www.datascienceacademy.com.br

Matemática Para Machine Learning

Solução de Sistemas Lineares Utilizando a Matriz Inversa

Consideremos o sistema com expressão geral dado abaixo e que tem n equações lineares com n incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Que pode ser escrito na forma matricial: A.X = B. A matriz A chama-se matriz do sistema, tem dimensão **n x n** e seus elementos são os coeficientes das incógnitas. A matriz X é uma matriz coluna, de dimensão n x 1, formada pelas incógnitas do sistema. Por último, a matriz B é uma outra matriz coluna, de dimensão n x 1, formada pelos termos independentes. Assim:

$$A \cdot X = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Quando o determinante da matriz A é diferente de zero (det(A) =! 0), a matriz A tem inversa (A^{-1}). Portanto, podemos calcular a matriz das incógnitas X do seguinte modo:

$$A \cdot X = B \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B$$

Desta forma, para calcular a matriz coluna das incógnitas (X), multiplicamos a inversa da matriz A (A^{-1}) pela matriz coluna dos termos independentes, obtendo outra matriz coluna de mesma dimensão que X. Vejamos um exemplo:

Considere o sistema linear representado por sua equação matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Para resolver as incógnitas x1, x2 e x3 utilizando a matriz inversa, aplicamos o escalonamento de matrizes:

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow -2L_1 + L_2 \\ \leftarrow -3L_1 + L_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftarrow -L_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right) \leftarrow 4L_2 + L_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/20 & -4/20 & 1/20 \end{array}\right) \leftarrow \frac{1}{20}L_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 5/20 & 12/20 & -3/20 \\ 0 & 1 & 0 & 5/20 & 8/20 & -7/20 \\ 0 & 0 & 1 & 5/20 & -4/20 & 1/20 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow -3L_3 + L_1 \\ \leftarrow -7L_3 + L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/20 & -4/20 & 11/20 \\ 0 & 1 & 0 & 5/20 & 8/20 & -7/20 \\ 0 & 0 & 1 & 5/20 & -4/20 & 1/20 \end{array}\right) \leftarrow -2L_2 + L_1 \qquad = (I \mid A^{-1})$$

Como já sabemos, o valor de x pode ser encontrado aplicando a fórmula:

$$x = A^{-1}b$$

Logo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/20 & -4/20 & 11/20 \\ 5/20 & 8/20 & -7/20 \\ 5/20 & -4/20 & 1/20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Os valores de x1, x2 e x3 são, respectivamente (1, -1, 1).

Observações:

1) Do mesmo modo que na regra de Cramer, não é possível determinar a solução de um sistema linear Ax = b, utilizando a inversa da matriz dos coeficientes, se A é singular.

2) Se n > 3, tanto a regra de Cramer como o cálculo da matriz inversa, para resolver sistemas lineares, tornam-se muito trabalhosos.

Referências:

Método da Matriz Inversa - Ovídio Filho

http://www.igm.mat.br/cursos/a_linear/al_01/sistemas_lineares/metodo_matriz_inversa.htm

Linear Algebra: Step by Step

https://www.amazon.com.br/Linear-Algebra-Step-Kuldeep-Singh-ebook/dp/B016WNBNGI?__mk_pt_BR=%C3%85M%C3%85%C5%BD%C3%95%C3%91&keywords=linear+algebra&qid=1538914576&sr=8-15&ref=sr_1_15