Data Science Academy

www.datascienceacademy.com.br

Matemática Para Machine Learning

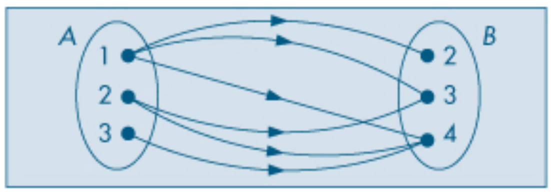
Função Inversa e Derivada da Função Inversa

Se R for uma relação de A em B, então:

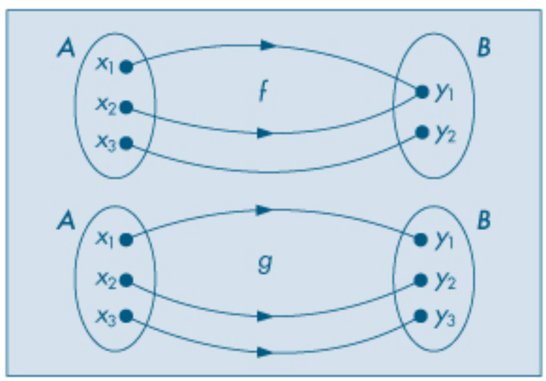
$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A/(a, b) \in A \times B\}$$

é chamada relação inversa de R. Segue-se que R^-1 (R elevado a -1) ⊂ B × A, enquanto R ⊂ A × B. Se R for dado pelo diagrama da figura abaixo, a relação inversa será:

$$R^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}$$



Vemos que nem R nem R^-1 são funções. Consideremos agora os diagramas da figura abaixo:



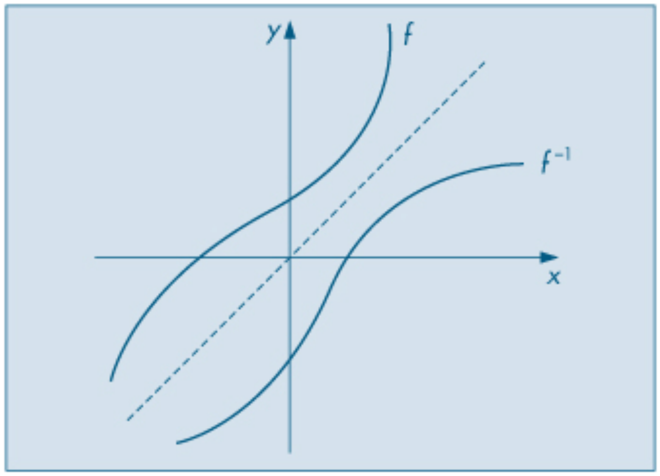
Agora, f e g são funções. Considere f^-1 e g^-1, isto é, as relações inversas. Vemos que f^-1 não é função, pois ao elemento y1 correspondem dois elementos x1 e x2.

Mas g^-1 é função. Então, se f é uma função de A em B, considere a relação inversa f^-1. Se f^-1 for também uma função, ela é dita função inversa de f.

Pelo visto, acima, a função f admitirá inversa f^-1 se, e somente se, f for bijetora de A em B. Observemos que, se f for uma função em que y = f(x) e f^-1 for a inversa de f, então x = f^-1(y) se, e somente se, y = f(x). Além disso:

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ para todo } x \in A \text{ e } f(f^{-1}(y)) = y \text{ para todo } y \in B$$

Graficamente, se (x, y) é um ponto do gráfico de f, então (y, x) é um ponto do gráfico de f^-1; logo, os gráficos de f e f^-1 são simétricos em relação à reta y = x conforme imagem abaixo:



Consideremos, agora, o problema da derivação da função inversa. O seguinte resultado, nos dá uma maneira de determinar a derivada de f^-1, conhecendo-se a derivada de f.

Seja f uma função definida no intervalo $[a, b]$, derivável e crescente (ou decrescente) nesse intervalo. Então, se $f'(x) > 0$ (ou $f'(x) < 0$) para todo $x \in]a, b[$, temos:

$$Df^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

em que por $Df^{-1}(y)$ indicamos a derivada de $f^{-1}(y)$.

Também escrevemos: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}$

Referências:

Elements Of The Differential And Integral Calculus
por J. M. Taylor