Data Science Academy

www.datascienceacademy.com.br

Matemática Para Machine Learning

E-book

Eigenvectors, Eigenvalues, PCA,

Covariance e Entropy

Parte 1

Este e-book (dividido em 4 partes) descreve eigenvectors e eigenvalues e sua relação com matrizes em linguagem simples e objetiva. Usaremos isso como base para explicar a covariância, a análise de componentes principais (PCA) e a entropia da informação, temas fundamentais em Machine Learning e Inteligência Artificial. Esta é a Parte 1.

Matrizes, em álgebra linear, são simplesmente uma coleção de valores escalares entre parênteses, como uma planilha. Todas as matrizes quadradas (por exemplo, 2x2 ou 3x3) têm autovetores e autovalores, e uma relação muito especial com eles, um pouco como os alemães têm com seus carros (daí o nome eigenvalue em alemão, que significa autovalor).

Transformações Lineares

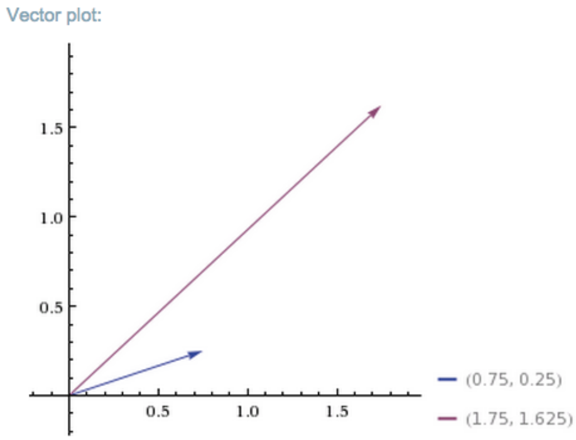
Matrizes são úteis porque você pode fazer coisas com elas, adicionar e multiplicar. Se você multiplicar um vetor v por uma matriz A, obterá outro vetor b e poderá dizer que a matriz executou uma transformação linear no vetor de entrada (um vetor aqui poderia representar os dados de entrada e a matriz a lista de pesos em uma rede neural. No treinamento de um modelo, tudo o que fazemos é encontrar a melhor lista de pesos para nossos dados que gera a saída esperada, ou seja, as previsões).

$$Av = b$$

Vamos ilustrar com um exemplo concreto:

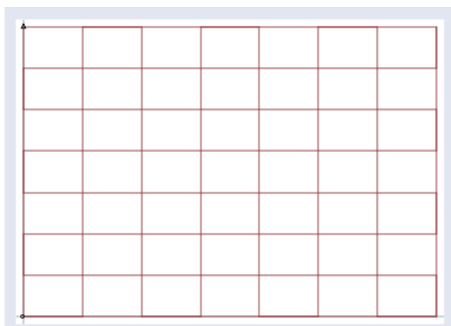
$$\begin{array}{ccccc} A & & v & & b \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & 2 \end{bmatrix} & * & \begin{matrix} 0.75 \\ 0.25 \end{matrix} & = & \begin{matrix} 1.75 \\ 1.625 \end{matrix} \end{array}$$

Então A transformou v em b. No gráfico abaixo, vemos como a matriz mapeou a linha curta e baixa v, para a longa e alta, b.

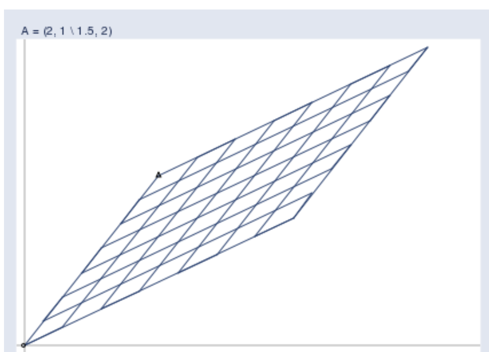


Você poderia alimentar um vetor positivo após o outro na matriz A, e cada um seria projetado em um novo espaço que se estica mais alto e mais à direita.

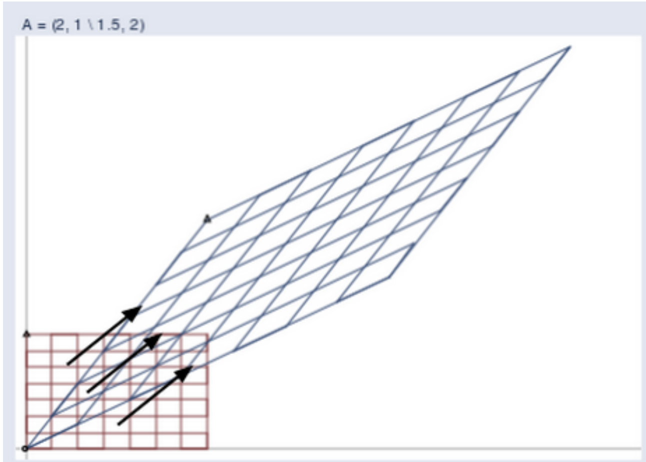
Imagine que todos os vetores de entrada v estejam em uma grade, assim:



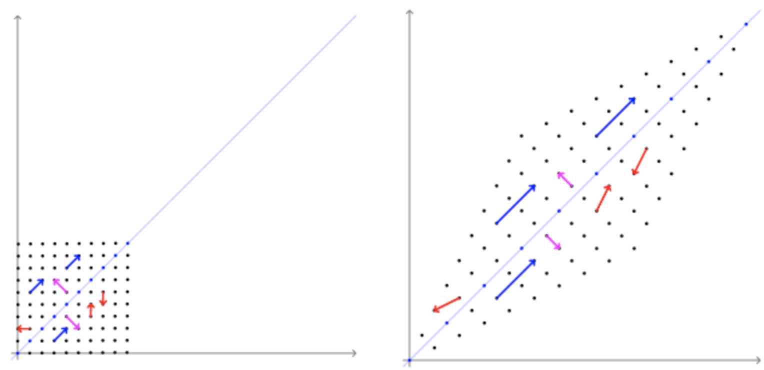
E a matriz projeta todos eles em um novo espaço como o abaixo, que contém os vetores de saída b:



Aqui você pode ver os dois espaços justapostos:

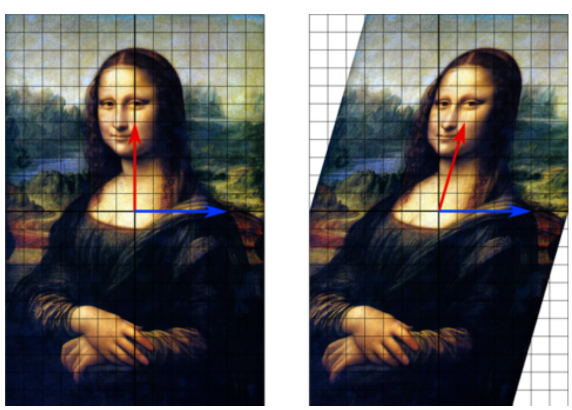


E aqui está uma animação que mostra o trabalho da matriz transformando um espaço em outro:



As linhas azuis são autovetores.

Você pode imaginar uma matriz como uma rajada de vento, uma força invisível que produz um resultado visível. E uma rajada de vento deve soprar em uma certa direção. O autovetor informa a direção em que a matriz está soprando.



Então, de todos os vetores afetados por uma matriz soprando através de um espaço, qual é o autovetor? É aquele que muda de comprimento, mas não de direção; isto é, o autovetor já está apontando na mesma direção para a qual a matriz está empurrando todos os vetores. Um autovetor é como um catavento.

A definição de um autovetor, portanto, é um vetor que responde a uma matriz como se essa matriz fosse um coeficiente escalar. Nesta equação abaixo, A é a matriz, x o vetor e lambda o coeficiente escalar, um número como 5 ou 37 ou pi.

$$Ax = \lambda x$$

Você também pode dizer que os autovetores são eixos ao longo dos quais a transformação linear atua, esticando ou comprimindo vetores de entrada. São as linhas de mudança que representam a ação da matriz maior, a própria "linha" na transformação linear.

Observe que estamos usando os eixos e linhas no plural. Assim como um alemão pode ter um Volkswagen para fazer compras, um Mercedes para viagens de negócios e um Porsche para passeios (cada um com uma finalidade distinta), matrizes quadradas podem ter tantos autovetores quanto dimensões; isto é, uma matriz 2x2 poderia ter dois autovetores, uma matriz 3x3 teria três, e uma matriz n x n poderia ter n autovetores, cada um representando sua linha de ação em uma dimensão.

Como os autovetores destilam os eixos da força principal na qual uma matriz move a entrada, eles são úteis na decomposição da matriz; isto é, a diagonalização de uma matriz ao longo dos seus autovetores. Como esses autovetores são representativos da matriz, eles executam a mesma tarefa que os autoencoders empregados pelas redes neurais profundas.

Consulte as referências abaixo. Continuamos na Parte 2.

Referências:

https://math.stackexchange.com/questions/24456/matrix-multiplication-interpreting-and-understanding-the-process/24469#24469

https://pdfs.semanticscholar.org/9dfa/3d30681788aac5077ede7b0ba2f7c4ac501e.pdf

https://news.ycombinator.com/item?id=10080415

https://skymind.ai/wiki/eigenvector

https://www.cs.cmu.edu/~mgormley/courses/10601-s17/slides/lecture18-pca.pdf

https://arxiv.org/pdf/1407.2904.pdf

http://www.uta.fi/sis/mtt/mtts1-dimensionality_reduction/drv_lecture3_jan28update.pdf

http://mathworld.wolfram.com/MatrixDiagonalization.html