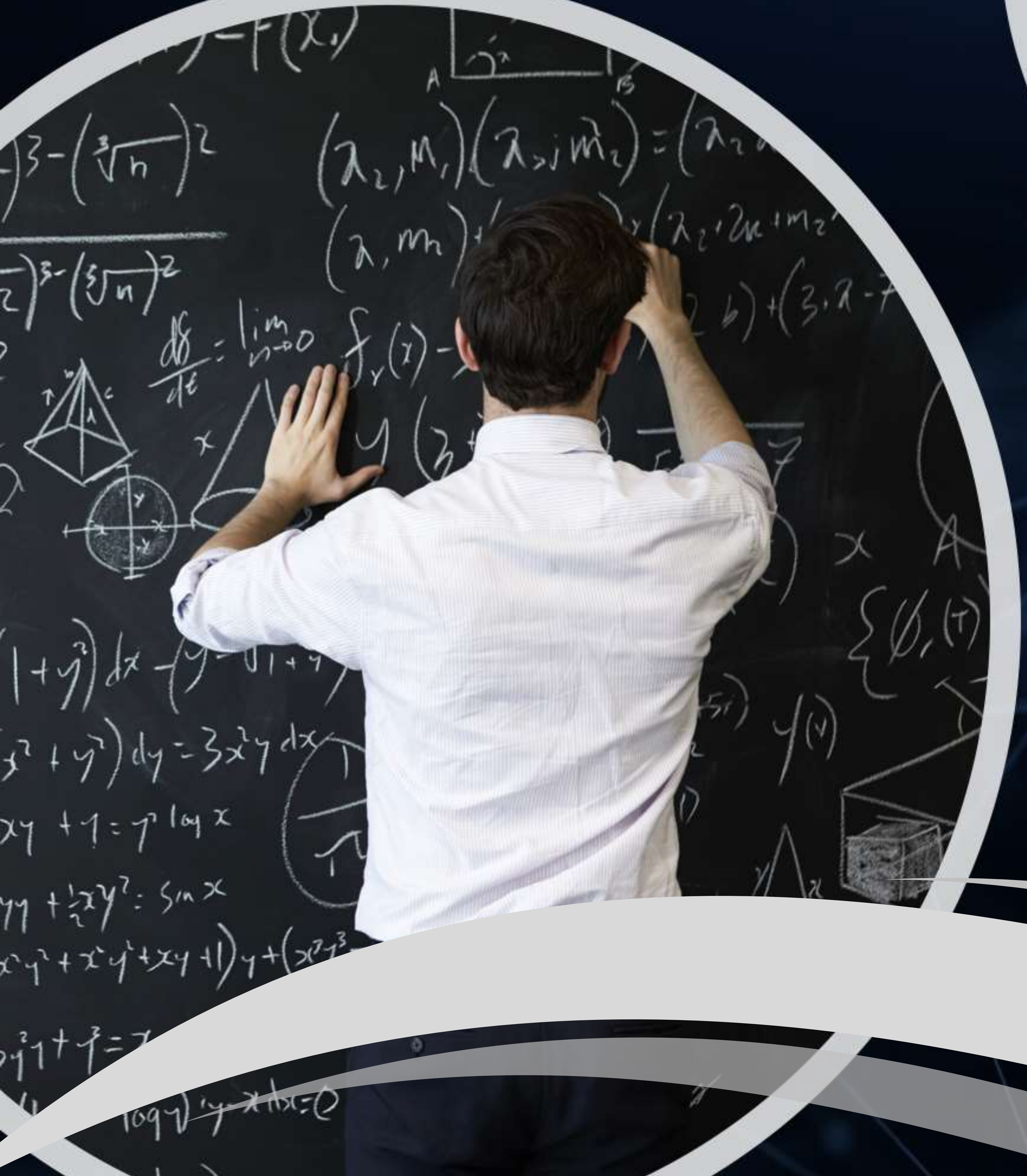


Matemática para Machine Learning

A sua base começa aqui!

Matemática para Machine Learning

Matrizes e Determinantes

Data Science Academy

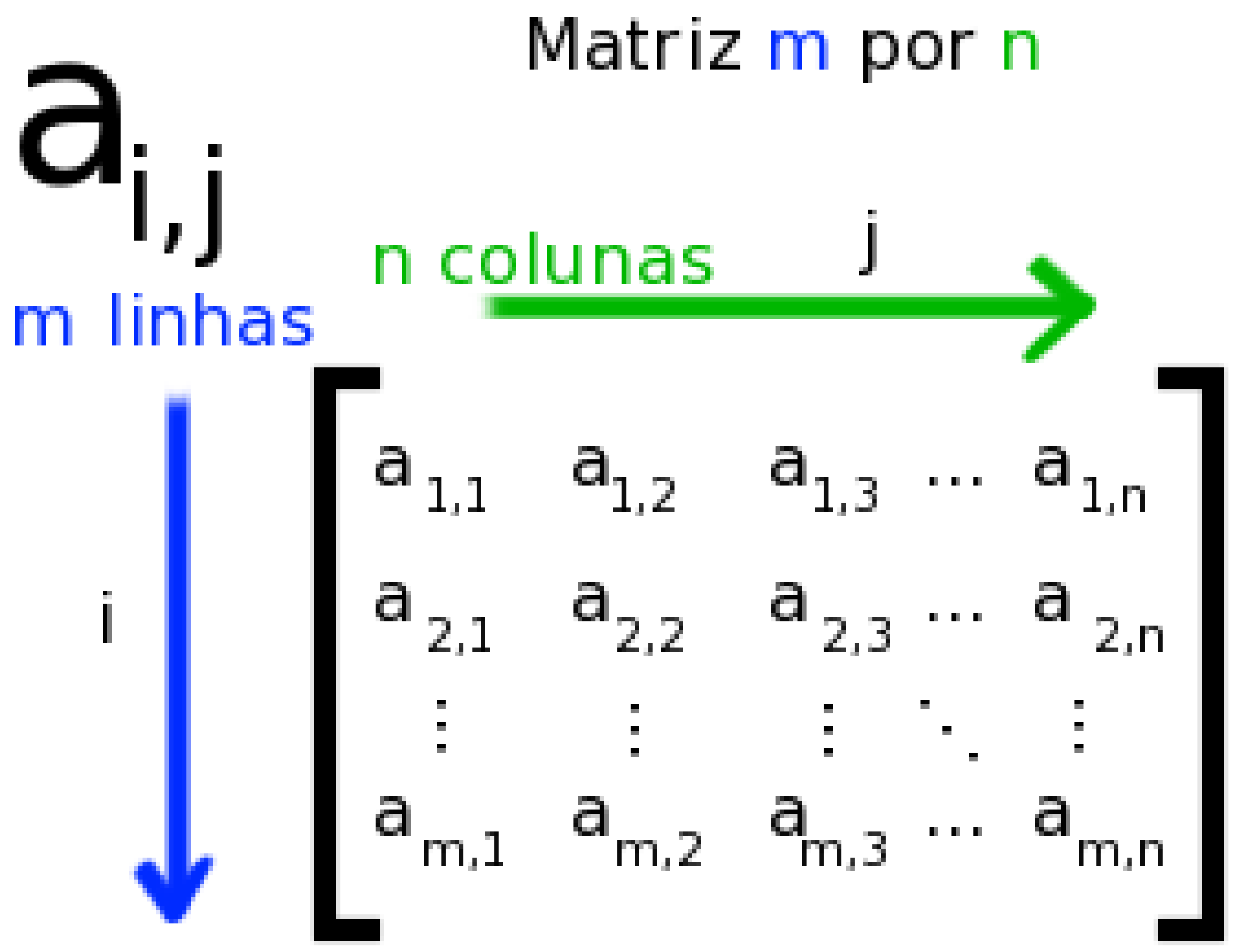
Matrizes e Determinantes

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

Matemática para Machine Learning

O Que São Matrizes?

O Que São Matrizes?



As matrizes são formadas por linhas (os valores ordenados na horizontal) e o número delas é representado pela letra “m”, e colunas (os valores ordenados na vertical), onde o número delas é representado pela letra “n”.

O Que São Matrizes?

Matriz m por n

$a_{i,j}$

m linhas

n colunas

$$
\begin{array}{c|c}
 & \xrightarrow{\quad j \quad} \\
i \downarrow &
\begin{bmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Em termos gerais: uma matriz m x n, com m e n números naturais não nulos, é toda tabela composta por **m x n** elementos dispostos em m linhas e n colunas.

Matemática para Machine Learning

O Que São Matrizes - Exemplo

Matemática para Machine Learning

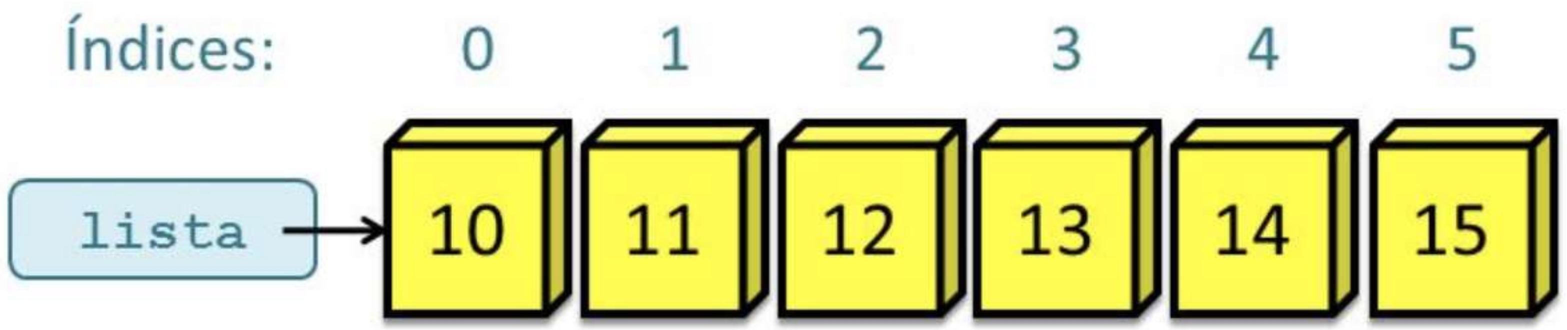
Tipos Especiais de Matrizes

Data Science Academy

Tipos Especiais de Matrizes

Atenção a esta regra ao definir uma matriz:

$$m \geq 1 \; e \; n \geq 1$$



Tipos Especiais de Matrizes

Matriz Nula

aij = 0

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Linha

m = 1

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Matriz Coluna

n = 1

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Tipos Especiais de Matrizes

Matriz Quadrada

$$m = n$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Matriz Retangular

$$m \neq n$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Diagonal

$$a_{ij} = 0, \; i \neq j$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Tipos Especiais de Matrizes

Matriz Identidade

$$a_{ij} = 1, \ i = j$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Triangular Inferior

$$a_{ij} = 0, \ i < j$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz Triangular Superior

$$a_{ij} = 0, \ i > j$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tipos Especiais de Matrizes

Matriz Simétrica

$$a_{ij} = a_{ji}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Tipos Especiais de Matrizes

Para uma matriz A de ordem n, a diagonal principal e a diagonal secundária de A são definidas da seguinte maneira:

- Diagonal Principal de A = (aij) é o conjunto de todos os elementos aij, tais que i = j;
- Diagonal Secundária de A = (aij) é o conjunto de todos os elementos aij, tais que i + j = n + 1.

Assim, se A é uma matriz de ordem 3, temos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

diagonal secundária

diagonal principal

Matemática para Machine Learning

Operações com Matrizes

Multiplicação de Uma Matriz Por Um Escalar

Data Science Academy

Matemática para Machine Learning

Matriz Inversa

Data Science Academy

Matriz Inversa

A matriz inversa ou matriz inversível é um tipo de matriz quadrada, ou seja, que possui o mesmo número de linhas (m) e colunas (n).

Considerando duas matrizes quadradas A e B, A será inversa de B se, e somente se, A x B ou B x A for igual a I (Matriz Identidade).

Matemática para Machine Learning

Propriedades da Matriz Inversa

Data Science Academy

Propriedades da Matriz Inversa

- Existe somente uma inversa para cada matriz.
- Nem todas as matrizes possuem uma matriz inversa. Ela é inversível somente quando os produtos de matrizes quadradas resultam em uma matriz identidade I.
- A matriz inversa de uma inversa corresponde à própria matriz: $A = (A^{-1})^{-1}$
- A matriz transposta de uma matriz inversa também é inversa: $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- A matriz inversa de uma matriz transposta corresponde à transposta da inversa: $(A^{-1} A^t)^{-1}$
- A matriz inversa de uma matriz identidade é igual à matriz identidade: $I^{-1} = I$

Matemática para Machine Learning

Escalonamento de Matrizes

Escalonamento de Matrizes

Dizemos que uma matriz está na forma **escalonada por linhas**, se atender às seguintes regras:

Cada elemento principal, não nulo, de uma linha está à direita do elemento principal, não nulo, da linha precedente.

Todas as linhas nulas, se existirem, estão na base da matriz (últimas linhas).

Matemática para Machine Learning

Sistema Linear, Forma Matricial e Machine Learning

Data Science Academy

Sistema Linear, Forma Matricial e Machine Learning

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Matriz Aumentada

Sistema Linear, Forma Matricial e Machine Learning

```
[DenseVector([0.9337, -1.145, -0.9194, 0.9083]),
 DenseVector([0.9337, -1.145, -1.4773, 3.3936]),
 DenseVector([0.9337, -1.145, -0.9459, 0.753]),
 DenseVector([0.9337, -1.145, -1.1053, 1.5297]),
 DenseVector([0.9337, -1.145, -0.9459, 1.8403]),
 DenseVector([0.9337, -1.145, -1.1585, 1.9956]),
 DenseVector([-1.0656, -1.145, -0.9194, 0.9083]),
 DenseVector([0.9337, -1.145, -0.9459, 1.8403]),
```

Matriz de atributos (features)

```
+--------------------+----------+
|            features|prediction|
+--------------------+----------+
|[0.93367168148051...|         1|
|[0.93367168148051...|         1|
|[0.93367168148051...|         1|
|[0.93367168148051...|         1|
|[0.93367168148051...|         1|
|[0.93367168148051...|         1|
|[-1.0656035495158...|         0|
|[0.93367168148051...|         1|
|[0.93367168148051...|         1|
|[0.93367168148051...|         1|
|[0.93367168148051...|         1|
|[0.93367168148051...|         1|
|[0.93367168148051...|         1|
|[0.93367168148051...|         1|
|[0.93367168148051...|         1|
|[0.93367168148051...|         1|
|[0.93367168148051...|         1|
|[0.93367168148051...|         1|
|[0.93367168148051...|         1|
|[-1.0656035495158...|         0|
+--------------------+----------+
```

Matriz de atributos mais variável alvo (target)

*Extraído do capítulo 9 do curso Big Data Real-Time Analytics com Python e Spark

Matemática para Machine Learning

Escalonamento de Matrizes Para Solução de Sistemas de Equações Lineares

Data Science Academy

Escalonamento de Matrizes Para Solução de Sistemas de Equações Lineares

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrizes escalonadas

Matriz não-escalonada

Escalonamento de Matrizes Para Solução de Sistemas de Equações Lineares

$$\begin{cases} 2x + 2y - z & = 0 \\ y + 2z & = -3 \\ -4z & = 8 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{array}\right]$$

Resolvendo de baixo para cima, temos:

−4z = 8 ➔ z = −2
y + 2z = −3 ➔ y + 2 × (−2) = −3 ➔ y = −3 + 4 = 1
2x + 2y − z = 0 ➔ 2x + 2 × 1 − (−2) = 0 ➔ 2x + 4 = 0 ➔ 2x = −4 ➔ x = −2

Logo, a solução é x = −2, y = 1, z = −2

Escalonamento de Matrizes Para Solução de Sistemas de Equações Lineares

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right]$$

Resolvendo de baixo para cima, temos

$-4w = 4 \Longrightarrow w = -1$
$2z + 1 = -1 \Longrightarrow 2z = -2 \Longrightarrow z = -1$
$x + 2y - z + 3w = 1 \Longrightarrow x + 2y - (-1) + 3 \times (-1) = 1 \Longrightarrow x + 2y = 3$

Por exemplo, escolhendo y como livre, temos $x = 3 - 2y$
E a solução seria: $x = 3 - 2y$, y livre, $z = -1$ e $w = -1$

Matemática para Machine Learning

Determinantes

Determinantes

Podemos calcular o determinante de qualquer matriz desde que essa seja quadrada, ou seja, que a matriz tenha o mesmo número de linhas e de colunas.

Podemos dizer que determinante de uma matriz quadrada é o seu valor numérico.

Determinantes

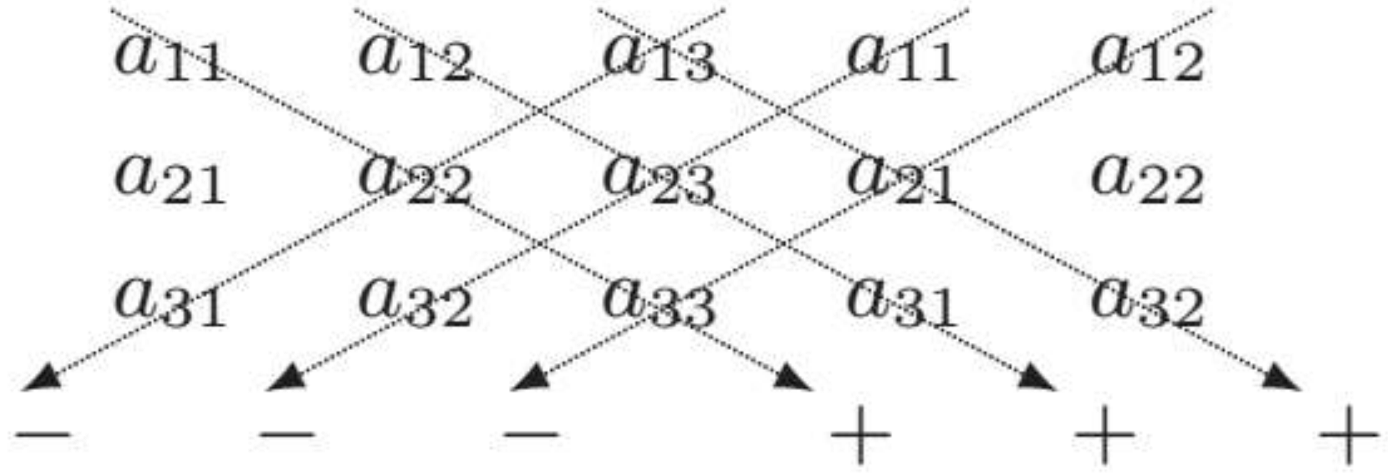
Para matriz de ordem 2, calculamos assim o determinante:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \in I\!R$$

Determinantes

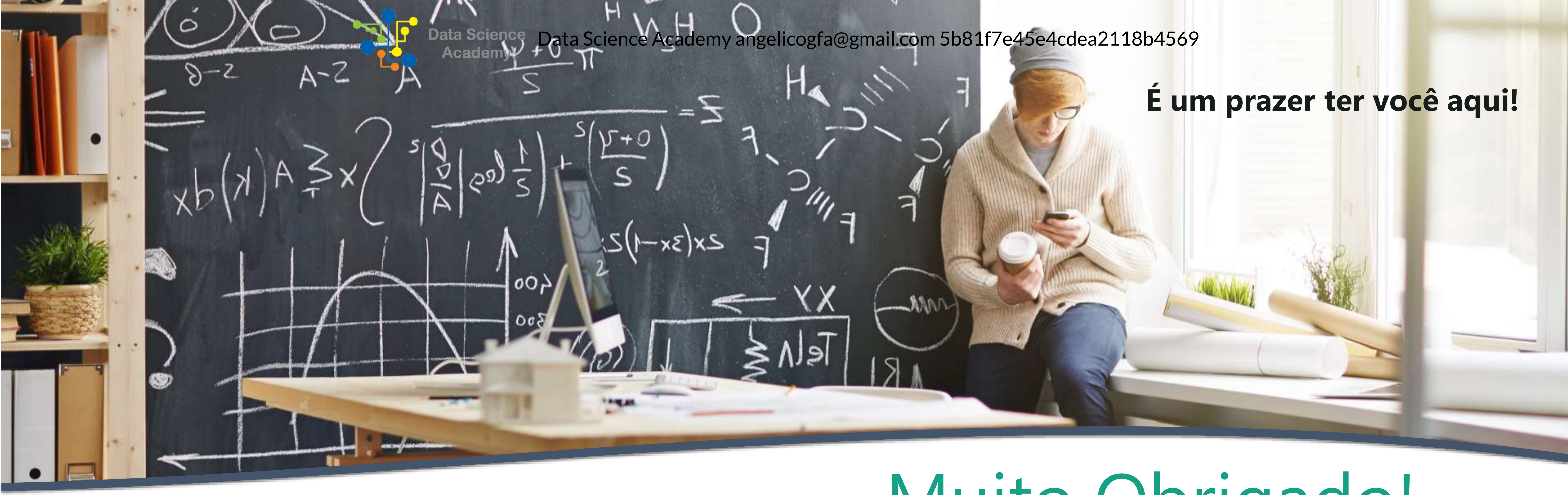
Para matriz de ordem 3, calculamos assim o determinante:

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$$



Regra de Sarrus

$$\begin{aligned} det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \in I\!R \end{aligned}$$



É um prazer ter você aqui!

Muito Obrigado!

Pela Confiança em Nosso Trabalho.

Continue Trilhando Uma Excelente Jornada de Aprendizagem!

Data Science Academy