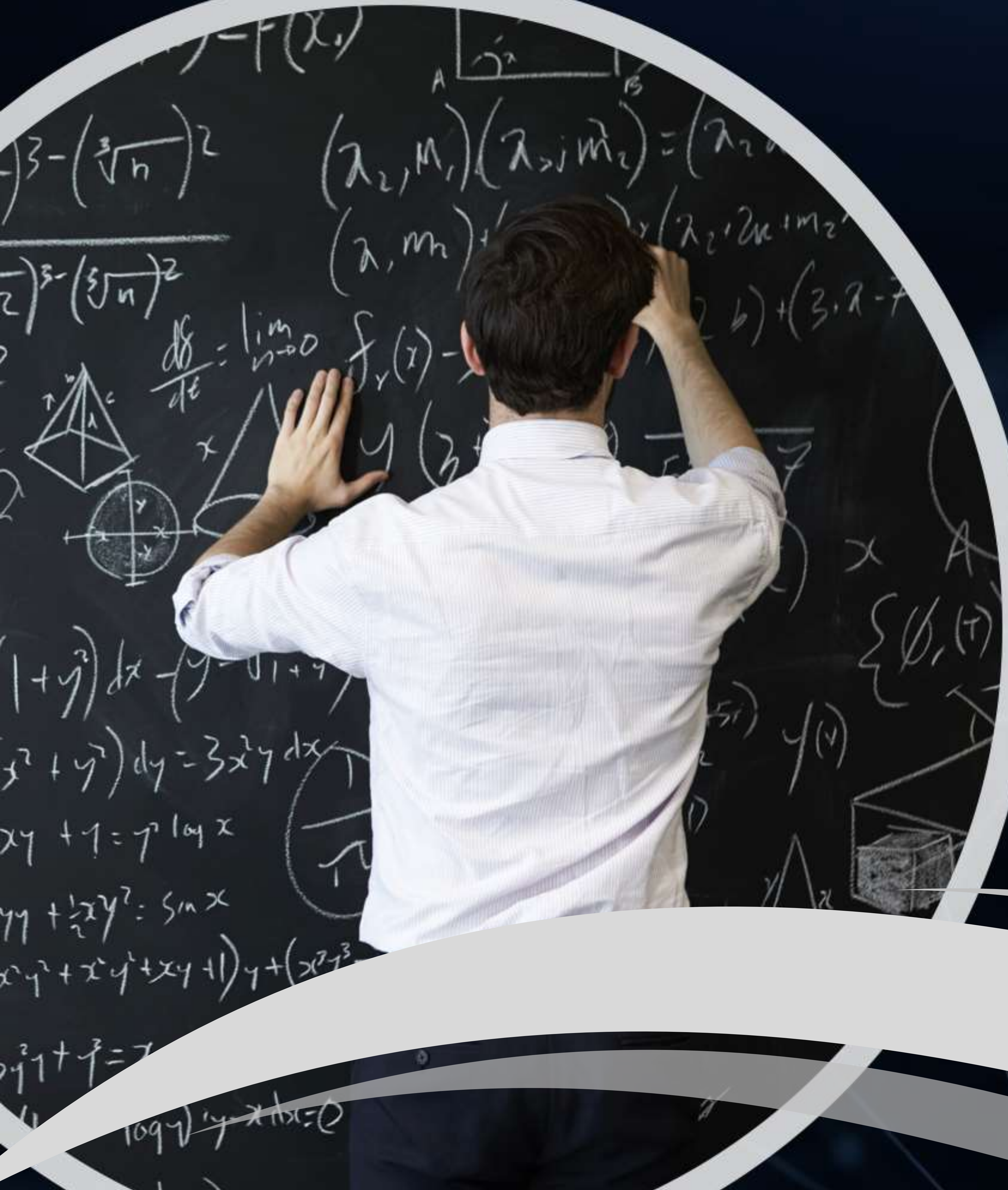


# Matemática para Machine Learning

A sua base começa aqui!

# Matemática para Machine Learning

## Fundamentos da Matemática

Data Science Academy

# Fundamentos da Matemática


Pronto para começar?

# Fundamentos da Matemática


Data Science Academy

# Fundamentos da Matemática

Toda bela casa...

# Fundamentos da Matemática

...começa com os fundamentos.

Data Science Academy

# Fundamentos da Matemática

Neste capítulo estudaremos fundamentos matemáticos que vão nos acompanhar mais tarde quando estivermos estudando conceitos mais avançados de Álgebra Linear e Cálculo.

Também daremos ênfase ao uso de notações matemáticas usadas de maneira universal e que vão ajudar você a ler e compreender livros e artigos de Matemática, além de ler e compreender *papers* de pesquisas e algoritmos de Machine Learning.

# Matemática para Machine Learning

## Resolvendo Equações

Data Science Academy

# Resolvendo Equações

Um modelo de Machine Learning é na prática uma equação, onde as variáveis são os dados de entrada e saída e as constantes os coeficientes que são aprendidos durante o processo de treinamento.

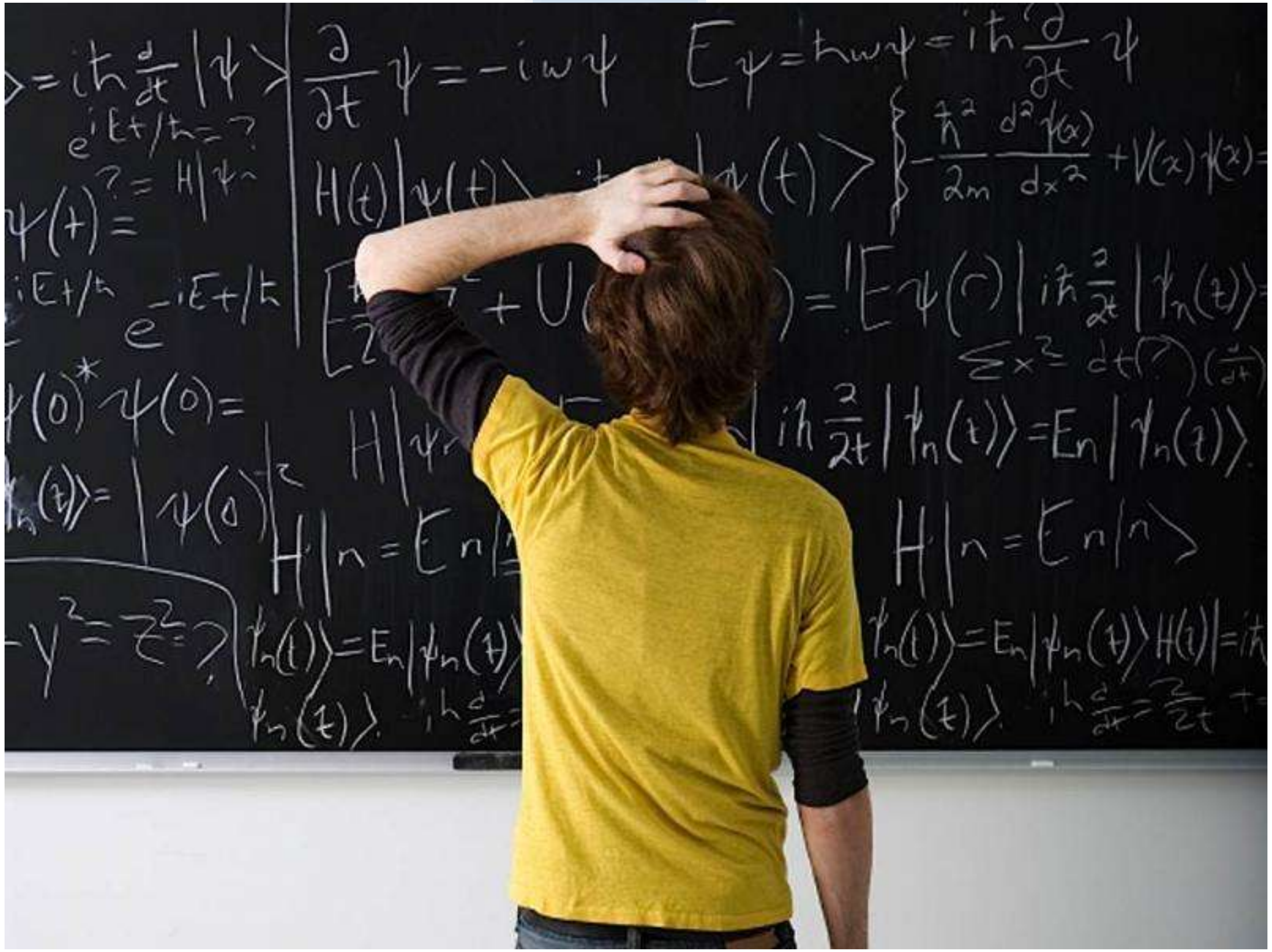
# Resolvendo Equações

$$x^2 - 4 = 45$$

Qual o valor de x?

Qual número, multiplicado por ele mesmo, menos 4, é igual a 45?

# Resolvendo Equações



# Resolvendo Equações

x = operação com os valores constantes (somente números)

# Resolvendo Equações

$$x^2 - 4 = 45$$

$$x^2 - 4 + 4 = 45 + 4,$$

$$x^2 \quad = 45 + 4$$

$$x^2 = 49$$

Data Science Academy

# Resolvendo Equações

$$x^2 - 4 = 45$$

$$x^2 - 4 + 4 = 45 + 4,$$

$$x^2 = 45 + 4$$

$$x^2 = 49$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{49}$$

$$\boxed{|x| = 7}$$

x = 7

ou

x = -7

# Matemática para Machine Learning

## Números e Representações

Data Science Academy

# Números e Representações

**Números Naturais:** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$

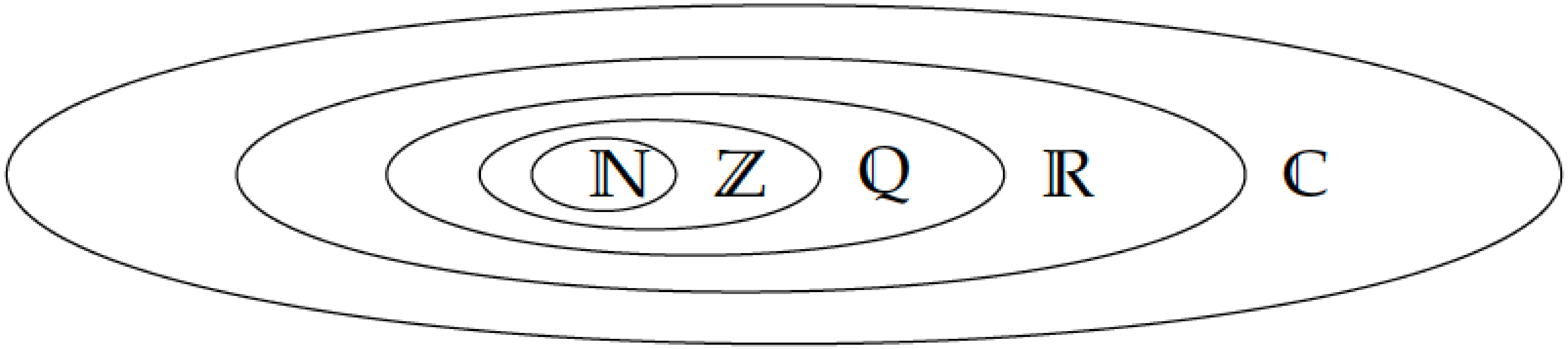
**Números Inteiros:** $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

**Números Racionais:** $\mathbb{Q} = \{\frac{5}{3}, \frac{22}{7}, 1.5, 0.125, -7, \ldots\}$

**Números Reais:** $\mathbb{R} = \{-1, 0, 1, \sqrt{2}, e, \pi, 4.94\ldots, \ldots\}$

**Números Complexos:** $\mathbb{C} = \{-1, 0, 1, i, 1+i, 2+3i, \ldots\}$

# Números e Representações




Data Science Academy

# Matemática para Machine Learning

## Variáveis

Data Science Academy

# Variáveis

Em Matemática usamos muitas variáveis e constantes, que são marcadores para qualquer número ou valor desconhecido. Variáveis nos permitem realizar cálculos sem conhecer todos os detalhes.

# Variáveis

| Representação da Variável | Utilização |
|---|---|
| x | Nome geral do valor desconhecido nas equações (também usado para indicar a entrada de uma função, bem como a posição de um objeto em Física). |
| v | Velocidade em problemas de Física. |
| xi, xf | Indica as posições inicial e final de um objeto em Física. |
| i, j, k, m, n | Nomes comuns para variáveis inteiras. |
| a, b, c, d | As letras perto do começo do alfabeto são frequentemente usadas para indicar constantes (quantidades fixas que não mudam). |
| $\theta, \phi$: | As letras gregas theta e phi são usadas para indicar ângulos. |
| C | Representa custos assim como L para lucro e R para receita. |
| X | Uma variável aleatória na teoria da probabilidade. |

# Variáveis

Queremos resolver uma equação e encontrar o valor numérico de uma ou mais variáveis. Mas qual a ordem correta das operações matemáticas?

1º Parêntesis
2º Expoentes
3º Multiplicações e Divisões (da esquerda para a direita)
4º Somas e Subtrações (da esquerda para a direita)

PEMDAS – “Please Excuse My Dear Aunt Sally”
Parentheses, Exponents, Multiplication and Division, Addition and Subtraction

# Variáveis

É ainda importante ressaltar, que todas as expressões que envolvam logaritmos, razões trigonométricas ou qualquer outro tipo de função, deverão ser executadas em primeiro lugar.

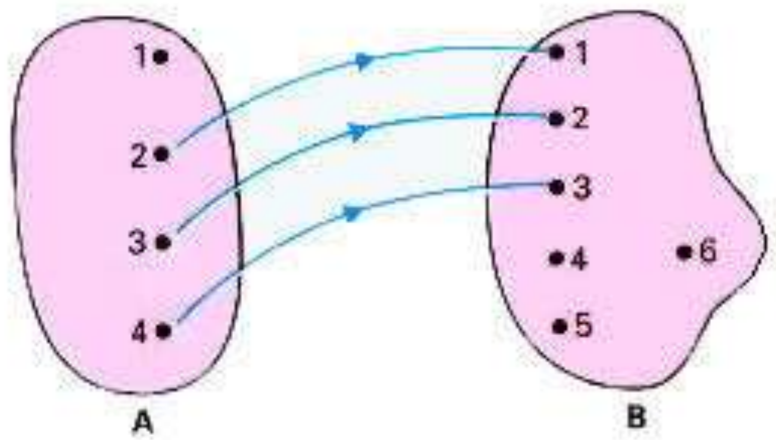
Não é possível calcular 3 + f(2) antes de conhecer o valor de f(2).

# Matemática para Machine Learning

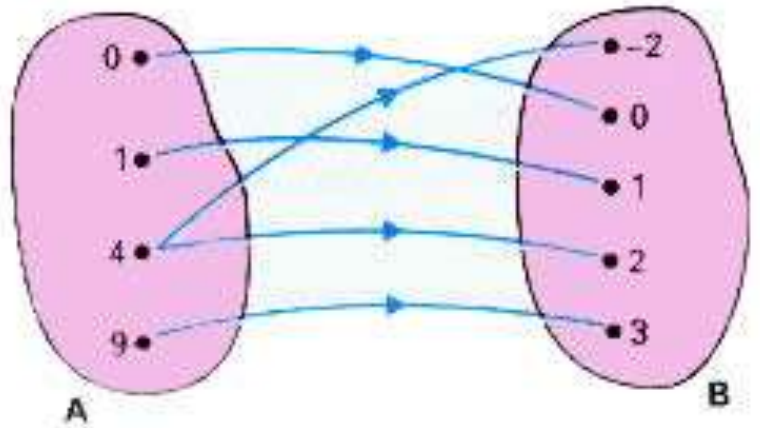
## Funções e Suas Inversas

Data Science Academy

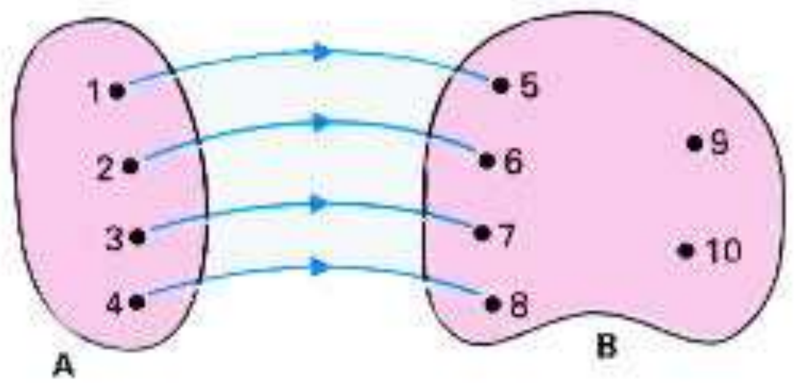
# Funções e Suas Inversas




Essa relação não é uma função, pois existe o elemento 1 no conjunto A, que não está associado a nenhum elemento do conjunto B.



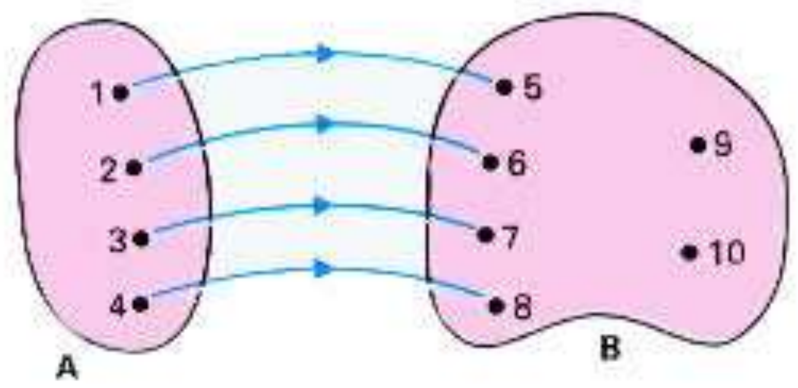

Essa relação também não é uma função, pois existe o elemento 4 no conjunto A, que está associado a mais de um elemento do conjunto B.




Essa relação é uma função, pois todo elemento do conjunto A está associado a somente um elemento do conjunto B.

Data Science Academy

# Funções e Suas Inversas




Essa relação é uma função, pois todo elemento do conjunto A está associado a somente um elemento do conjunto B.

De um modo geral, dados dois conjuntos A e B, e uma relação entre eles, dizemos que essa relação é uma função de A em B se e somente se, para todo x pertencente ao conjunto A existe um único y pertencente ao conjunto B de modo que x se relacione com y.

# Funções e Suas Inversas

$$x^2 - 4 = 45$$

$$f(x) = c$$

$$f^{-1}(f(x)) = x = f^{-1}(c)$$

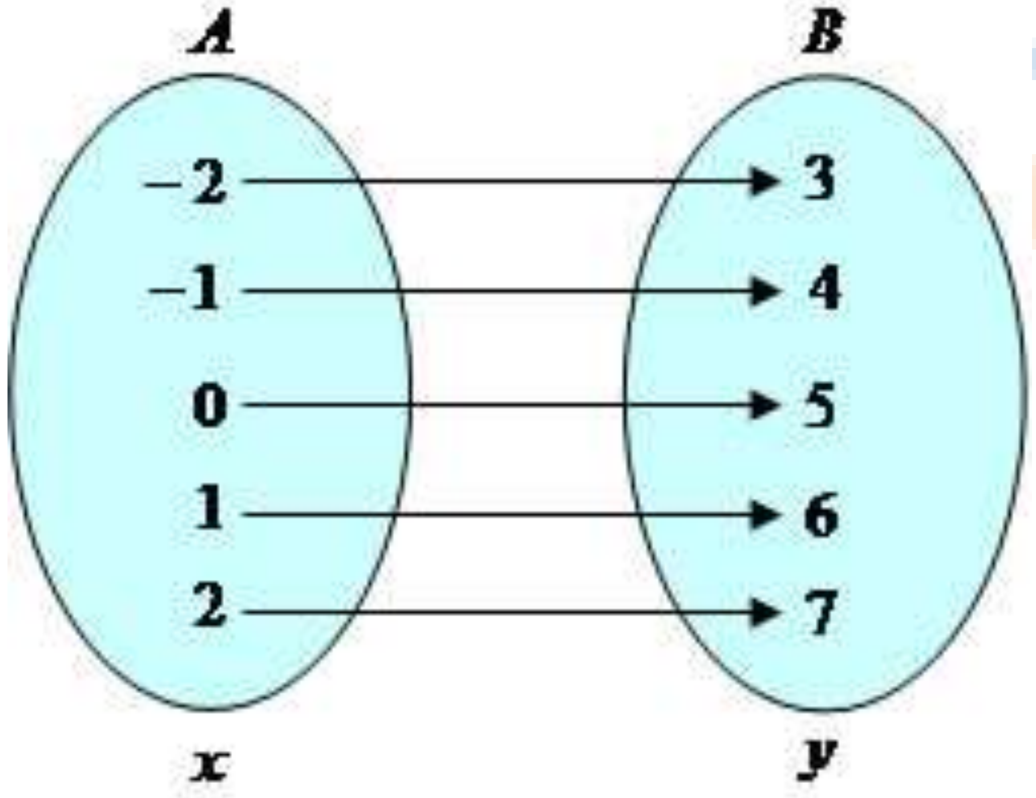
Data Science Academy

# Funções e Suas Inversas

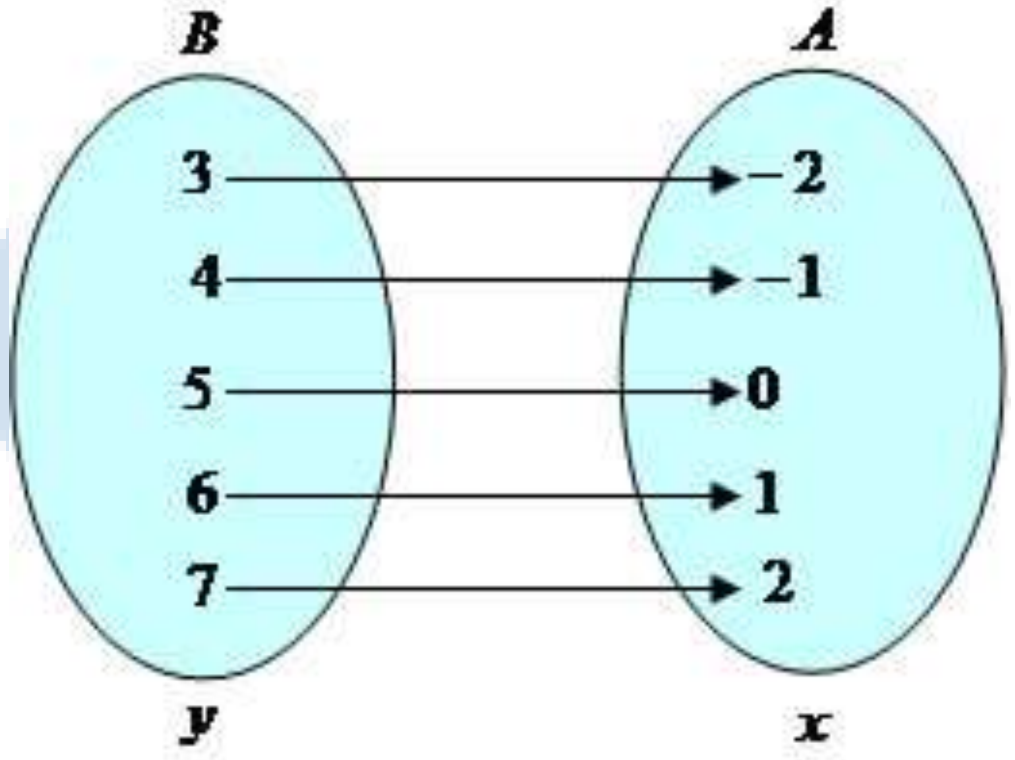
O objetivo de uma função inversa é criar funções a partir de outras. Uma função somente será inversa se for bijetora, isto é, os pares ordenados da função f deverão pertencer à função inversa $f^{-1}$ da seguinte maneira: $(x,y) \in f^{-1}$ $(y,x) \in f$.

# Funções e Suas Inversas

Dado os conjuntos $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ e a função $A \to B$ definida pela fórmula $f(x) = x + 5$, veja o diagrama dessa função abaixo:




A sua função inversa será indicada por $f^{-1}$: $B \to A$, e será preciso realizar a troca entre x e y na função $y = x + 5$, dessa forma temos: $x = y + 5 \to -y = -x + 5 \to y = x - 5$, portanto $f^{-1}(x) = x - 5$.




Data Science Academy

# Funções e Suas Inversas

| | | |
|---|---|---|
| **função** $f(x)$ | $\Leftrightarrow$ | **inversa** $f^{-1}(x)$ |
| $x+2$ | $\Leftrightarrow$ | $x-2$ |
| $2x$ | $\Leftrightarrow$ | $\frac{1}{2}x$ |
| $-1x$ | $\Leftrightarrow$ | $-1x$ |
| $x^2$ | $\Leftrightarrow$ | $\pm\sqrt{x}$ |
| $2^x$ | $\Leftrightarrow$ | $\log_2(x)$ |
| $3x+5$ | $\Leftrightarrow$ | $\frac{1}{3}(x-5)$ |
| $a^x$ | $\Leftrightarrow$ | $\log_a(x)$ |
| $\exp(x) \equiv e^x$ | $\Leftrightarrow$ | $\ln(x) \equiv \log_e(x)$ |
| $\sin(x)$ | $\Leftrightarrow$ | $\sin^{-1}(x) \equiv \arcsin(x)$ |
| $\cos(x)$ | $\Leftrightarrow$ | $\cos^{-1}(x) \equiv \arccos(x)$ |

# Matemática para Machine Learning

## Regras Básicas da Álgebra

Data Science Academy

# Regras Básicas da Álgebra

As regras gerais para manipular números
e variáveis é um processo conhecido como _______________.

# Regras Básicas da Álgebra

As regras gerais para manipular números
e variáveis é um processo conhecido como Álgebra.

# Regras Básicas da Álgebra

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\overset{\text{factor}}{a}\;\overset{\text{factor}}{b}\;\overset{\text{factor}}{c}}_{\text{Termo}} + \underbrace{\overset{\text{factor}}{d}\;\overset{\text{factor}}{e}}_{\text{Termo}}}_{\text{Expressão}} = 0}_{\text{Equação}}$$

# Regras Básicas da Álgebra

Dados quaisquer quatro números a, b, c e d, podemos aplicar as seguintes
propriedades algébricas:

**Propriedade Associativa**

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$abc = (ab)c = a(bc)$$

# Regras Básicas da Álgebra

Dados quaisquer quatro números a, b, c e d, podemos aplicar as seguintes
propriedades algébricas:

## Propriedade Comutativa

$$a + b = b + a$$

$$ab = ba$$

# Regras Básicas da Álgebra

Dados quaisquer quatro números a, b, c e d, podemos aplicar as seguintes
propriedades algébricas:

Propriedade Distributiva

$$a(b + c) = ab + ac$$

# Regras Básicas da Álgebra

Usamos a propriedade distributiva toda vez que expandimos os parêntesis. Por exemplo:

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad$$

O oposto desta operação é o que chamamos de Fatoração. Por exemplo:

$$ab + ac = a(b + c)$$

# Regras Básicas da Álgebra

A propriedade distributiva é útil ao lidar com polinômios.
Por exemplo:

$$(x+3)(x+2) = x(x+2) + 3(x+2) = x^2 + \underbrace{x2 + 3x} + 6$$

E podemos ainda usar a propriedade comutativa em uma das expressões.

$$(x+3)(x+2) = x^2 + 5x + 6$$

# Regras Básicas da Álgebra

Fatoração envolve "tirar" as partes comuns de uma expressão complicada para tornar a expressão mais compacta. Suponha a expressão:

$$6x^2y + 15x$$

Nós podemos simplificar essa expressão tirando os fatores comuns e reescrevendo-os. Vamos ver como isso é feito passo a passo. A expressão tem dois termos e cada termo pode ser dividido em seus fatores constituintes:

$$6x^2y + 15x = (3)(2)(x)(x)y + (5)(3)x$$

$$6x^2y + 15x = 3x(2xy + 5)$$

Data Science Academy

# Matemática para Machine Learning

## Resolvendo Equações Quadráticas

Data Science Academy

# Resolvendo Equações Quadráticas

$$x^2 = 45x + 23$$

Essa equação é chamada de equação quadrática ou equação do segundo grau, pois contém a variável desconhecida x ao quadrado.

O nome vem do latim *quadratus*, que significa quadrado. Equações quadráticas aparecem frequentemente, então os matemáticos criaram uma fórmula geral para resolvê-las.

# Resolvendo Equações Quadráticas

Antes de podermos aplicar a fórmula, precisamos reescrever a equação que estamos tentando resolver da seguinte forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

em que x é uma variável, sendo a, b e c constantes, com a ≠ 0 (caso contrário, a equação torna-se linear).

# Resolvendo Equações Quadráticas

Antes de podermos aplicar a fórmula, precisamos reescrever a equação que estamos tentando resolver da seguinte forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Chegamos a esta forma, movendo todos os números e "xs" para um lado e deixando apenas 0 do outro lado. Isso é chamado de fórmula padrão da equação quadrática.

$$x^2 - 45x - 23 = 0$$

# Resolvendo Equações Quadráticas

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Resolvemos a Equação Quadrática aplicando a Fórmula Quadrática ou Fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

# Resolvendo Equações Quadráticas

$$x^2 - 45x - 23 = 0$$

$$x_1 = \frac{45 + \sqrt{45^2 - 4(1)(-23)}}{2} = 45.5054\ldots,$$

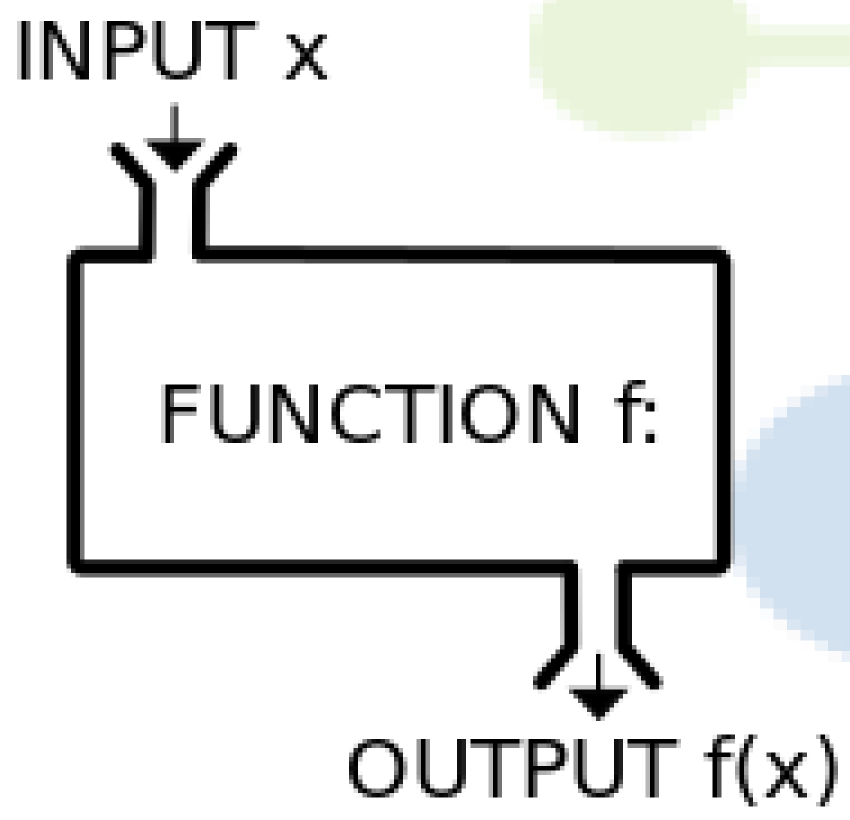
$$x_2 = \frac{45 - \sqrt{45^2 - 4(1)(-23)}}{2} = -0.5054\ldots.$$

# Matemática para Machine Learning

## Funções

Data Science Academy

# Funções




Usamos funções para descrever as relações entre variáveis.

Em particular, as funções descrevem como uma variável depende da outra.

# Funções


O Faturamento F de um cinema depende do número (n) de ingressos vendidos e logo temos uma função entre as duas variáveis.

Se um ingresso custa 25 reais, temos:

$$F(n) = 25n$$

Qual o número de tickets para um Faturamento de 7000 reais?

$$7.000 = 25n$$
$$n = 280$$

Data Science Academy

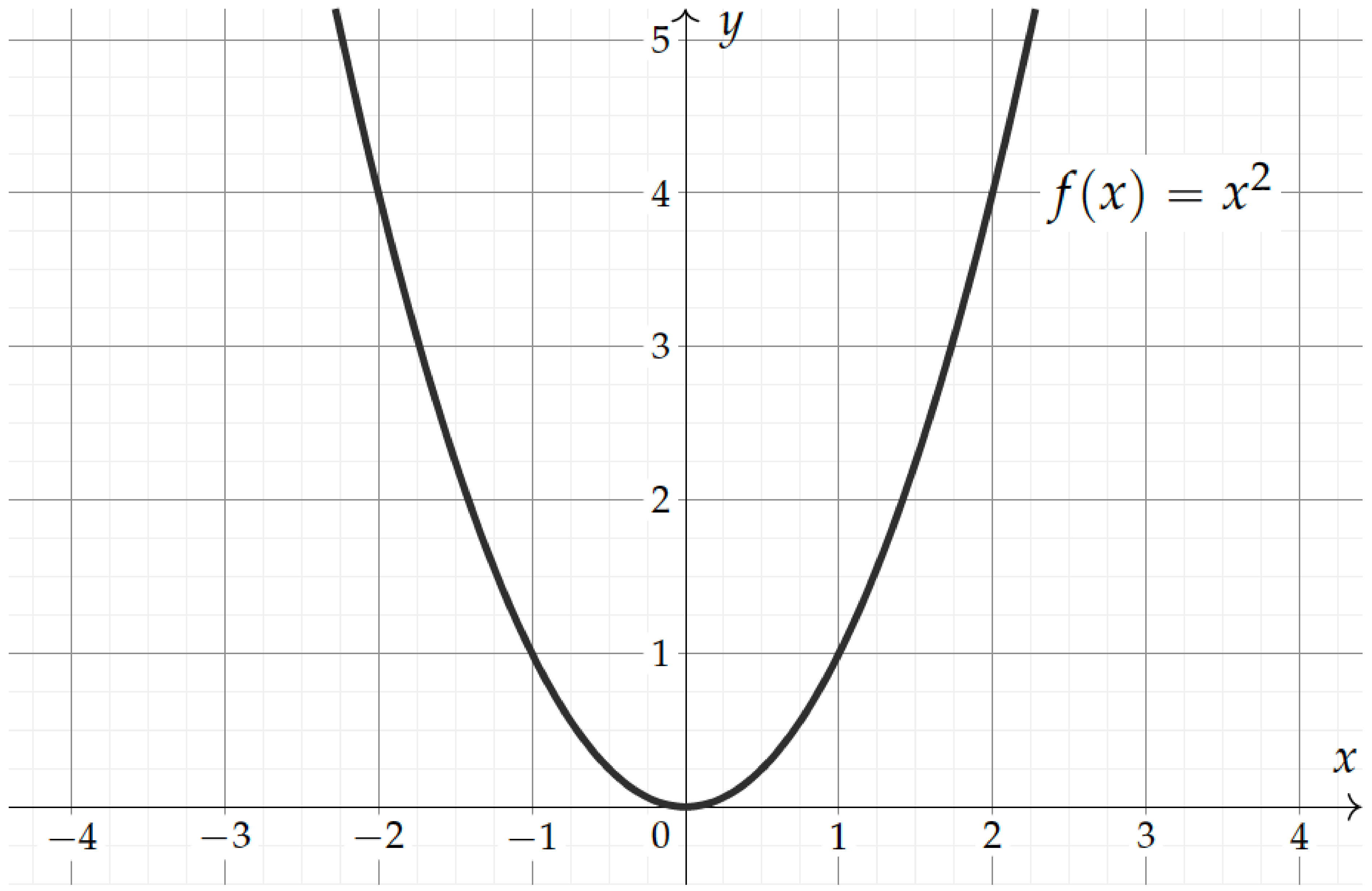
# Funções

O gráfico da função:

$$f(x) = x^2$$

consiste em todos os pares de pontos (x, y) no plano cartesiano que satisfaz

$$y = x^2$$

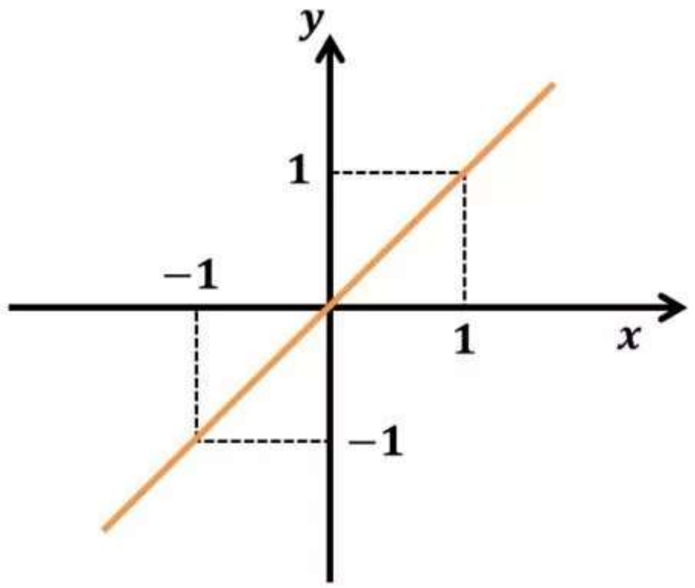


# Funções

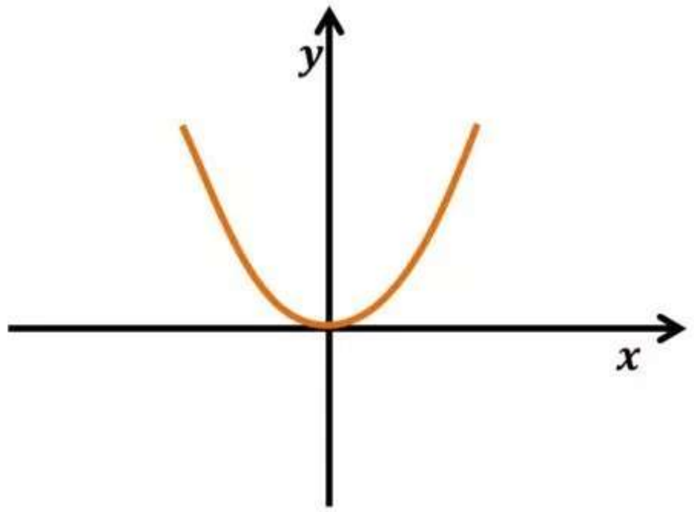
Quanto mais funções você conhece, mais ferramentas você tem para modelar a realidade. Para "conhecer" uma função, você deve ser capaz de entender e conectar vários dos seus aspectos.

# Funções

$$f(x) = x$$

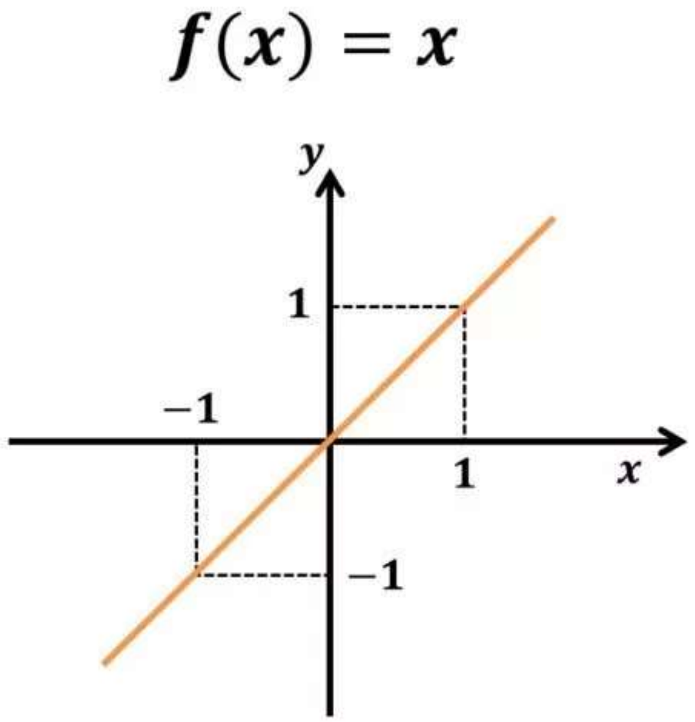


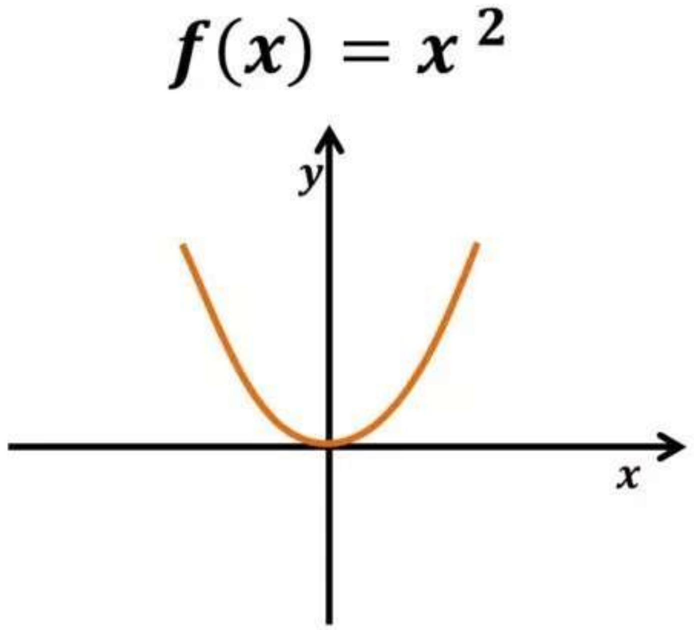

$$f(x) = x^2$$




Primeiro você precisa conhecer a definição matemática da função, que descreve exatamente o que a função faz.

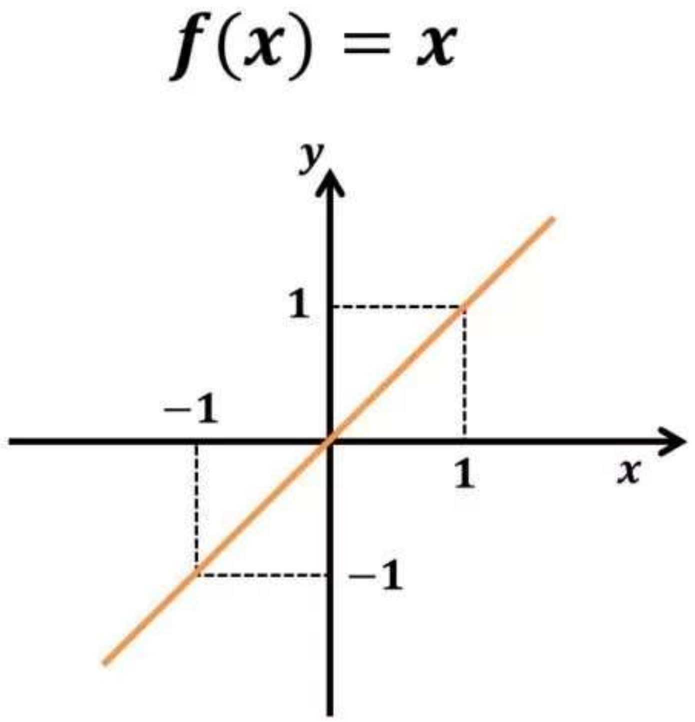
# Funções

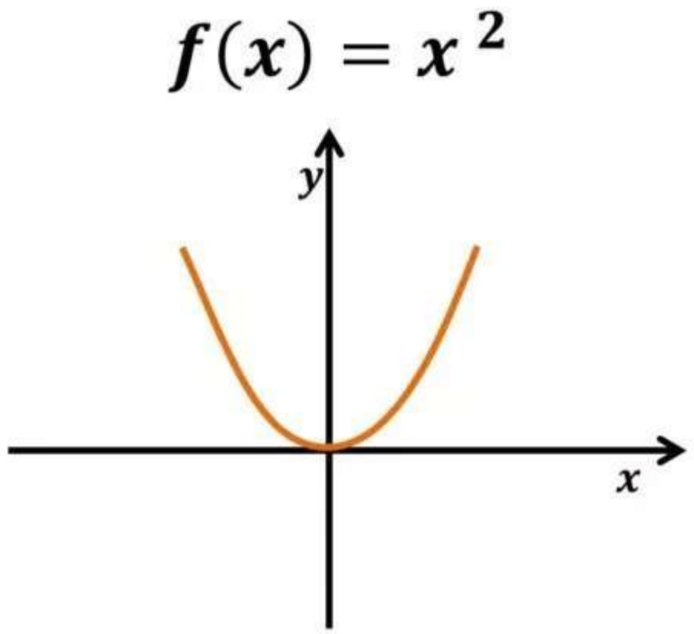



A partir da definição da função, você pode usar suas habilidades matemáticas para encontrar o domínio da função, sua imagem e função inversa. Você também deve conhecer o gráfico da função.

# Funções




Finalmente - e esta é a parte que leva tempo - você deve aprender sobre as relações da função com outras funções.

# Funções

Uma função é um objeto matemático que recebe números como entradas e produz números como saídas. Nós usamos a notação:

$$f : A \to B$$

para indicar uma função do conjunto de entrada A para o conjunto de saída B.

Mas como usamos números reais como entradas e números reais como saídas, podemos representar as funções da seguinte forma:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

# Funções

**Domínio**

Conjunto de valores de entrada permitidos para a função.

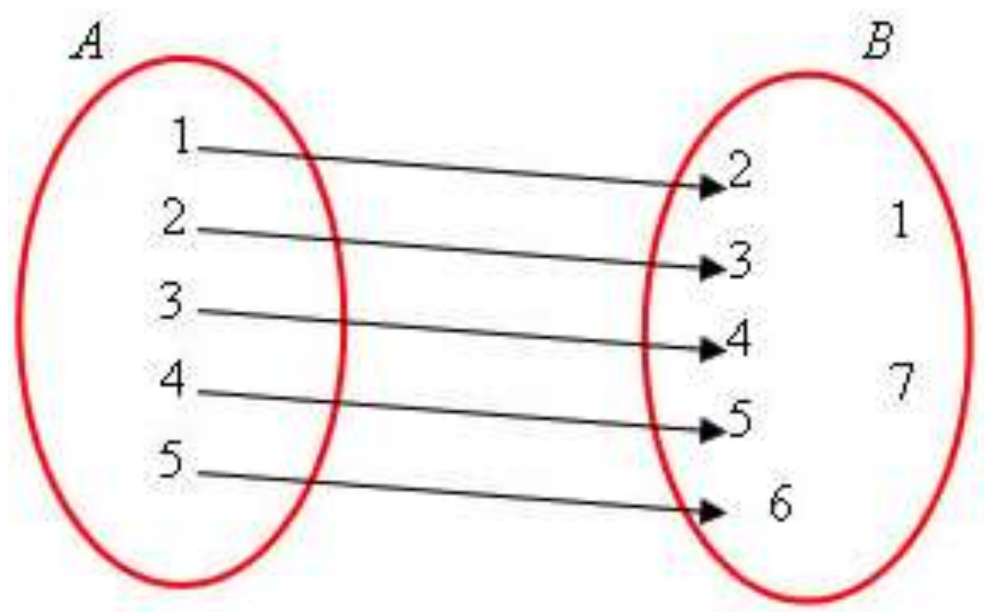
**Imagem**

Conjunto de todos os possíveis valores de saída para a função.

**Contradomínio**

Conjunto de valores de saída permitidos para a função.

# Funções




| A | B |
|---|---|
| x | f(X) |
| 1 | 2 |
| 2 | 3 |
| 3 | 4 |
| 4 | 5 |
| 5 | 6 |

***Domínio***: representado por todos os elementos do conjunto A: (1, 2, 3, 4, 5)

***Contradomínio***: representado por todos os elementos do conjunto B: (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)

***Imagem***: representada pelos elementos do contradomínio (conjunto B) que possuem correspondência com o domínio (conjunto A): (2, 3, 4, 5, 6)

# Funções

$$f(x) = x^2$$

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

O domínio da função é R (recebe números reais como entradas) e seu contradomínio é R (as saídas são números reais também). No entanto, nem todas as saídas são possíveis.

A imagem da função:

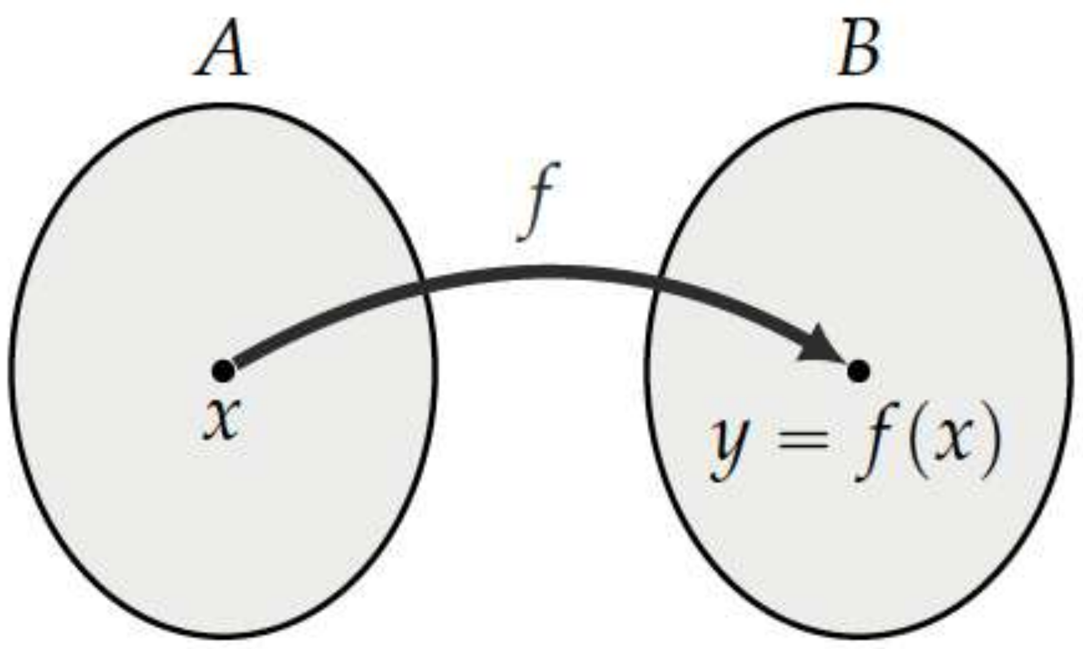
$$f(x) = x^2$$

consiste apenas dos números reais não-negativos:

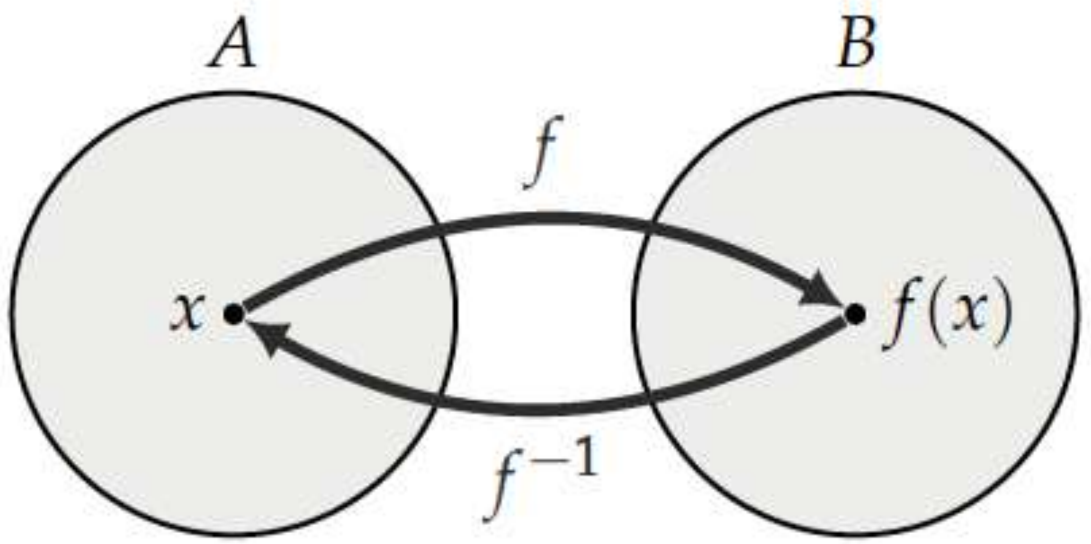
$$[0, \infty) \equiv \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$$

# Funções

Uma função f nada mais é do que um mapeamento entre entradas e saídas:

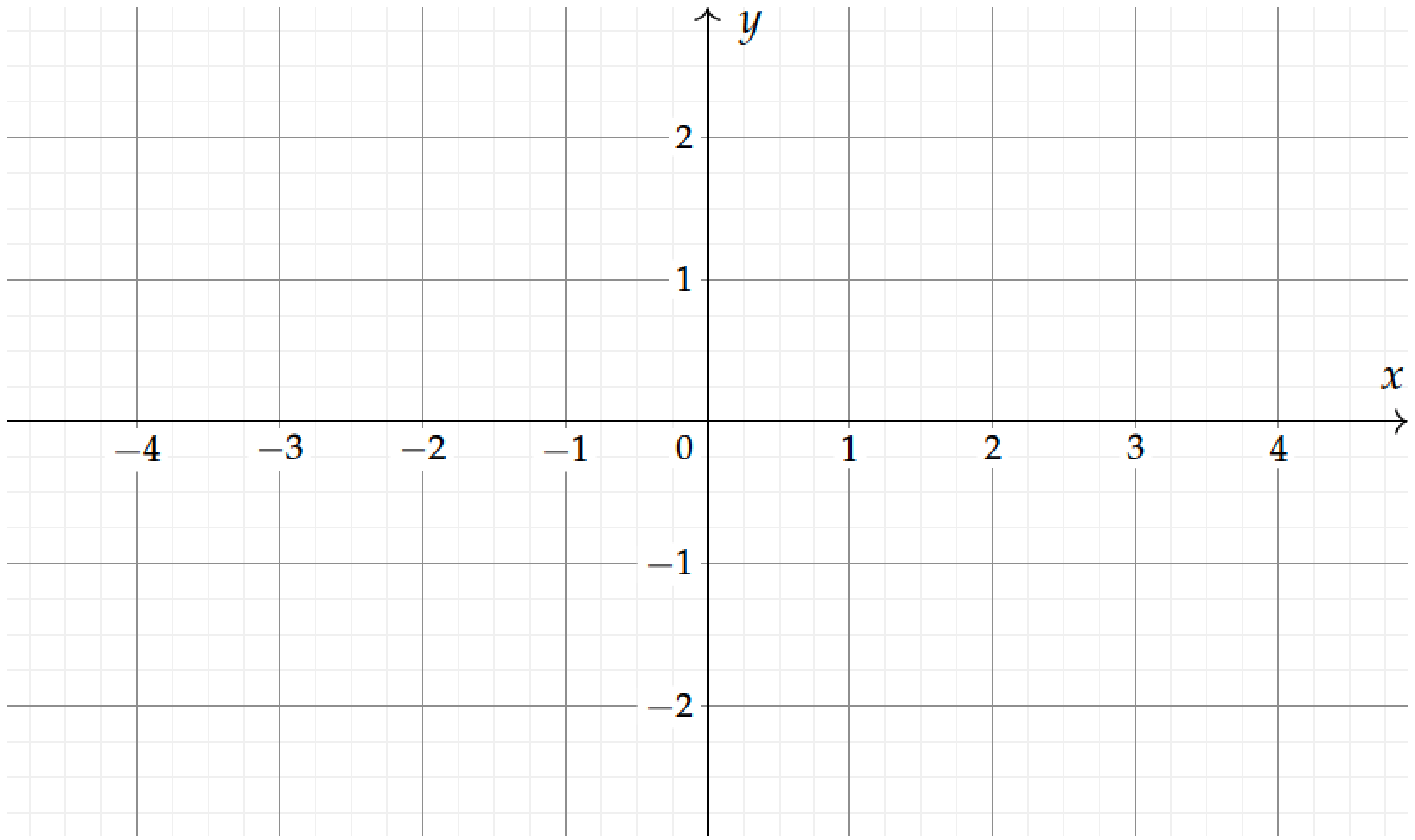



Assim como uma função inversa é o mapeamento inverso da função f:



# Funções

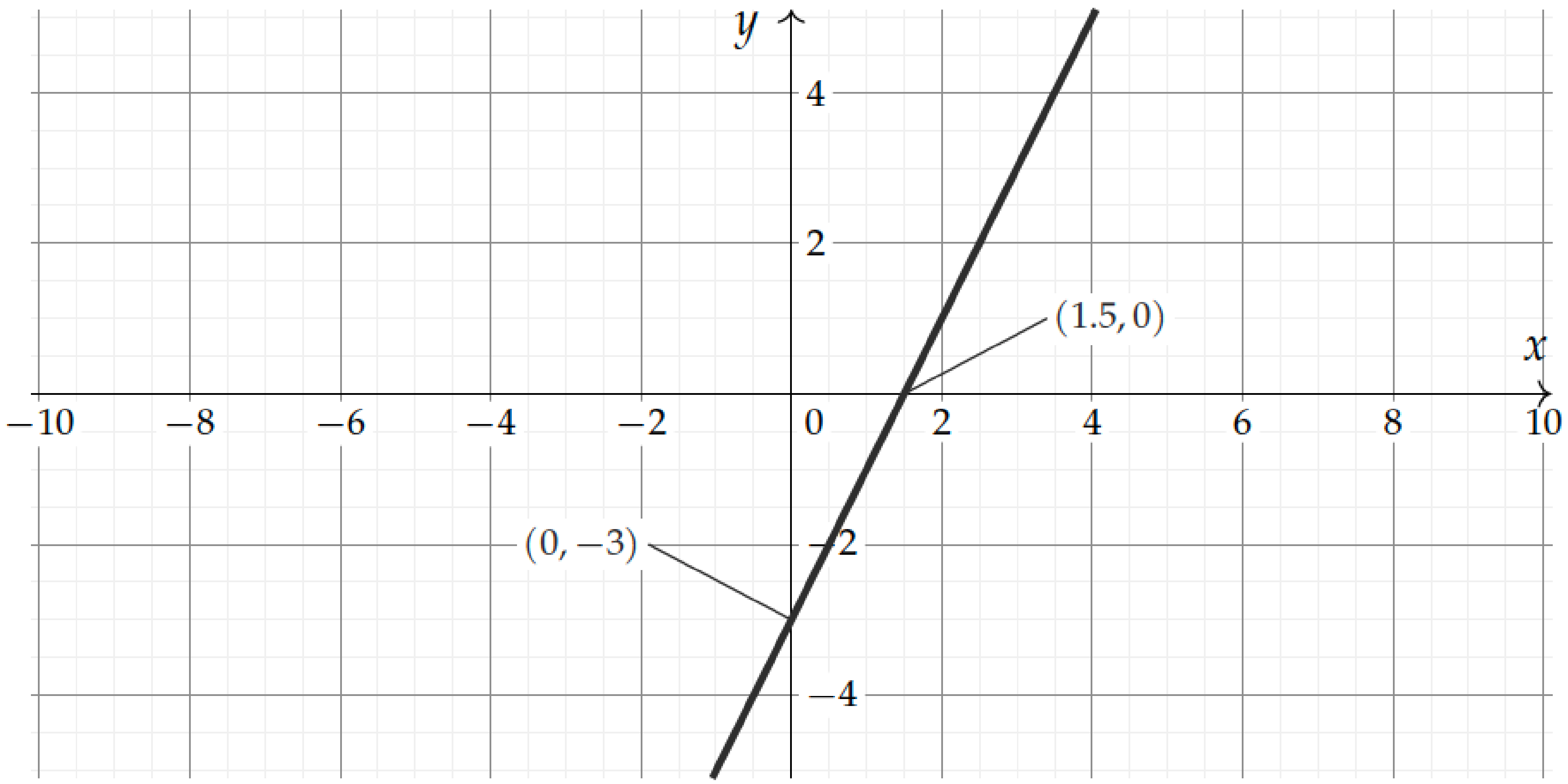
Uma das melhores maneiras de compreender uma função é olhar para um gráfico. Um gráfico é uma linha em um pedaço de papel que passa por todos os pares de entrada-saída de uma função.




- O eixo horizontal, chamado de abscissa, é usado para medir x.
- O eixo vertical é usado para medir f(x).
- Como escrever f(x) toda vez é longo e tedioso, usamos um apelido curto de uma única letra para indicar o valor de saída de f da seguinte forma: y = f(x) = saída

# Funções

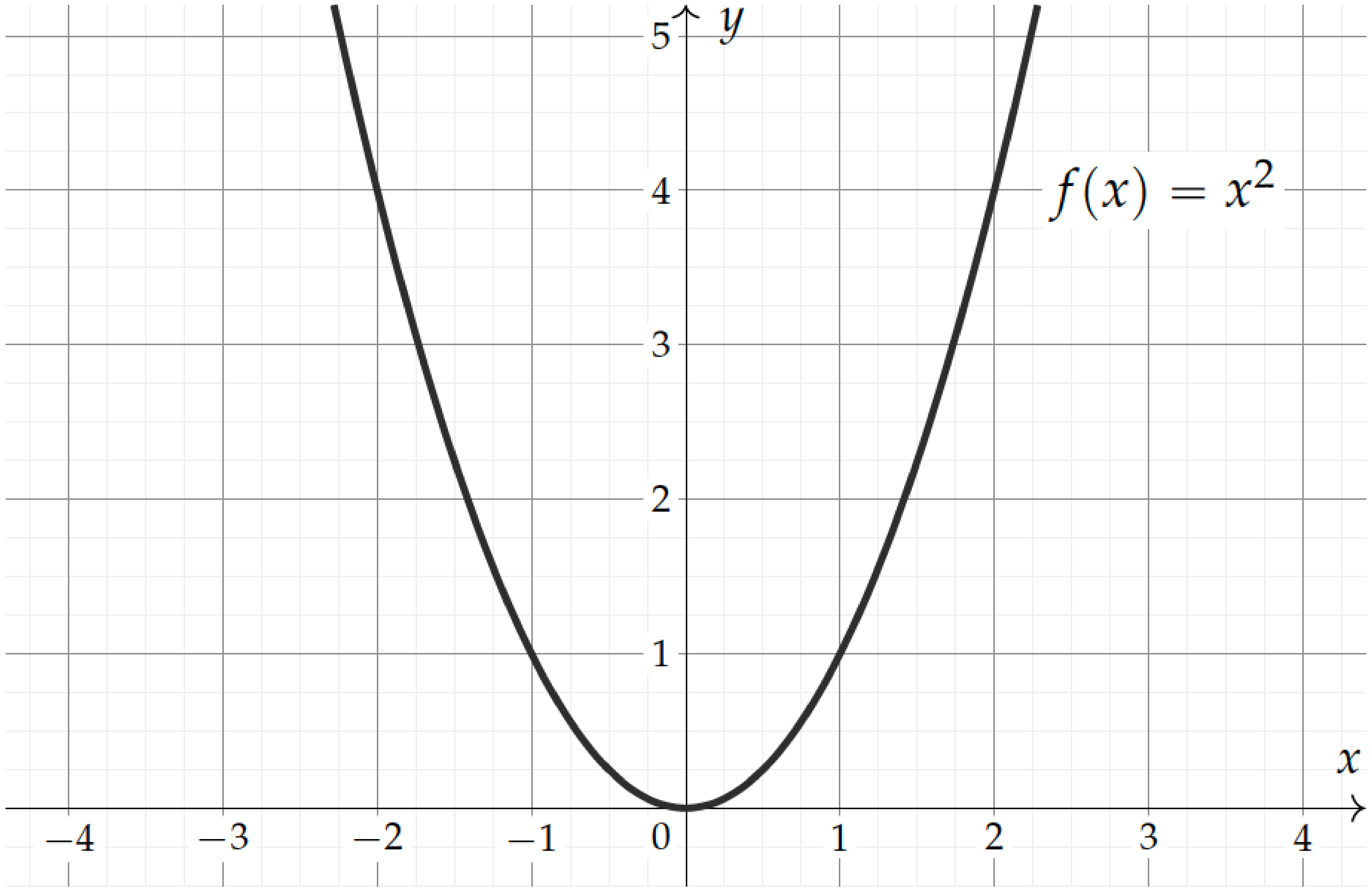
$$f(x) = mx + b$$




Data Science Academy

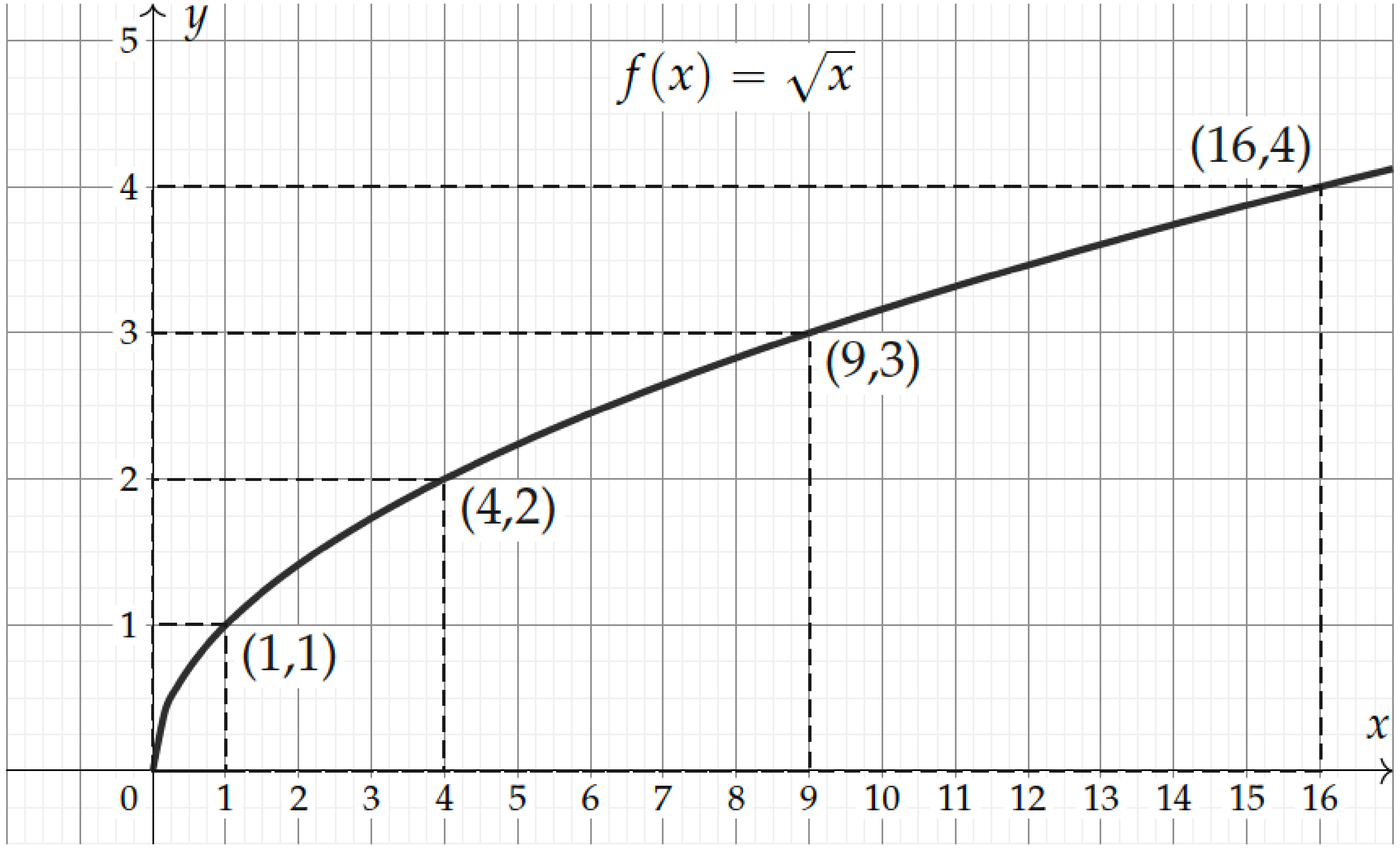
# Funções

$$f(x) = x^2$$



# Funções

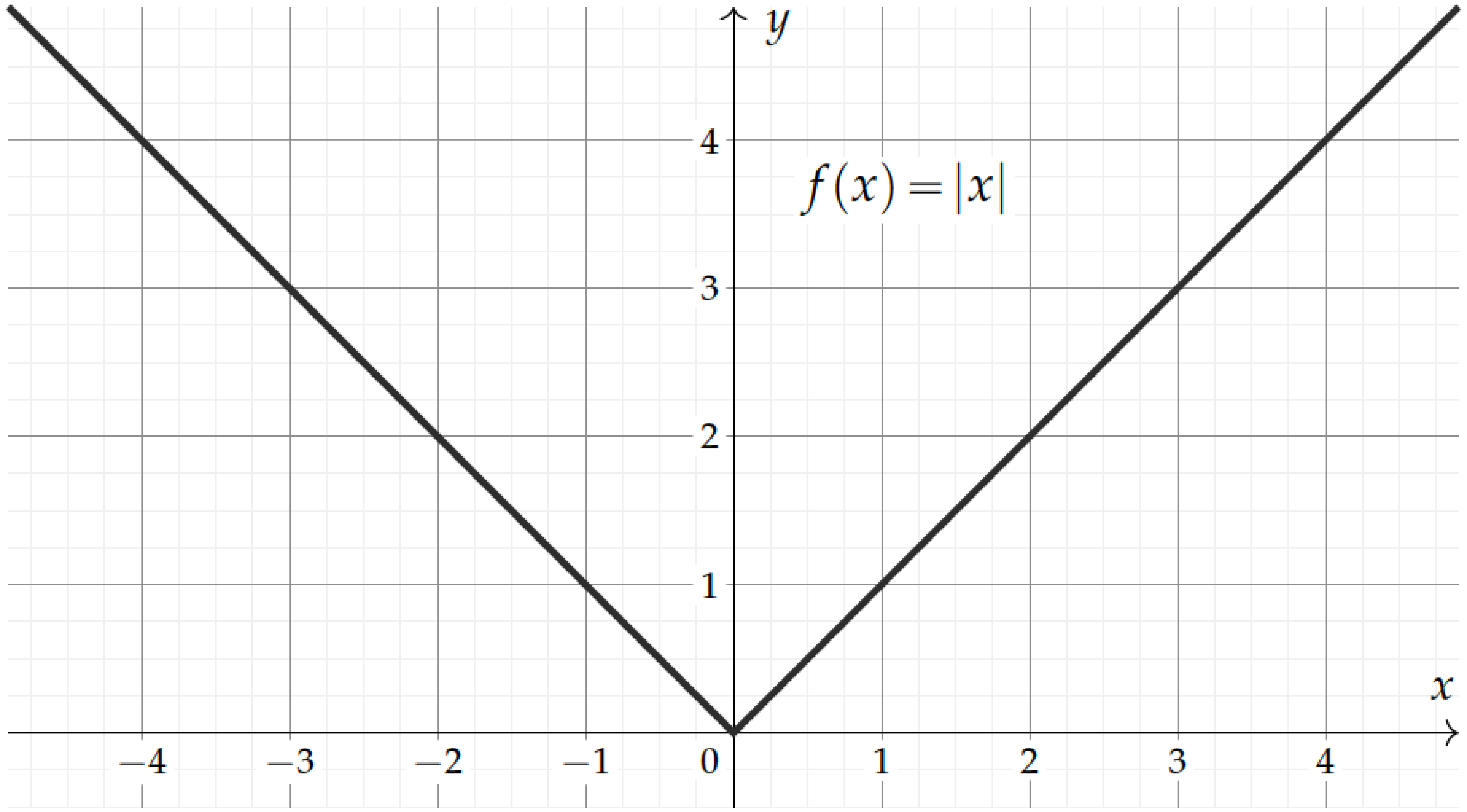
$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$




Data Science Academy

# Funções

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geqslant 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$




# Muito Obrigado!

Pela Confiança em Nosso Trabalho.

Continue Trilhando Uma Excelente Jornada de Aprendizagem!

Data Science Academy