Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ensino Superior do Seridó
Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas

Equações diferenciais ordinárias e algumas aplicações

Danielle Dantas Nóbrega

2016

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ensino Superior do Seridó
Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas

Equações diferenciais ordinárias e algumas aplicações

por

Danielle Dantas Nóbrega

sob orientação da

Prof^{a}. Ma. Maria Jucimeire dos Santos

e coorientação do

Prof. Me. Ivanildo Freire Pereira

Caicó-RN
Junho de 2016

Catalogação da Publicação na Fonte
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial do Centro de Ensino Superior do Seridó -

Nóbrega, Danielle Dantas.
Equações diferenciais ordinárias e algumas aplicações / Danielle Dantas Nóbrega. - Caicó-RN: UFRN, 2016.
58f.: il.

Orientadora: Ma. Maria Jucimeire dos Santos.
Coorientador: Me. Ivanildo Freire Pereira.
Monografia (licenciatura em Matemática) Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ensino Superior do Seridó - Campus Caicó. Departamento de Ciências Exatas e da Terra.

1. Equações diferenciais ordinárias. 2. Lineares e não-lineares. 3. Aplicações. I. Santos, Maria Jucimeire dos. II. Pereira, Ivanildo Freire. III. Título.

RN/UF/BS-CAICÓ CDU 51

ANEXO 4 – ATA DE DEFESA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE ENSINO SUPERIOR DO SERIDÓ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E APLICADAS
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Ata da Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC)

Aos dezesseis dias do mês de junho de dois mil e dezesseis, em sessão pública, iniciada às 15 horas, teve início a defesa do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) da graduanda Danielle Dantas Nóbrega, Intitulado "Equações diferenciais ordinárias e algumas aplicações", requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática. Constituiu-se a Banca Examinadora formada pelos seguintes professores: Maria Jucimeire dos Santos, orientadora, Luis Gonzaga Vieira Filho, primeiro examinador e Gabriel de Araújo Ramalho, segundo examinador. A professora Maria Jucimeire dos Santos, na qualidade de Presidente da Banca Examinadora, dirigiu os trabalhos convidando a discente a discorrer sobre o conteúdo do seu TCC. Concluída a explanação, a discente foi arguida pela Banca Examinadora. Em seguida, a referida comissão reuniu-se para deliberar e atribuir, por unanimidade, a menção Aprovada.

A referida monografia recebeu a nota: 9,0

Nada mais havendo a tratar, depois de lida e aprovada, a presente ata foi assinada pela Banca Examinadora.

Caicó, 16 de Junho de 2016.

Maria Jucimeire dos Santos
Prof. Ma. Maria Jucimeire dos Santos (orientadora)

Prof. Me. Luis Gonzaga Vieira Filho (1º Examinador)

Gabriel de Araújo Ramalho
Prof. Gabriel de Araújo Ramalho (2º Examinador)

Equações diferenciais ordinárias e algumas aplicações

por

Danielle Dantas Nóbrega

Monografia apresentada à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ensino Superior do Seridó do Campus Caicó-RN, como requisito parcial para a obtenção do título de Graduação em Licenciatura em Matemática.

Aprovada por:

Prof^a. Ma. Maria Jucimeire dos Santos - UFRN (Orientadora)

Prof. Me. Luis Gonzaga Vieira Filho - UFRN

Prof. Gabriel de Araújo Ramalho - UFRN

"O abandono da Matemática traz dano a todo o conhecimento, pois aquele que a ignora não pode conhecer as outras ciências ou as coisas do mundo."(Roger Bacon).

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, autor do meu destino, por todas as coisas boas e más que me aconteceram, pois foi por meio delas, que sucedeu minha formação profissional e pessoal, foi uma jornada difícil, mas de muitas vitórias e superações.

Agradeço a minha mãe Maria Lúcia Dantas Nóbrega pelo carinho, confiança e por todas as suas orações, obrigada por está sempre ao meu lado. A meu pai Valdemar Nóbrega (in memoriam), tenho certeza que onde estiver está muito feliz por mais esta etapa que se conclui em minha vida. A minha querida sobrinha Marina Nóbrega Costa (in memoriam), foi tão curto o tempo conosco, no entanto tão intenso, obrigada por sua existência meu anjo. Aos meus irmãos Michelle e Marcelo e a meu cunhado Mácio, que sempre acreditaram que iria concretizar mais esta etapa da minha vida.

Sou eternamente grata a todos os meus Professores, que contribuíram para o meu ensino e aprendizagem, que perdurarão por toda vida. Agradeço ao meu professor coorientador Me. Ivanildo Freire Pereira e à professora orientadora M^a. Maria Jucimeire dos Santos, por toda ajuda durante as orientações, serei sempre grata, pois graças a confiança e incentivo consegui concluir este trabalho. Destaco também, minha gratidão aos professores: Dr. Francisco de Assis Bandeira e Dr. Deilson de Melo Tavares, a compreensão de vocês me fizeram prosseguir neste curso.

Agradeço aos meus colegas universitários e principalmente aos amigos: Reginaldo, Jonas, Denise, Lidiane, Wagner e Renan, por estarem sempre presentes nos meus dias, tornando-os mais agradáveis.

Agradeço a todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para a minha formação acadêmica.

Resumo

O presente trabalho expõe uma breve história a respeito das equações diferenciais, seguido de definições, classificações e métodos de soluções que envolvem equações diferenciais ordinárias. No primeiro momento, será apresentado, um breve contexto histórico dando destaque a alguns matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento das equações diferenciais, no segundo momento, definiremos as equações diferenciais ordinárias, e direcionaremos este trabalho para as equações diferenciais ordinárias lineares de primeira e segunda ordem e equações diferenciais ordinárias não-lineares, e por último apresentaremos algumas aplicações das equações diferenciais ordinárias não lineares e lineares, as quais limitam-se as equações lineares ordinárias de segunda ordem. Para desenvolver este trabalho foi realizado um levantamento bibliográfico com pesquisa em fontes impressas e eletrônicas.

Palavras Chaves: Equações diferenciais ordinárias. Lineares e não-lineares. Aplicações.

Abstract

This work presents a brief history about the differential equations, followed by definitions, classifications and methods of solutions involving ordinary differential equations. At first, will be presented a brief historical context highlighting some mathematicians who contributed to the development of differential equations, the second time, define the differential equations, and will direct this work for linear ordinary differential equations of first and second order and ordinary differential equations nonlinear, and finally present some applications of ordinary differential equations nonlinear and linear, which are limited to ordinary linear equations of second order. To develop this work was carried out a literature review with research in print and electronic sources.

Key-words: ordinary differential equations. Linear and non-linear. Applications.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O Estudo das equações diferenciais começou no século XVII com o estudo de cálculo por Newton e Leibniz, sabe-se ainda que as primeiras aplicações foram nas ciências físicas, posteriormente em outras áreas, no entanto, mesmo após passar-se tanto tempo as equações diferenciais, continuam com problemas importantes e atrativos, a serem solucionados, essa é uma área de conhecimento que está profundamente enleado ao avanço geral da matemática.

O objetivo deste trabalho é mostrar ao leitor que as equações diferenciais ordinárias não lineares e ordinárias lineares, sejam de primeira ou segunda ordem, podem ser aplicadas a outras ciências, e quem sabe assim despertar no leitor a curiosidade de aprofundar seus conhecimentos nessa área da matemática.

O interesse pela matemática aplicada surgiu logo no início do curso. Mais tarde ao cursar a disciplina equações diferenciais ordinárias houve uma afinidade com o assunto, que despertou bastante interesse, tendo em vista que envolve outras ciências. Escolhi especificamente, investigar sobre equações diferenciais ordinárias pela curiosidade e com o intuito de aprofundar os meus conhecimentos. É satisfatório o uso do Cálculo para resolução das equações, consolidando os conhecimentos adquiridos nas diversas disciplinas de cálculo e entendendo a sua importância, que muitas vezes não fica claro durante o curso.

O presente trabalho apresenta-se da seguinte forma: 1. Introdução, 2. Uma breve história das equações diferenciais, 3. Definições, classificações e métodos de soluções que envolvem equações diferenciais lineares, 4. Aplicações de equações diferenciais ordinárias, lineares homogêneas, lineares não-homogêneas, não-lineares, sendo de primeira e segunda ordem. A pesquisa caracterizou-se por um levantamento bibliográfico, em fontes impressas como livros disponíveis na biblioteca; como também artigos e dissertações encontradas no periódico Capes.

Capítulo 2

Uma breve história das equações diferenciais

A teoria das equações diferenciais, segundo Diacu (2004, p 1) foi aplicada primeiramente às ciências físicas, posteriormente a outras atividades humanas. Envolvendo desde a engenharia e a biologia até a medicina, os negócios, a história, os esportes e as artes. Elas associam uma função incógnita a uma ou mais de suas derivadas, resolvê-las significa encontrar todas as suas soluções, isto é, todas as funções que satisfazem a equação. Como por exemplo, a equação

$$x' = x$$

relaciona a função $x = x(t)$ assim como também a sua derivada $x' = \frac{dx}{dt}$.

Boyce (2006, p 15-16) relata uma visão histórica das equações diferenciais, onde a mesma iniciou-se com o estudo de cálculo durante o século XVII, pelos matemáticos Isaac Newton (1642 - 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), nessa concepção mostra que a evolução das equações está coesa ao avanço geral da matemática. Nesse período de desenvolvimento inicial, alguns matemáticos tiveram um maior ressalto, dentre eles podemos citar Newton, Leibniz, Jakob Bernoulli, Johann Bernoulli, Cauchy, Daniel Bernoulli, Euler, Lagrange, Laplace, Gauss e Lipschitz.

Newton, forneceu a base para a aplicação das equações diferenciais no século XVIII, através do desenvolvimento do cálculo e explicações dos princípios básicos da mecânica. Ele classificou as equações diferenciais de primeira ordem de acordo com as formas $\frac{dy}{dx} = f(x)$; $\frac{dy}{dx} = f(y)$ e $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ e expandiu um método para resolver a última equação na qual $f(x,y)$ é um polinômio em x e y, usando séries[1] infinitas.

Leibniz basicamente autodidata em matemática chegou aos resultados fundamentais do cálculo independentemente, pouco depois de Newton, no entanto, foi ele o primeiro a publicar seus estudos, no ano 1684. Diferente de Newton que considerava variáveis mudando com o tempo, Leibniz estudava as variáveis x e y variando sobre sequências de valores infinitamente próximos, ele introduziu a notação dx e dy como as diferenças entre os valores sucessivos dessas sequências, ele tinha consciência da importância de uma boa notação e por isso estabeleceu a notação de derivada $\frac{dy}{dx}$, assim como o sinal de integral. Em 1691 descobriu o método de separação de variáveis e desenvolveu o método de redução de equações homogêneas em equações separáveis, no ano de 1694, o procedimento para resoluções de equações lineares de primeira ordem.

Leibniz mantinha contato por cartas com outros matemáticos, e foi por esse meio de comunicação, que foram resolvidos muitos problemas em equações diferenciais, em especial com os irmãos Jakob Bernoulli (1654 - 1705) e Johann Bernoulli (1667 - 1748) os quais contribuíram significativamente com o desenvolvimento de métodos para resolução de equações diferenciais e expansão no campo de suas aplicações.

Segundo Teixeira (2012, p 16) Jakob Bernoulli, em 1690 resolveu a equação diferencial $y^{'} = \frac{a}{\sqrt[2]{(a/(b^2y-a^3))}}$, e no mesmo artigo, usou pela primeira vez a palavra "integral" no sentido moderno. Johann Bernoulli resolveu a equação $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{ax}$ e o problema da catenária, uma curva de equação transcendente a qual era subentendida a partir do modo como a curva era construída e que satisfaz a equação diferencial $y^{''} = \frac{w}{H}\sqrt[2]{(1+(y^{'})^2)}$. O estudo da catenária encontra-se mais detalhado na dissertação de Talavera (2008).

Chinchio relata que o avanço do cálculo proporcionou a resolução de inúmeros problemas, os quais puderam ser modelados matematicamente na forma de equações diferenciais e vários desses problemas como por exemplo a resolução da braquistócrona, um problema que se destinava a determinar a forma de uma curva ligando dois

[1]Seja $(a_n)_{n\epsilon N}$ uma sequência de números reais, então: a soma infinita $a_1+a_2+a_3+...+a_n+... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é chamada série, onde cada número a_i é um termo da série, onde a_n é o termo genérico da série. Para definir a soma de infinitas parcelas, consideram-se as somas parciais.

$$\begin{gathered} S_1 = a_1 \\ S_2 = a_1 + a_2 \\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots \\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n. \end{gathered}$$

pontos distintos sobre um plano vertical, foram resolvidos explicitamente por grandes matemáticos como os da família Bernoulli e Leonhard Euler, mas com o passar do tempo eles perceberam que não seria possível obter procedimentos gerais de resolução explícita para as equações diferenciais, e no século XVII, pesquisadores desta ciência começaram a procurar outros métodos de estudo das equações diferenciais que não a sua solução explícita. Nessa época teve grande destaque Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) que demonstrou a existência de soluções para uma grande parte das equações diferenciais.

Daniel Bernoulli, filho de Johann, destacava um interesse maior nas equações diferenciais e suas aplicações, é o seu nome que está associado à equação de Bernoulli em Mecânica dos Fluídos, foi ele o primeiro a estudar as funções que hoje são conhecidas como funções de Bessel.

Leonhard Euler (1707 - 1783), o maior matemático do século XVIII, aluno de Johann na universidade e colega de Daniel, foi o matemático mais produtivo, chegando suas obras completas a acumular mais de 70 volumes grossos, e seus interesses incluíam todas as áreas da matemática e muitos campos de aplicação, matemático este que mesmo após ter perdido a visão continuou seus trabalhos em ritmo acelerado até o dia de sua morte. Entre o ano de 1734 e 1735, Euler identificou a condição para que equações diferenciais de primeira ordem sejam exatas; no ano de 1739 desenvolveu o método de variação de parâmetros e em 1743 demonstrou a teoria de fatores integrantes e no mesmo artigo encontrou a solução geral de equações lineares homogêneas com coeficientes constantes. Estendeu esse último resultado para equações não homogêneas de 1750 - 1751. Frequentemente usou a série de potências para solucionar equações diferenciais, incluiu o uso de aproximações numéricas, o desenvolvimento de métodos numéricos, os quais proveram "soluções" aproximadas para algumas equações. Nas equações diferenciais parciais, equações que contém mais de uma variável independente, fez importantes contribuições. Foi ele quem deu o primeiro tratamento sistemático do cálculo de variações e de acordo com Teixeira (2012, p 16) trabalhou com séries de Fourier nas quais foram encontradas as funções de Bessel em seus estudos sobre vibrações de uma membrana circular esticada. Antes do nascimento de Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830), Friedrich Wilhelm Bessel (1784 - 1846) e Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827), Euler já havia aplicado transformadas de Laplace para resolver equações diferenciais.

Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813) veio a suceder Euler na cadeira de Matemática na Academia de Berlim em 1766, e antes disso, no ano de 1762 até

1765, contribuiu com as relações diferenciais elementares, mostrando que a solução geral de uma equação linear homogênea de ordem n é uma combinação linear de n soluções independentes. Destacou-se também por seu trabalho fundamental em equações diferenciais parciais e cálculo de variações.

Pierre-Simon de Laplace (1749 - 1827) eleito para Academia de Ciências em 1773, teve destaque no campo da mecânica celeste. A equação de Laplace é imprescindível em muitos ramos da física matemática, ele a estudou extensivamente em conexão com a atração gravitacional. Seu método "A transformada de Laplace" permite solucionar uma equação diferencial ordinária de coeficientes constantes por meio da resolução de uma equação algébrica.

No final do século XVIII, já haviam sido descoberto diversos métodos elementares para solucionar equações diferenciais ordinárias. Segundo Teixeira (2012, p 17) já no começo do século XIX, Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) e Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857) contribuíram no desenvolvimento das teorias e conceitos de funções de variáveis complexas. Gauss percebeu que a teoria das funções de uma variável complexa era a chave para alcançar muito dos resultados necessários em equações diferenciais aplicadas. Cauchy desenvolveu o método da equação característica o qual foi uma importante ferramenta na análise e solução de muitas equações diferenciais parciais. Já no final do século XIX iniciou-se a investigação de questões teóricas de existência e unicidade. No ano de 1876, Rudolf Lipschitz (1832 - 1903) desenvolveu o teorema de existência para soluções de equações diferenciais de primeira ordem.

O desenvolvimento das soluções de determinadas equações diferenciais ainda continua como objeto de pesquisa, com problemas atrativos e importantes ainda não resolvidos. Para muitos matemáticos, conhecer seus resultados básicos e aplicações de equações diferenciais ordinárias é de extrema importância para quem pretende prosseguir seus estudos nessa área da Matemática.

Capítulo 3

Equação Diferencial

Equações diferenciais são equações que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes.

As equações podem ser classificadas quanto ao tipo, a ordem e a sua linearidade.

3.1 Classificação pelo tipo

As equações diferenciais dividem-se em dois tipos, que são as equações diferenciais ordinárias e as equações diferenciais parciais.

Definição 3.1.1: *Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) são equações que contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma única variável independente.*

Com o intuito de esclarecer a definição anterior, ilustraremos dois exemplos.

Exemplo 1: A equação $\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x$ apresenta duas variáveis dependentes u e v, e apenas uma única variável independente x. De acordo com a definição anterior, temos uma equação diferencial ordinária.

Exemplo 2: No caso da equação $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3y = x^2$, nota-se que existe uma variável dependente y e uma variável independente x. Portanto é uma equação diferencial ordinária.

Perceba que o número de variáveis dependentes não define uma EDO, visto que é caracterizada por possuir apenas uma única variável independente. Nos nossos exemplos, os números de variáveis dependentes são diferentes, no entanto, por haver apenas uma variável independente, ambas são equações diferenciais ordinárias.

Definição 3.1.2: *Equações Diferenciais Parciais (EDP) são equações que envolvem* *as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes e duas ou mais variáveis independentes.*

Da mesma forma, ilustraremos dois exemplos.

Exemplo 1: Na equação $\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = x$ temos duas variáveis dependentes u e v, e duas variáveis independente y e x. Como existe mais de uma variável independente a equação é uma EDP.

Exemplo 2: Para a equação $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y$, nota-se que existe uma única variável dependente z, e duas variáveis independente x e y. Logo, temos uma equação diferencial parcial.

Portanto, a quantidade de variáveis dependentes não tem importância, pois o que realmente define uma equação diferencial parcial é possuir mais de uma variável independente**.** Logo, conclui-se que as equações diferenciais ordinárias diferenciam das equações diferenciais parciais, porque enquanto as equações diferenciais ordinárias envolvem funções de uma variável e suas derivadas, as equações diferenciais parciais envolvem funções de muitas variáveis e suas derivadas.

3.2 Classificação pela ordem

Definição 3.2.1: *A ordem de uma equação diferencial é dada de acordo com a derivada de maior ordem que nela aparece, podemos representar equação diferencial ordinária geral de n-ésima ordem como,*

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, ..., \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0.$$

A ordem da derivada pode ser exemplificada nos exemplo que seguem.

Exemplo 1: A equação $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}$, apresenta duas derivadas de maior ordem que são $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, podemos observar ainda que essa equação possui duas variáveis independentes. Logo é uma equação diferencial parcial de segunda ordem.

Exemplo 2: Nesta equação $x\frac{d^3 y}{dx^3} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$, podemos observar que a derivada de ordem maior é $\frac{d^3 y}{dx^3}$, tendo em vista que $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4$ é uma derivada de primeira ordem elevada a quarta potência. Assim por definição, temos uma equação de terceira ordem.

No exemplo 1, coincidiu que temos duas derivadas de maior ordem, sendo estas de segunda ordem, são elas $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, entretanto, para definir sua ordem não é necessário a equação apresentar mais de uma derivada de ordem maior, basta existir pelo menos uma derivada, como segue no exemplo 2.

3.3 Classificação pela linearidade

As equações diferenciais classificam-se em linear e não-linear.

Definição 3.3.1: *Equação Linear são equações cujos lados, direito e esquerdo, são funções lineares, sendo a potência de cada termo que envolve y de grau 1, em relação à incógnita e suas derivadas. É uma equação da forma*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \tag{3.1}$$

e possui as duas propriedades:

- *A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau*;
- *Cada coeficiente depende apenas de uma variável independente x.*

Ilustraremos os seguintes exemplos, com a finalidade de esclarecer a definição anterior.

Exemplo 1: A equação $x^3y^{(4)} - x^2y^{''} + 4xy^{'} - 3y = 0$, está escrita da mesma forma que a equação (3.1), todos os termos envolvendo y tem potência 1 e seus coeficientes estão em função apenas de x, que é a variável independente. Com isso, podemos afirmar que é uma equação linear.

Exemplo 2: Diferentemente do exemplo 1, a equação $x^2dy + (y - xy - xe^x)\ dx = 0$ não está explicitamente na forma da (3.1). No entanto se dividirmos por dx, obtemos:

$$x^2\frac{dy}{dx} + y - xy - xe^x = 0,$$

reorganizando a equação, onde colocamos y em evidência, e adicionando xe^x a ambos os lados da igualdade.

$$x^2\frac{dy}{dx} + (1-x)y = xe^x,$$

obtemos uma equação da forma definida. Assim, podemos afirmar que a equação $x^2dy + (y - xy - xe^x)dx = 0$ é linear, onde $a_1(x) = x^2$, $a_0(x) = (1-x)$ e $g(x) = xe^x$.

Definição 3.3.2: *Equação não-linear são as equações que não seguem as propriedades das equações lineares.*

Os exemplos que seguem, explicam um pouco mais a definição anterior.

Exemplo 1: Note que a equação $x\frac{d^3y}{dx^3} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$, possui uma derivada elevada a quarta potência, descumprindo a primeira propriedade da definição de equação linear. Caracterizando assim uma equação não linear.

Exemplo 2: Observe que a equação $y\frac{dy}{dx}+2y=1+x^2$, tem um de seus coeficientes em função de y (variável dependente), onde só deveria depender apenas de x (variável independente). Com isso, não satisfaz a segunda propriedade da definição, a qual cada coeficiente depende apenas de uma variável dependente x. Portanto, essa equação é não-linear.

3.4 Solução de uma equação diferencial

Definição 3.4.1: *Qualquer função f definida em algum intervalo I, que quando substituída na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade, é chamada de solução para a equação no intervalo. Ou seja, uma solução para a equação diferencial*

$$F\left[x, y, y^{'}, ..., y^{n}(x)\right] = 0,$$

é uma função f que possui pelo menos n derivadas e satisfaz a equação

$$F\left[x, f(x), f^{'}(x), ..., f^{n}(x)\right] = 0,$$

para todo x pertencente ao intervalo.

A resolução do exemplo a seguir tem como finalidade esclarecer resoluções das equações diferenciais.

Exemplo 1: Dada a equação $y^{'}=25+y^2$, devemos verificar se $y=5\ tg\ 5x$ é uma solução para essa EDO. Como $y=5\ tg\ 5x$ então $y^{'}=25\sec^2 5x$.

Substituindo y e $y^{'}$ na equação, temos:

$$25\sec^2 5x - 25 - (5\ tg\ 5x)^2 = 0$$

pelas propriedades das identidades fundamentais da trigonometria, temos que $1+ tg^2 t=\sec^2 t \Rightarrow 1+\ tg^2 5x=\sec^2 5x$, logo,

$$25\left(1+\ tg^2 5x\right) - 25 - (5\ tg\ 5x)^2 = 0,$$

usando distributividade resulta em:

$$25 + 25\ tg^2 5x - 25 - 25\ tg^2 5x = 0.$$

Portanto, $y = 5\ tg\ 5x$ é solução da equação $y' = 25 + y^2$.

3.5 Equações Exatas

Uma expressão diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

é uma diferencial exata em uma região R do plano xy se ela corresponde à *diferencial total*[1] de alguma função $f(x,y)$. Uma equação diferencial da forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

é chamada de uma *equação exata* se a expressão do lado esquerdo é uma diferencial exata.

Teorema 3.5.1 *(Critério para uma Diferencial Exata) Sejam $M(x,y)$ e $N(x,y)$ funções contínuas com derivadas parciais contínuas em uma região retangular R definida por $a < x < b$, $c < y < d$. Então, uma condição necessária e suficiente para que*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

seja uma diferencial exata é

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Algumas vezes, uma equação não exata pode ser convertida em uma equação exata multiplicando-a por uma função μ chamada fator de integração, que resulta na equação

$$\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0,$$

a solução pode não ser equivalente à original, pois a multiplicação pode ocasionar perdas ou ganhos de solução.

[1] Diferencial total, como o movimento dos pontos (x_0, y_0) para $(x_0 + dx, y_0 + dy)$ próximo, a variação resultante $df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$ na linearização de f.

3.6 Equações Lineares de Primeira Ordem

Podemos definir uma equação linear como uma equação diferencial da forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

dividindo a equação pelo coeficiente $a_1(x)$, obtemos:

$$\frac{a_1(x)}{a_1(x)}\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{g(x)}{a_1(x)}$$

tome $P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ e $f(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$, substituindo na equação obtemos uma forma mais útil de uma equação linear

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \tag{3.2}$$

Usando diferenciais, multiplicando a equação por dx, obtemos:

$$dx\left[\frac{dy}{dx} + P(x)y\right] = dxf(x)$$

$$\Rightarrow dy + P(x)ydx = f(x)dx$$

reescrevendo, adicionando o inverso aditivo de $f(x)dx$, obtemos:

$$dy + [P(x)y - f(x)]\,dx = 0$$

multiplicamos a equação por $\mu(x)$,

$$\mu(x)dy + \mu(x)\,[P(x)y - f(x)]\,dx = 0$$

pelo Teorema (3.5.1), o lado esquerdo da equação é uma diferencial exata, se:

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x) = \frac{\partial}{\partial y}\mu(x)\,[P(x)y - f(x)]$$

ou seja,

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu P(x)$$

multiplicando a equação por $\frac{dx}{\mu}$, obtemos a equação separável:

$$\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx$$

encontrando o $\mu(x)$, integrando ambos os lados da igualdade, temos:

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int P(x)dx$$

assim,

$$\ln|u| = \int P(x)dx$$

usando exponencial, temos:

$$e^{\ln|u|} = e^{\int P(x)dx}$$

dessa forma encontramos que o fator integração para a equação linear é:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} \qquad (3.3)$$

Para exemplificar a resolução de equação lineares de primeira ordem, segue o exemplo.

Exemplo 1: Seja a equação

$$x\frac{dy}{dx} + y = e^x. \qquad (3.4)$$

Como podemos observar a equação (3.4), não se encontra na forma da equação linear de primeira ordem (3.2), então dividindo a equação por x que é o coeficiente $\frac{dy}{dx}$, obtemos assim a equação

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}, \qquad (3.5)$$

onde temos $P(x) = \frac{1}{x}$.Calculando o fator integração $\mu(x)$,

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} \Rightarrow \mu(x) = e^{\ln x} = x.$$

Encontrado o $\mu(x) = x$, multiplicamos a equação (3.5) por ele

$$x\left[\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x}\right] = x\left[\frac{e^x}{x}\right] \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y = e^x$$

reescrevendo a equação, obtemos

$$\frac{d}{dx}[x.y] = e^x$$

integrando ambos os lados

$$\int \frac{d}{dx}[x.y]dx = \int e^x dx$$

obtemos assim,

$$x.y = e^x + c \Rightarrow y = \frac{e^x}{x} + \frac{c}{x},$$

onde c, é a constante de integração.

3.6.1 Problema de valor inicial (PVI)

O problema de valor inicial, consiste na resolução de equações diferenciais de primeira ordem, que pode ser definida geometricamente em algum intervalo I, tal que o gráfico passe por um ponto $(x_{0,}y_0)$ determinando que a equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{3.6}$$

está sujeita a uma condição inicial $y(x_0) = y_0$,

onde:

x_0- um número no intervalo I, e

y_0- número real arbitrário

Teorema 3.6.1 *(Existência de uma única solução) Seja R uma região retangular no plano xy definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, que contém o ponto $(x_{0,}y_0)$ em seu interior. Se $f(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em R, então existe um intervalo I centrado em x_0 e uma única função $y(x)$ definida em I que satisfaz o problema de valor inicial.*

Para entendermos o problema de valor inicial (PVI), segue o exemplo.

Exemplo 1: Resolva o problema de valor inicial (PVI)

$$\frac{dy}{dx} + y = 0, \;\; y(0) = 1 \tag{3.7}$$

Solução:

Percebe-se que a equação já está na forma de equação de primeira ordem (3.2), sendo assim, temos $P(x) = 1$, então vamos calcular o fator integração $\mu(x)$

$$\mu(x) = e^{\displaystyle\int 1dx} \Rightarrow \mu(x) = e^x$$

vamos multiplicar a equação (3.7) por $\mu(x) = e^x$,

$$e^x \left[\frac{dy}{dx} + y\right] = e^x.0$$

obtemos,

$$e^x \frac{dy}{dx} + e^x y = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}[e^x.y] = 0.$$

Integrando ambos os lados

$$\int \frac{d}{dx}[e^x.y]dx = \int 0dx$$

resulta que

$$e^x.y = c \Rightarrow y = \frac{c}{e^x},$$
$$\Rightarrow y = ce^{-x}, \tag{3.8}$$

assim, para encontrar o valor da constante c, tendo como condição inicial $y(0) = 1$, vamos substituir em (3.8)

$$y = ce^{-x} \Rightarrow 1 = ce^{-0} \Rightarrow c = 1$$

Logo, como $c = 1$, substituindo na equação (3.8), temos que a solução é dada por

$$y = e^{-x}.$$

Para demonstrar que existem outras maneiras de resolver uma equação linear de primeira ordem que esteja sujeita a uma condição inicial, $y(x_0) = y_0$, vamos utilizar o Método de Picard.

3.6.2 Método de Picard

Considere o problema de valor inicial (3.6) tal que, $y(x_0) = y_0$, onde f é uma função contínua em uma região que contém o ponto (x_0, y_0).

Multiplicando a equação do PVI, por dx

$$dx\left[\frac{dy}{dx}\right] = dx\left[f(x,y)\right]$$

$$\Rightarrow dy = f(x,y)dx$$

integrando ambos os lados da equação, e tomando $x = t$ e $y = y(t)$

$$y(x) = c + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

como $y(x_0) = y_{0,}$ temos

$$y_0 = y(x_0) = c + \int_{x_0}^{x_0} f(t, y(t))dt = c.$$

Se $y_0 = c$, temos que

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{3.9}$$

Substituindo $y(t)$ por $y_0(t)$, na equação (3.9) obtemos outra função mais próxima da solução, onde

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))dt,$$

da mesma forma se substituir $y(t)$ por $y_1(t)$, na equação (3.9) temos,

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt$$

Assim, segue uma sequência $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x), ...$ cujo n-ésimo termo é definido por

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt, n = 1, 2, 3, ...$$

o uso repetitivo da fórmula da equação (3.9) é conhecido como método iterativo de Picard.

Exemplo 2: Segue como exemplo a resolução da equação(3.7), que foi resolvido anteriormente pelo problema de valor inicial, agora a mesma equação será solucionada pelo método de Picard.

Seja a equação $\frac{dy}{dx} + y = 0$, com a condição inicial $y(0) = 1$

Solução: Isolando $\frac{dy}{dx}$, temos

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

tomando $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, onde $f(t, y(t))$, logo $x = t$ e $y = y(t)$

$$f(t, y(t)) = -y(t) \tag{3.10}$$

considere a equação de Picard $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt$, onde temos $x_0 = 0$, $y_0(x) = 1$,

$$y_n = 1 + \int_0^x -y_{n-1}(t)dt. \tag{3.11}$$

Encontrando y_1 em (3.11),

$$y_1 = 1 + \int_0^x -1dt$$

$$\Rightarrow y_1 = 1 + [-t]_0^x$$

$$\Rightarrow y_1 = 1 - x.$$

Para solucionar y_2, vamos usar $y_1 = 1 - t$, na equação (3.11),

$$y_2 = 1 + \int_0^x - [1 - t]\, dt$$

$$y_2 = 1 + \int_0^x -1 + tdt$$

$$\Rightarrow y_2 = 1 + \left[-t + \frac{t^2}{2}\right]_0^x$$

$$\Rightarrow y_2 = 1 + \left[-x + \frac{x^2}{2}\right]$$

$$\Rightarrow y_2 = 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

Agora para solucionar $y_{3,}$ vamos considerar $y_2 = 1 - t + \frac{t^2}{2}$, e substituir na equação

(3.11),

$$y_3 = 1 + \int_0^x -\left[1 - t + \frac{t^2}{2}\right] dt$$

$$\Rightarrow y_3 = 1 + \int_0^x -1 + t - \frac{t^2}{2} dt$$

$$\Rightarrow y_3 = 1 + \left[-t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}\right]_0^x$$

$$y_3 = 1 + \left[-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]$$

$$\Rightarrow y_3 = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}.$$

Da mesma forma para encontrar y_4, segue que substituindo na equação (3.11), resulta

$$y_4 = 1 + \int_0^x -\left[1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}\right] dt$$

$$\Rightarrow y_4 = 1 + \int_0^x -1 + t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} dt$$

$$\Rightarrow y_4 = 1 + \left[-t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24}\right]_0^x$$

$$\Rightarrow y_4 = 1 + \left[-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right]$$

$$\Rightarrow y_4 = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}.$$

Portanto, podemos mostrar que pelo metódo iterativo de Picard é possível resolver uma equação linear, e podemos ainda definir seu n-ésimo termo como

$$y_n = 1 + \frac{(-x)}{1!} + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \frac{(-x)4}{4!} + ... + \frac{(-x)^n}{n!},$$

isto é,

$$y_n = \sum_{k=\,0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n(x) = e^{-x}.$$

3.7 Equações lineares de segunda ordem

As equações lineares de segunda ordem são de grande importância no estudo das equações diferenciais por duas razões: por ter uma estrutura teórica rica, implícita a diversos métodos sistemáticos de resolução e por elas serem essenciais para qualquer investigação séria das áreas clássicas da física matemática. É da forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right),$$

onde:

$f-$uma função dada

$t-$uma variável independente

$y-$uma variável dependente

Para a equação acima ser linear a função f deve ter a forma

$$f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) = g(t) - p(t)\frac{dy}{dt} - q(t)\,y.$$

Assim, se f é linear em $y^{'}$ e $y^{''}$ na equação acima, temos que g, p e q são funções especificadas da variável independente t, porém não depende de y, logo, podemos reescrever a equação da seguinte forma:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g(t) - p(t)\frac{dy}{dt} - q(t)\,y$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)\,y = g(t)$$

ou

$$y^{''} + p(t)\,y^{'} + q(t)\,y = g(t). \tag{3.12}$$

3.7.1 Solução para equações lineares homogêneas com coeficientes constantes

Seja a equação de segunda ordem da forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)\,y = g(t).$$

Se $g(t) = 0$, a equação é de segunda ordem linear homogênea, no entanto, se $g(t) \neq 0$, temos uma equação de segunda ordem linear não-homogênea.

Teorema 3.7.1 *(Princípio da superposição) Se y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea $y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$, então a combinação linear $y = c_1y_1 + c_2y_2$ é também solução desta equação, quaisquer que sejam c_1, c_2 números reais.*

O Teorema está demonstrado em Chinchio (2012, p 46), ele nos garante que a soma de duas soluções da equação diferencial linear homogênea é também uma solução.

3.7.2 Problema de valor inicial (PVI)

É um problema que consiste na resolução de equações de ordem dois ou maior, no entanto, nesse trabalho vamos limitar até equações de segunda ordem, e a variável dependente y ou suas derivadas, especificadas em pontos diferentes. Assim, temos:

$$a_2(t)\frac{d^2y}{dt^2} + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)\,y = g(t)\,,\ y(a) = y_{0,}\ y'(b) = y_1 \tag{3.13}$$

um problema de valor inicial, onde $y(a) = y_{0,}\ y'(b) = y_1$, são as condições de contorno ou de fronteiras, cuja solução é uma função que satisfaça a equação diferencial em um intervalo I, contendo a e b, e seu gráfico passa nos pontos (a, y_0) e (b, y_1).

Exemplo 1: Dada a equação

$$y'' - 4y = 12x, \tag{3.14}$$

verifique que $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$, são condições iniciais para que $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ seja solução para o PVI.

Solução: Dado

$$y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$$

$$\Rightarrow y' = 6e^{2x} - 2e^{-2x} - 3$$

$$\Rightarrow y" = 12e^{2x} + 4e^{-2x}.$$

Substituindo y e $y"$ na equação (3.14),

$$12e^{2x} + 4e^{-2x} - 4\left[3e^{2x} + e^{-2x} - 3x\right] = 12x,$$

agora basta verificar se as condições iniciais são válidas. Substituindo $x = 0$

$$y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$$

temos

$$3e^{2.0} + e^{-2.0} - 3.0 = 4,$$

de fato, $y(0) = 4$.

Substituindo $x = 0$, em y' :

$$y' = 6e^{2x} - 2e^{-2x} - 3$$

$$\Rightarrow 6e^{2.0} - 2e^{-2.0} - 3 = 1$$

confirmamos que $y'(0) = 1$.

Dessa maneira, concluímos que a função $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$, é uma solução do problema de valor inicial.

Dependência linear e independência linear

Um conjunto de funções $f_1(x),\ f_2(x), ..., f_n(x)$ é linearmente dependente em um intervalo I se existem constantes $c_1,\ c_2, ...,\ c_n$ não todas nulas, tais que $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_n f_n(x) = 0$ para todo x no intervalo, assim, pelo menos uma função pode ser expressa como uma combinação linear das outras funções, caso contrário o conjunto de funções é linearmente independente.

Teorema 3.7.2 *(Critério para independência linear de funções) Suponha que* $f_1(x)$, $f_2(x), ..., f_n(x)$ *sejam diferenciáveis pelo menos* $n - 1$ *vezes, se o determinante*

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

for diferente de zero em pelo menos um ponto do intervalo I *, então as funções* $f_1(x)$, $f_2(x), ..., f_n(x)$ *serão linearmente independentes no intervalo.*

O determinante desse teorema é chamado de Wronskiano e denotado por $W(f_1(x),\ f_2(x), ..., f_n(x))$. Esse Teorema está demonstrado no livro de Zill e Cullen.

3.7.3 Redução de ordem

O método de redução de ordem consiste em construir uma segunda solução a partir de uma solução conhecida. Vamos supor que $y_1(x)$ seja uma solução não trivial para a equação

$$a_2(x)y" + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = 0 \tag{3.15}$$

supondo que os coeficientes da equação (3.15) são contínuos e o coeficiente $a_2(x) \neq 0$ para todo x no intervalo I. Para encontrarmos uma segunda solução $y_2(x)$ reduziremos a ordem da equação (3.15), transformando a mesma em uma equação de primeira ordem.

Exemplo 1: Para exemplificar o método de redução de ordem, vamos encontrar uma segunda solução para equação $y" + 5y' = 0$, sabendo que $y_1 = 1$ é uma solução para a equação.

Solução: Defina $y = y_1.u$.

Se $y = u \Rightarrow y' = u' \Rightarrow y" = u"$, então substituindo os valores em $y" + 5y' = 0$,

$$u" + 5u' = 0.$$

Vamos tomar $w = u'$ e $w' = u"$, dessa maneira, temos

$$w' + 5w = 0, \tag{3.16}$$

como podemos observar a equação (3.16), já esta na forma de uma equação de primeira ordem, então segue as mesmas regras para resolver, assim, dado $p(x) = 5$, vamos calcular seu o fator integração,

$$\mu(x) = e^{\int 5dx} \Rightarrow \mu(x) = e^{5x}.$$

Multiplicando a equação (3.16) por $\mu(x) = e^{5x}$,

$$e^{5x}\left[w' + 5w\right] = e^{5x}.0 \Rightarrow e^{5x}w' + e^{5x}5w = 0,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx}[e^{5x}.w] = 0$$

integrando ambos os lados

$$\int \frac{d}{dx}[e^{5x}.w]dx = \int 0 \; dx$$

obtemos,

$$e^{5x}.w = c \Rightarrow w = \frac{c}{e^{5x}} \Rightarrow w = ce^{-5x}$$

isto é, se inicialmente tomamos $w = u'$, temos que

$$u' = ce^{-5x}$$

integrando a equação

$$\int du = c \int e^{-5x} dx$$

$$\Rightarrow u = \frac{-1}{5} ce^{-5x} + c_1$$

definimos que $y = y_1.u$, e foi dado que $y_1 = 1$, logo

$$y = 1. \left[\frac{-1}{5} ce^{-5x} + c_1 \right]$$

tomando $c = -5$ e $c_1 = 0$, obtemos como segunda solução desta equação

$$y_2 = e^{-5x}.$$

Utilizando o Wronskiano podemos verificar se as soluções $y_1 = 1$ e $y_2 = e^{-5x}$ são linearmente dependente ou linearmente independente, seja

$$W(1, e^{-5x}) = \begin{vmatrix} 1 & e^{-5x} \\ 0 & -5e^{-5x} \end{vmatrix} = -5e^{-5x}.$$

Assim, como o Wronskiano é não nulo, temos que as soluções são linearmente independentes.

3.7.4 Equação característica

Podemos ver que para equação de segunda ordem

$$ay" + by' + cy = 0 \tag{3.17}$$

qualquer que seja a solução, ela será uma função que se anula com suas derivadas. Portanto, temos que é uma função aproximada de suas derivadas. Dessa maneira, se tentarmos uma solução da forma

$$y = e^{mt},$$

onde m é uma constante.

Dado $y = e^{mt} \Rightarrow y' = m.e^{mt} \Rightarrow y" = m^2.e^{mt}$. Substituindo y, y' e $y"$ na equação (3.17), temos

$$a\left(m^2.e^{mt}\right) + b\left(m.e^{mt}\right) + c.e^{mt} = 0$$

$$\Rightarrow am^2\left(e^{mt}\right) + bm\left(e^{mt}\right) + c\left(e^{mt}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(am^2 + bm + c\right)e^{mt} = 0,$$

como e^{mt} nunca se anula para valores reais de t, para satisfazer a equação diferencial temos que escolher um m de tal forma que ele seja raiz da equação quadrática

$$am^2 + bm + c = 0, \tag{3.18}$$

chamada de equação característica da equação diferencial.

Para esta equação diferencial (3.18), consideramos três casos: quando as soluções das equações correspondem a raízes reais distintas, raízes reais iguais e raízes complexas conjugadas.

1^o Caso: raízes reais distintas

Supondo que a equação característica (3.18) possua duas raízes diferentes m_1 e m_2, encontramos duas soluções:

$$y_1 = e^{m_1x} \ e \ \ y_2 = e^{m_2x}.$$

O conjunto fundamental de soluções é qualquer conjunto $y_1, y_2, ..., y_n$ de n soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear homogênea de n-ésima ordem (3.1) em um intervalo I.

Assim temos como solução geral

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}.$$

2^o Caso: raízes reais iguais

Dada a equação característica (3.18), temos $m_1 = m_2$, logo obtemos uma única solução exponencial, e a solução geral

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}.$$

3^o Caso: raízes complexas conjugadas

Sendo m_1 e m_2 raízes complexas podemos definir $m_1 = \alpha + i\beta$ e $m_2 = \alpha - i\beta$, onde α e $\beta > 0$ são reais e $i^2 = -1$, formalmente não há diferença entre este caso e o 1^o Caso,

$$y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x},$$

como é preferível trabalhar com funções reais em vez de exponenciais complexas, usando a fórmula de Euler, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\ sen\theta$, chegamos a solução geral

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2\ sen\beta x), \tag{3.19}$$

este caso, esta mais detalhado em Zill e Cullen.

3.7.5 Solução para equações lineares não-homogêneas com coeficientes indeterminados

Uma equação de segunda ordem

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)\,y = g(x)$$

é classificada como uma equação linear não-homogênea, quando $g(x) \neq 0$.

Teorema 3.7.3 *(Princípio da superposição - Equações não-homogêneas) Sejam $y_{p1}, y_{p2}, ..., y_{pk}$, k soluções particulares para a equação diferencial linear de n-ésima ordem (3.1) em um intervalo I, correspondendo a k funções distintas $g_1,\ g_2, ...,\ g_k$. Isto é, suponhamos que y_{p1} seja uma solução particular para a equação diferencial correspondente*

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_i(x)$$

em que $i = 1, 2, ..., k$. Então,

$$y_p = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + ... + y_{pk}(x),$$

é uma solução particular para

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_1(x) + g_2(x) + ... + g_k(x).$$

Para solucionar uma equação diferencial linear não homogênea, devemos:

- encontra-se uma função complementar y_c, resolvendo a equação homogênea associada;
- encontra-se qualquer solução particular y_p da equação não homogênea.

Portanto a equação geral para uma equação não-homogênea em um intervalo é

$$y = y_c + y_p$$

O método dos coeficientes indeterminados, tem por base o princípio da superposição, o qual limita-se, a equações lineares não homogênea com coeficientes constantes, onde $g(x)$ é uma combinação linear de funções do tipo: k(constante), x^n, $x^n e^{ax}$, $x^n e^{ax} sen\ \beta x$ e $x^n e^{ax} \cos \beta x$, onde n é um número inteiro não negativo e α e β são números reais.

Capítulo 4

Aplicações de equações diferenciais ordinárias

Neste capítulo vamos demonstrar aplicações das equações diferenciais ordinárias, sendo elas lineares de primeira e segunda ordem e não lineares, por meio delas pode-se perceber a interação da matemática com outras ciências.

4.1 Equações diferenciais lineares de primeira ordem

4.1.1 Circuito elétrico

De acordo com a segunda lei de Kirchhoff, a soma da queda de tensão do indutor $\left(L\left(\frac{di}{dt}\right)\right)$ e da queda de tensão no resistor (iR) é igual a voltagem $(E(t))$ do circuito.

Sendo assim, temos como equação básica, para o seguinte problema

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t), \tag{4.1}$$

onde:

$L-$é a indutância (henry)

$R-$é a resistência (ohm)

$i-$é a corrente (ampére)

$E-$ é a força eletromotriz ou fem (volt)

Problema 1: (Zill e Cullen, p 114) Uma força eletromotriz (fem) de 30 volts é aplicada a um circuito em série L-R no qual a indutância é de $0,5$ henry e a resistência, 50 ohms. Encontre a corrente $i(t)$ se $i(0) = 0$. Determine a corrente quando $t \to \infty$.

Dados:

$L = 0,5$ henry

$R = 50$ ohms

$E = 30$ volts

i : corrente

Substituindo os dados do problema na equação (4.1), obtemos

$$0,5\frac{di}{dt} + 50i = 30,$$

dividindo a equação por $0,5$, para obtermos uma equação da forma (3.2),

$$\frac{di}{dt} + 100i = 60, \tag{4.2}$$

sendo $P(t) = 100$, o próximo passo é calcular o fator integração $\mu(t)$, na equação (3.3), assim

$$\mu(t) = e^{\displaystyle\int 100(t)dt} \Rightarrow \mu(t) = e^{100t}.$$

Multiplicando a equação (4.2) por $\mu(t)$,

$$e^{100t}\left(\frac{di}{dt} + 100i\right) = e^{100t}.60$$

$$\Rightarrow e^{100t}\frac{di}{dt} + 100e^{100t}i = 60e^{100t}$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\left[e^{100t}.i\right] = 60e^{100t}$$

integrando a equação

$$\int \frac{d}{dt}\left[e^{100t}.i\right]dt = \int 60e^{100t}dt$$

$$\Rightarrow e^{100t}.i = 60.\frac{1}{100}e^{100t} + c$$

dividindo a equação por e^{100t},

$$i = \frac{3}{5} + ce^{-100t}. \tag{4.3}$$

Usando a condição inicial onde $i(0) = 0$, na equação (4.3),

$$0 = \frac{3}{5} + ce^{-100.0} \Rightarrow c = -\frac{3}{5}.$$

Portanto, temos que

$$i = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-100t}.$$

Assim, passado um longo tempo a corrente é igual a $\frac{3}{5}$ampére.

4.1.2 Crescimento e decrescimento

Problema 2: (Zill e Cullen, p 113) A população de bactérias em uma cultura cresce a uma taxa proporcional ao número de bactérias presentes em qualquer tempo. Após 3 horas, observa-se que há 400 bactérias presentes. Após 10 horas, existem 2000 bactérias presentes. Qual era o número inicial de bactérias?

Dados:

$p-$população de bactérias

$t-$ tempo

$p(t)-$população em um instante t

$p(3) = 400$ bactérias

$p(10) = 2000$ bactérias

$p(0) : p_0$ (população inicial)

Substituindo os valores do problema na equação de primeira ordem (3.2),

$$\frac{dp}{dt} = kp(t),$$

onde k é a constante de proporcionalidade.

Resolvendo o PVI, quando essa população ainda está no instante $p(0) = p_0$

$$\frac{dp}{dt} - kp = 0 \tag{4.4}$$

calculando o fator integração $\mu(t)$, quando $p(t) = -k$.

$$\mu(t) = e^{\int -kdt} \Rightarrow \mu(t) = e^{-kt}.$$

Calculado o fator integração, vamos encontrar a equação de crescimento, multiplicando a equação (4.4), pelo fator integração $\mu(t) = e^{-kt}$,

$$e^{-kt}\left[\frac{dp}{dt} - kp\right] = e^{-kt}.0$$

pela distributividade, obtemos

$$e^{-kt}\frac{dp}{dt} - e^{-kt}kp = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[e^{-kt}.p\right] = 0$$

integrando a equação,

$$\int \frac{d}{dt}\left[e^{-kt}.p\right]dt = \int 0dt$$

$$\Rightarrow e^{-kt}.p = c,$$

logo, a equação que satisfaz o crescimento da população é

$$p = ce^{kt}. \tag{4.5}$$

Considerando a população inicial, onde $p(0) = p_0$, substituindo na equação (4.5)

$$p_0 = ce^{k.0} \Rightarrow p_0 = c.$$

Como vimos no momento que a população se inicia, a nossa constante de proporcionalidade é igual a população inicial, logo, $p_0 = c$. Substituindo na equação de crescimento populacional (4.5), temos que a equação que satisfaz o crescimento da populacão é

$$p = p_0e^{kt}. \tag{4.6}$$

Sabemos que $p(3) = 400$ bactérias, assim:

$$400 = p_0e^{k.3},$$

portanto, a população inicial é dada por:

$$p_0 = 400e^{-3k}. \tag{4.7}$$

Quando se passar 10 horas e a população atingir 2000 bactérias, ou seja, $p(10) = 2000$, usando a equação (4.6), temos

$$2000 = p_0e^{k.10},$$

logo,

$$p_0 = 2000e^{-10k}. \tag{4.8}$$

Igualando as equações (4.7) e (4.8):

$$400e^{-3k} = 2000e^{-10k}$$

dividindo por $400e^{-10k}$, resulta em:

$$e^{7k} = 5,$$

usando o logaritmo, encontramos

$$7k = \ln 5 \Rightarrow k = \frac{\ln 5}{7} \simeq 0,23,$$

se k é aproximadamente igual a $0,23$.substituindo esse valor na equação (4.7) ou (4.8), encontramos o valor da população inicial. Usando a equação (4.7), obtemos,

$$p_0 = 400e^{-3.0,23} \Rightarrow p_0 = 400e^{-0,69},$$

sendo $e^{-0,69}$ aproximadamente igual $0,50$,temos

$$p_0 = 400.0,50 \Rightarrow p_0 \simeq 200.$$

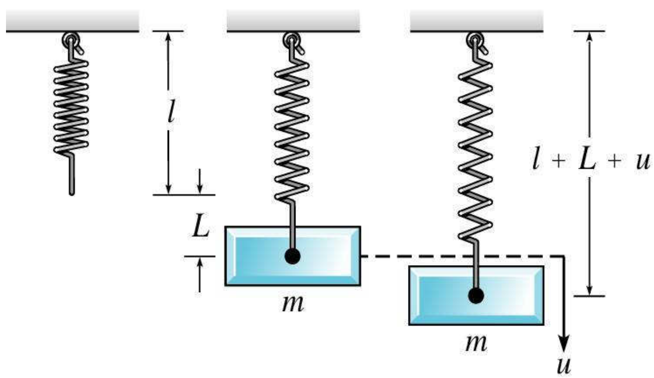
Portanto, a população inicial de bactérias era de aproximadamente 200 bactérias.

4.2 Aplicações de equações diferenciais lineares de segunda ordem

Nessa seção de aplicações de equações diferenciais lineares de segunda ordem, vamos destacar aqui a modelagem de sistema massa mola e circuitos elétricos.

4.2.1 Sistema massa-mola

Figura 3.2.1: Sistema massa-mola



FONTE: Boyce (2006)

O problema a seguir esta relacionado ao movimento de uma massa presa a uma mola, devido a um deslocamento inicial ou devido a uma força externa, compreender esse sistema simples é de extrema importância para o entendimento de sistemas vibratórios mais complicados.

Considerando um objeto de massa m, preso em uma mola elástica de comprimento original l. Como a figura 3.2.1, observamos que essa massa produz uma elongação L da mola para baixo devido seu peso. Seja F_g a força da gravidade que puxa a massa para baixo e tem magnitude mg, onde g é a aceleração da gravidade. A força de restauração da mola F_s, puxa a massa para cima. Supondo uma elongação L pequena, esta força é proporcional a L, logo pela lei de Hooke[1] temos que $Fs = kL$. Se a massa está em equilíbrio então as forças se compensam $mg = kL$, assim se o sistema massa mola estiver em equilíbrio, temos que $mg - kL = 0$.

[1]RobertHooke (1635-1703) cientista inglês que publicou sua lei sobre o comportamento elástico em 1676, como ceiiinossstuve em 1678 deu a interpretação como ut tensio sic vis, significa a grosso modo "como a força, assim é o deslocamento".

Vamos considerar que $u(t)$ é o deslocamento da massa referente a uma posição de equilíbrio no tempo t, medida para baixo. Se f é a soma das forças agindo em m. Aplicando a segunda lei de Newton :

$$mu"(t) = F(t), \tag{4.9}$$

onde:

$F(t)$ a força resultante (soma das forças aplicadas) é igual ao produto da massa m pela aceleração $u"$. Além disso, F_s passa a ser $-k(L+u)$.

Assim para obter F, vamos considerar a existência de cinco forças:

Peso: $P_g = mg$ (para baixo)

Força constante da mola: $F_{sc} = -kL$ (força para cima)

Força da mola: $F_s = -ku(t)$ (força restauradora, e é proporcional a u. Se $u > 0$, então a mola é estendida e a força atua para cima, assim, $F_s = -ku(t)$, Se $u < 0$, então a mola é comprimida de uma distância $|u|$, e a força restaurado atua para baixo, assim, $F_s = k|u| = k(-u) = -ku$, logo em qualquer caso, $F_s = -ku(t)$.

Força de amortecimento: $F_d(t) = -\gamma u'(t)$ (contrária ao movimento, assumiremos que é proporcional a velocidade), se $u' > 0$, temos que u é crescente, e a massa se move para baixo. Logo, F_d atua para cima e portanto $F_d = -\gamma u'$, onde $\gamma > 0$; se $u < 0$, então u é decrescente, e a massa se move para cima. Assim, F_d atua para baixo e portanto $F_d = -\gamma u'$ com $\gamma > 0$. Portanto temos que em qualquer caso temos que $F_d(t) = -\gamma u'(t)$, $\gamma > 0$

Força externa: $F(t)$ (força externa)

Considerando a atração dessas cinco forças, a equação (4.9), é da seguinte forma

$$mu"(t) = mg + F_s(t) + F_d + F(t)$$

$$\Rightarrow mu"(t) = mg - k[L + u(t)] - \gamma u'(t) + F(t) \tag{4.10}$$

se $mg = kL$, a equação (4.10) se reduz

$$mu"(t) + \gamma u'(t) + ku(t) = F(t), \tag{4.11}$$

onde $u(t)$ é o deslocamento da massa a partir do seu ponto de equilíbrio e m, γ e k, são constantes positivas.

Problema 1: (Teixeira, p 71) Um corpo de massa 100 g estica uma mola 10 cm. O corpo está preso a um amortecedor viscoso. Considere a aceleração da gravidade como $10^3 cm/s^2$ e suponha que o amortecedor exerce uma força de $10^4 dinas = 10^4 g\cdot\ cm/s^2$ quando a velocidade é 10 cm/s. Se o sistema é puxado para baixo 2 cm e depois solto, determine a posição u em função do tempo t.

Dados:

$m = 100 = 10^2\ gramas$

$L = 10\ cm$

$g = 10^3 cm/s^2$

$F_d = -10^4 g.cm/s^2$

$u\ (0) = 2\ cm/s$

$u'\ (t) = 10\ cm/s$

Para determinar a posição u em função do tempo t, vamos primeiramente encontrar a constante da mola e a constante de amortecimento.

Se,

$$m.g = k.L \Rightarrow k = \frac{m.g}{L}$$

dessa maneira temos que

$$k = \frac{10^2.10^3}{10} = 10^4.$$

Logo, a constante da mola k é igual a 10^4.

Para encontrar a constante de amortecimento

$$F_d(t) = -\gamma u'(t) \Rightarrow -\gamma = \frac{F_d(t)}{u'(t)}$$

obtemos,

$$-\gamma = \frac{-10^4}{10} = 10^3.$$

Podemos observar que no problema nada foi dito a respeito de alguma força externa agindo sobre o corpo, então vamos supor que nenhuma força agiu sobre o corpo, assim $F(t) = 0$. Então, substituindo os dados do problema na equação (4.11), temos

$$10^2 u"(t) + 10^3 u'(t) + 10^4 u(t) = 0$$

dividindo a equação por 10^2, obtemos

$$u"(t) + 10u'(t) + 10^2 u(t) = 0.$$

que resulta em duas raízes complexas:

$$m_1 = -5 + 5i\sqrt[2]{3} \text{ e } m_2 = -5 - 5i\sqrt[2]{3},$$

onde $\alpha = -5$ e $\beta = 5\sqrt[2]{3}$, logo a solução geral segue de acordo com o 3^o caso da equação característica substituindo na equação (3.19), ou seja,

$$u(t) = e^{-5t}(c_1 \cos 5\sqrt[2]{3}t + c_2\ sen 5\sqrt[2]{3}t)$$

$$u(t) = c_1 e^{-5t} \cos 5\sqrt[2]{3}t + c_2 e^{-5t}\ sen 5\sqrt[2]{3}t. \tag{4.12}$$

Derivando a equação (4.12), temos

$$u'(t) = -5c_1 e^{-5t} \cos 5\sqrt[2]{3}t - 5\sqrt[2]{3}c_1 e^{-5t}\ sen 5\sqrt[2]{3}t - 5c_2 e^{-5t}\ sen 5\sqrt[2]{3}t + 5\sqrt[2]{3}c_2 e^{-5t} \cos 5\sqrt[2]{3}t. \tag{4.13}$$

O problema deu ainda que a posição inicial $u(0) = 2$, substituindo na equação (4.12),

$$2 = c_1 e^{-5.0} \cos 5\sqrt[2]{3}.0 + c_2 e^{-5.0}\ sen 5\sqrt[2]{3}.0$$

$$\Rightarrow c_1 = 2.$$

Como a mola foi solta, então não existe velocidade inicial, logo $u'(0) = 0$. Substituindo na equação (4.13)

$$0 = -5c_1 e^{-5.0} \cos 5\sqrt[2]{3}.0 - 5\sqrt[2]{3}c_1 e^{-5.0}\ sen 5\sqrt[2]{3}.0 - 5c_2 e^{-5.0}\ sen 5\sqrt[2]{3}.0 + 5\sqrt[2]{3}c_2 e^{-5.0} \cos 5\sqrt[2]{3}.0$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{-5c_1}{5\sqrt[2]{3}} = -\frac{5\sqrt[2]{3}c_1}{15} = -\frac{\sqrt[2]{3}c_1}{3}$$

como $c_1 = 2$, temos

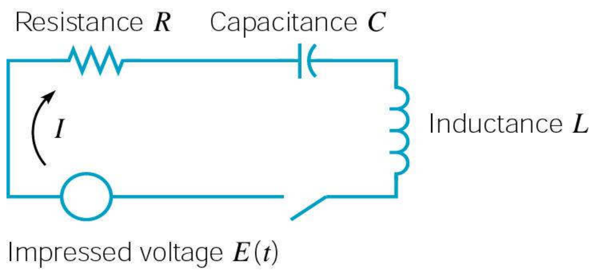
$$c_2 = -\frac{2\sqrt[2]{3}}{3}.$$

Portanto, ao substituir os valores encontrados, c_1 e c_2 na equação (4.12), obtemos como posição u em função do tempo:

$$u(t) = 2e^{-5t} \cos 5\sqrt[2]{3}t + \frac{-2\sqrt[2]{3}}{3} e^{-5t}\ sen 5\sqrt[2]{3}t.$$

4.2.2 Circuitos elétricos

Figura 3.2.2: O circuito elétrico



FONTE: Boyce (2006)

Para o próximo problema, vamos considerar um circuito fechado, que é a soma das quedas de tensão (Ri) em uma resistência, a uma bobina de indutância $\left(L\frac{di}{dt}\right)$ e em um condensador de capacitância C é igual a força eletromotriz E. Considera-se R, L e C como constantes e que a corrente i e a carga q estão ligadas pela relação $i = \frac{dq}{dt}$.

Dessa maneira, temos que a equação diferencial de um circuito elétrico é

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = E(t), \tag{4.14}$$

onde:

$L-$é a indutância (henry)

$L\frac{di}{dt}-$bobina de indutância

$R-$é a resistência (ohms)

$i-$é a corrente (ampére)

$Ri-$queda de tensão

$q-$carga (coulombs)

$C-$é a capacitância (farads)

$E-$ é a força eletromotriz ou fem (volt)

dado $i = \frac{dq}{dt}$, temos que a derivada de i

$$\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}, \tag{4.15}$$

substituindo (4.15) em (4.14), temos

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t). \tag{4.16}$$

Problema 2: (Ayres Jr, p 205) Num circuito temos uma indutância de 0,05 henry, uma resistência de 20 ohms, uma capacitância de 100 microfarads e uma força eletromotriz (F.E.M) $E = 100\ volts$. Achar i e q sabendo que $q = 0$ e $i = 0$ quando $t = 0$. Dados:

$L = 0,05\ henry$

$R = 20\ ohms$

$C = 100\ microfarads = 100.10^{-6} farads$

$E = 100\ volts$

i : corrente

q : carga

Quando $t = 0 \Rightarrow q = 0$ e $i = 0$

Substituindo os dados do problema em (4.16)

$$0,05\frac{d^2q}{dt^2} + 20\frac{dq}{dt} + \frac{q}{100.10^{-6}} = 100 \Rightarrow 0,05\frac{d^2q}{dt^2} + 20\frac{dq}{dt} + 10000q = 100$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 400\frac{dq}{dt} + 200.000q = 2000$$

é o mesmo que

$$q" + 400q' + 200.000q = 2000. \tag{4.17}$$

Obtemos duas raízes complexas,

$$m_1 = -200 + 400i \text{ e } m_2 = -200 - 400i.$$

Substituindo o resultado na fórmula geral para equações características (3.19), seja $\alpha = -200$ e $\beta = 400$, temos que a função complementar é

$$q_c = e^{-200t}(c_1 \cos 400t + c_2\ sen 400t). \tag{4.18}$$

Como a função aplicada g(x) é uma função polinomial, temos como solução particular $q_p = 2000t^0$. Assim, determinando os coeficientes específicos para os quais q_p seja solução para a equação (4.17).

Derivando q_p, obtém-se $q_p^{'} = 0$.

Agora, derivando $q_p^{'}$, obtém-se $q_p^{''} = 0$.

Substituindo esses valores na equação (4.17),

$$0 + 0 + 200.000q = 2000 \Rightarrow q_p = 0,01.$$

Dessa forma, temos que a equação geral para uma equação não-homogênea é igual a soma da função complementar com a função particular, ou seja $q = q_c + q_p$. Logo,

$$q = e^{-200t}(c_1 \cos 400t + c_2 \ sen 400t) + 0,01 \tag{4.19}$$

derivando (4.18), $\frac{dq}{dt} = i$

$$i = \frac{dq}{dt} = 200e^{-200t}\left[(-c_1 + 2c_2)\cos 400t + (-c_2 - 2c_1)\ sen 400t\right] \tag{4.20}$$

dada as condições iniciais $t = 0 \Rightarrow q = i = 0$, substituindo em (4.19)

$$0 = e^{-200.0}(c_1 \cos 400.0 + c_2 \ sen 400.0) + 0,01$$

$$\Rightarrow 0 = c_1 + 0,01$$

logo,

$$c_1 = -0,01$$

de acordo com (4.20), temos que $-c_1 + 2c_2 = 0$, substituindo $c_1 = -0,01$,

$$0,01 + 2c_2 = 0 \Rightarrow 2c_2 = -0,01$$

assim temos,

$$c_2 = -0,005.$$

Substituindo os valores de c_1 e c_2, temos,

$$i = 200e^{-200t}\left[(-0,01 + 0,01)\cos 400t + (-0,005 - 0,02)\ sen 400t\right]$$

$$\Rightarrow i = 200e^{-200t}\left[(0.\cos 400t) + (-0,025\ sen 400t)\right]$$

$$\Rightarrow i = -5e^{-200t} + \ sen 400t.$$

Portanto, $i = -5e^{-200t} + \ sen 400t$ ampére e $q = e^{-200t}(-0,01 \cos 400t - 0,005\ sen 400t) + 0,01$ coulombs.

4.3 Aplicações de equações diferenciais ordinárias não-linear

4.3.1 Reação química

Problema 1: (Zill e Cullen, p 129) Dois compostos químicos A e B são combinados para formar um terceiro composto C. A taxa ou velocidade da reação é proporcional à quantidade instantânea de A e B não convertida em C. Inicialmente, há 40 gramas de A e 50 gramas de B, e para cada grama de B, 2 gramas de A são usados. É observado que 10 gramas de C são formados em 5 minutos. Quanto é formado em 20 minutos? Qual é a quantidade limite de C após um longo período de tempo? Qual é a quantidade remanescente de A e B depois de um longo período de tempo?

Dados:

$A = 40$ gramas.

$B = 50$ gramas.

$A = 2B$, pois para cada grama de B, 2 de A são usados.

$X(t)$: é a quantidade do composto C no instante t.

$X(0) = 0$.

$X(5) = 10$ gramas.

$X(20)$: é a quantidade do composto produzidos em 20 minutos.

$\lim_{t\to\infty} X(t)$: é a quantidade do composto produzidos quando o t tende ao infinito.

A e B : quantidades remanescente.

Se

$$A + B = X, \tag{4.21}$$

e para cada grama de B, 2 gramas de A são usados, temos que $A = 2B$, então substituindo na equação (4.21) temos,

$$2B + B = X$$

$$\Rightarrow B = \frac{X}{3}.$$

Portanto, $\frac{X}{3}$ de B são convertidos no composto C. Com isso,

$$A = 2B \Rightarrow A = \frac{2X}{3}.$$

Dessa maneira, as quantidades remanescentes de A e B, são

$$A = \left(40 - \frac{2X}{3}\right) e \ B = \left(50 - \frac{X}{3}\right)$$

Logo,

$$\frac{dX}{dt} = k_1 \left(40 - \frac{2X}{3}\right)\left(50 - \frac{X}{3}\right),$$

isto é,

$$\frac{dX}{dt} = k_1 \left(\frac{120 - 2X}{3}\right)\left(\frac{150 - X}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dX}{dt} = k_1 \frac{2}{3}\ \frac{1}{3} (60 - X)(150 - X).$$

Tomando $k = k_1 \frac{2}{3}\ \frac{1}{3}$, a derivada anterior resulta em:

$$\frac{dX}{dt} = k (60 - X)(150 - X).$$

Multiplicando a equação por $\frac{dt}{(60-X)(150-X)}$, obtemos:

$$\frac{1}{(60 - X)(150 - X)} dx = kdt.$$

Integrando a equação,

$$\int \frac{1}{(60 - X)(150 - X)} dx = \int kdt. \tag{4.22}$$

Para resolver a integral (4.22), usaremos o método das frações parciais:

$\frac{A}{(60-X)} + \frac{B}{(150-X)} = \frac{A(150-X)+B(60-X)}{(60-X)(150-X)}$.

Dessa maneira,

$150A + 60B = 1$

$-A - B = 0 \Rightarrow B = -A$

implica que

$150A - 60A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{90}$

como $B = -A$, então $B = -\frac{1}{90}$.

Logo,

$$\int \frac{A}{(60 - X)} dx + \int \frac{B}{(150 - X)} dx = \int kdt$$

$$\Rightarrow \int \frac{\frac{1}{90}}{(60-X)}dx + \int \frac{-\frac{1}{90}}{(150-X)}dx = \int kdt.$$

calculando as integrais, obtemos:

$$-\frac{1}{90}\left|60-X\right| + \frac{1}{90}\left|150-X\right| = kt + c_1,$$

multiplicando a equação por 90,

$$-\left|60-X\right| + \left|150-X\right| = 90kt + 90c_1$$

aplicando a propriedade logarítmica

$$\ln\left|\frac{150-X}{60-X}\right| \times = 90kt + 90c_1,$$

usando exponencial

$$\frac{150-X}{60-X} = e^{90kt}.e^{90c_1}$$

tome $c = e^{90c_1}$, logo

$$\frac{150-X}{60-X} = Ce^{90kt}. \qquad (4.23)$$

Como $X(0) = 0$, resulta em:

$$\frac{150-0}{60-0} = Ce^{k.0} \Rightarrow C = \frac{5}{2}.$$

Substituindo $C = \frac{5}{2}$, na equação (4.23)

$$\frac{150-X}{60-X} = \frac{5}{2}e^{90kt} \qquad (4.24)$$

usando a equação (4.24), com $X(5) = 10$, vamos encontrar a constante arbitrária k

$$\frac{150-10}{60-10} = \frac{5}{2}e^{90k.5} \Rightarrow \frac{140}{50} = \frac{5}{2}e^{90k.5}.$$

Multiplicando pelo inverso multiplicativo de $\frac{5}{2}$,

$$e^{90k.5} = \frac{280}{250} \Rightarrow e^{90k.5} = \frac{28}{25}$$

usando o logaritmo

$$90k.5 = \ln\left(\frac{28}{25}\right)$$

multiplicando a equação por $\frac{1}{5}$

$$90k = \frac{1}{5}.\ln\left(\frac{28}{25}\right)$$

$$\Rightarrow 90k \simeq 0,023$$

sendo $90k \simeq 0,023$, vamos substituir na equação (4.24)

$$\frac{150 - X}{60 - X} = \frac{5}{2}\ e^{0,023.t}. \tag{4.25}$$

Multiplicando a equação (4.25) por $2(60 - x)$,

$$2(150 - X) = 5e^{0,23.t}(60 - X)$$

usando distributividade,

$$300 - 2X = 300e^{0,023.t} - 5Xe^{0,023.t} \Rightarrow (5e^{0,023.t} - 2)X = (300e^{0,023.t} - 300)$$

então X, em um certo instante t, será

$$X(t) = \frac{(300e^{0,023.t} - 300)}{(5e^{0,023.t} - 2)}. \tag{4.26}$$

Passados 20 minutos, vamos calcular quanto é produzido do composto C, por meio da equação (4.26)

$$X(20) = \frac{(300e^{0,023.20} - 300)}{(5e^{0,023.20} - 2)} \Rightarrow X(20) = \frac{(300e^{0,46} - 300)}{(5e^{0,46} - 2)}$$

$$\Rightarrow X(20) = \frac{(475,22 - 300)}{(7,92 - 2)} \Rightarrow X(20) = \frac{175,22}{5,92} \simeq 29,6.$$

Portanto, após 20 minutos tem-se aproximadamente $29,6$ gramas do composto C produzido.

Agora, devemos calcular $\lim_{t\to\infty} X(t)$, usando a equação (4.26),

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = \frac{(300e^{0,023.t} - 300)}{(5e^{0,023.t} - 2)},$$

daí,

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = \frac{e^{-0,023.t}}{e^{-0,023.t}} \cdot \frac{(300e^{0,023.t} - 300)}{(5e^{0,023.t} - 2)},$$

usando distributividade, temos

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = \frac{(300 - 300e^{-0,023.t})}{(5 - 2e^{-0,023.t})}.$$

Assim, quando t tende a infinito, temos

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = \frac{300}{5} \simeq 60.$$

Logo, a quantidade do composto C depois de um longo período é de aproximadamente 60 gramas.

Dessa maneira, as quantidades remanescentes de A e B, são:

$$A = \left(40 - \frac{2X}{3}\right) \Rightarrow A = \left(40 - \frac{2.60}{3}\right) = 0$$

e

$$B = \left(50 - \frac{X}{3}\right) \Rightarrow B = \left(50 - \frac{60}{3}\right) = 30.$$

Portanto, resta apenas 30 gramas do composto B.

4.3.2 População

Para entender um processo infecto contagioso é imprescindivel poder compreender a dinâmica populacional dos sistemas imunológicos em ação contra um determinado antígeno.

Aproximadamente em 1840, o matemático-biólogo P.F. Verhulst, preocupado com fórmulas matemáticas capazes de prever a população humana, estudou a fórmula

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP), \tag{4.27}$$

onde a e b considera-se constantes positivas.

Vimos que a equação de uma população foi descrita no problema de crescimento e decrescimento como a equação

$$\frac{d(P)}{d(t)} = kp, k > 0;$$

onde $P(t)$ apresenta um crescimento exponencial não limitado, no entanto, essa equação diverge substancialmente do previsto. Assim para resolver o problema a seguir que está relacionado com transmissão do vírus da gripe a uma população de alunos, vamos utilizar a equação logística (4.27).

Para solucionar essa equação (4.27) usa-se o método de separação de variável.

Seja

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP)$$

por separação de variáveis, tem-se

$$\frac{dP}{P(a - bP)} = dt$$

integrando

$$\int \frac{dP}{P(a - bP)} dP = \int dt$$

Usando o método das frações parciais:

$\frac{1}{P(a-bP)} = \frac{C}{P} + \frac{D}{a-bP} \Rightarrow \frac{1}{P(a-bP)} = \frac{C(a-bP)+D.P}{P(a-bP)}$.

Com isso,

$a.C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{a}$;

$-bC + D = 0 \Rightarrow D = \frac{b}{a}$

Obtemos,

$$\int \left(\frac{C}{P} + \frac{D}{a - bP} \right) dP = \int dt \Rightarrow \int \left(\frac{\frac{1}{a}}{P} + \frac{\frac{b}{a}}{a - bP} \right) dP = \int dt$$

isolando a constante,

$$\frac{1}{a} \int \frac{1}{P} dP + \frac{b}{a} \int \frac{1}{a - bP} dP = \int dt,$$

integrando, resulta em

$$\frac{1}{a}\ln|P|+\frac{b}{a}\left(\frac{-1}{b}\right)\ln|a-bP| = at+ac.$$

Usando a propriedade logarítmica,

$$\ln\left|\frac{P}{a-bP}\right| = at+ac$$

usando exponencial

$$\frac{P}{a-bP} = e^{at}.e^{ac},$$

tomando $k = ec$

$$P = (a-bP)\,ke^{at} = ake^{at} - bPke^{at} \Rightarrow \left(1+bke^{at}\right).P = ake^{at}$$

$$\Rightarrow P = \frac{ake^{at}}{(1+bke^{at})} = \frac{ake^{at}}{e^{at}\left(e^{-at}+bk\right)} = \frac{ak}{(e^{-at}+bk)}$$

Logo, a quantidade da população é dada pela seguinte função:

$$P = \frac{ak}{(e^{-at}+bk)}. \tag{4.28}$$

No entanto, se o problema for de condição inicial $P(0) = P_0$, tal que $P_0 \neq \frac{a}{b}$. Substituindo na equação (4.28),

$$P_0 = \frac{ak}{(e^{-a.o}+bk)} \Rightarrow P_0 = \frac{ak}{(1+bk)},$$

multiplicando (**??**) por $(1+bk)$,

$$P_0\,(1+bk) = ak \Rightarrow P_0 + P_0bk = ak$$

temos assim que

$$P_0 = (a-P_0b)\,k$$

logo,

$$k = \frac{P_0}{(a-P_0b)}.$$

Substituindo o valor de k na equação (4.28),

$$P = \frac{a\left(\frac{P_0}{(a-P_0b)}\right)}{\left[e^{-at} + b\left(\frac{P_0}{(a-P_0b)}\right)\right]} = \frac{\frac{aP_0}{(a-P_0b)}}{\frac{bP_0+(a-bP_0)e^{-at}}{a-bP_0}}.$$

Portanto, dado uma condição inicial, a equação da população é da forma:

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}}. \tag{4.29}$$

Problema 2 (Zill e Cullen, p 121)**:** Suponha que um estudante infectado com um vírus da gripe retorne a uma faculdade isolada no campus onde se encontra 1000 estudantes. Presumindo que a taxa na qual o vírus se espalha é proporcional não somente à quantidade x de alunos infectados, mas também à quantidade de alunos não infectados, determine o número de alunos infectados após 6 dias, se ainda é observado que depois de 4 dias $x(4) = 50$.

Dados:

P :quantidade de alunos

$x(t)$: a quantidade de alunos em um instante t

$x(0) = 1$

$x = 1000$ alunos

$x(6)$: quantidade de alunos infectados em 6 dias

$x(4) = 50$ alunos infectados

De acordo com a equação logística, vamos supor que ninguém se ausentou do campus. Assim podemos desenvolver a seguinte equação

$$\frac{dx}{dt} = kx(1000 - x) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = x(1000k - kx).$$

Dessa maneira sendo a equação logística (4.27), temos que $a = 1000k$ e $b = k$, logo no momento que $x(0) = 1$, a equação (4.29), será

$$x(t) = \frac{1000k\ .\ 1}{k.1 + (1000k - k.1)e^{-1000kt}} = \frac{1000k}{k + (1000k - k)e^{-1000kt}}$$

$$\Rightarrow x(t) = \left[\frac{1000k}{k(1 + 999e^{-1000kt})}\right].$$

Assim, função que representa a população infectadas é:

$$x(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-1000kt}}. \tag{4.30}$$

Se em 4 dias, 50 alunos foram infectados, substituindo na equação (4.30), temos que a constante é

$$50 = \frac{1000}{1 + 999e^{-1000k.4}} \Rightarrow 1000 = 50\left(1 + 999e^{-4000k}\right)$$

$$\Rightarrow 20 = 1 + 999e^{-4000k} \Rightarrow 999e^{-4000k} = 19 \Rightarrow e^{-4000k} = \frac{19}{999}$$

usando logaritmo

$$-4000k = \ln\left|\frac{19}{999}\right| \Rightarrow k = 0,0009906$$

substituindo k, na equação (4.30)

$$x(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0,9906t}}$$

portanto, após 6 dias, temos

$$x(6) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0,9906.\ 6}} = \frac{1000}{1 + 999e^{-5,9436}}$$

$$\Rightarrow x(6) = 276.$$

Dessa maneira conclui-se que após 6 dias, 276 alunos estavam infectados com o vírus da gripe.

Considerações finais

Esta pesquisa teve por objetivo ampliar o conhecimento sobre o conteúdo de estudo apresentado, que foi as equações diferenciais ordinárias, mais especificamente as equações diferenciais ordinárias lineares e as equações diferenciais ordinárias não-lineares. Dentre os pontos explorados para um melhor entendimento desse conteúdo, tivemos: surgimento, definições, teoremas, exemplos e aplicação que foram limitadas a segunda ordem.

É conhecida a dificuldade por parte dos alunos nas disciplinas de cálculo, talvez por não perceberem o amplo campo de aplicação que o mesmo possui, não apresentem tanto interesse em aperfeiçoar seus conhecimentos nessa área.

No decorrer do trabalho vê-se que as equações diferenciais, começaram a ser estudadas por volta do século XVII, e que ainda hoje, apresenta problemas que envolvem assuntos relacionados ao nosso dia-a-dia, com base nisso, e pensando em familiarizar o leitor em áreas de aplicações, o trabalho foi escrito ilustrando algumas aplicações relacionadas a física, biologia e química, com o propósito de aperfeiçoar o conhecimento do leitor na área de aplicação dessas equações.

A fim de que o leitor tenha confiança ao estudar as equações diferenciais ordinárias e venha a esclarecer suas dúvidas, foram apresentadas: definições seguidas de exemplos, teoremas e aplicações.

Espera-se que este trabalho contribua de forma significativa para um melhor entendimento do objeto de estudo apresentado, e que por meio dele, o leitor possa compreender que a teoria das equações diferenciais ordinárias, não é uma teoria isolada.

Referências Bibliográficas

[1] AYRES JÚNIOR, Frank. Equações Diferenciais. 1 Ed. São Paulo: McGraw-Hill, Inc, 1959;

[2] BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C., Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 8 ed. Rio de Janeiro: LTC 2006;

[3] CHINCHIO, Ana Cláudia. Introdução às equações diferenciais ordinárias e aplicações. Rio Claro: [s.n.], 2012;

[4] DIACU, Florin. Introdução a Equações Diferenciais: Teoria e Aplicações. 1^a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004;

[5] TALAVERA, Leda Maria Bastoni. Parábola e Catenária: história e aplicações. São Paulo: s.n., 2008;

[6] TEIXEIRA, Fernanda Luiz. Modelos Descrito por Equações Diferenciais Ordinárias. Rio Claro: [s.n.], 2012;

[7] THOMAS, George B., Cálculo, 11^a ed. São Paulo: Pearson 2009. 344 p;

[8] ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R., Equações Diferenciais. Vol 1. 3 ed. São Paulo: Pearson 2007.