www.datascienceacademy.com.br

Matemática Para Machine Learning

Calculando o Determinante por Escalonamento

O *posto* da matriz A é definido como sendo número de linhas não nulas após o escalonamento e costuma ser denotado por p(A). Dado um sistema linear, a forma escalonada equivalente da matriz aumentada permite classificar o sistema quanto as suas soluções, assim como saber quantas variáveis livres existem na solução do sistema.

Um sistema de equações é equivalente a forma escalonada. Isto significa que a solução é exatamente a mesma. Portanto, basta saber escalonar e classificar a forma escalonada para classificar um sistema.

Um sistema escalonado não tem solução se, e somente se, tiver uma linha com lado da matriz do sistema nula e lado das constantes não nulas. Tal linha resulta na equação do tipo

$$0 = c \neq 0$$

Como as linhas totalmente nulas (tanto na parte da matriz do sistema, como das constantes), costumam ignorar e analisar as linhas que restarem.

Embora o desenvolvimento por Laplace no cálculo de determinantes permita calcular para matriz n x n e é importante para efetuar demonstrações, é bastante trabalhoso para calcular para matrizes acima de 3 x 3. O método eficaz para cálculo de determinantes principalmente para matrizes acima de 3 x 3 é pelo processo de escalonamento.

Seja A a matriz original e $\bar{A}$, a matriz escalonada. Então o determinante de $\bar{A}$ pode ser obtido como produto dos elementos das diagonais. Pela propriedade dos determinantes, podemos mostrar que a operação

$$L_i \longleftarrow \lambda L_k$$

faz multiplicar o determinante por λ e somar os múltiplos de outras linhas não altera o valor do determinante. Também sabemos que a troca de linha inverte o sinal do determinante. Com isso, podemos concluir que

$$(-1)^p \left(\prod \lambda\right) \det A = \det \bar{A}$$

onde p é o número de troca de linhas.

Cálculo do Determinante através de Escalonamento

Escalonamos a matriz até chegar em uma matriz triangular, pois o determinante de uma matriz triangular é facilmente calculado: ele é simplesmente o produto dos elementos na diagonal principal.

Ao escalonar a matriz, usamos as propriedades de determinantes e analisamos como o determinante é modificado cada vez que realizamos uma operação elementar:

1) Ao trocarmos duas linhas, o sinal do determinante se modifica.
2) Quando dividimos uma linha por um número, o determinante da matriz anterior é igual ao determinante da matriz resultante multiplicado por este número.
3) O determinante não se altera quando somamos a uma linha a mesma somada de um múltiplo escalar de outra linha.

Exemplo de cálculo do determinante por escalonamento (perceba que apenas aplicamos as operações elementares estudadas anteriormente):

$$
\begin{aligned}
&\det\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} -\det\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \\
&\overset{\frac{1}{3}L_1}{=} -3\det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \\
&\overset{L_3 - 2L_1}{=} -3\det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{bmatrix} \\
&\overset{L_3 - 5L_2}{=} -3\det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix} \\
&= -3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-30) = 180
\end{aligned}
$$