

# EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS E SUAS APLICAÇÕES

**Aluno: Marcello Congro Dias da Silva**

**Orientador: Carlos Frederico Borges Palmeira**

## Introdução

Dentro da Matemática Aplicada, as Equações Diferenciais têm um papel relevante na ligação e interação com outras Ciências, desde sua origem em problemas ligados à Física e recentemente como ferramenta indispensável à Biologia com todas suas ramificações, compartilhando amplamente com alguns ramos da Engenharia, Química, e Economia.

Em geral, uma equação diferencial envolve derivadas de uma ou mais variáveis dependentes (chamadas de incógnitas), em uma ordem a uma ou mais variáveis independentes. Existem fundamentalmente dois tipos de equações diferenciais: (i) as equações diferenciais ordinárias (EDOs), que envolvem derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em ordem a uma única variável independente, isto é, variam somente com relação a uma variável, e (ii) as equações diferenciais parciais (EDPs), que envolvem derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes em ordem a mais do que uma variável independente, isto é, variando com relação a duas ou mais variáveis.

As equações diferenciais parciais (EDPs), por sua vez, constituem outra importante ferramenta para a resolução de uma série de problemas nos mais amplos ramos anteriormente exemplificados, sendo comumente utilizadas para descrever fenômenos tais como a Equação da Onda e a Equação do Calor, desde que impostas às condições de contorno relativas a cada um dos casos em particular. É muito importante que, para o estudo eficiente das EDPs, seja necessário dominar os conceitos e propriedades básicas das EDOs, pois, na maioria das vezes, faz-se a tentativa de transformar a equação diferencial parcial em uma ou mais equações diferenciais ordinárias, simplificando os cálculos para chegar-se à solução do problema.

Desta forma, a motivação para este projeto surgiu na busca por compreender de forma abrangente alguns fenômenos da natureza que são modelados pelas equações diferenciais parciais. Neste sentido, tornou-se necessário o estudo mais aprofundado a respeito das EDPs, observando suas propriedades, características e posteriores aplicações em alguns ramos científicos, principalmente relacionados à Engenharia.

Entretanto, em algumas áreas da Engenharia, é comum deparar-se com equações diferenciais parciais que regem o fenômeno físico, mas cujas soluções analíticas envolvem casos de contorno e geometria bastante complicadas ou até mesmo impossíveis de serem resolvidas. Nestes casos, é comum recorrer às soluções aproximadas obtidas por meio da aplicação de métodos numéricos. O objetivo é encontrar uma solução numérica bastante próxima da solução exata do problema, visando sempre diminuir o erro (ou seja, a diferença) entre as duas soluções, de tal forma que o método possa ser considerado válido. Inúmeros são os métodos numéricos utilizados nos dias de hoje para solução de problemas científicos, podendo atuar diretamente ou indiretamente sobre a equação diferencial que modela o problema real. Um dos mais popularmente utilizados e também estudado durante a realização deste trabalho é o Método das Diferenças Finitas (MDF).

## Objetivos

O objetivo central deste trabalho consiste no estudo das equações diferenciais parciais, visando adquirir os conhecimentos necessários para compreender alguns fenômenos físicos que são regidos por esta área. Posteriormente, foram observadas algumas aplicações na Engenharia a respeito do tema, tais como a Equação do Calor, a Dinâmica de Populações e a Engenharia Estrutural. Nesta última, em especial, as formulações tornam-se complexas e necessitam da aplicação dos chamados métodos numéricos, que visam obter resultados de aproximação das soluções analíticas com alta precisão.

## Metodologia

Foram realizadas reuniões semanais com o orientador para discussão dos tópicos e exercícios de aplicação a respeito das equações diferenciais parciais, seguindo o conteúdo exposto no livro “EDP – Um curso de Graduação”, de Valéria Iório.

### 1) Equações Diferenciais Parciais – Definições e Propriedades Fundamentais

Uma equação diferencial parcial (EDP) é uma equação envolvendo duas ou mais variáveis independentes  $x, y, z, t, \dots$  e derivadas parciais de uma função (variável dependente)  $u = u(x, y, z, t, \dots)$ . De maneira mais precisa, uma EDP em  $n$  variáveis independentes  $x_1, \dots, x_n$  é uma equação que apresenta o seguinte formato:

$$F(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}) = 0 \quad (1)$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ , sendo  $\Omega$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $F$  é uma função dada e  $u = u(x)$  é a função que quer-se determinar.

Uma diferença importante entre EDOs e EDPs é a informação suplementar necessária para a unicidade de solução. Por exemplo, na solução de uma EDO linear, tem-se uma ou mais constantes arbitrárias: podemos determinar estas constantes impondo condições iniciais, isto é, fixando os valores da solução e de suas derivadas até certa ordem em um determinado ponto; podemos também obter unicidade no caso de intervalos finitos, impondo condições nos extremos dos intervalos, as chamadas condições de contorno. A situação para as EDPs é fundamentalmente diferente: mesmo no caso linear, a solução geral (quando é possível determiná-la), envolve funções arbitrárias das variáveis independentes, de modo que existe um grau de generalidade muito maior com relação à forma da solução. O espaço das variáveis independentes é, neste caso, multidimensional: procuramos soluções definidas em um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

Outra propriedade fundamental para o estudo das equações diferenciais parciais é o Princípio da Superposição, que baseia a aplicação do Método de Separação de Variáveis de EDPs, conforme veremos adiante.

Seja  $L$  um operador diferencial parcial linear de ordem  $k$  cujos coeficientes estão definidos em um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Suponha que  $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$  é um conjunto de funções de classe  $C^k$  em  $\Omega$  satisfazendo a EDP linear homogênea  $Lu = 0$ . Então, se  $\{\alpha_m\}_{m=1}^{\infty}$  é uma sequência de escalares tal que a série

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m(x)$$

é convergente e  $k$  vezes diferenciável termo a termo em  $\Omega$ , então  $u$  satisfaz  $Lu = 0$ .

A teoria de EDPs lineares de primeira ordem com duas variáveis independentes é mais semelhante à teoria de EDOs do que a de EDPs. De fato, é esta semelhança com as equações diferenciais ordinárias que nos permitirá achar a solução geral de tais equações. Vamos considerar o operador diferencial linear de primeira ordem

$$L = a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + c(x, y), \quad (2)$$

isto é,

$$Lu = a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u, \quad (3)$$

onde estudar-se-á a equação:

$$Lu = d(x, y) \quad (4)$$

em um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , supondo que  $a, b, c, d \in C(\Omega)$ . A ideia do método a resolver tal equação é bem simples: para resolver a equação (4) acima descrita, procuraremos uma mudança de variável  $s = s(x, y), t = t(x, y)$  que a transforme em uma equação onde só apareça a derivada em relação a uma das variáveis (que escolheremos  $s$ ), o que nos permitirá resolver a equação como uma EDO, fixando a outra variável (que, neste caso, será  $t$ ).

## 2) O Problema de Cauchy e as Soluções Características

Em Equações Diferenciais, um problema de Cauchy (também chamado problema de valor inicial ou PVI) consiste em resolver uma equação diferencial sujeita a certas condições iniciais sobre a solução quando uma das variáveis que a definem toma um determinado valor para modelar as condições do sistema em um determinado ponto específico.

Nesta seção, será analisado o problema de Cauchy para equações que apresentam o seguinte formato:

$$a(x, y) u_x + b(x, y) u_y = c(x, y) \quad (5)$$

Note que a função incógnita  $u$  aparece apenas na parte principal da equação acima, simplificando notoriamente a sua resolução. Conforme estudado, existe uma relação entre uma curva plana inicial  $\gamma$  e a região aberta  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , onde não apenas queremos provar a existência, mas também a unicidade da solução: a região  $\Omega$  tem que ser coberta por curvas características planas que intersectam a curva  $\gamma$  em exatamente um ponto.

Facilitando a operacionalidade dos cálculos, é preciso parametrizar tal curva por  $\varphi(t) = (\sigma(t), \rho(t)), t \in I$ , onde  $I$  é um intervalo aberto (podendo este ser finito ou infinito). Com isto, é possível escrever o problema com o seguinte formato:

$$\begin{aligned} a(x, y) u_x + b(x, y) u_y &= c(x, y) \\ u(\sigma(t), \rho(t)) &= f(t), t \in I. \end{aligned} \quad (6)$$

Algumas hipóteses adicionais devem ser levadas em conta ao enunciarmos o problema:

- (a) A curva inicial plana  $\gamma$  é uma curva suave, isto é, as funções  $\sigma, \rho$  são continuamente diferenciáveis em  $I$  e  $\sigma'(t)^2 + \rho'(t)^2 \neq 0 \forall t \in I$ .
- (b)  $f \in C^1(I)$
- (c)  $a, b, c \in C^1(\Omega)$  e as funções  $a$  e  $b$  não se anulam simultaneamente em  $\Omega$ , onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é um aberto contendo  $\gamma$ .

Para resolver o problema, é necessário determinar quais as curvas características planas da equação. As curvas características são aquelas ao longo das quais a EDP pode ser escrita como uma derivada total. Se  $C$  é uma curva característica plana parametrizada por  $(\alpha(s), \beta(s))$ , então a derivada total de  $u$  ao longo de  $C$  é, utilizando a Regra da Cadeia:

$$\frac{d}{ds} [u(\alpha(s), \beta(s))] = \alpha'(s) u_x(\alpha(s), \beta(s)) + \beta'(s) u_y(\alpha(s), \beta(s)) \quad (7)$$

Com isto, a EDP ao longo de  $C$  pode ser reescrita como:

$$a(\alpha(s), \beta(s)) u_x(\alpha(s), \beta(s)) + b(\alpha(s), \beta(s)) u_y(\alpha(s), \beta(s)) = c(\alpha(s), \beta(s)) \quad (8)$$

Portanto, se queremos que o lado esquerdo da equação (8) seja igual a qualquer uma das expressões em (7), é necessário que, para cada valor de  $s$ , exista um número real  $\lambda(s) \neq 0$  tal que:

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= a(\alpha(s), \beta(s)) \lambda(s) \\ \beta'(s) &= b(\alpha(s), \beta(s)) \lambda(s) \end{aligned} \quad (9)$$

Reescrevendo a equação (9):

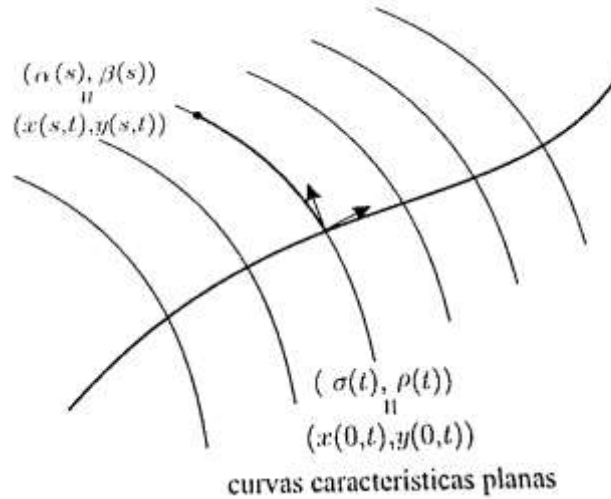
$$\frac{d}{ds} [u(\alpha(s), \beta(s))] = \lambda(s) c(\alpha(s), \beta(s)) \quad (10)$$

As condições impostas em (10) significam, geometricamente, que o vetor tangente à curva  $C$  no ponto  $(\alpha(s), \beta(s))$  é paralelo ao vetor  $(a(\alpha(s), \beta(s)), b(\alpha(s), \beta(s)))$ . A função  $\lambda(s)$  é de fato desnecessária, pois basta reparametrizar a curva convenientemente. Portanto, as curvas características planas da equação proposta inicialmente nesta seção são as curvas suaves  $C$  que admitem parametrização  $(\alpha(s), \beta(s))$  satisfazendo:

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= a(\alpha(s), \beta(s)) \\ \beta'(s) &= b(\alpha(s), \beta(s)) \end{aligned} \quad (11)$$

O sistema de EDOs explicitado em (11) tem uma infinidade de soluções: para obter uma solução única é preciso dar um par de condições iniciais. De maneira mais precisa, como  $a, b \in C^1(\Omega)$ , dado  $(x_0, y_0) \in \Omega$ , existe uma solução  $(\alpha(s), \beta(s))$  para  $s$  em uma vizinhança de  $s_0$  tal que:

$$\alpha(s_0) = x_0, \beta(s_0) = y_0$$



**Figura 1.** A solução da EDP é obtida integrando-se ao longo das curvas características planas. [1]

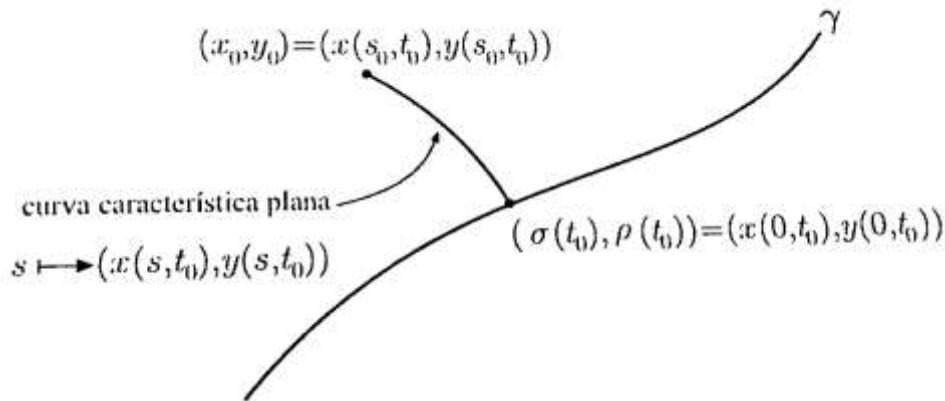
Contudo, é necessário determinar a unicidade das soluções propostas, uma vez que a demonstração anterior apresenta a solução de uma EDP ao longo de várias curvas características planas. Neste sentido, é preciso considerar o seguinte teorema: Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um aberto,  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto,  $\gamma$  uma curva suave em  $\Omega$  parametrizada por  $\gamma = (\sigma(t), \rho(t))$ ,  $t \in I$ ,  $f \in C^1(I)$ , e  $a, b, c \in C^1(\Omega)$ . Suponha que  $a(x, y)^2 + b(x, y)^2 \neq 0 \forall (x, y) \in \Omega$ , e que

$$\begin{vmatrix} a(\sigma(t), \rho(t)) & b(\sigma(t), \rho(t)) \\ \sigma'(t) & \rho'(t) \end{vmatrix} \neq 0, \forall t \in I.$$

Satisfeitas tais condições, então o problema tem uma única solução de classe  $C^1$  em uma vizinhança da curva  $\gamma$  em  $\Omega$  dada por:

$$u(x_0, y_0) = f(t_0) + \int_0^{s_0} c(x(s, t_0), y(s, t_0)) ds \quad (12)$$

Note que, como  $u$  é solução de (11), então a mesma função satisfaz (12), como (12) é de fato solução de (11). Logo, a solução do problema (11) é única, provando, portanto, o teorema anteriormente exposto.



**Figura 2.** A solução no ponto  $(x_0, y_0) = (x(s_0, t_0), y(s_0, t_0))$  é obtida integrando a EDP ao longo da curva característica plana que passa por  $(x_0, y_0)$  de  $s=0$  até  $s=s_0$ .  
[1]

### 3) A Equação da Onda

A Equação da Onda é um dos diversos problemas matemáticos que envolvem as equações diferenciais parciais (EDPs), permitindo a aplicação das mesmas para sua respectiva solução.

É interessante observar que a equação da onda foi um dos problemas mais importantes do século XVIII. O primeiro a estudá-la foi it d' Alembert, seguido de Euler, Daniel Bernouilli e Lagrange. Foram obtidas soluções em diversas formas e a discussão sobre os méritos e as relações entre estas soluções levantou questões fundamentais (como, por exemplo, a respeito do conceito de uma função), sendo estas somente solucionadas no século XIX.

Considere, portanto, uma corda elástica de comprimento  $l$ , presa nas extremidades e vibrando em um plano vertical;  $u(x, t)$  é o deslocamento vertical da corda no ponto  $x$  no instante  $t$ , e pode ser modelado matematicamente como:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & x &\in (0, l), & t > 0. \\ u(0, t) &= 0 = u(l, t), & t &> 0. \\ u(x, 0) &= f(x), & x &\in [0, l] \\ u_t(x, 0) &= g(x), & x &\in [0, l] \end{aligned} \tag{13}$$

onde  $f$  e  $g$  são funções dadas e  $c, l$  são constantes positivas. Tal problema pode ser considerado como um problema misto: as condições  $u(0, t) = 0 = u(l, t), t \geq 0$  são condições de contorno e significam que a corda está presa nas extremidades  $x = 0$  e  $x = l$ . As duas últimas condições de (13) referem-se às condições iniciais, sendo  $f$  e  $g$  funções referentes à posição e velocidade iniciais da corda.

As condições de contorno e as condições iniciais não são independentes: para que haja solução, é preciso que  $f$  satisfaça a condição de compatibilidade:

$$f(0) = 0 = f(l)$$

Visando uma maior simplificação dos cálculos, assume-se a propriedade da linearidade de uma EDP, descrita na primeira seção deste trabalho, bem como a adoção

de algumas condições de contorno descritas em (13), que dividirão o problema em outros dois mais simples, onde  $f \equiv 0$  e  $g \equiv 0$ .

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x \in (0, l), & t > 0. \\ u(0, t) = 0 = u(l, t), & & t > 0. \\ u(x, 0) = 0, & x \in [0, l] \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in [0, l] \end{cases} \quad (14)$$

Suponha que  $u \in V$  é solução de (13), onde  $V = \{(u \in C^2((0, l) \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times [0, +\infty)))\}$ . Sabe-se ainda que  $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{u(x, h) - u(x, 0)}{h}, x \in [0, l]$  existe. Logo, se  $v$  é a solução de (13), então  $w = u - v \in V$  é solução de (14) pois  $w$  satisfaz a equação da onda de acordo com as condições de contorno dadas em (14). Com isto,

$$w(x, 0) = u(x, 0) - v(x, 0) = f(x) - f(x) = 0$$

$$w_t(x, 0) = u_t(x, 0) - v_t(x, 0) = g(x)$$

Considerando que (14) é um caso particular de (13), portanto a solução de (14) em  $V$ , se existe, é única. Desta forma, basta determinar uma solução de (14) em  $V$ . Para tal, é possível esperar uma solução com o seguinte formato:

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(s) ds \quad (15)$$

onde  $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma extensão periódica apropriada da função  $g$ . Impondo a condição de contorno em  $x = 0$ , obtém-se:

$$\int_{-ct}^{ct} G(s) ds = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (16)$$

Conclui-se, então, que  $G$  deve ser uma função ímpar, o que nos permite afirmar que  $G$  deve ser uma extensão ímpar e periódica de período  $2l$  de  $g$ . Vamos, portanto, demonstrar tal assertiva, sabendo que (15) é solução de (14). Como  $G$  deve ser função ímpar, então deduz-se que  $\int_{-l}^l G(s) ds = 0$ . Demonstrando matematicamente:

$$\begin{aligned} u(l, t) &= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(s) ds = \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} G(r + l) dr \\ &= \frac{1}{2c} \int_{-ct}^0 G(r + l) dr + \frac{1}{2c} \int_0^{ct} G(r + l) dr \\ &= \frac{1}{2c} \int_{-ct}^0 G(r - l) dr + \frac{1}{2c} \int_0^{ct} G(r + l) dr \\ &= \frac{1}{2c} \int_{-l-ct}^{-l} G(s) ds + \frac{1}{2c} \int_l^{l+ct} G(s) ds \\ &= 0, \text{ c. q. d.} \end{aligned}$$

Finalmente,  $u_t(x, t) = \frac{G(x+ct)+G(x-ct)}{2}$ . Logo, se  $x \in [0, l]$ , então  $u_t(x, 0) = G(x) = g(x)$ . Observe que, se  $g \in C^1([0, l])$ , satisfaz  $g(0) = 0 = g(l)$ , então  $G \in C^1(\mathbb{R})$  e a função  $u$  definida em (15) é de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}^2$ .

Após a exposição e demonstração de tais conclusões e observações, é possível enunciar o seguinte teorema, potencialmente importante para o estudo da Equação da Onda via EDPs:

Sejam  $f \in C^2([0, l])$  e  $g \in C^1([0, l])$ , tais que  $f, f'$  e  $g$  se anulam em  $x = 0$  e  $x = l$ . Então a função  $u: [0, l] \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$u(x, t) = \frac{F(x + ct) - F(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(s) ds \quad (16)$$

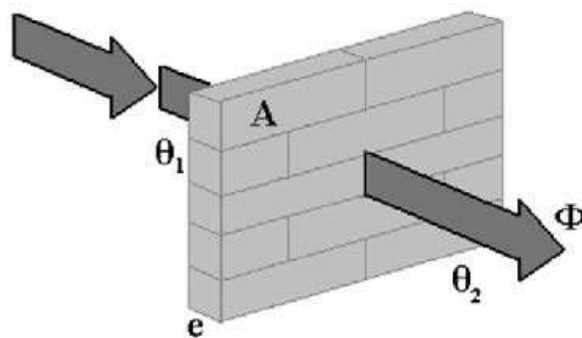
onde  $F, G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são as extensões ímpares e periódicas de período  $2l$  das funções  $f$  e  $g$ , respectivamente, é a única solução  $u \in V$  do problema enunciado em (13). Além disso,  $u$  é de fato de classe  $C^2$  em  $[0, l] \times [0, +\infty)$ .

#### 4) A Equação do Calor

Na metade do século XVIII, motivados pelo problema de vibração de cordas, matemáticos debateram sobre a expansão de funções arbitrárias em séries trigonométricas. D'Alembert, Euler, Bernoulli e Lagrange desenvolveram a matemática da época e aproximaram-se do que hoje é conhecido como série de Fourier.

Utilizando a teoria de seus antecessores, em 1807, Fourier submeteu seu primeiro trabalho a Academia Francesa, onde formalizou e solucionou o problema de condução do calor. Seu trabalho não foi aceito e um concurso foi criado para premiar quem solucionasse o problema. Em 1811, Fourier submeteu novamente seu trabalho, mas a banca julgadora mais uma vez resolveu não publicá-lo, alegando falta de rigor. A publicação dos seus trabalhos só ocorreu mais tarde, quando Fourier tornou-se secretário da Academia.

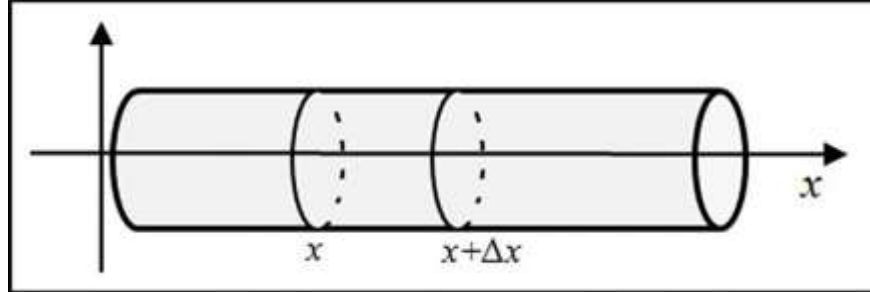
Assim, a teoria de Fourier foi reconhecida, porém não finalizada, pois novos problemas surgiram do seu trabalho.



**Figuras 3 e 4.** Jean Baptiste Joseph Fourier (à esquerda), responsável pelo estudo da Equação do Calor. Figura esquemática do fluxo de calor por uma placa de material condutor homogêneo (à direita). [5]



Para estudarmos o fenômeno da transmissão do calor e a equação diferencial parcial que modela o problema, considere uma barra uniforme isolada termicamente na superfície lateral e com seção transversal muito pequena (problema 1-dimensional). Considere ainda que as duas seções transversais da barra possuem a mesma área  $dA$  e temperaturas diferentes  $T_1$  e  $T_2$ , separadas por uma distância  $d$ .



**Figura 5.** O problema da transmissão de calor na barra exemplificada. [8]

De acordo com estas considerações, é possível afirmar que uma certa quantidade de calor  $Q$  passa da seção mais quente para a mais fria de forma diretamente proporcional à área e inversamente proporcional à distância  $d$ , conforme nos afirma a chamada Lei de Fourier. A quantidade de calor  $Q$  por unidade de tempo pode ser determinada pela equação:

$$Q = \frac{k A [T_2 - T_1]}{d} \quad (17)$$

onde  $k$  é a constante de condutividade térmica do material que compõe a barra. Tal quantidade de calor percorre a extensão da barra no eixo  $x$ . Neste sentido, é possível afirmar, com efeitos aproximados, que, para cada valor de  $x$ , a temperatura é constante, pois a mesma é muito pequena.

O problema também pode ser observado e analisado quando a quantidade de calor varia no espaço e também no tempo, o que faz com que utilizemos os conceitos de equações diferenciais parciais para resolver o problema. Desta forma, tem-se a Equação do Calor, dada por:

$$c(x) \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + Q(x, t) \quad (18)$$

onde  $u(x, t)$  é a função de duas variáveis que indica o valor da temperatura em  $x$  no tempo  $t$ ,  $c(x)$  é o calor específico da barra,  $\rho(x)$  é a densidade de massa,  $\varphi(x, t)$  é o fluxo de calor que obedece à equação de Fourier dada por  $\varphi(x, t) = -K(x) \frac{\partial u}{\partial x}$ . A variável  $Q(x, t)$  indica a energia de calor externa gerada (fonte, fornecendo calor à barra  $\rightarrow Q(x, t) > 0$ ; ou semidouro, retirando calor da barra  $\rightarrow Q(x, t) < 0$ ).

Dada a equação (18), é possível efetuar algumas simplificações, conforme indicam as equações abaixo:

$$c(x) \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + Q(x, t) \quad \text{Equação Geral}$$

$$c(x) \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( -K(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + Q(x, t) \quad (19)$$

Note que, para o exemplo estudado,  $c(x)$ ,  $\rho(x)$  e  $K(x, t)$  são constantes, podendo ser agrupadas em um único termo, ao qual atribuiremos o valor “ $k$ ”, constante física referente à difusividade térmica. Observe ainda que  $Q(x, t) = 0$ , pois não há qualquer tipo de fonte de calor externa, o que leva à seguinte equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (21)$$

Algumas condições de contorno devem ser consideradas para obtenção da solução geral deste problema da transmissão de calor na barra. Dentre tais condições, temos: (i) as condições iniciais do problema, referentes à variável  $t$ , (ii) as condições de fronteira, referentes à variável  $x$ , também conhecidas como condições de Dirichlet, e (iii) as condições de Neumann, referentes ao fluxo de calor  $\varphi$  relacionado ao problema.

A condição inicial, ocorrente com relação à variável  $t$ , indica que a temperatura da barra no tempo  $t = 0$  é dada por uma função  $f(x)$ . Reescrevendo matematicamente esta condição, tem-se que:

$$u(x, 0) = f(x)$$

As condições de fronteira, ocorrentes com relação à variável  $x$ , são também conhecidas como condições de Dirichlet. Neste problema, será assumido que a temperatura nos extremos da barra (isto é, em  $x = 0$  e  $x = l$ ) são nulos. Reescrevendo matematicamente esta condição, tem-se que:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= g_1(t) = 0 \\ u(l, t) &= g_2(t) = 0 \end{aligned}$$

As condições referentes ao fluxo de calor sobre a superfície da barra são conhecidas como condições de Neumann. Assume-se, neste caso, que o fluxo de calor nas extremidades da barra é nulo. Reescrevendo matematicamente esta condição, tem-se que:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= -K(0) u_x(0, t) = 0 \\ \varphi_2(t) &= -K(l) u_x(l, t) = 0 \end{aligned}$$

Finalmente, depois de explicitadas todas as condições de contorno adotadas para a resolução deste problema, será necessário determinar qual a solução geral do tipo  $u(x, t)$  para a EDP obtida. A equação diferencial parcial que ilustra o problema da transmissão de calor, considerando as condições de contorno citadas nas linhas anteriores, é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = k u_{xx} \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x), 0 \leq x \leq l \end{array} \right. \quad (22)$$

Entretanto, a resolução de tais EDPs é um pouco mais complicada, e envolve um método específico de resolução, conhecido como **método de separação de variáveis**.

O método da separação de variáveis e as séries de Fourier são conceitos indispensáveis para a determinação da solução geral da Equação do Calor. A resolução da equação diferencial parcial por tal método nos levará, de forma natural e intuitiva, às chamadas séries de Fourier, também importantes e presentes no problema da transmissão de calor.

A ideia central do método da separação de variáveis é supor que a solução para uma EDP pode ser escrita como um produto de funções de uma variável. As resoluções de EDPs são árduas e trabalhosas, justamente pelo maior número de variáveis envolvidas nas funções do problema. Seria interessante e muito mais prático, em termos resolutivos, obter uma equação diferencial que varia somente com relação a uma variável (como no caso das EDOs), e este será o objetivo central deste método.

No caso do exemplo estudado, busca-se uma solução do tipo  $u(x, t)$ , permitindo estabelecer, pelo método, que:

$$u(x, t) = X(x) T(t), \quad (23)$$

Sendo assim, vamos derivar a equação  $u(x, t)$  explicitada acima, utilizando a Regra do Produto, e efetuando devidamente a substituição de tais termos na EDP  $u_t = k u_{xx}$ .

$$\begin{cases} u_x(x, t) = X'(x) T(t) \\ u_{xx}(x, t) = X''(x) T(t) \\ u_t(x, t) = X(x) T'(t) \end{cases} \quad (24)$$

Substituindo na EDP:

$$X(x) T'(t) = k X''(x) T(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{k T(t)} = -\lambda \quad (25)$$

Após efetuar a multiplicação entre os termos da equação (25), note que a EDP se transforma em duas outras equações diferenciais que variam somente com relação a uma única variável, sendo portanto classificadas como EDOs homogêneas:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) + \lambda k T(t) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Algumas soluções já podem ser obtidas quando as condições de contorno são devidamente substituídas em  $u(x, t) = X(x) T(t)$ :

$$u(0, t) = X(0) T(t) \rightarrow T(t) \neq 0 \rightarrow \boxed{X(0) = 0} \rightarrow \text{solução trivial}$$

$$u(l, t) = X(l) T(t) \rightarrow T(t) \neq 0 \rightarrow \boxed{X(l) = 0} \rightarrow \text{solução trivial}$$

Como a EDP transformou-se nas equações determinadas em (26), então será necessário estudar as possibilidades de valores para  $\lambda$  na primeira equação de (26).

1º caso ---  $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} X''(x) &= 0; \quad X'(x) = C; \quad X(x) = Cx + D \\ X(0) &= 0 \rightarrow 0 = C * 0 + D \rightarrow \mathbf{D = 0} \\ X(l) &= 0 \rightarrow 0 = C * l \rightarrow \text{Como } l \neq 0, \text{ então } \mathbf{C = 0}. \end{aligned}$$

Portanto, se  $X(x) = Cx + D$ , sendo  $C = 0$  e  $D = 0$ , então  $\mathbf{X(x) \equiv 0}$ . (solução trivial)

2º caso ---  $\lambda < 0$  ---  $\lambda = -\alpha^2$

$$X''(x) - \alpha^2 X(x) = 0 \quad (\text{EDO homogênea de ordem 2})$$

$$r^2 - \alpha^2 = 0 \rightarrow \boxed{r = \pm \alpha} \quad (\text{Equação característica})$$

$$X(x) = k_1 e^{\alpha x} + k_2 e^{-\alpha x}$$

É possível reescrever  $X(x)$  como:  $X(x) = k_1 \cosh(\alpha x) + k_2 \sinh(\alpha x)$

$$\begin{aligned} \text{Aplicando as condições de contorno: } X(0) &= l \rightarrow k_1 * 0 + k_2 * 1 = 0 \rightarrow \mathbf{k_2 = 0} \\ X(0) &= 0 \rightarrow k_1 * 1 + k_2 * 0 = 0 \rightarrow \mathbf{k_1 = 0} \end{aligned}$$

Portanto, se  $(x) = k_1 \cosh(\alpha x) + k_2 \sinh(\alpha x)$ , e  $k_1$  e  $k_2 = 0$ , então  $\mathbf{X(x) \equiv 0}$ . (solução trivial)

3º caso ---  $\lambda > 0$  ---  $\lambda = \alpha^2$

$$X''(x) + \alpha^2 X(x) = 0 \quad (\text{EDO homogênea de ordem 2})$$

$$r^2 + \alpha^2 = 0 \rightarrow \boxed{r = \pm \alpha i} \quad (\text{Equação característica})$$

$$X(x) = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x)$$

$$\begin{aligned} \text{Aplicando as condições de contorno: } X(0) &= 0 \rightarrow c_1 * 1 + c_2 * 0 = 0 \rightarrow \mathbf{c_1 = 0} \\ X(l) &= 0 \rightarrow 0 + c_2 \sin(\alpha l) = 0 \end{aligned}$$

Note que, pela segunda condição de contorno deste terceiro caso, chegamos a uma equação dada por  $c_2 \sin(\alpha l) = 0$ . Esta equação trigonométrica pode ser resolvida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \alpha l &= n\pi \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \\ \alpha &= \frac{n\pi}{l} \quad (27) \end{aligned}$$

Logo, encontramos uma família de soluções no seguinte formato:

$$X_n(x) = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \quad (28)$$

onde  $C_n$  é conhecido como **coeficiente de Fourier**.

Agora vejamos as soluções da segunda equação de (26):

$$T'_n(t) + \frac{n^2\pi^2}{l^2}T_n(t) = 0 \quad (29)$$

A equação diferencial acima pode ser facilmente resolvida pelo método simples das variáveis separáveis, o que nos levará à seguinte solução geral:

$$T_n(t) = B_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t} \quad (30)$$

A solução geral da EDP do calor é, como determina o método de separação de variáveis, dado por:

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t)$$
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t}, \quad (31)$$

isto é, um somatório de funções senos. Para expressarmos nossa solução em formato de uma série de Fourier, isto é, uma função que engloba uma soma de senos e cossenos, façamos uma extensão periódica ímpar da solução  $u(x, t)$  acima, obtendo  $f(x)$ :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos \left( \frac{n\pi x}{l} \right) + B_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right)] \quad (32)$$

## 5) Dinâmica de Populações

Nos dias de hoje, ecologistas vêm avançando seus estudos e pesquisas na área de processos espaciais com uma grande variedade de aplicabilidades práticas. Contextos como a fragmentação do habitat natural das espécies e sistemas de informações geográficas estão contribuindo para o aumento de dados e informações que permitam um maior aprofundamento científico nesta área. Uma das maiores ferramentas para estudar estes processos espaço-temporais são as equações diferenciais parciais (EDPs), entretanto, muitos trabalhos científicos na área de Biologia não utilizam estes conceitos, muitas vezes pela dificuldade de trabalhar com notações e jargões matemáticos mais complexos, estando presente apenas em livros e artigos com pouco enfoque na área de Dinâmica de Populações.

Neste sentido, apesar de sua resolução um pouco mais dificultosa, a utilização das EDPs para a solução de tais problemas faz-se potencialmente útil, na medida em que torna possível a modelagem de processos ecológicos que variam simultaneamente no tempo e no espaço, embora não possam descrever em sua totalidade os fenômenos existentes nesta área. Dentre os ramos da Ecologia que podem ser trabalhadas via EDPs, é possível citar: fenômenos de dispersão de espécies, invasões ecológicas, efeitos da geometria e tamanho de seus respectivos habitats naturais, e surgimento de novos padrões espaciais, por exemplo.

Dentre as aplicações clássicas das EDPs em dinâmica de populações, as diversas espécies existentes são modeladas de acordo com o movimento aleatório browniano, cujas variáveis não dependem do tempo e espaço. O Movimento Browniano foi introduzido em meados de 1828 por Robert Brown na descrição do movimento aleatório desempenhado por partículas de pólen suspensas sobre a água e atualmente é altamente

empregado na teoria matemática que fundamenta a teoria moderna de finanças e de processos estocásticos. O movimento browniano nos leva ao modelo de difusão, dado por:

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (33)$$

onde  $u(x,y,t)$  indica a dispersão das espécies nas coordenadas espaciais  $x$ ,  $y$  e no tempo  $t$ , e  $D$  refere-se ao coeficiente de difusividade que nos mostra a taxa de dispersão de tal população. Note que tal taxa pode ser representada ainda por  $\frac{\Delta s^2}{t}$ , isto é, o quociente entre a distância percorrida ao quadrado e o tempo para percorrer esta distância, respectivamente.

Desta forma, quando uma determinada espécie animal localiza-se em um ponto central e dispersa por meio do modelo da difusão em um meio ambiente bidimensional, é possível prever, por meio da equação (33), a localização desta mesma a partir de uma distância do ponto inicial.

Através das leis de difusão não-estacionárias, é possível determinar o tempo médio para que um organismo se desloque uma distância  $L$  a partir de sua posição inicial, conforme indica (34):

$$t = \frac{L^2}{2D} \ln \left( \frac{L}{a} \right) \quad (34)$$

Interpretando tal resultado, é possível afirmar que um organismo, pelo modelo de difusão, demora um tempo grande para viajar longas distâncias, mas que também existe uma pequena probabilidade de que estes mesmos viagem arbitrariamente longas distâncias em um arbitrário curto período de tempo. Esta constatação contraditória dependerá do comportamento dos indivíduos e se não houve um evento exterior que influenciou neste fenômeno, embora isto seja altamente improvável.

Diversos trabalhos científicos na área vêm utilizando o método de difusão para dispersão de espécies, e há informativos de que o modelo é melhor aplicado no caso de ambientes homogêneos, onde as espécies apresentam taxas de movimentação similares.

Quando as populações sofrem influências externas para se movimentarem, através de ação dos ventos ou pela correnteza de rios, por exemplo, a equação (33) é novamente alterada, incluindo-se, por sua vez, variáveis relacionadas à agentes externos, como a convecção, por exemplo. As variáveis  $w_x$  e  $w_y$  referem-se às taxas de velocidade de tais agentes externos (ventos, correntezas, ações climáticas, etc)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - w_x \frac{\partial u}{\partial x} - w_y \frac{\partial u}{\partial y} \quad (35)$$

O movimento browniano ainda afirma a hipótese de que os animais, durante seus deslocamentos, não realizam movimentos de retorno ou zigue-zague, e que tendem a caminharem para frente em sua trajetória. Este modelo específico nos leva a um modelo de EDP conhecido como a equação do telégrafo, dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{s^2}{2\lambda} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (36)$$

Tal equação é muito utilizada pelos telegrafistas e engloba soluções de problemas envolvendo a propagação de ondas, sendo também aplicadas ao caso de

modelos de dispersão de espécies. Na equação,  $\frac{1}{2\lambda}$  refere-se à correlação existente entre as direções de viagem dos animais de um local para outro, enquanto que a variável  $s$  está relacionada à velocidade dos organismos.

Existem ainda diversas outras equações (além da equação de difusão e a telegráfica) que levam em conta fatores comportamentais das espécies, incluindo maiores detalhes como pausas no movimento de deslocamento, mudanças de velocidade, dentre outros.

Outro modelo diferencial estudado refere-se às interações existentes entre as espécies, na forma de atração a outra espécie ou repelimento, o modelo de difusão simples pode ser substituído pelo movimento tendencioso aleatório dado pela equação (37):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( ku \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (37)$$

onde  $u$  é a densidade da população, e  $k$  é a medida que indica a tendência da espécie se afastar (quando  $k < 0$ ) ou se aproximar (quando  $k > 0$ ) de outra espécie. A indicação de  $ku$  refere-se à força de atração ou de repelimento.

Outro modelo utilizando EDPs para descrever um fenômeno ecológico ocorre quando uma espécie decide deslocar-se para um outro habitat que lhe proporcione melhores condições de vida, como maior disponibilidade de alimento, fuga de possíveis predadores, ou até mesmo por condições climáticas adversas a seu desenvolvimento, sendo dada pela equação (38):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{d}{dx} \varphi(E) \right) \quad (38)$$

onde  $E$  está relacionado ao potencial do ambiente ao qual a espécie atualmente se localiza, podendo aumentar ou diminuir a qualidade de vida do organismo no seu habitat. Já a função  $\varphi(E)$  nos mostra como o meio-ambiente altera a tendência de uma espécie deslocar-se de seu habitat.

Em resumo, depois de todos os modelos expostos, chega-se à conclusão de que existe uma grande variedade de equações diferenciais parciais que modelam o comportamento de dispersão das espécies, representado essencialmente pelo modelo de difusão simples, podendo ser adicionado a ele muitas outras variáveis que indicam os diversos outros fatores que podem influenciar este processo espacial de deslocamento dos organismos. Generalizando, os modelos de difusão podem ser simplificados ao formato indicado em (39), onde os dois primeiros elementos da igualdade à direita referem-se ao modelo de difusão simples, e a parcela  $f(u)$  representa os efeitos dinâmicos de crescimento que podem ocorrer sobre uma determinada população.

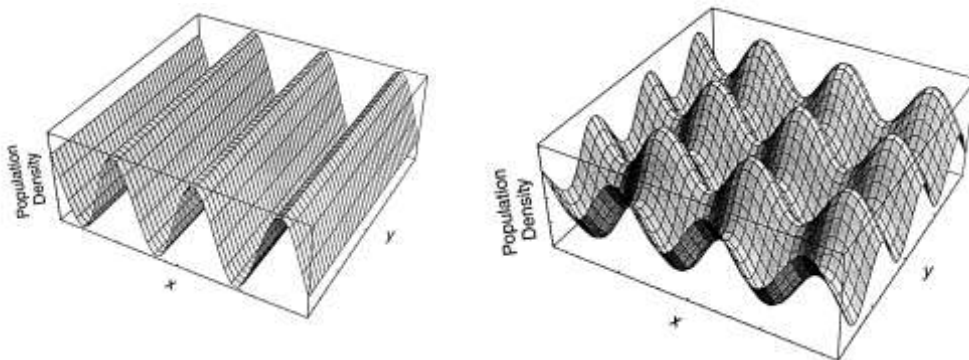
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ D(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ D(u) \frac{\partial u}{\partial y} \right] + f(u) \quad (39)$$

Muitos matemáticos utilizaram o modelo de difusão em seus estudos sobre as interações de multiespécies, causando a formação de um padrão em ambientes homogêneos. No meio ecológico, a ideia principal é a de que a interação entre estes modelos de dispersão e o movimento das espécies pode amplificar a geração de previsíveis perturbações em um meio homogêneo. Alguns desses padrões podem ser modelos por meio de EDPs com sistemas de predador-presa, como o conjunto de equações indicado a seguir.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= f_u(u) - \alpha v g(u) + D_u \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \beta v g(u) - f_v(v) + D_v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right),\end{aligned}\quad (40)$$

onde  $u$  é a densidade da presa e  $v$  a densidade do predador,  $f_u$  é a função de crescimento populacional da presa em um ambiente com ausência de predadores,  $f_v$  é a função de decrescimento para predadores na ausência de presa,  $g(u)$  é a função responsável por indicar como as taxas de predadores variam de acordo com a densidade de presas, e as constantes  $\alpha$  e  $\beta$  indicam os ganhos ou perdas de forma proporcional causada à espécie quando um predador torna-se presa e vice versa.

O modelo de formação de um padrão de difusão pode ser comparado a um sistema de ativação-inibição, onde o aumento de presas induz (“ativa”) a produção de um maior número de presas e predadores, enquanto que, conforme a quantidade de predadores aumenta, ocorre a diminuição de futuros predadores e presas (“inibe”). Na ausência de processos de dispersão, a presa e o predador chegam a um estágio de equilíbrio onde qualquer aumento na quantidade de presas gera o consumo destas por parte dos predadores. Quando o processo de difusão é acrescentado e a taxa de difusividade é suficientemente maior que a taxa de difusividade da presa, então a influência estabilizadora do predador pode ser dissipada pela difusão, produzindo picos regulares (altos e baixos) nos índices de densidade de predadores e de presas.



**Figuras 6 e 7.** Ilustrações gráficas sobre os tipos de padrões a serem formados nos sistemas predador-presa juntamente com o fenômeno da difusão. [2]

## 6) Métodos Numéricos e Engenharia Estrutural

Durante a solução de problemas de engenharia, é comum se deparar com equações diferenciais (ordinárias e parciais) que regem o fenômeno físico. A solução analítica dessas equações nos casos de condições de contorno, carregamento e geometria complexas é bastante complicada ou até mesmo impossível. Nesses casos é comum recorrer às soluções aproximadas obtidas através de *métodos numéricos*.

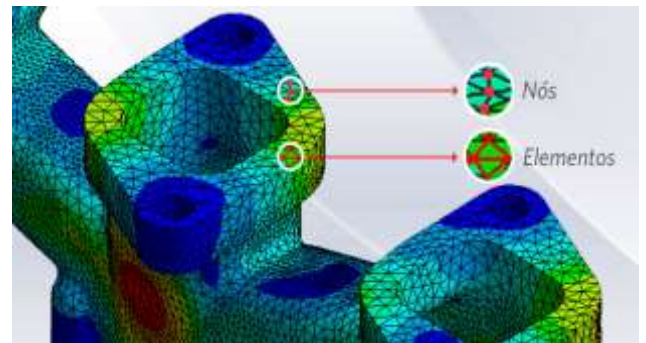
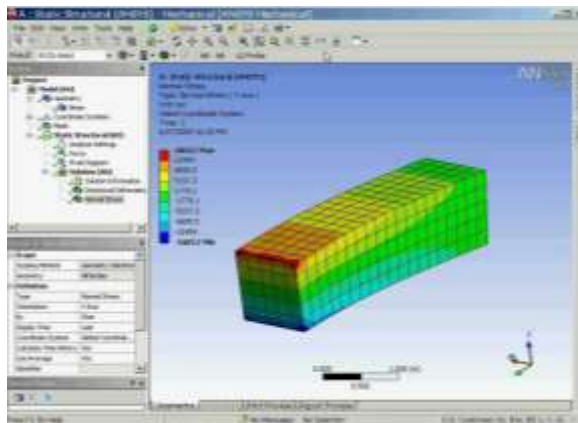
O emprego de um método numérico está relacionado com uma sequência finita de operações aritméticas para aproximar a solução de determinado problema quando esse é de difícil resolução analítica. O objetivo é encontrar uma solução numérica bastante próxima da solução exata do problema, visando sempre diminuir o erro (ou seja, a diferença) entre as duas soluções, de tal forma que o método possa ser considerado válido.



Como já mencionado, se um problema real de engenharia tem geometria, condições de contorno e condições de carregamento simples, os métodos analíticos podem ser usados para resolver a equação diferencial que rege o fenômeno em estudo. Caso contrário, quando tais características forem complicadas, pode-se utilizar o MDF para aproximar a solução para o mesmo.

O MDF é um esquema bastante simples e prático para a solução numérica de equações diferenciais, que apresentou franca expansão entre a década de 1950 e 1960, mas perdeu espaço para métodos mais sofisticados (MEF) com a crescente utilização dos computadores digitais nas décadas subsequentes.

Atualmente, o MDF é aplicado e estudado principalmente no meio acadêmico. O resultado analítico obtido para um dado problema é geralmente considerado a solução exata desse problema. A análise numérica resulta num valor aproximado, que pode conter erros. Esses erros podem ser: de cálculo, de dados, de máquina, ou mesmo do analista na interpretação dos resultados. Por isso, para que o método possa ser utilizado, o erro entre o resultado analítico exato e o resultado aproximado deve ser o menor possível. A idéia geral do MDF é obter a solução aproximada de uma equação diferencial em pontos discretos do domínio considerado, utilizando fórmulas de diferenças para substituir as derivadas de ordem “n” presentes na equação governante do problema. O conjunto desses pontos é denominado de malha de diferenças finitas, e quanto mais pontos essa malha tem, mais precisa é a resposta dada pelo método.

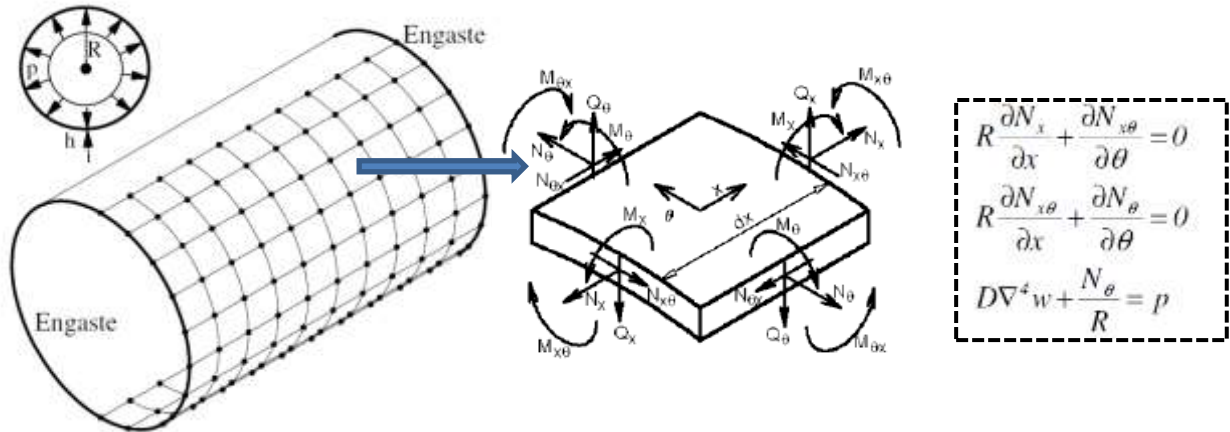


**Figuras 8 e 9.** Software Ansys® utilizado para os cálculos (à esquerda). Diferenciação entre nós e elementos em um modelo computacional (à direita). [7,6]

Para o problema de equilíbrio e estabilidade da estrutura que será vista a seguir, foram usadas as fórmulas de diferenças correspondentes às derivadas de primeira à quarta ordem em relação às variáveis independentes  $x$ ,  $y$  ou  $q$  num determinado ponto “ $k$ ” da malha. Para uma dada função genérica  $f$ , que nos problemas estruturais representa uma componente de deslocamento da estrutura, pode-se escrever as seguintes expressões procurando aproximar as derivadas.

$$\begin{aligned} \left( \frac{df}{dx} \right)_k &\cong \frac{1}{2\Delta x} (f_{k+1} - f_{k-1}); & \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{m,n} &\cong \frac{1}{4\Delta x \Delta y} (f_{m+1,n+1} - f_{m-1,n+1} - f_{m+1,n-1} + f_{m-1,n-1})_{m,n} \\ \left( \frac{d^2 f}{dx^2} \right)_k &\cong \frac{1}{\Delta x^2} (f_{k+1} - 2f_k + f_{k-1}) \\ \left( \frac{d^4 f}{dx^4} \right)_k &\cong \frac{1}{\Delta x^4} (f_{k+2} - 4f_{k+1} + 6f_k - 4f_{k-1} + f_{k-2}) \end{aligned}$$

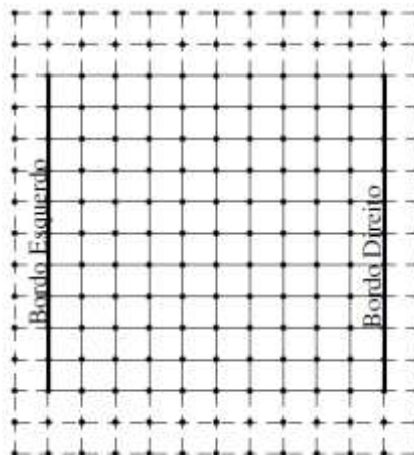
Considere uma casca cilíndrica biengastada de comprimento  $L$  mostrada abaixo submetida a uma pressão interna  $p$ . Para este problema, as equações que governam o comportamento da estrutura serão obtidas a partir das equações fundamentais de equilíbrio de forças e movimentos nas três direções do plano  $(x, \theta, z)$  do elemento infinitesimal.



**Figuras 10 e 11.** Casca cilíndrica biengastada, com pressão interna atuante. Detalhamento dos esforços normal, cortante e momento fletor em um elemento infinitesimal da casca, bem como as equações governantes do problema. [3]

As três equações de equilíbrio de forças e movimentos explicitadas acima indicam:  $w$  é a deflexão lateral da casca,  $R$  é o seu raio e  $D$  é a sua rigidez à flexão;  $N_x$ ,  $N_\theta$  e  $N_{x\theta}$  são os esforços resultantes e  $p$  é a pressão interna atuante. Observe que agora as variáveis independentes do problema são  $x$  e  $\theta$ .

Na figura abaixo é apresentado o formato da malha de DF adotado caracterizando as bordas do lado esquerdo e do lado direito da casca. Os pontos localizados fora dessas bordas são chamados de pontos fictícios da malha. Deve-se enfatizar que devido a simetria do problema, apenas metade da casca foi discretizada.

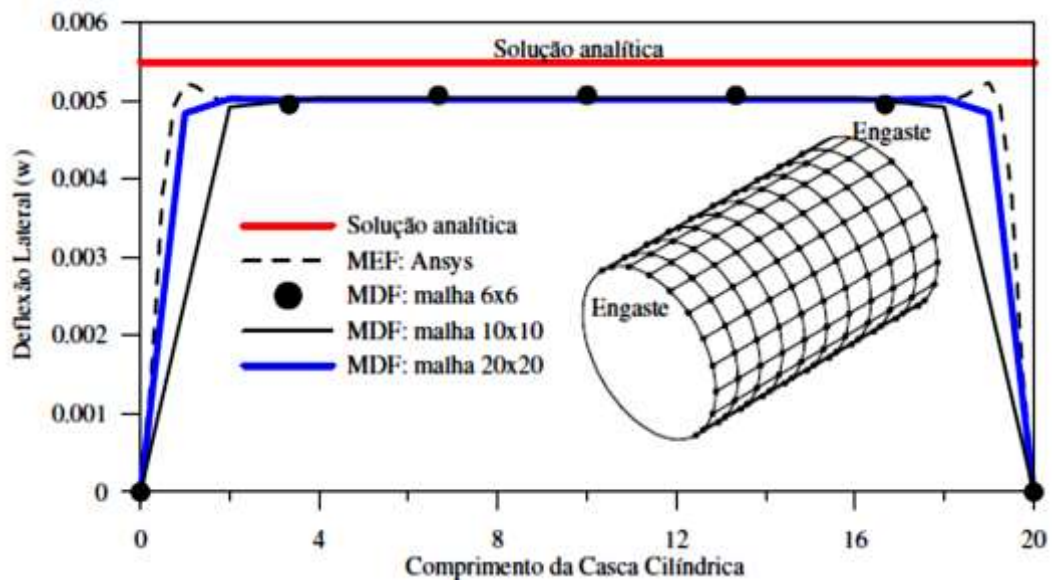


**Figura 12.** Malha de diferenças finitas utilizada para discretizar a casca cilíndrica. [3]

As equações anteriores foram discretizadas usando o MDF e diferentes malhas foram adotadas na solução numérica do problema. Os resultados dessas análises são mostrados na Figura 13, onde se pode observar a variação do deslocamento lateral  $w$  da

casca ao longo do seu comprimento. Foram adotados:  $L = 20 \text{ m}$ ;  $R = 6 \text{ m}$ ;  $h$  (espessura)  $= 0,032 \text{ m}$ ;  $p = -10^6 \text{ N/m}^2$ ; e  $D = 615150,18 \text{ N/m}$ .

Este mesmo problema foi resolvido através do MEF, usando o software Ansys, bem como analiticamente (Timoshenko & Woinkowsky- Krieger, 1959). A resposta obtida com esse segundo procedimento numérico e a analítica simplificada são também apresentadas na figura abaixo. Através dessa figura verifica-se que, mesmo usando-se uma malha pouco refinada de DF, consegue-se um resultado com boa precisão para pontos da casca localizados a uma certa distância das bordas. Os deslocamentos para esses pontos são coincidentes com aqueles obtidos com o Ansys. Entretanto, o efeito da influência das bordas só pode ser capturados a medida que se aumenta a discretização do modelo numérico. Tanto as respostas obtidas através do MDF como aquelas do MEF apresentaram a mesma discrepância em relação à solução analítica.



**Figura 13.** Comparação da solução analítica com o MEF e o MDF. [3]

Desta maneira, os métodos numéricos constituem importantes ferramentas para obtenção de aproximações na resolução de problemas das mais variadas áreas, principalmente da Engenharia. Eles são utilizados quando alguns modelos matemáticos, tais como os das EDOs e EDPs geram formulações complexas ou até mesmo impossíveis de serem resolvidas.

Diversas são as vantagens obtidas com a aplicação dos métodos numéricos, em especial o MDF: a facilidade de entendimento dos passos básicos envolvidos na sua aplicação, sua fácil implementação computacional, a possibilidade de seu emprego em uma ampla variedade de problemas, sua precisão, e a sua rápida convergência para a solução exata do problema. Algumas desvantagens também do método devem ser citadas, principalmente para resolução de problemas da engenharia estrutural, não podendo ser aplicado em problemas tais como para o atendimento de algumas condições de borda e carregamento, e a solução de problemas onde existe descontinuidade de material.

Neste sentido, a aplicação dos métodos numéricos contribui para a resolução de problemas de Engenharia e de outras áreas da Matemática, auxiliando na solução dos mais diversos desafios de Engenharia que aparecem no cotidiano dos profissionais da área.

## Conclusões

Ao término deste projeto, foi possível adquirir os conhecimentos necessários para a análise das equações diferenciais parciais. Foram estudadas todas as propriedades e características das EDPs, tais como o princípio da superposição e as soluções características. Além disso, foi realizada uma análise aprofundada a respeito da Equação da Onda e do Calor, bem como a importância das contribuições dadas por D'Alembert e Fourier para a obtenção da solução geral das mesmas.

Não só nas áreas da Matemática é possível perceber a presença de fenômenos modelados pelas equações diferenciais parciais. No ramo das Ciências Biológicas, em especial na Ecologia, é possível estudar diversos fenômenos acerca da dinâmica de populações de espécies, modeladas pelo movimento aleatório browniano. Os sistemas de predador-presa e outros fatores externos que podem atuar sobre as espécies também são modelados pelas EDPs.

Finalmente, alguns problemas de Engenharia também são modelados pelas equações diferenciais parciais, em especial na Engenharia Estrutural. É possível ainda obter soluções aproximadas de determinados fenômenos físicos através dos chamados métodos numéricos, quando as soluções analíticas promovidas pelas EDPs tornam-se muito complexas ou até mesmo impossíveis de serem calculadas. Neste sentido, o projeto contribuiu para a ampliação dos conhecimentos acerca do tema e reforçou o fato do MDF aproximar com precisão a solução analítica procurada.

## Referências

- 1 - IÓRIO, V. M. EDP: Um Curso de Graduação. Coleção Matemática Universitária: Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2010.
- 2 – HOLMES, E. E., LEWIS, M.A., BANKS, J.E., and VEIT, R.R. Partial differential equations in ecology: spatial interactions and population dynamics. Ecology, Vol 75, 1994.
- 3 – L. R. DEUS, F. C. S MACHADO, R. A. M. SILVEIRA, C.L. NOGUEIRA. MDF: Conceitos Básicos e algumas aplicações na Engenharia Estrutural. Departamento de Engenharia Civil. Escola de Minas, UFOP – Ouro Preto – MG. 9º Simpósio de Mecânica Computacional, 2010.
- 4 – D. SPERANDIO, J. T. MENDES, L. H. M. SILVA. Cálculo numérico: Características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos. São Paulo: Prentice Hall, 2003.
- 5 – Lei de Fourier. Imagem de placa de material condutor homogêneo. Disponível em <http://alunosonline.uol.com.br/fisica/lei-fourier.html>. Acesso em 10.07.2016.
- 6 – Imagem dos nós e elementos em um modelo computacional. Disponível em <http://www.esss.com.br/blog/2016/01/metodo-dos-elementos-finitos-o-que-e/>. Acesso em 12.07.2016.
- 7 – Imagem de modelagem do software Ansys. Disponível em <https://www.sdcpublications.com/Textbooks/Finite-Element-Simulations-ANSYS-Workbench/ISBN/978-1-58503-983-8/>. Acesso em 20.07.2016.
- 8 – Imagem de barra para o problema de transmissão de calor. Disponível em [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1806-11172015000101603](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172015000101603). Acesso em 20.07.2016.