Data Science Academy

www.datascienceacademy.com.br

Matemática Para Machine Learning

Como Definimos Espaço Vetorial

Sabe-se que o conjunto:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$$

é interpretado geometricamente no plano cartesiano. O par ordenado (x,y) pode ser um ponto ou um vetor .

Esta ideia se estende ao espaço tridimensional que é a interpretação geométrica do conjunto ℝˆ3. Embora se perca a visão geométrica, é possível estender essa ideia a espaços ℝˆ4, ℝˆ5, ..., ℝˆn.

Nota: ℝˆn significa o conjunto de números reais R elevado ao número de dimensões n.

$$\mathbb{R}^4 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$\mathbb{R}^5 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) / x_i \in \mathbb{R}\}$$

A maneira de trabalhar nesses espaços é idêntica àquela vista no ℝˆ2 e no ℝˆ3. Vamos revisar tais propriedades.

Propriedades Algébricas

Considerando os vetores u e v no espaço ℝˆn e α um escalar, define-se, que:

$$\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ e } \vec{v} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \text{ são vetores no } \mathbb{R}^n$$

a) igualdade de vetores $\vec{u} = \vec{v} \rightarrow x_1 = y_1,\ x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$

b) adição de vetores $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$

c) multiplicação de escalar $\alpha\vec{u} = (\alpha x_1,\ \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$

d) produto escalar $\vec{u} . \vec{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$

e) módulo $|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

Espaço Vetorial

Seja um conjunto V, não-vazio, sobre o qual estão definidas as operações adição e multiplicação por escalar, isto é:

$$\forall u, v \in V \ , u + v \in V$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall u \in V, \ \alpha \mathrm{u} \in V$$

O conjunto V com essas duas operações é chamado de **espaço vetorial real** (ou espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$) se forem verificados os seguintes axiomas:

A) Em relação à adição:

- **A1)** $u + (v + w) = (u + v) + w, \ \forall u, v, w \in V$
- **A2)** $u + v = v + u, \ \forall u, v \in V$
- **A3)** $\exists 0 \in V, \forall u \in V, u + 0 = u$
- **A4)** $\forall u \in V, \exists (-u) \in V, u + (-u) = 0$

B) Em relação à multiplicação por escalar:

- **M1)** $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$
- **M2)** $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
- **M3)** $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
- **M4)** $1(u) = u$

para $\forall u, v \in V \ e \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Os elementos do espaço vetorial V são chamados de vetores, independente de sua natureza. Pode parecer estranho, o fato de se chamar de vetores os polinômios, (quando V for constituído de polinômios), as matrizes (quando V for constituído de matrizes), os números (quando V for constituído for um conjunto numérico), e assim por diante. Podemos fazer isso, pois esses elementos de natureza tão distinta se comportam de forma idêntica nas operações de adição e multiplicação de escalar, como se estivéssemos trabalhando com os próprios vetores do $\mathbb{R}$ˆ2 e $\mathbb{R}$ˆ3.

Se tivéssemos tomado para escalares o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, V seria um espaço vetorial complexo.

Em resumo: Um espaço vetorial é uma estrutura formada por um conjunto V, cujos elementos são chamados vetores, no qual estão definidas duas operações:

- A adição(+)
- A multiplicação por um escalar (.)

- Na adição, cada par de vetores u, v ∈ V faz corresponder um novo elemento z = u + v, ∈ V, chamado a soma de u e v.

- Na multiplicação por um escalar, que a cada número(escalar) a ∈ $\mathbb{R}$ e a cada vetor v ∈ V faz corresponder um vetor av, chamado o produto de a por v.

Referência:

Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares
https://www.amazon.com.br/Introduction-Applied-Linear-Algebra-Matrices-ebook/dp/B07CN2ZX7D?keywords=vectors+and+linear+algebra&qid=1536272751&sr=8-7&ref=sr_1_7