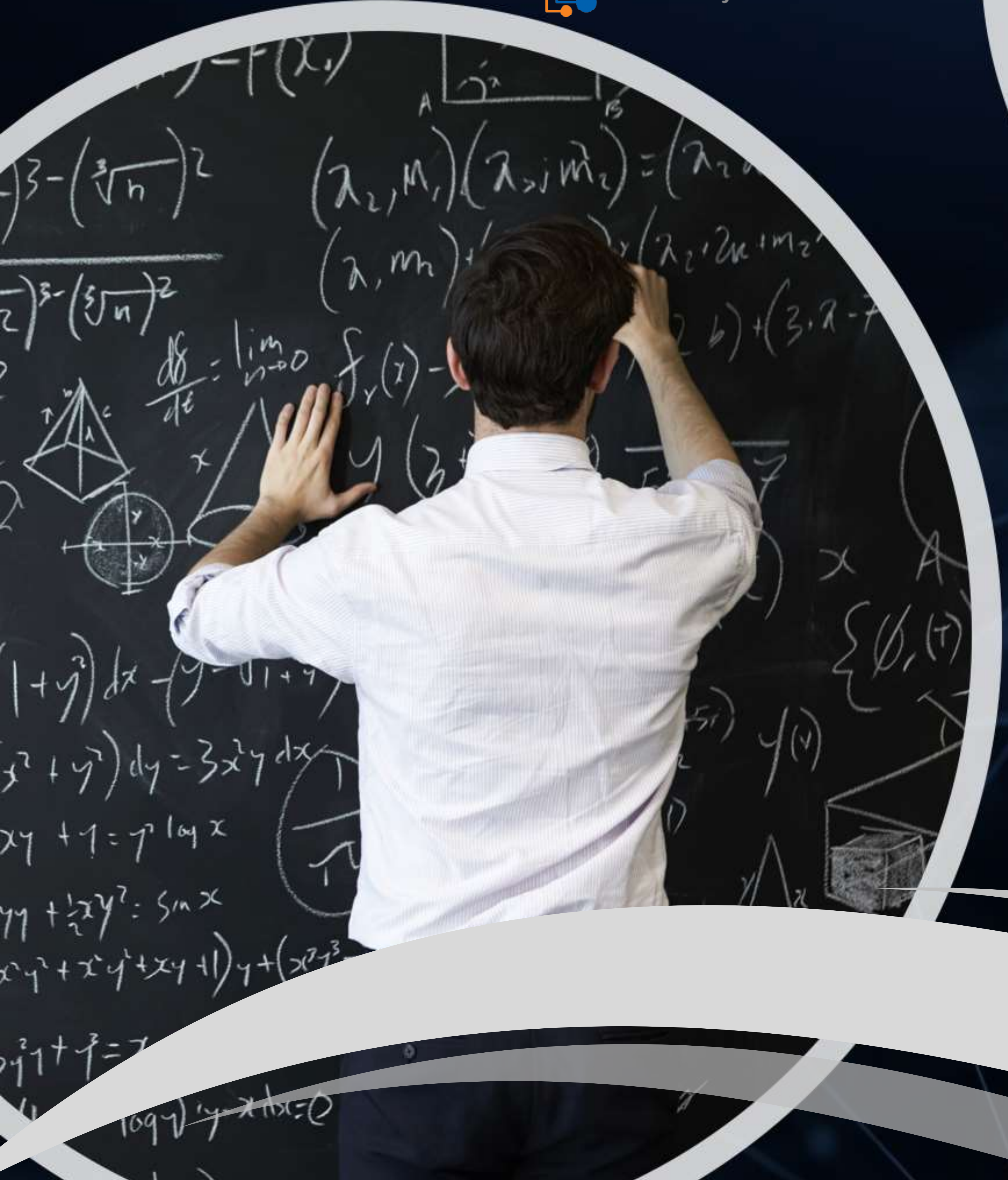


Matemática para Machine Learning

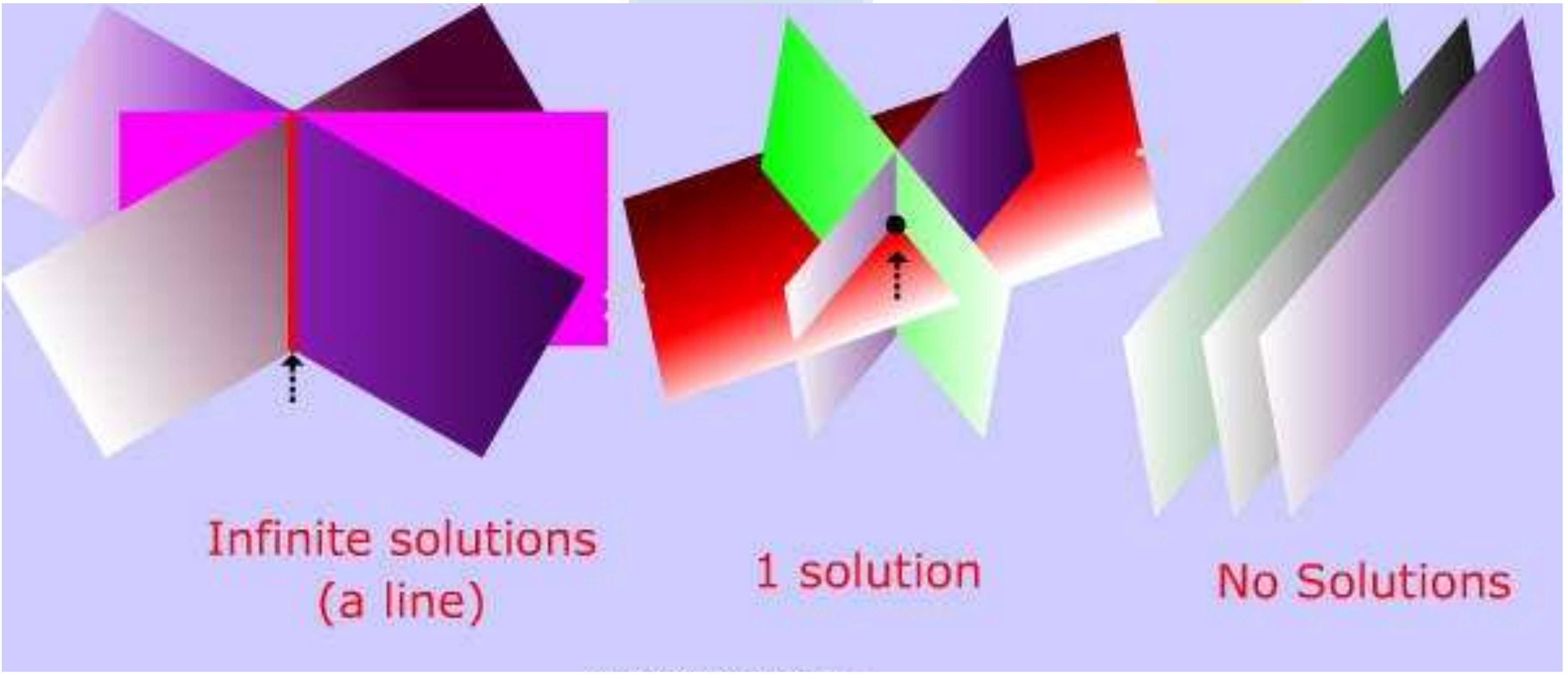
A sua base começa aqui!

Matemática para Machine Learning

Sistemas de Equações Lineares

Data Science Academy

Sistemas de Equações Lineares



Matemática para Machine Learning

Sistemas de Equações Lineares e As Primeiras Linguagens de Programação

Data Science Academy

Sistemas de Equações Lineares

Filme sobre solução de sistemas de equações lineares (sem o uso de computadores) e o surgimento de uma das primeiras linguagens de programação de computadores, a linguagem Fortran.

Matemática para Machine Learning

O Que é Uma Equação Linear?

Data Science Academy

O Que é Uma Equação Linear?

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

Uma equação é linear se: cada termo contém não mais do que uma variável e cada variável aparece na primeira potência.

Cada elemento dessa equação possui um significado: os elementos a1, a2, ... an são coeficientes das incógnitas x1, x2, ... , xn e o termo b é o termo independente.

O Que é Uma Equação Linear?

$3x_1 + 4x_2 - 10x_3 = -3$	→	**Equação Linear**
$x_1x_2 - 3x_3 = -3$	→	Equação Não Linear
$\sqrt{x_1} + x_2 = 2$	→	Equação Não Linear
$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 10$	→	**Equação Linear**
$x_1^3 + x_2 - x_3 = 0$	→	Equação Não Linear

Matemática para Machine Learning

Conjunto Solução de uma Equação Linear

Conjunto Solução de uma Equação ~~Linear~~

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

Uma solução da equação é um conjunto de valores das incógnitas
x1, x2,...,xn
com a propriedade de que, quando substituídas na equação, a tornam uma verdade. Dizemos, então, que este conjunto satisfaz a equação.

Conjunto Solução de uma Equação Linear

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

Chama-se Conjunto Solução o conjunto de todas as soluções da equação.

Conjunto Solução de uma Equação Linear

$$x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 14$$

Esta é uma possível solução para a equação acima:

$$x = (2,\ -1,\ 1,\ -2)$$

$$(2) - 5(-1) + 3(1) - 2(-2) = 14$$

Conjunto Solução de uma Equação Linear

$$x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 14$$

Dada uma equação linear, podemos isolar uma das incógnitas e descrever a solução geral:

$$x_1 = 14 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4$$

$$x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i, \ldots,\ x_n)$$

Matemática para Machine Learning

Sistemas Lineares

Sistemas Lineares

Vamos considerar agora um conjunto de m equações lineares com n variáveis (incógnitas)

Um conjunto de m equações lineares nas variáveis x1, x2,...,xn é chamado sistema linear e será representado por:

$$
\left\{
\begin{array}{lllllllllll}
a_{11}\ x_1 & + & a_{12}\ x_2 & + & a_{13}\ x_3 & + & \dots & + & a_{1n}\ x_n & = & b_1 \\
a_{21}\ x_1 & + & a_{22}\ x_2 & + & a_{23}\ x_3 & + & \dots & + & a_{2n}\ x_n & = & b_2 \\
a_{31}\ x_1 & + & a_{32}\ x_2 & + & a_{33}\ x_3 & + & \dots & + & a_{2n}\ x_n & = & b_3 \\
\dots\ \dots & & & & & & & & & & \\
a_{m1}\ x_1 & + & a_{m2}\ x_2 & + & a_{m3}\ x_3 & + & \dots & + & a_{mn}\ x_n & = & b_m
\end{array}
\right.
$$

Sistemas Lineares

E como definimos o Conjunto Solução de uma equação linear?

Uma solução de um sistema linear é uma **n-upla** (x1, x2,...,xn) de números reais que satisfaz simultaneamente a todas as equações.

Assim, um Conjunto Solução consiste de todos os possíveis valores para as n variáveis, com a propriedade de que, quando substituídas nas equações, todas elas são satisfeitas simultaneamente.

Sistemas Lineares

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 7 \end{cases}$$

$$x = (1,\ 1,\ -1)$$

$$x = (10,\ -5,\ 2)$$

$$x = (7,\ -3,\ 1)$$

Conjunto Solução
Possíveis valores de x que satisfazem TODAS as equações do sistema linear.

Matemática para Machine Learning

Sistemas Lineares de Ordem n

Data Science Academy

Sistemas Lineares de Ordem n

Estamos interessados em determinar a solução de sistemas lineares com n equações e n incógnitas, da forma:

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & a_{13}\,x_3 & + & \dots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & a_{23}\,x_3 & + & \dots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ a_{31}\,x_1 & + & a_{32}\,x_2 & + & a_{33}\,x_3 & + & \dots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_3 \\ \dots\ \dots \\ a_{n1}\,x_1 & + & a_{n2}\,x_2 & + & a_{n3}\,x_3 & + & \dots & + & a_{nn}\,x_n & = & b_n \end{cases}$$

Isso é o que chamamos de sistema de n equações lineares, ou apenas, sistema linear de ordem n.

Sistemas Lineares de Ordem n

Podemos representar um sistema linear de ordem n em sua forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ou simplesmente: Ax = b

onde A = (aij) é uma matriz de ordem n; x e b são vetores do Rn.
A matriz A é chamada matriz dos coeficientes, b é o vetor do termo independente e x é o vetor solução.

Matemática para Machine Learning

Sistemas Lineares Triangulares

Data Science Academy

Sistemas Lineares Triangulares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dots\dots \quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Sistemas Lineares Triangulares

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}, \\[2ex] x_i = \dfrac{b_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j}{a_{ii}}, \quad i = n-1, \ldots, 1. \end{cases}$$

Matemática para Machine Learning

Solução de Sistemas Lineares

Solução de Sistemas Lineares

Regra de Cramer

Utilizando a Matriz Inversa

Utilizando Escalonamento
(Eliminação Gaussiana)

Matemática para Machine Learning

Solução de Sistemas Lineares - Regra de Cramer

Data Science Academy

Matemática para Machine Learning

Solução de Sistemas Lineares - Utilizando Escalonamento

Solução de Sistemas Lineares - Utilizando Escalonamento

Uma maneira de obter a solução de um sistema linear é transformá-lo em outro equivalente cuja solução seja facilmente obtida. Em geral, transformamos o sistema original em um sistema linear equivalente, cuja solução é obtida resolvendo-se sistemas lineares triangulares superiores.

Solução de Sistemas Lineares - Utilizando Escalonamento

Uma maneira de obter a solução de um sistema linear é transformá-lo em outro equivalente cuja solução seja facilmente obtida. Em geral, transformamos o sistema original em um sistema linear equivalente, cuja solução é obtida resolvendo-se sistemas lineares triangulares superiores.

Logo, nosso objetivo aqui é saber como transformar um sistema linear de ordem n em um outro, cuja matriz dos coeficientes seja uma matriz triangular superior, usando operações elementares sobre as linhas, isto é, usando escalonamento.

Solução de Sistemas Lineares - Utilizando Escalonamento

Se um sistema de equações lineares é obtido de um outro sistema de equações lineares através de uma sequência finita de operações elementares, então os sistemas são equivalentes.

Solução de Sistemas Lineares - Utilizando Escalonamento

Portanto, precisamos utilizar um processo de 2 etapas para resolver sistemas lineares utilizando escalonamento:

1. Reduzir o sistema à forma triangular através de operações elementares por linhas.
2. Resolver o sistema triangular por substituição.

Este método é por vezes designado por método de eliminação de Gauss, pois consiste em eliminar as incógnitas das equações até se poder resolver o sistema por substituição.

Solução de Sistemas Lineares - Utilizando Escalonamento

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad\; a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\; a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \dots\dots \quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Este é um sistema linear escalonado (no formato de um sistema linear triangular). Nosso trabalho é converter qualquer sistema linear de ordem n neste formato e depois aplicar o método da substituição para encontrar o valor das incógnitas.

Matemática para Machine Learning

Sistemas Escalonados

Número de Equações Igual o Número de Incógnitas

Número de Equações Igual o Número de Incógnitas

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + 2y + z = 3 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

1ºpasso: Anulamos todos os coeficientes da 1ª incógnita a partir da 2ª equação, aplicando as propriedades dos sistemas equivalentes.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases} \Leftarrow [(-2)] \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

Trocamos de posição a 1ª equação com a 2ª equação, de modo que o 1º coeficiente de x seja igual a 1. Trocamos a 2ª equação pela soma da 1ª equação, multiplicada por -2, com a 2ª equação.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases} \Leftarrow [(-3)] \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ -7y - 5z = -8 \end{cases}$$

Trocamos a 3ª equação pela soma da 1ª equação, multiplicada por -3, com a 3ª equação.

Número de Equações Igual o Número de Incógnitas

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ -7y-3z=-2 \\ -7y-5z=-8 \end{cases} \Leftarrow[(-1)]\Rightarrow \begin{cases} x+2y+y=3\ (\mathrm{I}) \\ -7y-3z=-2\ (\mathrm{II}) \\ -2z=-6\ (\mathrm{III}) \end{cases}$$

2º passo: Anulamos os coeficientes da 2ª incógnita a partir da 3ª equação: Trocamos a 3ª equação pela soma da 2ª equação, multiplicada por -1, com a 3ª equação.

$$\begin{cases} x+2y+y=3\ (\mathrm{I}) \\ -7y-3z=-2\ (\mathrm{II}) \\ -2z=-6\ (\mathrm{III}) \end{cases}$$

Agora que o sistema está escalonado e no formato de uma matriz triangular superior, podemos resolver de baixo para cima e aplicar a regra da substituição.

$-2z=-6 \Rightarrow z=3$

Substituindo z=3 em (II): $-7y - 3(3)= -2 \Rightarrow -7y - 9 = -2 \Rightarrow y=-1$

Substituindo z=3 e y=-1 em (I):

$x + 2(-1) + 3= 3 \Rightarrow x=2$

Matemática para Machine Learning

Sistemas Escalonados

Número de Equações Diferente do Número de Incógnitas

Número de Equações Diferente do Número de Incógnitas

$$\begin{cases} x + y + z - t = 6 \\ 2x + y - 2z + t = -1 \\ x - 2y + z + 2t = -3 \end{cases}$$

1º passo: Anulamos todos os coeficientes da 1ª incógnita a partir da 2ª equação.

$$\begin{cases} x + y + z - t = 6 \\ 2x + y - 2z + t = -1 \Leftarrow [(-2)] \Rightarrow \\ x - 2y + z + 2t = -3 \end{cases} \begin{cases} x + y + z - t = 6 \\ -y - 4z + 3t = -13 \\ x - 2y + z + 2t = -3 \end{cases}$$

Trocamos a 2ª equação pela soma do produto da 1ª equação por -2 com a 2ª equação.

$$\begin{cases} x + y + z - t = 6 \\ -y - 4z + 3t = -13 \Leftarrow [(-1)] \Rightarrow \\ x - 2y + z + 2t = -3 \end{cases} \begin{cases} x + y + z - t = 6 \\ -y - 4z + 3t = -13 \\ -3y + 0z + 3t = -9 \end{cases}$$

Trocamos a 3ª equação pela soma do produto da 1ª equação por -1 com a 3ª equação.

Número de Equações Diferente do Número de Incógnitas

$$\begin{cases} x + y + z - t = 6 \\ -y - 4z + 3t = -13 \\ -3y + 0z + 3t = -9 \end{cases} \Leftarrow [(-3)] \Rightarrow \begin{cases} x + y + z - t = 6 \\ -y - 4z + 3t = -13 \\ 12z - 6t = 30 \end{cases}$$

2º passo: Anulamos os coeficientes da 2ª incógnita, a partir da 3ª equação. Trocamos a 3ª equação pela soma do produto da 2ª equação por -3 com a 3ª equação.

O sistema está escalonado. Como m < n, o sistema é possível e indeterminado, admitindo infinitas soluções. A diferença entre o número de incógnitas (n) e o de equações (m) de um sistema nessas condições é chamada **grau de indeterminação** (GI):

GI = n - m

Número de Equações Diferente do Número de Incógnitas

$$\begin{cases} x + y + z - t = 6 \\ -y - 4z + 3t = -13 \\ 12z - 6t = 30 \end{cases}$$

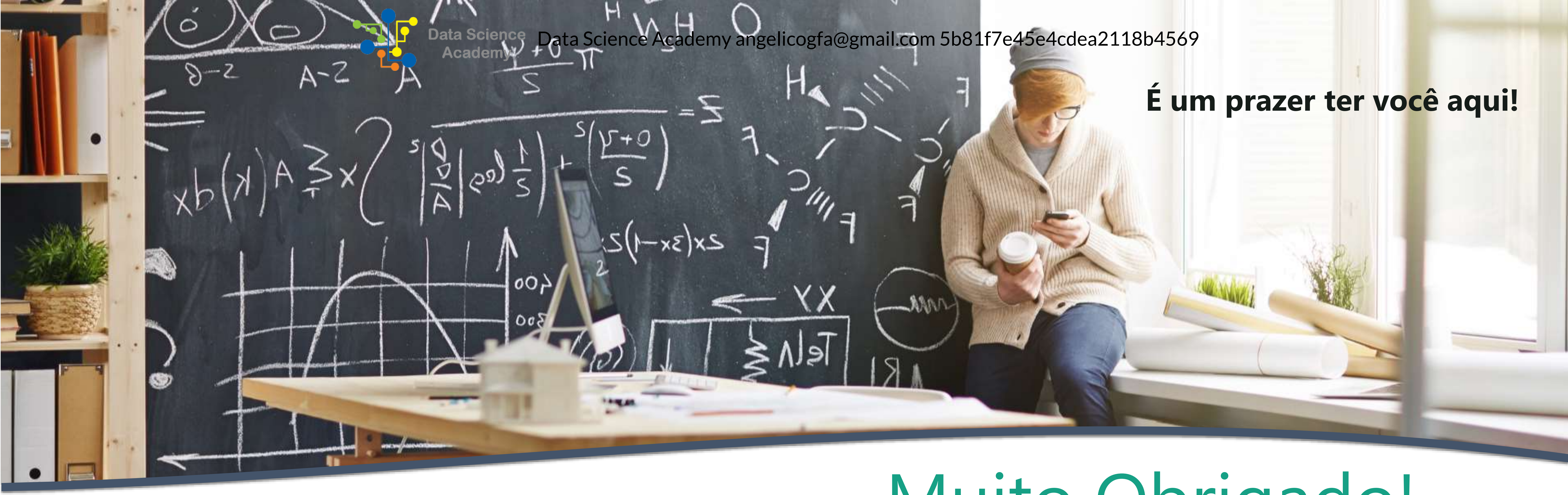
Consideramos o sistema em sua forma escalonada e calculamos o grau de indeterminação do sistema nessas condições: GI = n-m = 4-3 = 1

Como o grau de indeterminação é 1, atribuímos a uma das incógnitas um valor , supostamente conhecido, e resolvemos o sistema em função desse valor. Sendo t = α , substituindo esse valor na 3ª equação, obtemos:

$$12z - 6\alpha = 30 \Rightarrow 12z = 30 + 6\alpha \Rightarrow z = \frac{30 + 6\alpha}{12} = \frac{5 + \alpha}{2}$$

Assim, a solução do sistema é dada por $S = \left\{\left(\frac{1-\alpha}{2}, \alpha + 3, \frac{5+\alpha}{2}, \alpha\right)\right\}$, com $\alpha \in IR$.

Para cada valor que seja atribuído a α, encontraremos uma quádrupla que é solução para o sistema.



É um prazer ter você aqui!

Muito Obrigado!

Pela Confiança em Nosso Trabalho.

Continue Trilhando Uma Excelente Jornada de Aprendizagem!

Data Science Academy