Data Science Academy

www.datascienceacademy.com.br

Matemática Para Machine Learning

Polinômio Característico

Vamos formalizar agora os conceitos a respeito da determinação dos autovalores e autovetores de matrizes. Dada uma matriz quadrada A, n × n, a matriz:

$$A - \lambda I \;=\; \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

onde I é a matriz identidade de ordem n e λ é um parâmetro, é chamada matriz característica de A. Seu determinante, det(A − λI), é um polinômio de grau n em λ, indicado por P(λ), e é chamado **polinômio característico** de A. A equação P(λ)=0 é chamada equação característica de A.

Para calcular o polinômio característico de A, basta calcular o determinante de A − λI. Por exemplo, o polinômio característico da matriz abaixo, seria:

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$det(A - \lambda I) \;=\; \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} \;=\; \underbrace{\lambda^2 - 5\lambda - 2}_{\text{polinômio característico}}.$$

Com isso, podemos deduzir alguns teoremas:

1- Um escalar λ é um autovalor de A se e somente se λ é um zero ou raiz do seu polinômio característico.

2- Existe no mínimo um autovetor correspondente a cada autovalor.

3- Os autovetores correspondentes a cada autovalor formam um espaço vetorial (o que chamamos de autoespaço).

4- Os autovetores correspondentes a autovalores distintos são LI.

5- Se A tem n autovalores distintos, então existem exatamente n autovetores; um associado a cada autovalor.

6- Se A é uma matriz de ordem n triangular superior (ou inferior), então os autovalores de A são seus elementos diagonais.

Referências:

Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares
por Stephen Boyd (Autor), Lieven Vandenberghe (Autor)