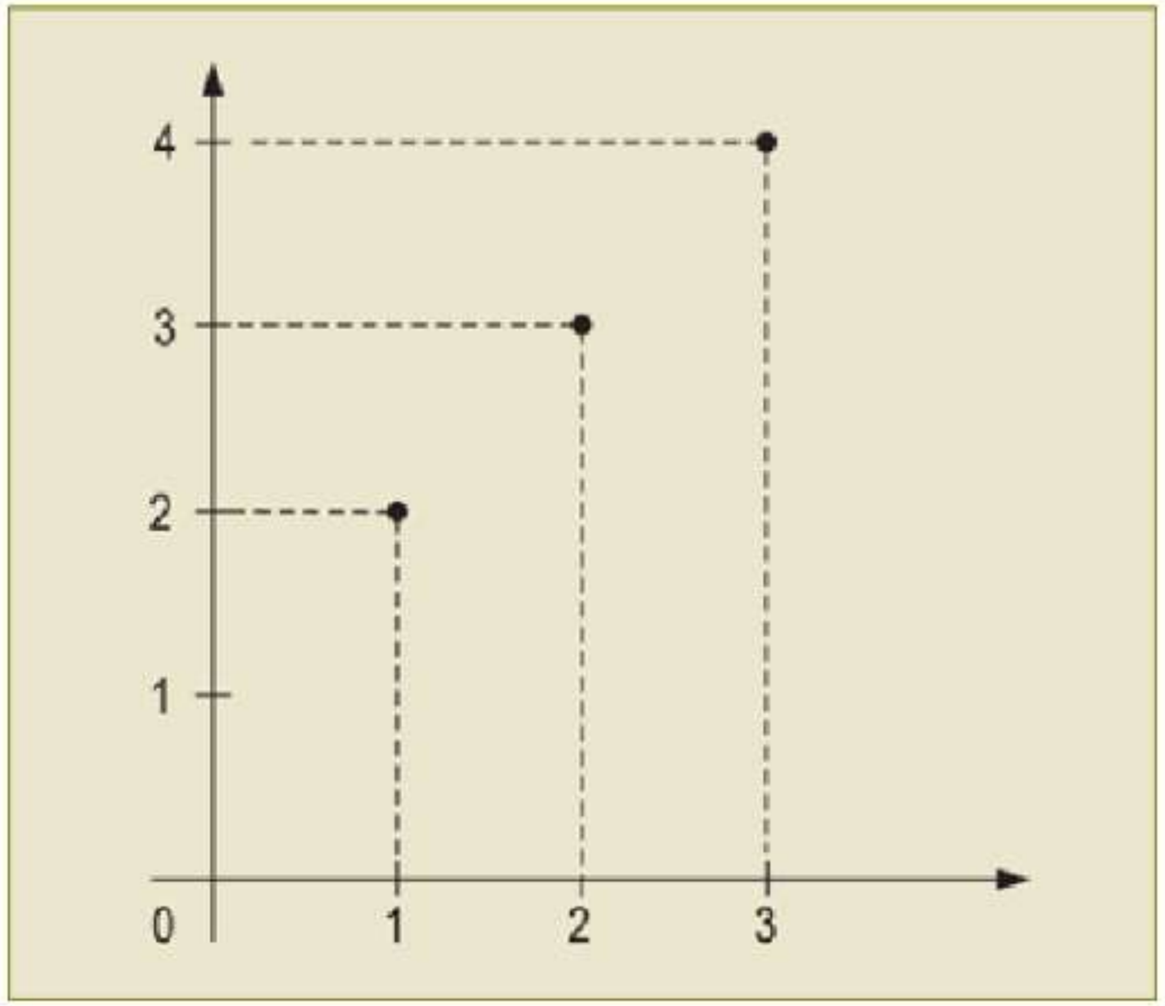
Um par ordenado de números é um conjunto formado por dois números em uma certa ordem.

Domínio e Contradomínio



Um par ordenado de números reais pode ser representado geometricamente por dois eixos perpendiculares, sendo o horizontal chamado eixo das abscissas, ou eixo x, e o vertical de eixo das ordenadas, ou eixo y.

Domínio e Contradomínio



Um par ordenado de números reais pode ser representado geometricamente por dois eixos perpendiculares, sendo o horizontal chamado eixo das abscissas, ou eixo x, e o vertical de eixo das ordenadas, ou eixo y.

O gráfico de uma função é o conjunto dos pontos que representam os pares ordenados (x, y) da função em que x é um elemento do domínio e y a sua imagem (ou contradomínio).

Matemática para Machine Learning

Normas Elementares Para o Estudo de Uma Função

Data Science Academy

Normas Elementares Para o Estudo de Uma Função

a) $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$

b) $f(x) = \sqrt{x-2}$

c) $f(x) = x^2 + 5x$

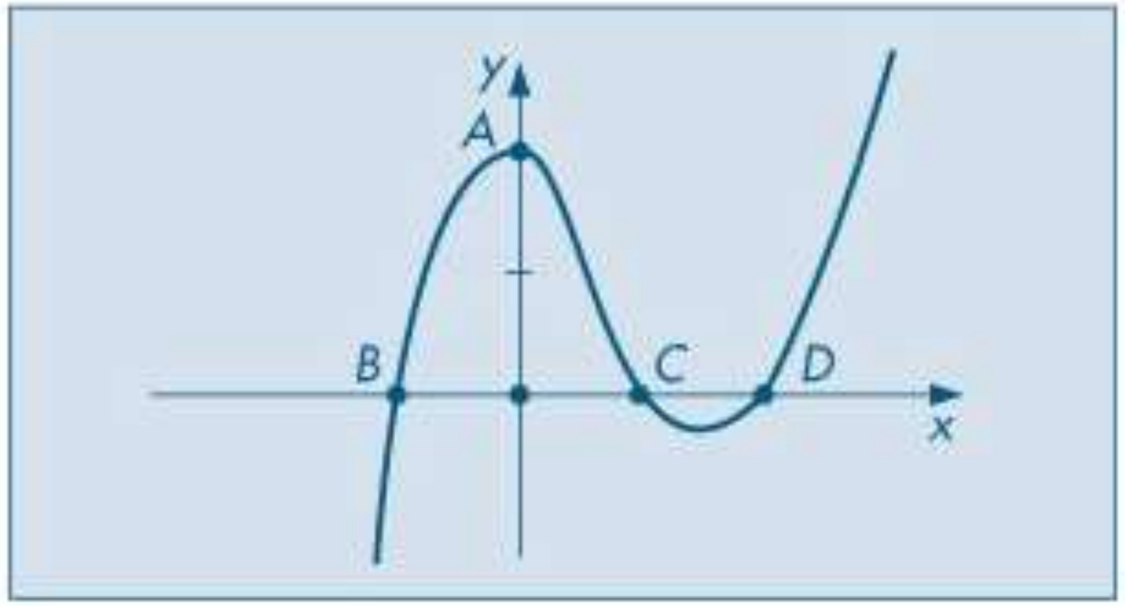
a) D = R – {3}, pois o valor x = 3 faz que o denominador seja zero (não existe a fração);

b) D = [2, ∞], pois para x < 2 o radicando é negativo e não existe a raiz quadrada;

c) D = R, pois neste exemplo x pode ser qualquer valor real.

Normas Elementares Para o Estudo de Uma Função

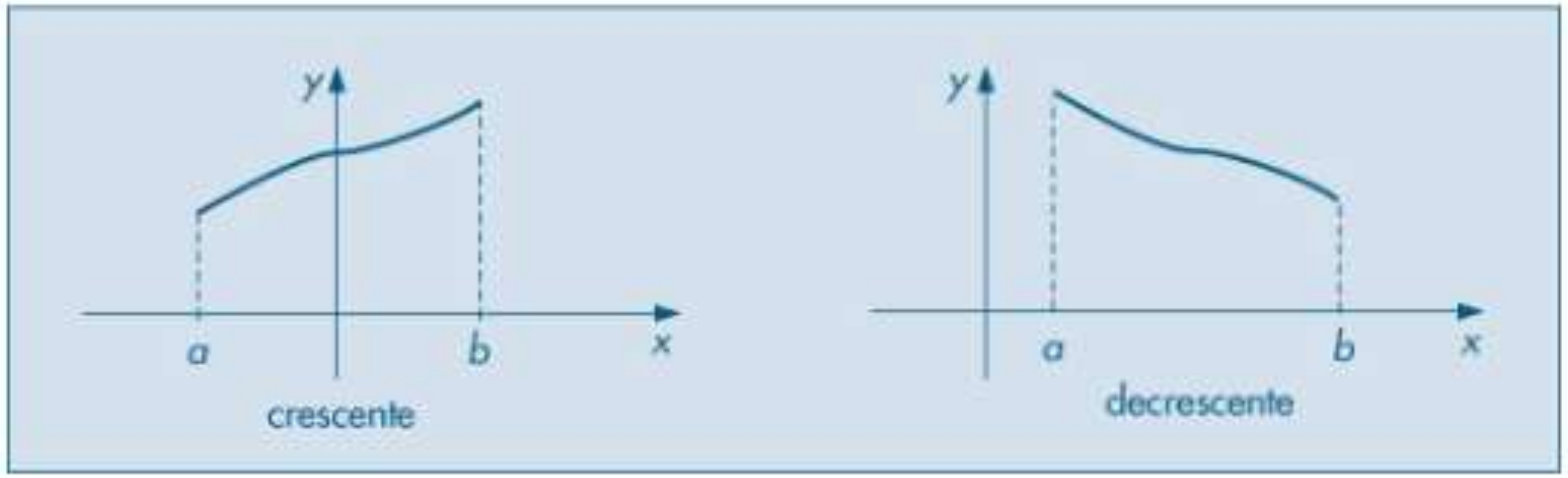
$$y = (x^2 - 1)(x - 2)$$



$$y = (0^2 - 1)(0 - 2) = 2$$

$$0 = (x^2 - 1)(x - 2) \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = 2$$

Normas Elementares Para o Estudo de Uma Função



Normas Elementares Para o Estudo de Uma Função

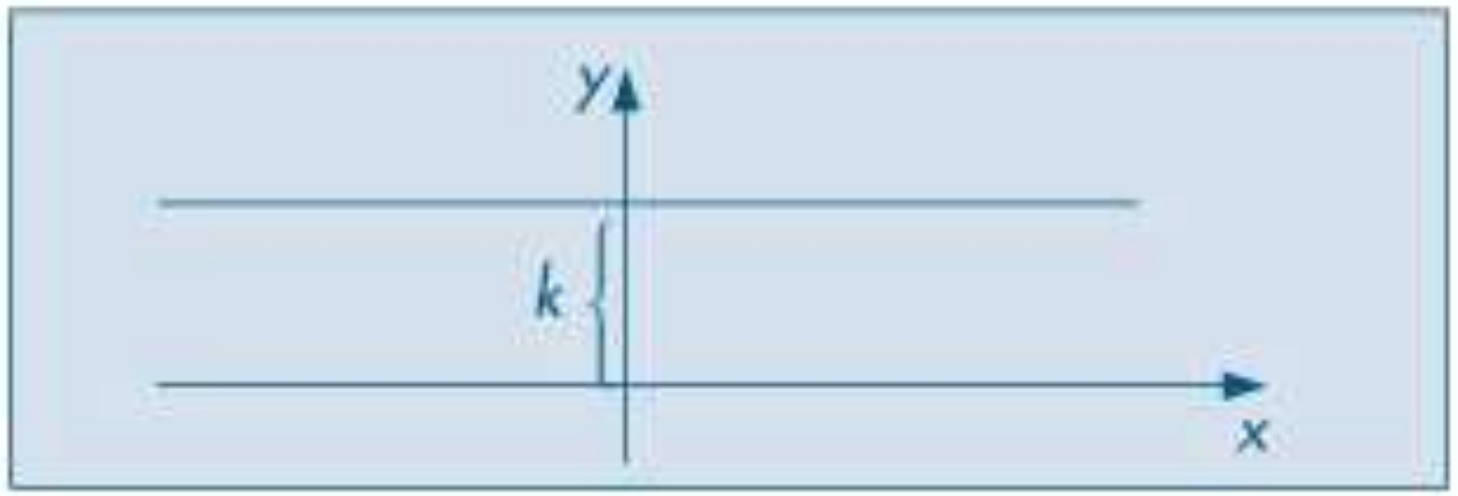
Estudar o sinal de uma função significa obter os valores de x para os quais y > 0 ou y < 0 ou y = 0.

Matemática para Machine Learning

Principais Funções Elementares e Suas Aplicações

Principais Funções Elementares e Suas Aplicações

É toda função do tipo y = k, em que k é uma constante real. Verifica-se que o gráfico dessa função é uma reta horizontal, passando pelo ponto de ordenada k.



Principais Funções Elementares e Suas Aplicações

Esse tipo de função apresenta um grande número de aplicações.

Uma função é chamada de função do 1o grau (ou função afim) se sua sentença for dada por

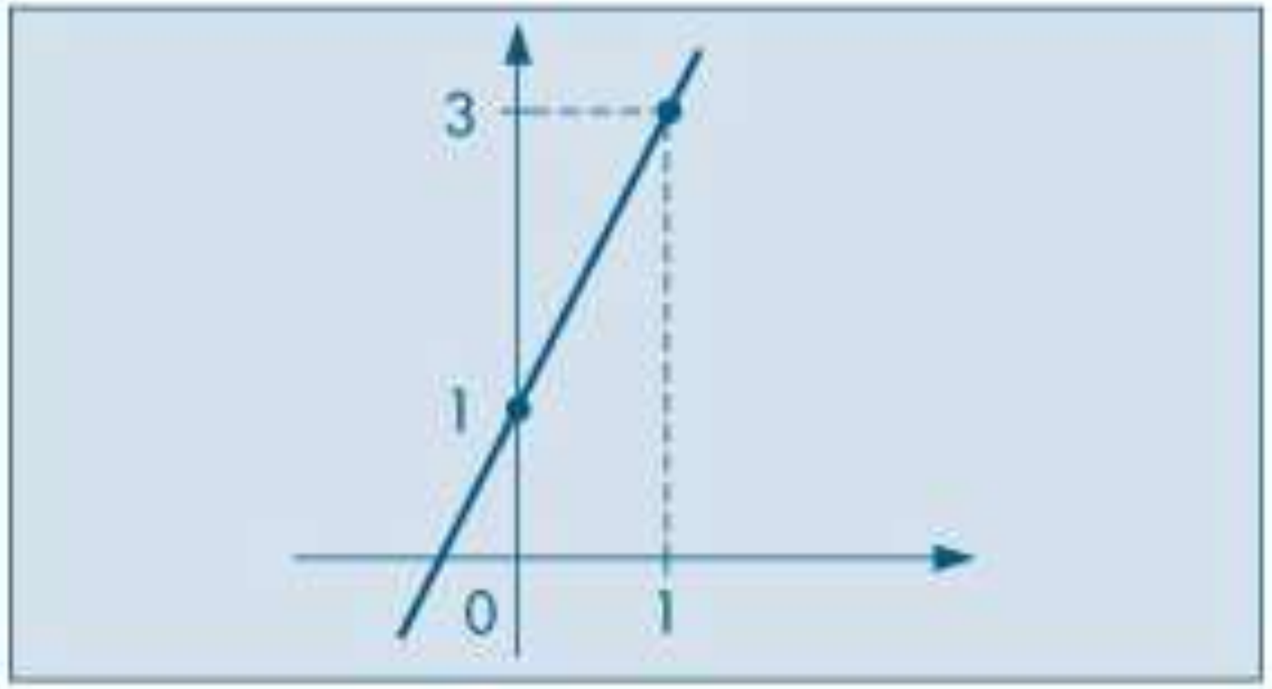
$$y = m \cdot x + n$$

m e n são constantes reais com $m \neq 0$.

Verifica-se que o gráfico de uma função do 1o grau é uma reta. Assim, o gráfico pode ser obtido por meio de dois pontos distintos (pois dois pontos distintos determinam uma reta).

Principais Funções Elementares e Suas Aplicações

$$y = 2x + 1$$



Atribuindo os valores 0 e 1 a x, temos os seguintes pontos:

(0, 1)
(1, 3)

Principais Funções Elementares e Suas Aplicações

$$y = m \cdot x + n$$

A constante n é chamada de coeficiente linear e representa, no gráfico, a ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo y.

A constante m é chamada de coeficiente angular e representa a variação de y correspondente a um aumento do valor de x igual a 1, aumento considerado a partir de qualquer ponto da reta; quando $m > 0$, o gráfico corresponde a uma função crescente, e, quando $m < 0$, o gráfico corresponde a uma função decrescente.

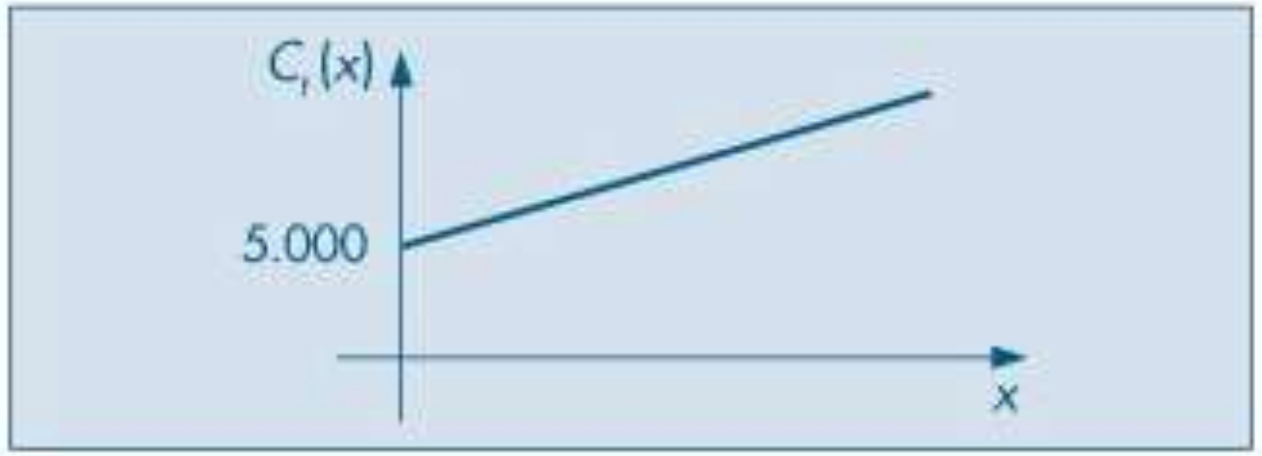
Principais Funções Elementares e Suas Aplicações

Aplicações:

Cálculo de custo, receita e lucro

$$C = C_F + C_V$$

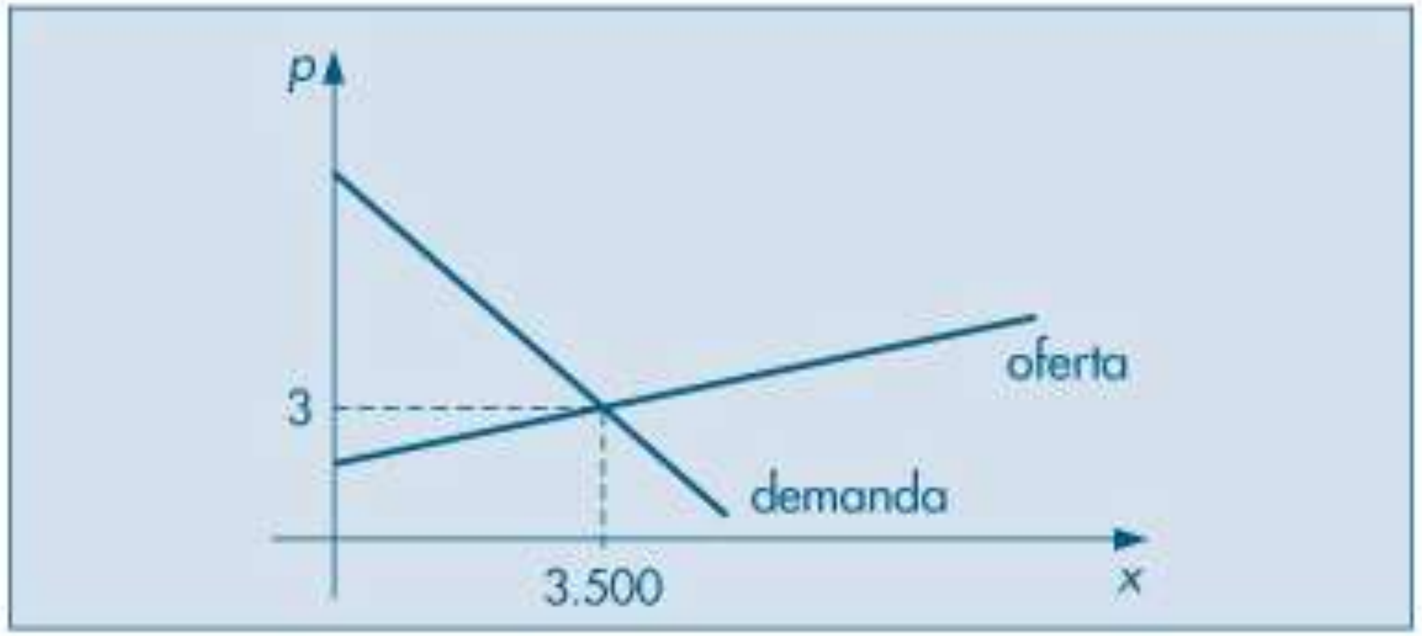
$$C = 5.000 + 10x$$



Principais Funções Elementares e Suas Aplicações

Aplicações:

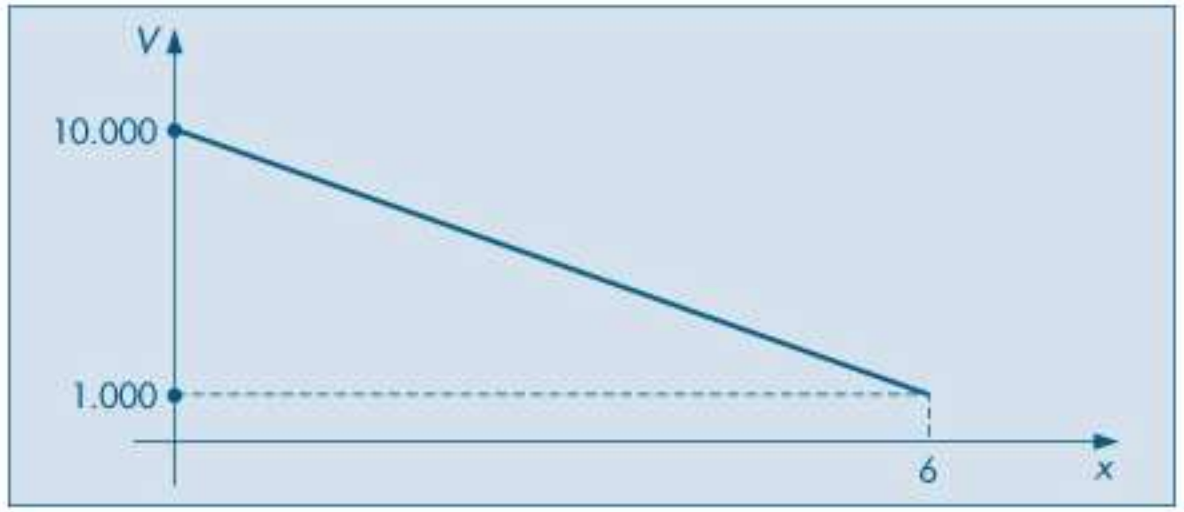
Demanda e Oferta



Principais Funções Elementares e Suas Aplicações

Aplicações:

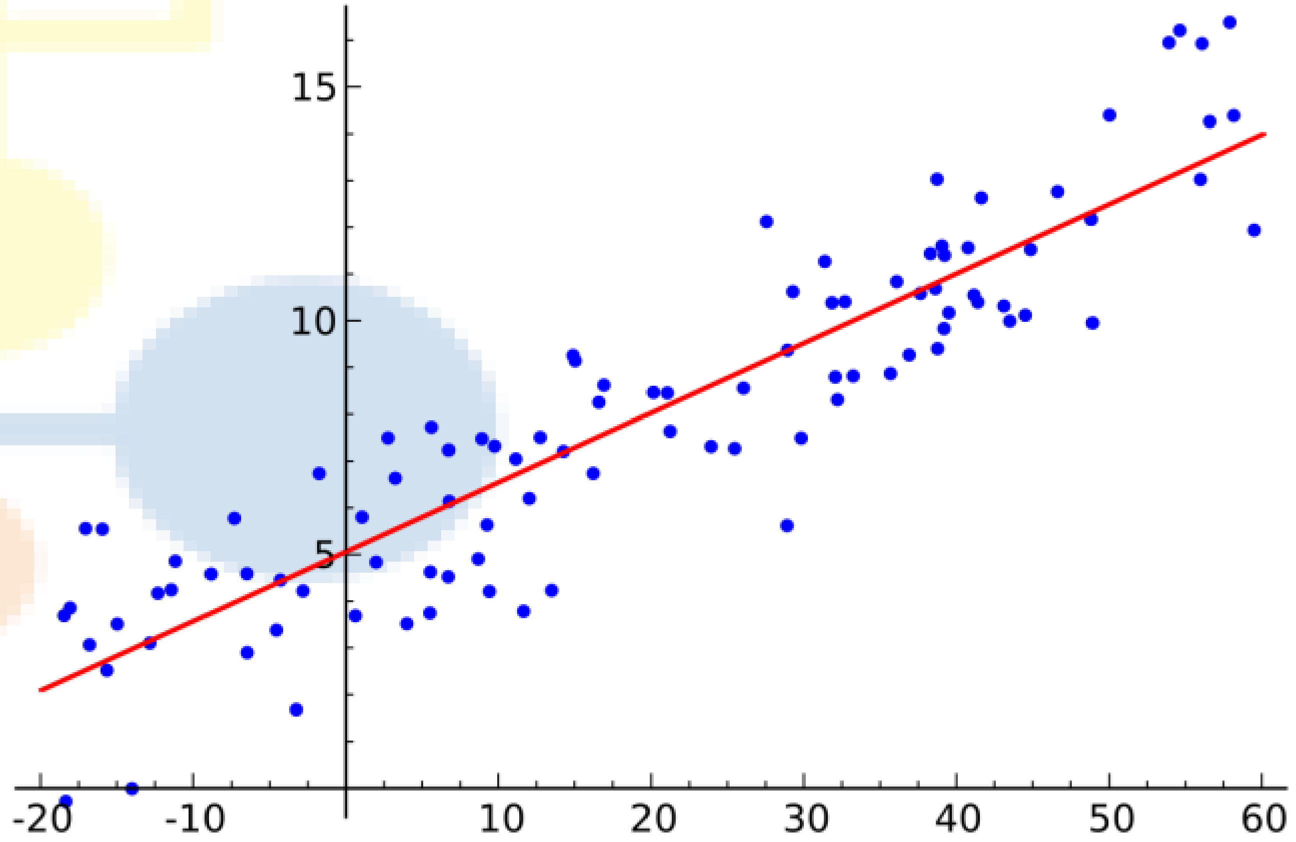
Depreciação Linear



Principais Funções Elementares e Suas Aplicações

Aplicações:

Regressão Linear (Machine Learning)



Principais Funções Elementares e Suas Aplicações

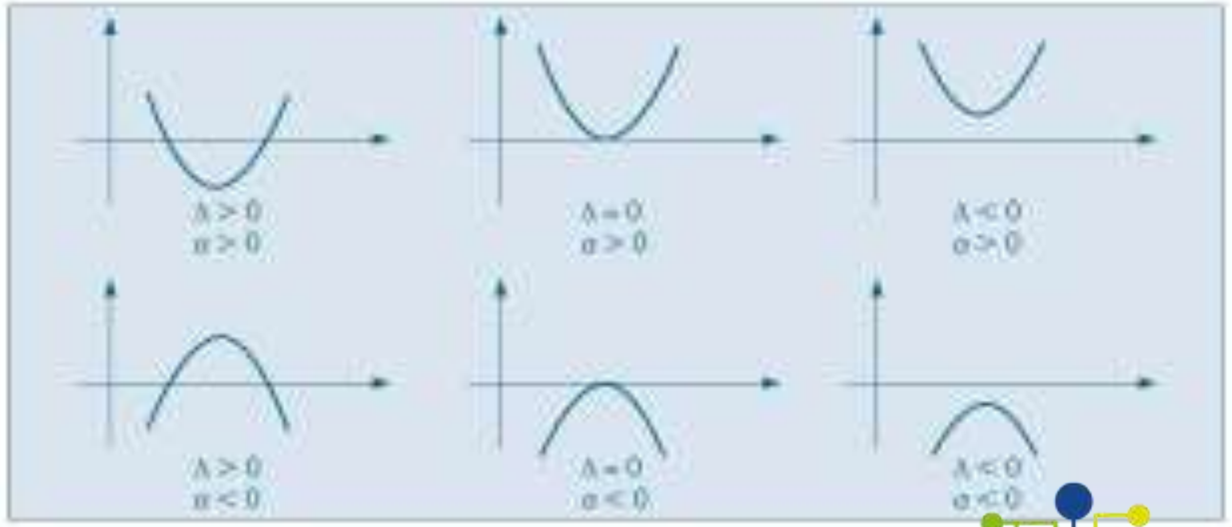
$$y = ax^2 + bx + c$$

Em que a, b e c são constantes reais com a ≠ 0. O gráfico desse tipo de função é uma curva chamada parábola. A concavidade é voltada para cima se a > 0, e voltada para baixo se a < 0

Principais Funções Elementares e Suas Aplicações

$$y = ax^2 + bx + c$$

Se a equação tiver duas raízes reais distintas ($\Delta > 0$), a parábola interceptará o eixo x em dois pontos distintos; se a equação tiver uma única raiz real ($\Delta = 0$), a parábola interceptará o eixo x num único ponto; finalmente, se a equação não tiver raízes reais ($\Delta < 0$), a parábola não interceptará o eixo x



Principais Funções Elementares e Suas Aplicações

Aplicações:

Receita e Lucro (Preço Variável)

A função de demanda de um produto é p = 10 – x, e a função custo é C = 20 + x.

$$R = p \cdot x$$
$$R = (10 - x)x$$
$$R = 10x - x^2$$

$$L = R - C$$
$$L = 10x - x^2 - (20 + x)$$
$$L = -x^2 + 9x - 20$$

Principais Funções Elementares e Suas Aplicações

É toda função cuja imagem é um polinômio da variável x, isto é, f é uma função polinomial de grau n, se:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x^1 + a_n$$

em que a0, a1, a2, ..., an são todos números reais com a0 ≠ 0, para garantir o grau n.

Principais Funções Elementares e Suas Aplicações

a) A função f(x) = 5 é uma função polinomial de grau 0 (função constante), e seu gráfico, como já vimos, é uma reta horizontal.

b) A função f(x) = 2x + 3 é uma função polinomial de grau 1, e seu gráfico, como já vimos, é uma reta.

c) A função f(x) = $x^2 - 7x + 12$ uma função polinomial de grau 2 (função quadrática), e seu gráfico, como já vimos, é uma parábola.

d) A função f(x) =$2x^3 + 6x^2 - 7x + 9$ uma função polinomial de grau 3.

Principais Funções Elementares e Suas Aplicações

O gráfico de funções polinomiais de grau 3 (ou maior que 3) não é feito com recursos elementares; utilizam-se habitualmente os conceitos de limites e derivadas que veremos neste e no próximo capítulo.

Principais Funções Elementares e Suas Aplicações

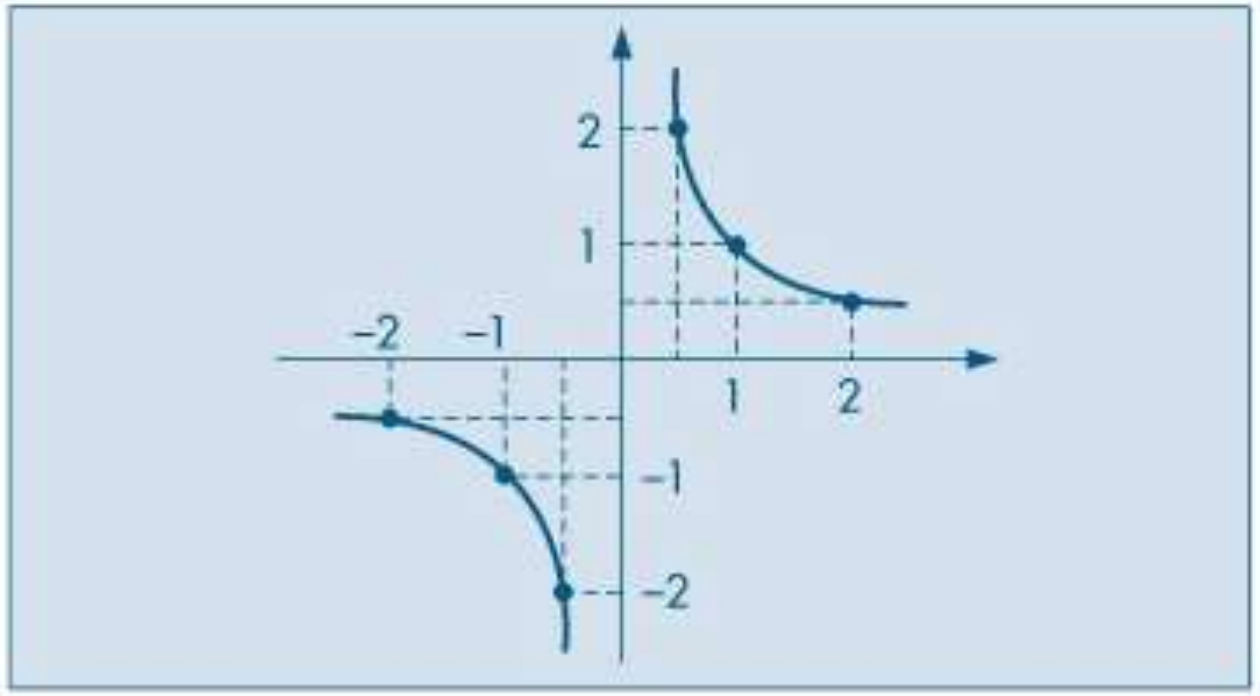
É toda função cuja imagem é o quociente de dois polinômios, sendo o denominador um polinômio não nulo. São exemplos de funções racionais as funções:

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2+8x+9}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

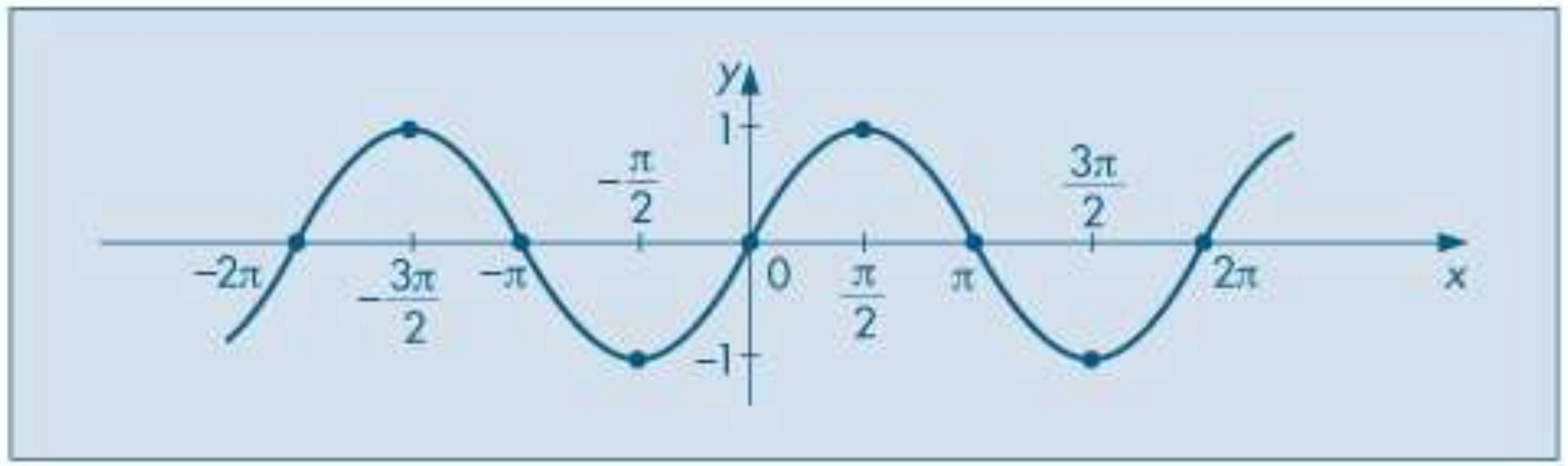
$$f(x) = \frac{5}{x-3}$$

Principais Funções Elementares e Suas Aplicações



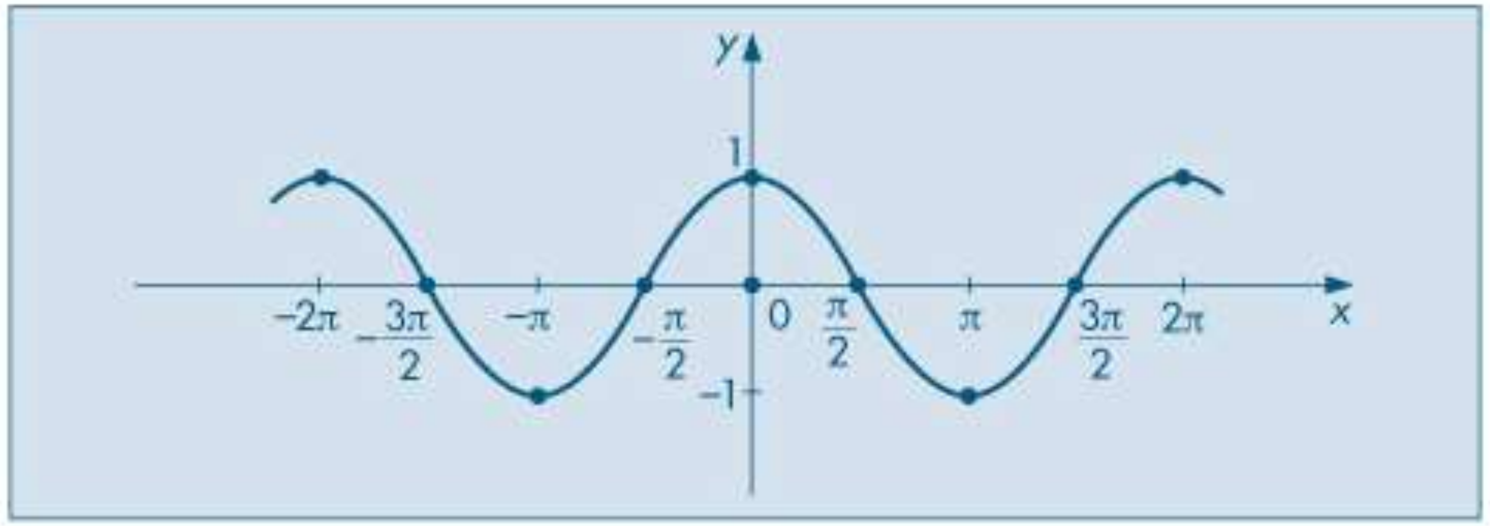
Principais Funções Elementares e Suas Aplicações

Função seno: f(x) = sen x



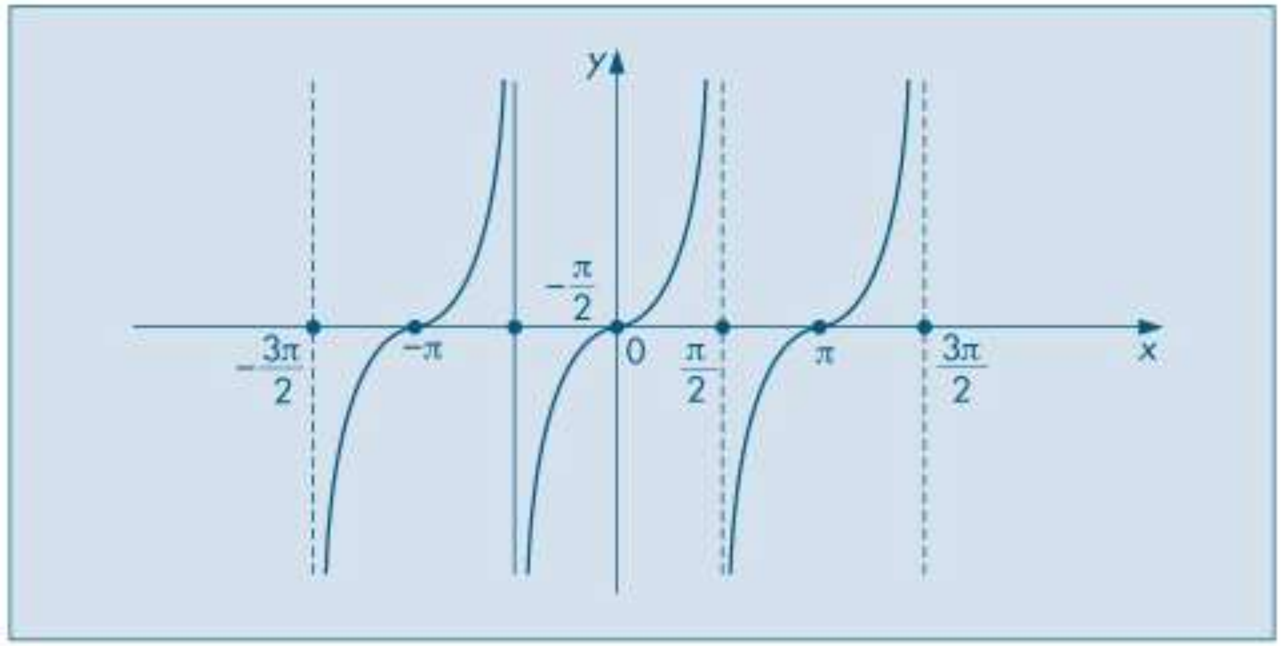
Principais Funções Elementares e Suas Aplicações

Função cosseno: $f(x) = \cos x$



Principais Funções Elementares e Suas Aplicações

Função tangente: $f(x) = \text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$



Matemática para Machine Learning

Sucessões ou Sequências

Data Science Academy

Sucessões ou Sequências

Chamamos de sucessão (ou sequência) a toda função real cujo domínio é o conjunto dos números naturais ou parte deste.

Sucessões ou Sequências

$$f(n) = \frac{1}{n} \quad n \in N^*$$

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f(2) = \frac{1}{2}$$

$$f(3) = \frac{1}{3}$$

$$\left\{(1, 1), \left(2, \frac{1}{2}\right), \left(3, \frac{1}{3}\right), \left(4, \frac{1}{4}\right), \ldots\right\}$$

Habitualmente, costuma-se representar uma sucessão escrevendo-se ordenadamente suas imagens.

Matemática para Machine Learning

Limites de Funções

Data Science Academy

Limites de Funções

O conceito de limite de funções tem grande utilidade na determinação do comportamento de funções nas vizinhanças de um ponto fora do domínio e no comportamento de funções quando x aumenta muito (tende para infinito) ou diminui muito (tende para menos infinito).

Limites de Funções

Além disso, o conceito de limite é utilizado em derivadas, assunto do próximo capítulo.

Limites de Funções

Intuitivamente, dada uma função f(x) e um ponto b do domínio, dizemos que o limite da função é L quando x tende a b pela direita ($x \to b+$) se, à medida que x se aproxima de b pela direita (isto é, por valores superiores a b), os valores de f(x) se aproximam de L. Simbolicamente, escrevemos:

Função

$$\lim_{x \to b} f(x) = L$$

Se aproxima de b pelo eixo x.

Qual é o valor de y mais próximo?

Limites de Funções

Analogamente, dizemos que o limite da função é M quando x tende a b pela esquerda ($x \to b^-$) se, à medida que x se aproxima de b pela esquerda (isto é, por valores inferiores a b), os valores de f(x) se aproximam de M. Simbolicamente escrevemos:

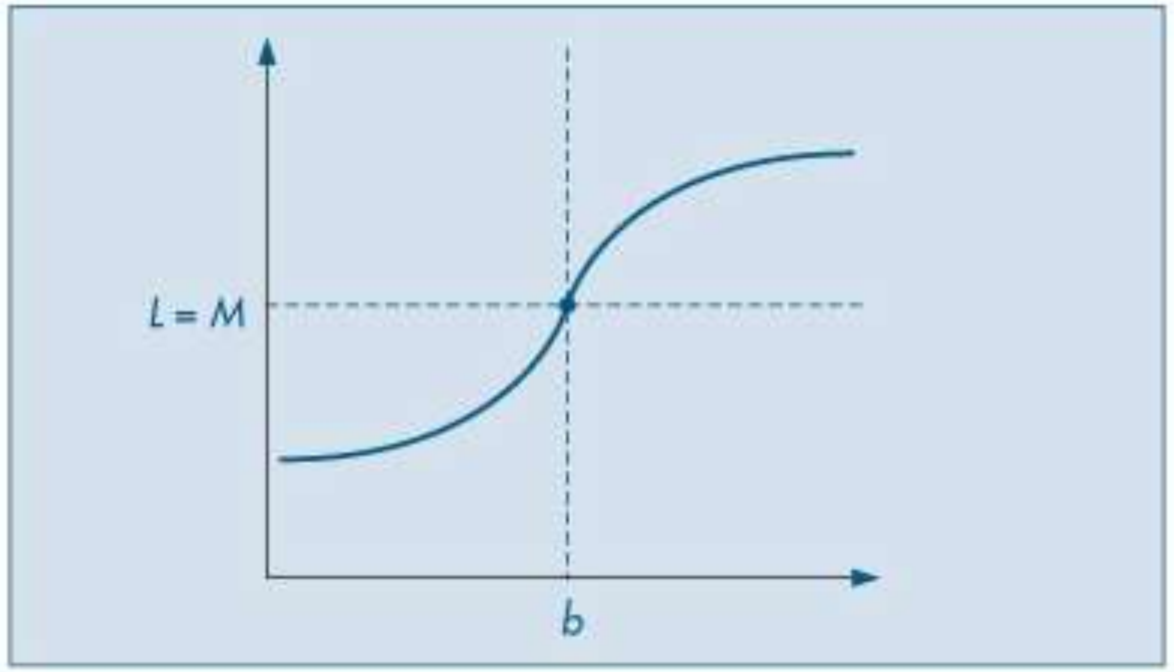
Função

$$\lim_{x \to b} f(x) = M$$

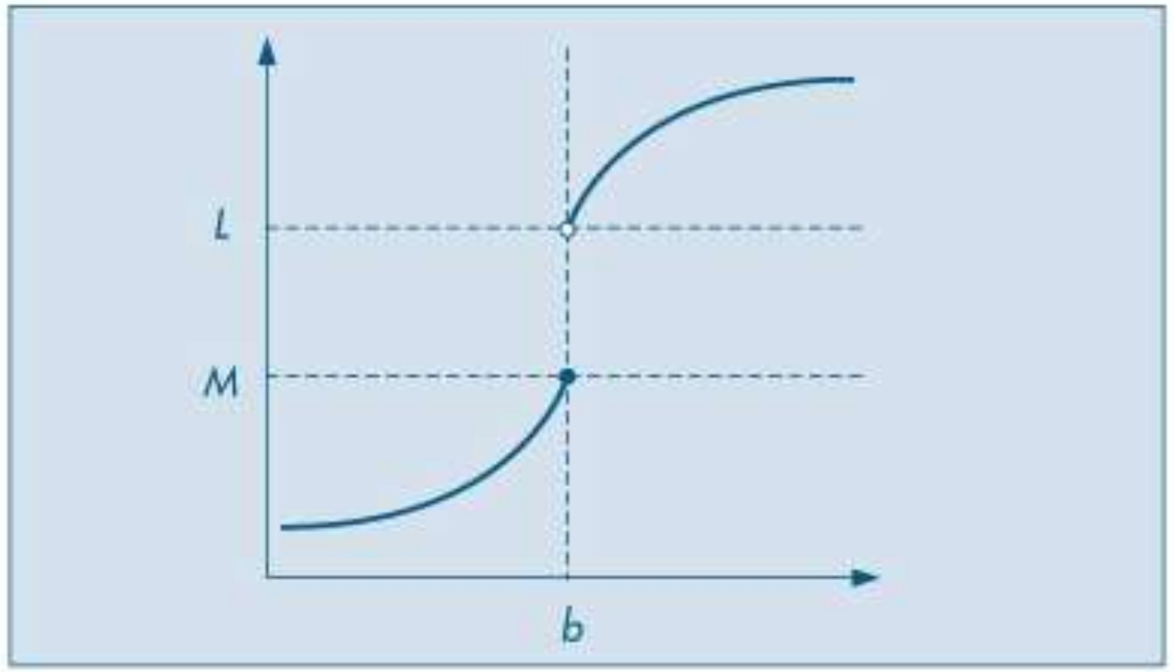
Se aproxima de b pelo eixo x.

Qual é o valor de y mais próximo?

Limites de Funções



Caso L = M, ou seja, os limites laterais são iguais, dizemos que existe o limite de f(x) quando x tende a b e escrevemos lim f(x) = L = M.



Quando os limites laterais L e M são distintos, dizemos que não existe o limite de f(x) quando x tende a b (embora existam os limites laterais).

Matemática para Machine Learning

Formas Indeterminadas

Formas Indeterminadas

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$$

Vejamos qual o limite quando x tende a 2.

Se x tender a 2 pela esquerda ou pela direita, notamos que o numerador tende a 0, bem como o denominador. Teríamos então uma fração impossível de ser calculada (0 / 0) e que é chamada **de forma indeterminada**.

Formas Indeterminadas

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$$

Entretanto...

Formas Indeterminadas

Observamos que a expressão de f(x) pode ser simplificada ao fatorarmos o denominador.

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$$

Assim, as funções abaixo têm um comportamento idêntico (exceto para x = 2).

$$f(x) = \frac{(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x+2}$$

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} \text{ e } h(x) = \frac{1}{x+2}$$

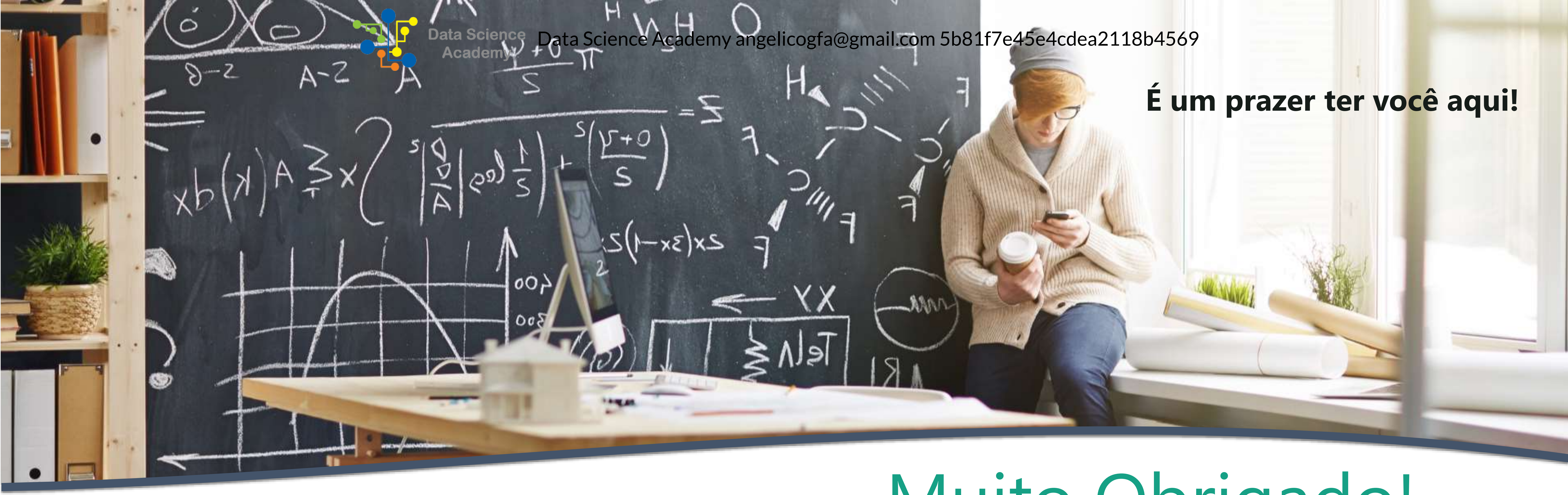
Formas Indeterminadas

No cálculo do limite de f(x), quando x tende a 2, não interessa o que acontece quando x = 2 (pois quando x tende a 2 ele é diferente de 2). Logo, no cálculo do limite f(x) e h(x) têm o mesmo comportamento. Portanto:

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$$

$$f(x) = \frac{(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x+2}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$



É um prazer ter você aqui!

Muito Obrigado!

Pela Confiança em Nosso Trabalho.

Continue Trilhando Uma Excelente Jornada de Aprendizagem!

Data Science Academy