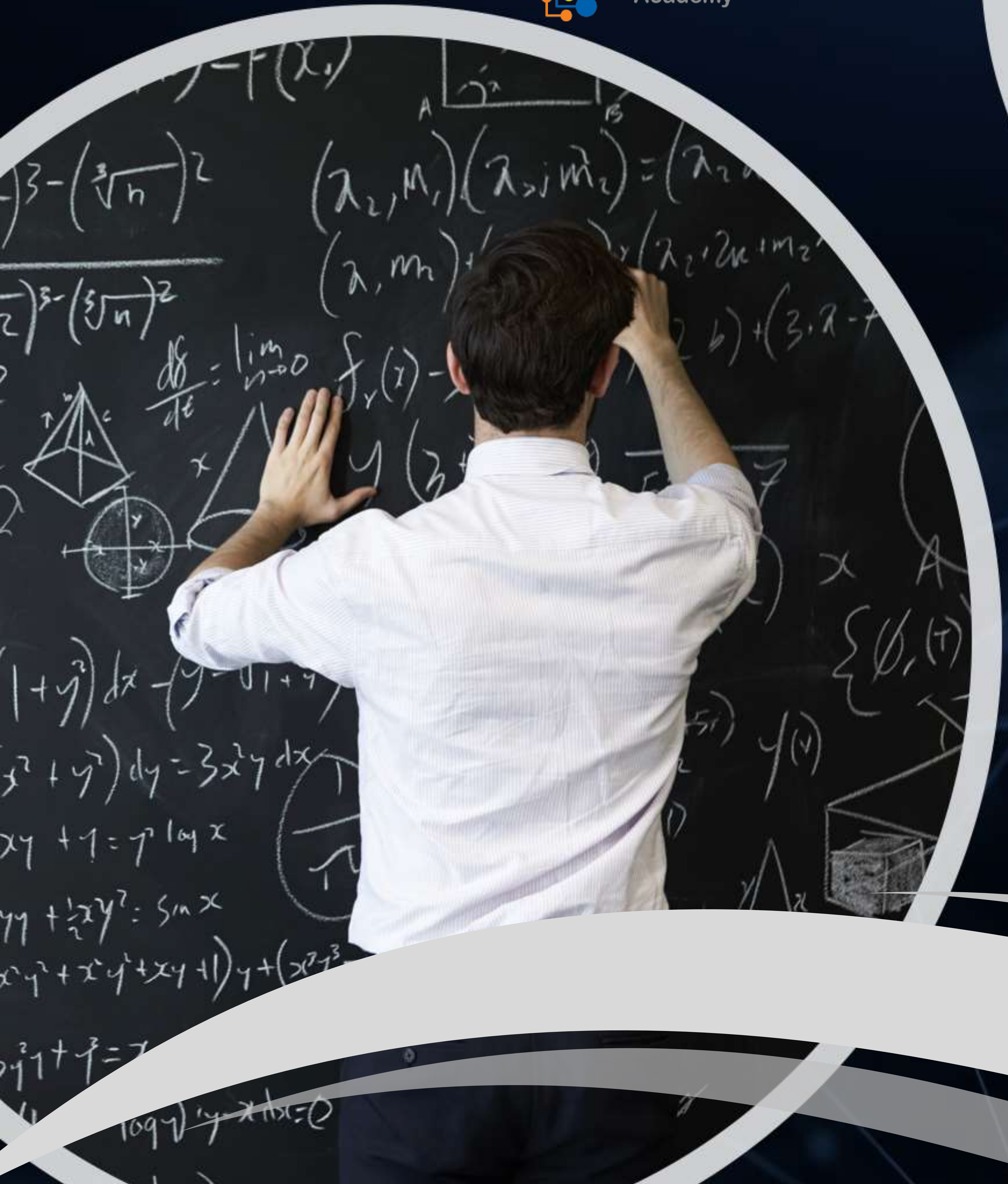


Matemática para Machine Learning

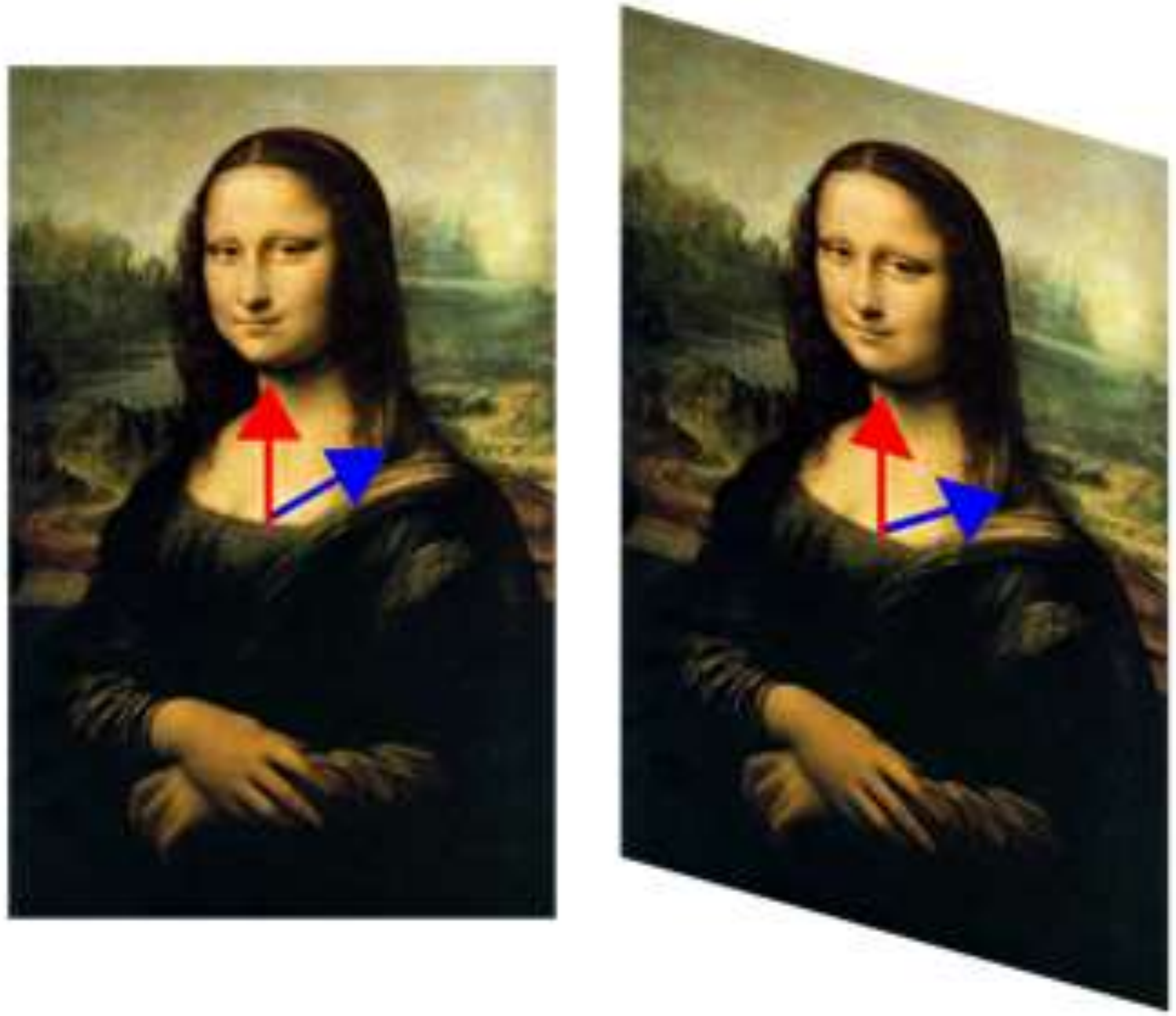
A sua base começa aqui!

Matemática para Machine Learning

Autovalores e Autovetores

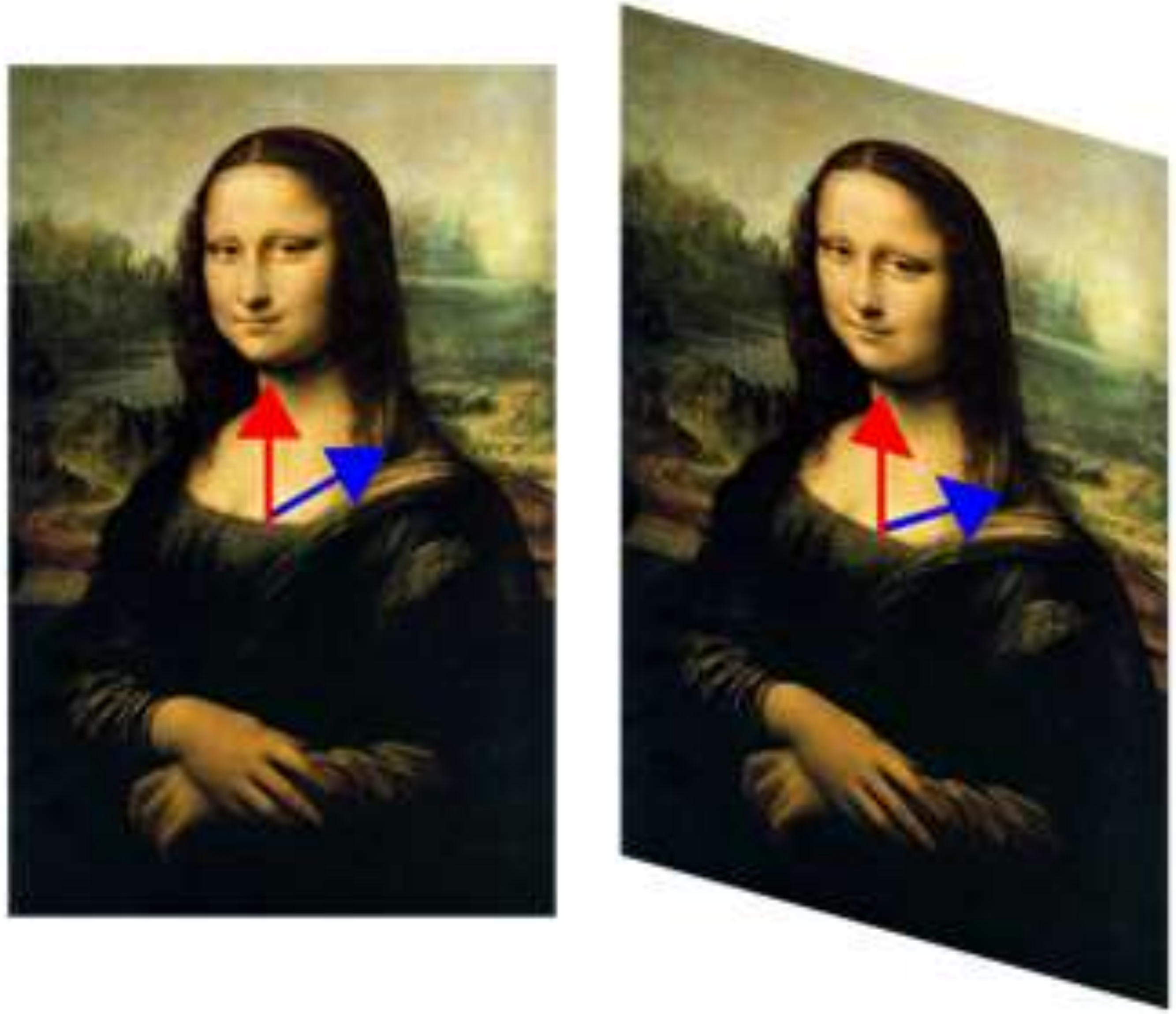
Data Science Academy

Autovalores e Autovetores



O foco deste capítulo será sobre autovalores e autovetores, que são características de matrizes e transformações lineares.

Autovalores e Autovetores



Autovalores e autovetores podem ser usados para resolver problemas em áreas como economia, teoria da informação, análise estrutural, eletrônica, teoria de controle e muitos outros.

Matemática para Machine Learning

Dica de Leitura: O Algoritmo Mestre

Dica de Leitura: O Algoritmo Mestre

Excelente livro para compreender os limites atuais e possibilidades do Aprendizado de Máquina.

Matemática para Machine Learning

O Que São Autovalores e Autovetores?

O Que São Autovalores e Autovetores?

Autovalores e Autovetores são conceitos importantes em Matemática, com aplicações práticas em áreas diversas como Mecânica Quântica, Processamento de Imagens, Análise de Vibrações, Mecânica dos Sólidos, Estatística (na Análise Fatorial de Correspondência e Diagonalização da Matriz de Contingência, os Autovalores em ordem crescente são as Variâncias ou Desvios Padrões os quais irão formar então os Auto-Espaços associados aos Autovetores e, consequentemente os Planos Fatoriais), entre outros.

O Que São Autovalores e Autovetores?

Autovalores e Autovetores são conceitos importantes em Matemática, com aplicações práticas em áreas diversas como Mecânica Quântica, Processamento de Imagens, Análise de Vibrações, Mecânica dos Sólidos, Estatística (na Análise Fatorial de Correspondência e Diagonalização da Matriz de Contingência, os Autovalores em ordem crescente são as Variâncias ou Desvios Padrões os quais irão formar então os Auto-Espaços associados aos Autovetores e, consequentemente os Planos Fatoriais), entre outros.

Na língua inglesa, os termos usuais são **eigenvalue** e **eigenvector**. Nesses nomes, há uma combinação de idiomas, pois o prefixo eigen é alemão, significando próprio, característico; value e vector significam valor e vetor, respectivamente.

Autovalores e Autovetores

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{T\vec{v} = \lambda \vec{v}}$$

Será que se tivermos uma transformação linear (ou uma matriz) T, existe algum vetor v não-nulo de forma que Tv seja um vetor múltiplo de v?

Autovalores e Autovetores

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 2$$

$$\boxed{T\vec{v} = \lambda \vec{v}}$$

A ideia é que se eu puder substituir uma matriz inteira por um número escalar (que nesse caso foi o número 2), os vetores que respeitam esta regra são chamados de **autovetores** e o número escalar é o que chamamos de **autovalor**.

Em nosso exemplo, o escalar 2 é o **autovalor** da matriz T, pois para alguns vetores podemos substituir a matriz pelo número escalar na hora de multiplicar. E o vetor v que permite tal operação, é um autovetor.

Autovalores e Autovetores

Seja $\mathbf{A}$ *uma matriz em* $\mathcal{M}(n,n)$. *Um escalar* $\lambda \in \mathbb{C}$ *é um* **autovalor** *de* $\mathbf{A}$ *se existir um vetor* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, *com* $\mathbf{v} \neq \bar{\mathbf{0}}$, *tal que:*

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}\,.$$

O vetor $\mathbf{v}$ *é chamado de* **autovetor** *associado a* λ.

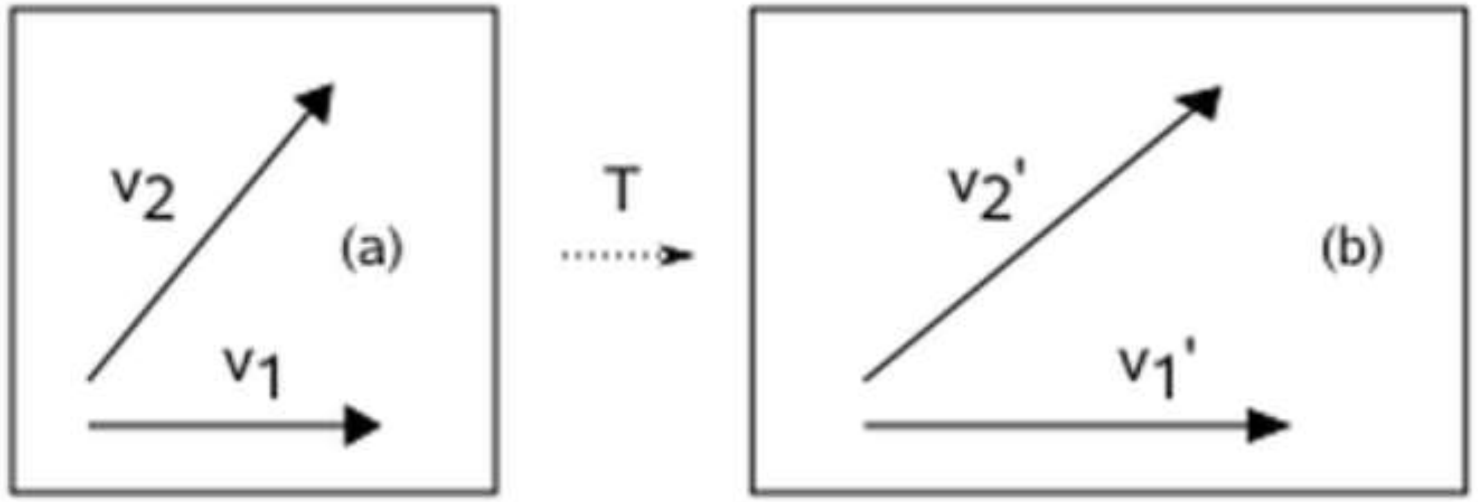
O que estamos falando aqui se refere a matrizes quadradas.

Matemática para Machine Learning

Representação Geométrica dos Autovalores e Autovetores na Transformação Linear

Data Science Academy

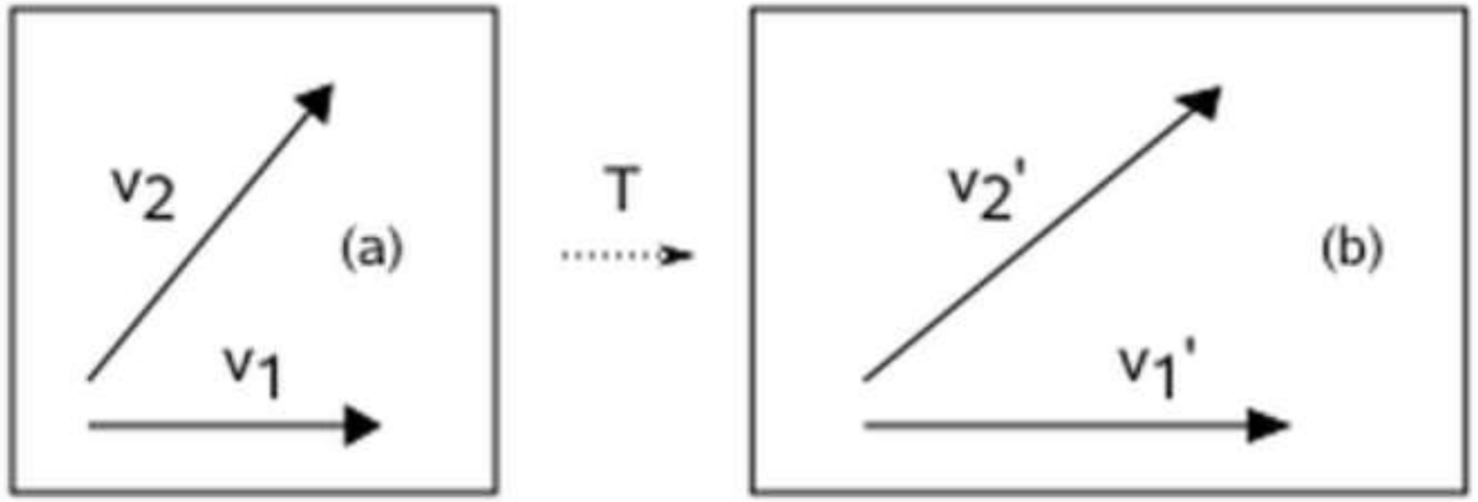
Representação Geométrica dos Autovalores e Autovetores na Transformação Linear



Diz-se então que v1 é um Autovetor da Transformação e que esse Escalar é um Autovalor associado a v1.

Acontece a ampliação de v1 ou mantém-se o tamanho de v1, se o escalar $\lambda \geq 1$; e acontece uma redução de v1 se $0 < \lambda < 1$.

Representação Geométrica dos Autovalores e Autovetores na Transformação Linear



Um vetor não nulo v é dito um Autovetor de T se existe um número real λ tal que T(v) = λ v.

O escalar λ é denominado um Autovalor de T associado a v.

Pode-se concluir que v e T(v) tem a mesma Reta Suporte (e assim, mesma Direção).

Em outras palavras, o vetor w=T(v) é um múltiplo do vetor v.

Matemática para Machine Learning

Determinando os Autovetores de Uma Matriz

Determinando os Autovetores de Uma Matriz

$$T \bullet \vec{v} = \lambda \vec{v}$$

$$T \bullet \vec{v} \qquad \lambda \vec{v}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determinando os Autovetores de Uma Matriz

$$T \bullet \vec{v} = \lambda \vec{v}$$

$$T \bullet \vec{v} - \lambda \vec{v} = \vec{0}$$

$$I \bullet \vec{v} = \vec{v}$$

$$T \vec{v} - \lambda I \vec{v} = \vec{0}$$

$$(T - \lambda I) \bullet \vec{v} = \vec{0}$$

Determinando os Autovetores de Uma Matriz

$$(T - \lambda I) \bullet \vec{v} = \vec{0}$$

Esse é um sistema homogêneo, ou seja, uma matriz que multiplica um vetor desconhecido é igual a zero. Para encontrar os autovetores da matriz T, e só resolver o sistema.

O espaço solução desse sistema é o que chamamos de autoespaço.

Determinando os Autovetores de Uma Matriz

O autoespaço nada mais é do que o conjunto de todos os autovetores de uma Transformação Linear. E para determinar os autovetores, tudo que precisamos é resolver o sistema abaixo:

$$(T - \lambda I) \bullet \vec{v} = \vec{0}$$

Mas, temos uma forma de simplificar isso. É só subtrair o escalar da diagonal principal da matriz.

Determinando os Autovetores de Uma ~~Matriz~~

$$(T - \lambda I) \bullet \vec{v} = \vec{0}$$

$$T - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$T - 2I = \begin{pmatrix} 2-2 & 1 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determinando os Autovetores de Uma Matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{Nuc}\,(T) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Esta matriz está escalonada, então descartamos a linha nula e achamos o núcleo.

Determinando os Autovetores de Uma Matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \text{Nuc}\,(T) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

O autoespaço dessa matriz é o espaço gerado por (1, 0), ou seja, o eixo x.

Determinando os Autovetores de Uma Matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{Nuc}\,(T) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Assim, qualquer vetor pertencente ao eixo x é um autovetor da matriz T. Por exemplo, podemos escolher (50, 0):

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matemática para Machine Learning

Determinando os Autovalores de Uma Matriz

Data Science Academy

Determinando os Autovalores de Uma Matriz

$$(T - \lambda I) \bullet \vec{v} = \vec{0}$$

$$T - \lambda I$$

O resultado desta operação é uma matriz quadrada!

A solução do sistema admite um conjunto infinito de vetores (autoespaço). Em uma matriz quadrada, se as linhas forem LI (Linearmente Independentes) o sistema admite apenas uma solução, mas como nosso sistema admite infinitas sol $T - \lambda I$ temos que é LD (Linearmente Dependente).

E o que acontece quando uma matriz é LD? seu determinante é zero! Logo, para encontrar os autovalores de uma matriz, tudo que precisamos é resolver:

$$\det(T - \lambda I) = 0$$

Determinando os Autovalores de Uma Matriz

$$(T - \lambda I) \bullet \vec{v} = \vec{0}$$

A equação representa um sistema linear homogêneo de ordem n.

Para que este sistema admita soluções não triviais, pois o autovetor deve ser diferente do vetor nulo, devemos impor que o determinante da matriz dos coeficientes seja igual a zero. O resultado do determinante será um polinômio de grau n em λ cujas raízes são os autovalores procurados. Para obter um autovetor associado ao autovalor λ, basta substituir o valor de λ na equação e resolver o sistema linear homogêneo resultante.

Matemática para Machine Learning

Exercício - Determinando Autovalores e Autovetores

Data Science Academy

Exercício - Determinando Autovalores e Autovetores

$$T : I\!R^2 \rightarrow I\!R^2 \qquad (u_1,\ u_1) \rightarrow T(u) = (3u_1 + 4u_2,\ 2u_1 + u_2)$$

Determine os autovalores e correspondentes autovetores de T.

Exercício - Determinando Autovalores e Autovetores

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \qquad (u_1,\ u_1) \rightarrow T(u) = (3u_1 + 4u_2,\ 2u_1 + u_2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Procuramos um escalar λ e um vetor não nulo v = (v1, v2), tais que Av = λv.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Exercício - Determinando Autovalores e Autovetores

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 3v_1 & + & 4v_2 & = & \lambda v_1 \\ 2v_1 & + & v_2 & = & \lambda v_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} (3-\lambda)v_1 & + & 4v_2 & = & 0 \\ 2v_1 & + & (1-\lambda)v_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

Como dissemos, para que o sistema linear homogêneo tenha solução não nula, o determinante da matriz dos coeficientes deve ser igual a zero. Logo:

$$\begin{vmatrix} (3-\lambda) & 4 \\ 2 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$$

Exercício - Determinando Autovalores e Autovetores

$$\begin{vmatrix} (3-\lambda) & 4 \\ 2 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, λ é um autovalor de A se e somente se λ = 5 ou λ = −1.

Exercício - Determinando Autovalores e Autovetores

Para encontrar o autovetor, vamos usar λ = 5 e substituir neste sistema:

$$\begin{cases} (3-\lambda)v_1 + 4v_2 = 0 \\ 2v_1 + (1-\lambda)v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2v_1 + 4v_2 = 0 \\ 2v_1 - 4v_2 = 0 \end{cases}$$

ou, simplesment $v_1 - 2v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = 2v_2$ nde v2 é uma variável livre.
Assim, $v = (2v_2,\ v_2)$ o autovetor correspondente ao autovalor λ1 = 5.

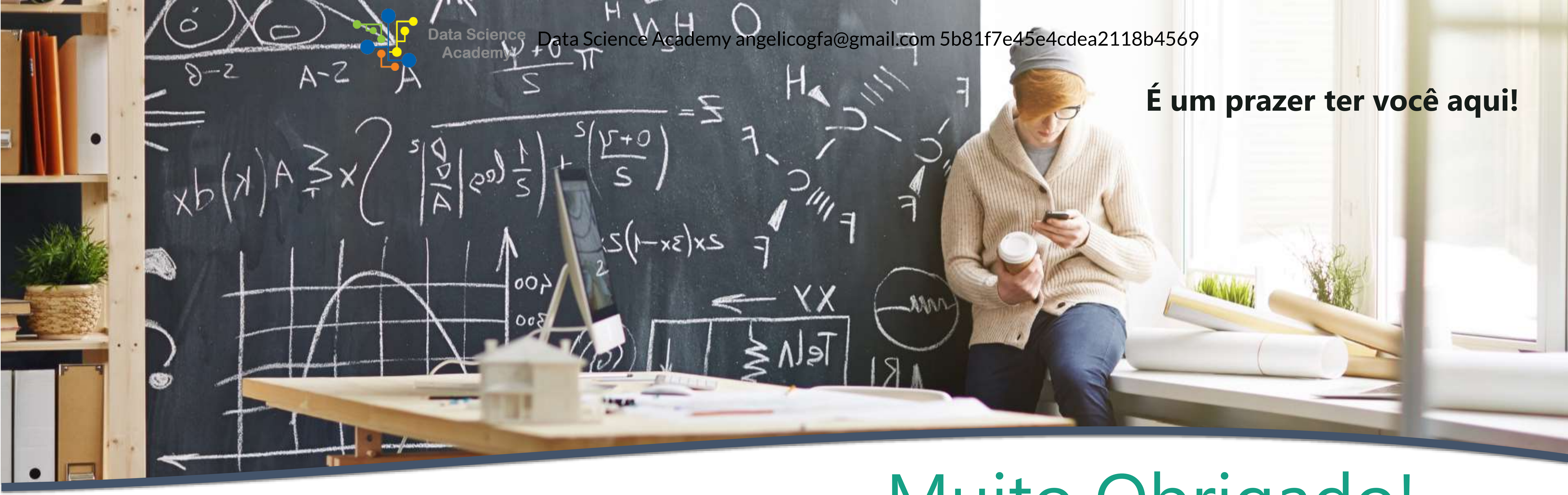
Exercício - Determinando Autovalores e Autovetores

Para encontrar o autovetor, vamos usar λ = 5 e substituir neste sistema:

$$\begin{cases} (3-\lambda)v_1 & + & 4v_2 & = & 0 \\ 2v_1 & + & (1-\lambda)v_2 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2v_1 & + & 4v_2 & = & 0 \\ 2v_1 & - & 4v_2 & = & 0 \end{cases}$$

Qualquer outro autovetor correspondente a λ1 = 5 é um múltiplo de v.

Com base no autovetor $v = (2v_2,\ v_2)$ tomando v2 = 1, obtemos que v = (2, 1) é um autovetor correspondente ao autovalor λ1 = 5.



É um prazer ter você aqui!

Muito Obrigado!

Pela Confiança em Nosso Trabalho.

Continue Trilhando Uma Excelente Jornada de Aprendizagem!

Data Science Academy