www.datascienceacademy.com.br

Matemática Para Machine Learning

Base de Um Espaço Vetorial

Um conjunto B = {v1, v2, ..., vn} ⊂ V é uma **base do espaço vetorial V** se:

I) B é Linearmente Independente
II) B gera V

Vamos comprovar isso, validando essas duas regras e verificando se B = {(1,2), (3,5)} é uma base do espaço vetorial ℝˆ2.

I) B é Linearmente Independente (um vetor é LI se o escalar com o qual faremos operação for igual a zero). Assim, temos que:

$$a_1(1,2)+a_2(3,5)=(0,0)$$
$$(a_1,2a_1)+(3a_2,5a_2)=(0,0)$$
$$(a_1+3a_2,2a_1+5a_2)=(0,0)$$

$$\begin{cases} a_1+3a_2=0 \\ 2a_1+5a_2=0 \end{cases}$$

Confirmamos que B atende a primeira regra. Vejamos a segunda!

II) B gera V (ou seja, B gera ℝˆ2)

$$(x,y)=a_1(1,2)+a_2(3,5)$$
$$(x,y)=(a_1,2a_1)+(3a_2,5a_2)$$
$$(x,y)=(a_1+3a_2,2a_1+5a_2)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a_1+3a_2=x \\ 2a_1+5a_2=y \end{cases}$$

que resolvido em função de x e y, fornece:

$$a_1=-5x+3y \quad \text{e} \quad a_2=2x-y$$

Logo, o conjunto de vetores B é uma base do espaço vetorial ℝˆ2. Vejamos outro exemplo agora com espaço vetorial de 3 dimensões. Considere que B = { (1,1,1), (1,1,0), (1,0,0) } seja uma base do ℝˆ3. Vamos validar as duas regra acima:

I) B é Linearmente Independente

$$a_1(1,1,1)+a_2(1,1,0)+a_3(1,0,0)=0$$
$$a_1(1,1,1)+a_2(1,1,0)+a_3(1,0,0)=(0,0,0)$$
$$(a_1,a_1,a_1)+(a_2,a_2,0)+(a_3,0,0)=(0,0,0)$$
$$(a_1+a_2+a_3,a_1+a_2,a_1)=(0,0,0)$$
$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=0 \\ a_1+a_2=0 \\ a_1=0 \end{cases}$$

B é um sistema homogêneo que admite somente a solução trivial a1 = a2 = a3 = 0, o que confirma B ser LI.

II) B gera V (ou seja, B gera ℝˆ3 neste exemplo)

De fato, qualquer vetor v=(x,y,z) é combinação linear de v1, v2 e v3:

$$(x,y,z) = a_1(1,1,1) + a_2(1,1,0) + a_3(1,0,0)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = x \\ a_1 + a_2 = y \\ a_1 = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = z \\ a_2 = y - z \\ a_3 = x - y \end{cases}$$

$$(x,y,z) = z(1,1,1) + (y-z)(1,1,0) + (x-y)(1,0,0)$$

O que comprova ser qualquer vetor v=(x,y,z) combinação linear de v1, v2 e v3.

Logo: [v1, v2, v3] = ℝ3

Referência:

Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares
https://www.amazon.com.br/Introduction-Applied-Linear-Algebra-Matrices-ebook/dp/B07CN2ZX7D?keywords=vectors+and+linear+algebra&qid=1536272751&sr=8-7&ref=sr_1_7