Data Science Academy

www.datascienceacademy.com.br

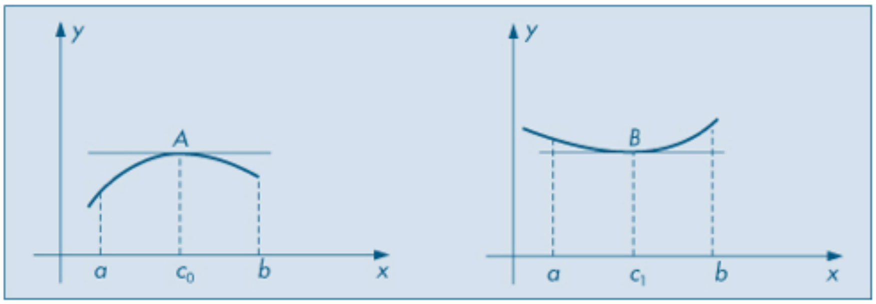
Matemática Para Machine Learning

Máximos e Mínimos Por Meio da Segunda Derivada

Intuitivamente, podemos notar que, quando um ponto c, interior ao domínio, é de máximo ou de mínimo, a tangente ao gráfico da função f(x) correspondente é horizontal, e, consequentemente, f'(c) = 0 (desde que a função seja derivável no ponto).

Surge, porém, um problema: se soubermos que f'(c) = 0, como saber se c é ponto de máximo, de mínimo ou nem de máximo nem de mínimo?

Suponhamos que c0 e c1 sejam pontos de máximo e de mínimo, respectivamente, conforme visto neste gráfico:



Sendo c0 um ponto de máximo, então nas vizinhanças de c0 a função é côncava para baixo e, portanto, f''(c) < 0. Analogamente, sendo c1 um ponto de mínimo, então nas vizinhanças de c1 a função é côncava para cima e, portanto, f''(c1) > 0.

Dessa forma, um ponto c tal que f'(c) = 0 pode ser classificado como ponto de máximo ou de mínimo, de acordo com f''(c) < 0 ou f''(c) > 0. Observemos que, se o domínio for o intervalo [a, b], os pontos a e b (extremos do domínio) deverão ser analisados à parte. Na figura acima do lado esquerdo, x = a e x = b são pontos de mínimo e, na da direita, são pontos de máximo. Assim, o raciocínio por meio da derivada igual a zero é válida apenas para pontos interiores do domínio. Vejamos um exemplo.

Encontre os pontos de máximo e mínimo da função:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 4x + 3$$

Temos que: f'(x) = x2 – 5x + 4. Impondo que f'(x) = 0, teremos: x2 – 5x + 4 = 0, cuja solução é x = 1 ou x = 4.

Por outro lado, f''(x) = 2x – 5. Assim:

f''(1) = –3 < 0 ⇒ x = 1 é ponto de máximo
f''(4) = 3 > 0 ⇒ x = 4 é ponto de mínimo

Referências:

Elements Of The Differential And Integral Calculus
por J. M. Taylor

Pedro Alberto Morettin, Samuel Hazzan, Wilton Oliveira Bussab. Cálculo