2. (a) Use un sistema algebraico computacional para evaluar las siguientes integrales.

(i) $\int \operatorname{sen} x \cos 2x \, dx$ (ii) $\int \operatorname{sen} 3x \cos 7x \, dx$ (iii) $\int \operatorname{sen} 8x \cos 3x \, dx$

(b) En función del patrón de sus respuestas del inciso (a), suponga el valor de la integral

$$\int \operatorname{sen} ax \cos bx \, dx$$

(c) Compruebe su conjetura con un CAS. Después demuéstrela por medio de las técnicas de la sección 7.2. ¿Para qué valores de a y b es válida?

3. (a) Use un sistema algebraico computacional para evaluar las siguientes integrales.

(i) $\int \ln x \, dx$ (ii) $\int x \ln x \, dx$ (iii) $\int x^2 \ln x \, dx$

(iv) $\int x^3 \ln x \, dx$ (v) $\int x^7 \ln x \, dx$

(b) De acuerdo al patrón de sus respuestas del inciso (a), suponga el valor de

$$\int x^n \ln x \, dx$$

(c) Use la integración por partes para demostrar la conjetura que hizo en el inciso (b). ¿Para qué valores de n es válida?

4. (a) Use un sistema algebraico computacional para evaluar las siguientes integrales.

(i) $\int xe^x \, dx$ (ii) $\int x^2e^x \, dx$ (iii) $\int x^3e^x \, dx$

(iv) $\int x^4e^x \, dx$ (v) $\int x^5e^x \, dx$

(b) Con base en el patrón de sus respuestas del inciso (a), infiera el valor de $\int x^6e^x \, dx$. Después utilice su CAS para comprobar su conjetura.

(c) Con base en los patrones de los incisos (a) y (b), haga una conjetura en cuanto al valor de la integral

$$\int x^ne^x \, dx$$

cuando n es un entero positivo.

(d) Use la función matemática para demostrar la conjetura que hizo en el inciso (c).

7.7 INTEGRACIÓN APROXIMADA

Hay dos situaciones en las que es imposible encontrar el valor exacto de una integral definida.

La primera situación surge del hecho de que a fin de evaluar $\int_a^b f(x)\,dx$ por medio del teorema fundamental del cálculo, se necesita conocer una antiderivada de f. Sin embargo, algunas veces es difícil, o incluso imposible, hallar una antiderivada (véase la sección 7.5). Por ejemplo, es imposible evaluar de manera exacta las siguientes integrales:

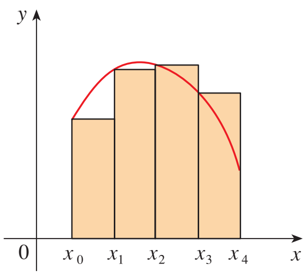
$$\int_0^1 e^{x^2} dx \qquad \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^3}\, dx$$

La segunda situación surge cuando la función se determina a partir de un experimento científico a través de lecturas de instrumento o datos reunidos. Podría no haber fórmula para la función (véase ejemplo 5).

En ambos casos se necesita hallar valores aproximados de integrales definidas. Ya se conoce un método. Recuerde que la integral definida se define como un límite de sumas de Riemann, así que cualquier suma de Riemann se podría usar como una aproximación a la integral: Si se divide $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $\Delta x = (b - a)/n$, por lo tanto se tiene

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

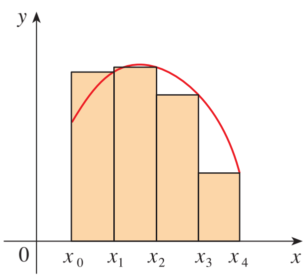
donde x_i^* es cualquier punto en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Si se elige que x_i^* sea el punto final izquierdo del subintervalo, entonces $x_i^* = x_{i-1}$ y se tiene



(a) Aproximación de punto final izquierdo

$$\boxed{1} \qquad \int_a^b f(x)\,dx \approx L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x$$

Si $f(x) \geqslant 0$, entonces la integral representa un área y (1) representa una aproximación de esta área mediante los rectángulos mostrados en la figura 1(a). Si se elige que x_i^* sea el punto final derecho, en seguida $x_i^* = x_i$ y se tiene

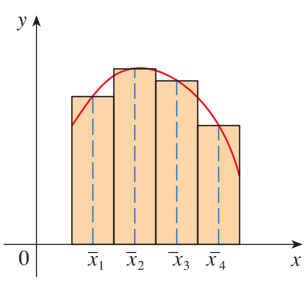


(b) Aproximación de punto final derecho

$$\boxed{2} \qquad \int_a^b f(x)\,dx \approx R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

[Véase la figura 1(b)]. Las aproximaciones L_n y R_n definidas por las ecuaciones 1 y 2 se llaman **aproximación de punto final izquierdo** y **aproximación de punto final derecho**, respectivamente.

En la sección 5.2 se consideró también el caso donde x_i^* se elige como el punto medio $\bar{x}_i$ del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. En la figura 1(c) se muestra la aproximación de punto medio M_n, que parece ser mejor que L_n o R_n.



(c) Aproximación de punto medio

FIGURA 1

REGLA DEL PUNTO MEDIO

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx M_n = \Delta x\,[f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$

donde $\qquad \Delta x = \dfrac{b - a}{n}$

y bien $\qquad \bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) =$ punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$

Otra aproximación, llamada regla del trapecio, resulta de promediar las aproximaciones de las ecuaciones 1 y 2:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &\approx \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right] = \frac{\Delta x}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} \big(f(x_{i-1}) + f(x_i)\big)\right] \\
&= \frac{\Delta x}{2}\left[\big(f(x_0) + f(x_1)\big) + \big(f(x_1) + f(x_2)\big) + \cdots + \big(f(x_{n-1}) + f(x_n)\big)\right] \\
&= \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]
\end{aligned}$$

REGLA DEL TRAPECIO

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

donde $\Delta x = (b - a)/n$ y $x_i = a + i\,\Delta x$.

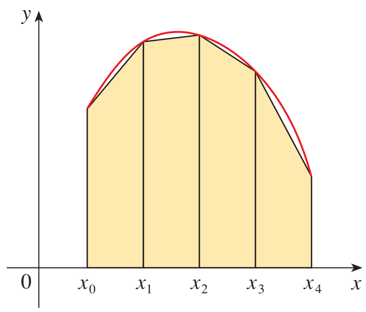


FIGURA 2
Aproximación trapezoidal

La razón para el nombre regla del trapecio se puede ver de la figura 2, que ilustra el caso $f(x) \geqslant 0$. El área del trapecio que yace arriba del i-ésimo subintervalo es

$$\Delta x\left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right) = \frac{\Delta x}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

y si se suman las áreas de estos trapecios, se obtiene el lado derecho de la regla del trapecio.

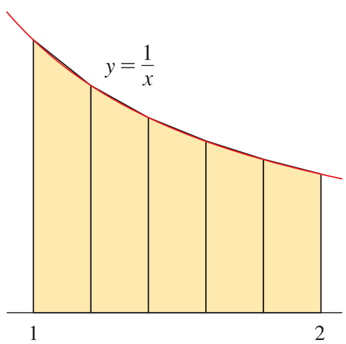


FIGURA 3

EJEMPLO 1 Use (a) la regla del trapecio y (b) la regla del punto medio con $n = 5$ para aproximar la integral $\int_1^2 (1/x)\,dx$.

SOLUCIÓN

(a) Con $n = 5$, $a = 1$, y $b = 2$, se tiene $\Delta x = (2 - 1)/5 = 0.2$, y así, la regla del trapecio da

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx T_5 &= \frac{0.2}{2}[f(1) + 2f(1.2) + 2f(1.4) + 2f(1.6) + 2f(1.8) + f(2)]\\ &= 0.1\left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1.2} + \frac{2}{1.4} + \frac{2}{1.6} + \frac{2}{1.8} + \frac{1}{2}\right)\\ &\approx 0.695635\end{aligned}$$

Esta aproximación se ilustra en la figura 3.

(b) Los puntos medios de los cinco subintervalos son 1.1, 1.3, 1.5, 1.7, y 1.9, así que la regla del punto medio da

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx &\approx \Delta x\,[f(1.1) + f(1.3) + f(1.5) + f(1.7) + f(1.9)]\\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{1.9}\right)\\ &\approx 0.691908\end{aligned}$$

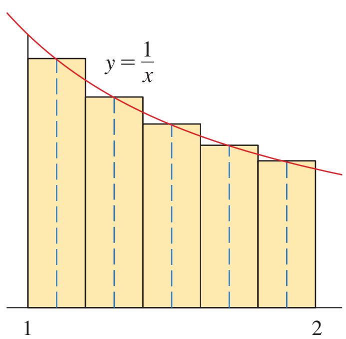


FIGURA 4

Esta aproximación se ilustra en la figura 4. □

En el ejemplo 1 se eligió de manera deliberada una integral cuyo valor se puede calcular explícitamente, de modo que se puede ver cuán precisas son las reglas del trapecio y del punto medio. Por el teorema fundamental del cálculo,

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big]_1^2 = \ln 2 = 0.693147\ldots$$

$\int_a^b f(x)\,dx = \text{aproximación} + \text{error}$

El **error** al usar una aproximación se define como la cantidad que debe ser sumada a la aproximación para hacerla exacta. De los valores del ejemplo 1, se ve que los errores en las aproximaciones de la regla del trapecio y del punto medio para $n = 5$ son

$$E_T \approx -0.002488 \qquad \text{y} \qquad E_M \approx 0.001239$$

En general, se tiene

$$E_T = \int_a^b f(x)\,dx - T_n \qquad \text{y} \qquad E_M = \int_a^b f(x)\,dx - M_n$$

TEC Module 5.2/7.7 permite comparar métodos de aproximación.

En las tablas siguientes se muestran los resultados de cálculos similares a los del ejemplo 1, pero para $n = 5$, 10, y 20 y para las aproximaciones de punto final izquierdo y derecho, así como las reglas del trapecio y del punto medio.

Aproximaciones a $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

n	L_n	R_n	T_n	M_n
5	0.745635	0.645635	0.695635	0.691908
10	0.718771	0.668771	0.693771	0.692835
20	0.705803	0.680803	0.693303	0.693069

Errores correspondientes

n	E_L	E_R	E_T	E_M
5	−0.052488	0.047512	−0.002488	0.001239
10	−0.025624	0.024376	−0.000624	0.000312
20	−0.012656	0.012344	−0.000156	0.000078

Se pueden hacer varias observaciones a partir de estas tablas:

1. En todos los métodos se obtienen aproximaciones más exactas cuando se incrementa el valor de n. (Pero valores muy grandes de n producen tantas operaciones aritméticas, que se tiene que estar consciente del error de redondeo acumulado.)
2. Los errores en las aproximaciones de punto final izquierdo y derecho son de signo opuesto y al parecer disminuyen por un factor de aproximadamente 2 cuando se duplica el valor de n.
3. Las reglas del trapecio y del punto medio son mucho más exactas que las aproximaciones de punto final.
4. Los errores en las reglas del trapecio y del punto medio son de signo opuesto y al parecer disminuyen por un factor de alrededor de 4 cuando se duplica el valor de n.
5. El tamaño del error en la regla del punto medio es casi la mitad del tamaño del error en la regla del trapecio.

Resulta que estas observaciones son verdaderas en la mayor parte de los casos.

En la figura 5 se muestra por qué normalmente se puede esperar que la regla del punto medio sea más exacta que la regla del trapecio. El área de un rectángulo representativo en la regla del punto medio, es la misma que el trapecio $ABCD$ cuyo lado superior es tangente a la gráfica de P. El área de este trapecio es más próxima al área bajo la gráfica de lo que es el área del trapecio $AQRD$ empleado en la regla del trapecio. [El error del punto medio (sombreado rojo) es más pequeño que el error trapezoidal (sombreado azul).]

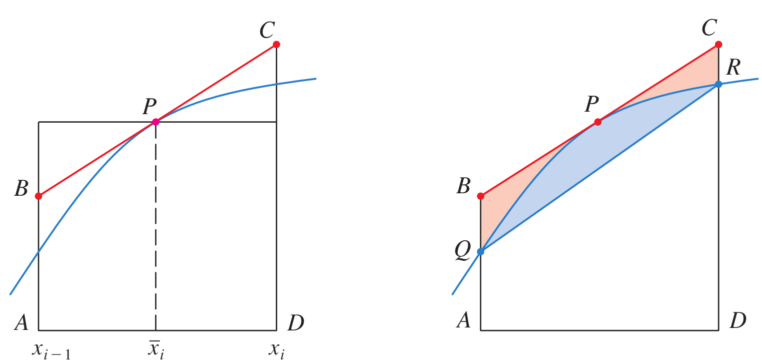


FIGURA 5

Estas observaciones se corroboran en las siguientes estimaciones de error, que se demuestran en libros de análisis numérico. Note que la observación 4 corresponde a n^2 en cada denominador porque $(2n)^2 = 4n^2$. El hecho de que las estimaciones dependan del tamaño de la segunda derivada no es sorprendente si se considera la figura 5, porque $f''(x)$ mide cuánto se curva la gráfica. [Recuerde que $f''(x)$ mide cuán rápido cambia la pendiente de $y = f(x)$.]

3 COTAS DE ERROR Considere que $|f''(x)| \leqslant K$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Si E_T y E_M son los errores en las reglas del trapecio y del punto medio, entonces

$$|E_T| \leqslant \frac{K(b-a)^3}{12n^2} \qquad \text{y} \qquad |E_M| \leqslant \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$$

Se aplicará esta estimación del error a la aproximación de la regla del trapecio en el ejemplo 1. Si $f(x) = 1/x$, después $f'(x) = -1/x^2$ y $f''(x) = 2/x^3$. Puesto que $1 \leqslant x \leqslant 2$, se tiene $1/x \leqslant 1$, así que

$$|f''(x)| = \left|\frac{2}{x^3}\right| \leqslant \frac{2}{1^3} = 2$$

Por lo tanto, tomando $K = 2$, $a = 1$, $b = 2$, y $n = 5$ en la estimación del error (3), se ve que

■ K puede ser cualquier número más grande que todos los valores de $|f''(x)|$, pero valores más pequeños de K dan mejores cotas de error.

$$|E_T| \leqslant \frac{2(2-1)^3}{12(5)^2} = \frac{1}{150} \approx 0.006667$$

Al comparar esta estimación del error de 0.006667 con el error real de casi 0.002488, se ve que puede suceder que el error real sea sustancialmente menor que la cota superior para el error dado por (3).

V EJEMPLO 2 ¿Qué tan grande se debe tomar n a fin de garantizar que las aproximaciones de las reglas del trapecio y del punto medio para $\int_1^2 (1/x)\,dx$ sean exactas hasta dentro de 0.0001?

SOLUCIÓN Se vio en el cálculo anterior que $|f''(x)| \leqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$, de modo que se puede tomar $K = 2$, $a = 1$, y $b = 2$ en (3). La exactitud hasta dentro de 0.0001 significa que el tamaño del error debe ser menor que 0.0001. Por lo tanto, se elige n de modo que

$$\frac{2(1)^3}{12n^2} < 0.0001$$

Resolviendo la desigualdad para n, se obtiene

$$n^2 > \frac{2}{12(0.0001)}$$

o bien

$$n > \frac{1}{\sqrt{0.0006}} \approx 40.8$$

■ Es bastante posible que un valor menor para n sea suficiente, pero 41 es el valor más pequeño para el cual la fórmula de la cota del error puede *garantizar* exactitud hasta dentro de 0.0001.

Así, $n = 41$ asegurará la exactitud deseada.

Para la misma exactitud con la regla del punto medio se elige n de modo que

$$\frac{2(1)^3}{24n^2} < 0.0001$$

que da
$$n > \frac{1}{\sqrt{0.0012}} \approx 29$$ □

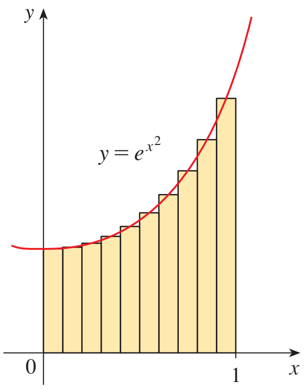


FIGURA 6

V EJEMPLO 3

(a) Use la regla del punto medio con $n = 10$ para aproximar la integral $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$.
(b) Dé una cota superior para el error relacionado con esta aproximación.

SOLUCIÓN

(a) Puesto que $a = 0$, $b = 1$, y $n = 10$, la regla del punto medio da

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2}\,dx &\approx \Delta x\,[f(0.05) + f(0.15) + \cdots + f(0.85) + f(0.95)]\\ &= 0.1[e^{0.0025} + e^{0.0225} + e^{0.0625} + e^{0.1225} + e^{0.2025} + e^{0.3025}\\ &\qquad + e^{0.4225} + e^{0.5625} + e^{0.7225} + e^{0.9025}]\\ &\approx 1.460393\end{aligned}$$

En la figura 6 se muestra esta aproximación.

(b) Puesto que $f(x) = e^{x^2}$, se tiene $f'(x) = 2xe^{x^2}$ y $f''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2}$. También, puesto que $0 \leqslant x \leqslant 1$, se tiene $x^2 \leqslant 1$ y, por lo tanto,

$$0 \leqslant f''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2} \leqslant 6e$$

■ Las estimaciones del error son cotas para el error. Producen escenarios teóricos del peor de los casos. El error real en este caso resulta ser aproximadamente 0.0023.

Si se toma $K = 6e$, $a = 0$, $b = 1$, y $n = 10$ en la estimación del error (3), se ve que una cota superior para el error es

$$\frac{6e(1)^3}{24(10)^2} = \frac{e}{400} \approx 0.007$$ □

REGLA DE SIMPSON

Otra regla para integración aproximada resulta de usar parábolas en lugar de segmentos de recta para aproximar una curva. Como antes, se divide $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $h = \Delta x = (b - a)/n$, pero esta vez se supone que n es un número *par*. Por lo tanto en cada par consecutivo de intervalos la curva $y = f(x) \geqslant 0$ se aproxima mediante una parábola como se muestra en la figura 7. Si $y_i = f(x_i)$, entonces $P_i(x_i, y_i)$ es el punto sobre la curva que yace arriba de x_i. Una parábola representativa pasa por tres puntos consecutivos P_i, P_{i+1}, y P_{i+2}.

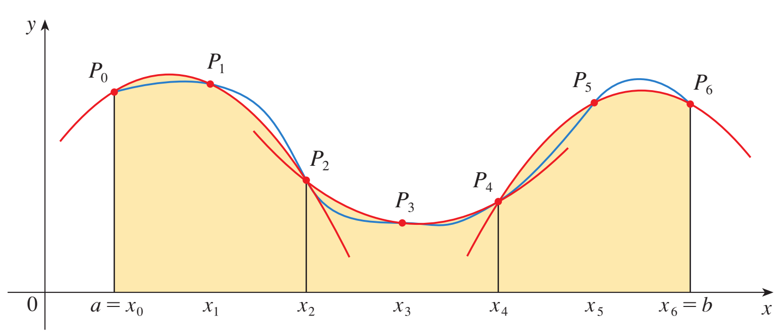


FIGURA 7

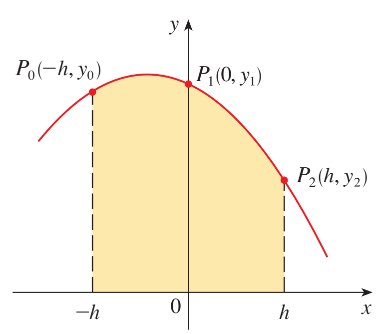


FIGURA 8

Para simplificar los cálculos, se considera primero el caso donde $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ y $x_2 = h$. (Véase la figura 8.) Se sabe que la ecuación de la parábola a través de P_0, P_1 y P_2 es de la forma $y = Ax^2 + Bx + C$ y, por lo tanto, el área bajo la parábola de $x = -h$ a $x = h$ es

■ Aquí se ha empleado el teorema 5.5.7. Observe que $Ax^2 + C$ es par y Bx es impar.

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx &= 2\int_0^h (Ax^2 + C)\,dx \\ &= 2\left[A\frac{x^3}{3} + Cx\right]_0^h \\ &= 2\left(A\frac{h^3}{3} + Ch\right) = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C)\end{aligned}$$

Pero, puesto que la parábola pasa por $P_0(-h, y_0)$, $P_1(0, y_1)$, y $P_2(h, y_2)$, se tiene

$$\begin{aligned}y_0 &= A(-h)^2 + B(-h) + C = Ah^2 - Bh + C \\ y_1 &= C \\ y_2 &= Ah^2 + Bh + C\end{aligned}$$

y, por lo tanto,
$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$$

Así, se puede reescribir el área de la parábola como

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Ahora, si esta parábola se desplaza horizontalmente, no se cambia el área bajo ésta. Esto significa que el área bajo la parábola que pasa por P_0, P_1 y P_2 de $x = x_0$ a $x = x_2$ en la figura 7 es aún

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

De manera similar, el área bajo la parábola por P_2, P_3 y P_4 de $x = x_2$ a $x = x_4$ es

$$\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

Si se calculan de este modo las áreas debajo de todas las parábolas y se suman los resultados, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) \\ &\quad + \cdots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \\ &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)\end{aligned}$$

Aunque se ha derivado esta aproximación para el caso en el que $f(x) \geqslant 0$, es una aproximación razonable para cualquier función continua f y se llama regla de Simpson en honor al matemático inglés Thomas Simpson (1710-1761). Note el patrón de coeficientes: 1, 4, 2, 4, 2, 4, 2, . . . , 4, 2, 4, 1.

SIMPSON

Thomas Simpson fue un tejedor autodidacta en matemáticas que llegó a ser uno de los mejores matemáticos ingleses del siglo XVIII. Lo que se llama regla de Simpson ya la conocían Cavalieri y Gregory en el siglo XVII, pero Simpson la popularizó en su libro de cálculo de mayor venta titulado *A New Treatise of Fluxions*.

REGLA DE SIMPSON

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n = \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

donde n es par y $\Delta x = (b - a)/n$.

EJEMPLO 4 Use la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar $\int_1^2 (1/x)\,dx$.

SOLUCIÓN Si se escribe $f(x) = 1/x$, $n = 10$, y $\Delta x = 0.1$ en la regla de Simpson, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx &\approx S_{10}\\ &= \frac{\Delta x}{3}[f(1) + 4f(1.1) + 2f(1.2) + 4f(1.3) + \cdots + 2f(1.8) + 4f(1.9) + f(2)]\\ &= \frac{0.1}{3}\left(\frac{1}{1} + \frac{4}{1.1} + \frac{2}{1.2} + \frac{4}{1.3} + \frac{2}{1.4} + \frac{4}{1.5} + \frac{2}{1.6} + \frac{4}{1.7} + \frac{2}{1.8} + \frac{4}{1.9} + \frac{1}{2}\right)\\ &\approx 0.693150\end{aligned}$$

Observe que, en el ejemplo 4, la regla de Simpson da una aproximación *mucho* mejor ($S_{10} \approx 0.693150$) al valor verdadero de la integral ($\ln 2 \approx 0.693147\ldots$) que la regla del trapecio ($T_{10} \approx 0.693771$) o la regla del punto medio ($M_{10} \approx 0.692835$). Resulta (véase ejercicio 48) que las aproximaciones en la regla de Simpson son promedios ponderados de los de las reglas del trapecio y del punto medio:

$$S_{2n} = \tfrac{1}{3}T_n + \tfrac{2}{3}M_n$$

(Recuerde que E_T y E_M tienen por lo general signos opuestos y $|E_M|$ es casi la mitad del tamaño de $|E_T|$.)

En muchas aplicaciones de cálculo se necesita evaluar una integral aun cuando no se conoce ninguna fórmula explícita para y como función de x. Una función se puede dar en forma gráfica o como una tabla de valores de datos reunidos. Si hay evidencia de que los valores no cambian con rapidez, entonces todavía se puede usar la regla del trapecio o la regla de Simpson para hallar un valor aproximado de $\int_a^b y\,dx$, la integral de y con respecto a x.

V EJEMPLO 5 En la figura 9 se muestra el tránsito de datos en el vínculo de Estados Unidos a SWITCH, la red suiza académica y de investigación, el 10 de febrero de 1998. $D(t)$ es el caudal de datos, medido en megabits por segundo (Mb/s). Use la Regla de Simpson para estimar la cantidad total de datos transmitidos en el vínculo hasta mediodía en ese día.

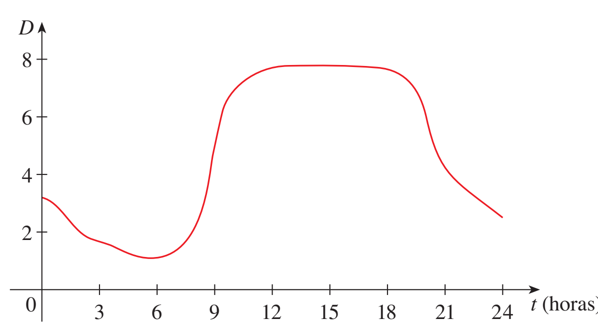


FIGURA 9

SOLUCIÓN Ya que se desea que las unidades sean congruentes y $D(t)$ se mide en megabits por segundo, se convierten las unidades para t de horas a segundos. Si $A(t)$ es la cantidad de datos (en megabits) transmitida en el instante t, donde t se mide en segundos, entonces $A'(t) = D(t)$. Así, por el teorema del cambio neto (véase la sección 5.4), la cantidad total de datos transmitidos a mediodía $t = 12 \times 60^2 = 43\,200$) es

$$A(43\,200) = \int_0^{43\,200} D(t)\,dt$$

Se estiman los valores de $D(t)$ a intervalos de cada hora a partir de la gráfica y se compilan en la tabla.

t (horas)	t (segundos)	$D(t)$	t (horas)	t (segundos)	$D(t)$
0	0	3.2	7	25 200	1.3
1	3 600	2.7	8	28 800	2.8
2	7 200	1.9	9	32 400	5.7
3	10 800	1.7	10	36 000	7.1
4	14 400	1.3	11	39 600	7.7
5	18 000	1.0	12	43 200	7.9
6	21 600	1.1			

Entonces se usa la regla de Simpson con $n = 12$ y $\Delta t = 3\,600$ para estimar la integral:

$$\begin{aligned}\int_0^{43\,200} A(t)\,dt &\approx \frac{\Delta t}{3}[D(0) + 4D(3600) + 2D(7200) + \cdots + 4D(39\,600) + D(43\,200)]\\ &\approx \frac{3600}{3}[3.2 + 4(2.7) + 2(1.9) + 4(1.7) + 2(1.3) + 4(1.0)\\ &\quad + 2(1.1) + 4(1.3) + 2(2.8) + 4(5.7) + 2(7.1) + 4(7.7) + 7.9]\\ &= 143\,880\end{aligned}$$

Así, la cantidad total de datos transmitida hasta mediodía es de alrededor de 144 000 megabits, o 144 gigabits. □

n	M_n	S_n
4	0.69121989	0.69315453
8	0.69266055	0.69314765
16	0.69302521	0.69314721

n	E_M	E_S
4	0.00192729	−0.00000735
8	0.00048663	−0.00000047
16	0.00012197	−0.00000003

La tabla en el margen como se compara la regla de Simpson con la regla del punto medio para la integral $\int_1^2 (1/x)\,dx$ cuyo valor verdadero es casi 0.69314718. La segunda tabla muestra que el error E_s en la regla de Simpson disminuye por un factor de casi 16 donde n se duplica. (En los ejercicios 27 y 28 se pide demostrar esto por dos integrales adicionales). Eso es compatible con la presencia de n^4 en el denominador de la siguiente estimación de error para la regla de Simpson. Es similar a las estimaciones dadas en (3) para las reglas del trapecio y del punto medio, pero emplea la cuarta derivada de f.

4 COTA DE ERROR PARA LA REGLA DE SIMPSON Suponga que $|f^{(4)}(x)| \leqslant K$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Si E_S es el error relacionado con la regla de Simpson, entonces

$$|E_S| \leqslant \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

EJEMPLO 6 ¿Qué tan grande se toma n a fin de garantizar que la aproximación de la regla de Simpson para $\int_1^2 (1/x)\,dx$ es exacta hasta dentro de 0.0001?

SOLUCIÓN Si $f(x) = 1/x$, entonces $f^{(4)}(x) = 24/x^5$. Puesto que $x \geqslant 1$, se tiene $1/x \leqslant 1$ y, por lo tanto,

$$|f^{(4)}(x)| = \left|\frac{24}{x^5}\right| \leqslant 24$$

■ Muchas calculadoras y sistemas algebraicos computacionales tienen un algoritmo integrado que calcula una aproximación de una integral definida. Algunas de estas máquinas usan la regla de Simpson; otras usan técnicas más complejas como la integración numérica *adaptable*. Esto significa que si una función fluctúa mucho más en cierta parte del intervalo que en cualquier otra parte, después esa parte se divide en más subintervalos. Esta estrategia reduce el número de cálculos requeridos para lograr la exactitud prescrita.

Así, se puede tomar $K = 24$ en (4). Entonces, para un error menor que 0.0001 se debe elegir n de modo que

$$\frac{24(1)^5}{180n^4} < 0.0001$$

Esto da
$$n^4 > \frac{24}{180(0.0001)}$$

o bien,
$$n > \frac{1}{\sqrt[4]{0.00075}} \approx 6.04$$

Por lo tanto, $n = 8$ (n debe ser par) da la exactitud deseada. (Compare esto con el ejemplo 2, donde se obtuvo $n = 41$ para la regla del trapecio y $n = 29$ para la regla del punto medio.) □

EJEMPLO 7
(a) Use la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar la integral $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$.
(b) Estime el error relacionado con esta aproximación.

SOLUCIÓN
(a) Si $n = 10$, entonces $\Delta x = 0.1$ y la regla de Simpson da

■ En la figura 10 se muestra el cálculo del ejemplo 7. Observe que los arcos parabólicos están tan próximos a la gráfica de $y = e^{x^2}$ que son prácticamente indistinguibles de ésta.

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2}\,dx &\approx \frac{\Delta x}{3}[f(0) + 4f(0.1) + 2f(0.2) + \cdots + 2f(0.8) + 4f(0.9) + f(1)]\\ &= \frac{0.1}{3}[e^0 + 4e^{0.01} + 2e^{0.04} + 4e^{0.09} + 2e^{0.16} + 4e^{0.25} + 2e^{0.36}\\ &\qquad + 4e^{0.49} + 2e^{0.64} + 4e^{0.81} + e^1]\\ &\approx 1.462681\end{aligned}$$

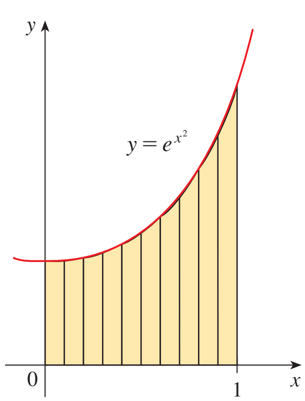


FIGURA 10

(b) La cuarta derivada de $f(x) = e^{x^2}$ es

$$f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)e^{x^2}$$

y también, puesto que $0 \leqslant x \leqslant 1$, se tiene

$$0 \leqslant f^{(4)}(x) \leqslant (12 + 48 + 16)e^1 = 76e$$

Por lo tanto, al escribir $K = 76e$, $a = 0$, $b = 1$ y $n = 10$ en (4), se ve que el error es a lo sumo

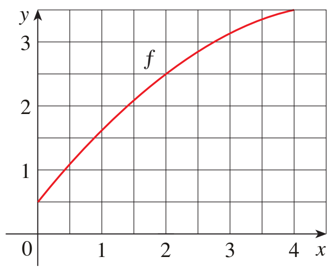
$$\frac{76e(1)^5}{180(10)^4} \approx 0.000115$$

(Compare esto con el ejemplo 3.) Así, correcta hasta tres decimales, se tiene

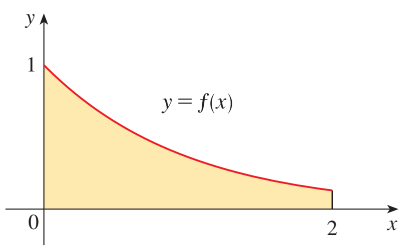
$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx 1.463$$ □

7.7 EJERCICIOS

1. Sea $I = \int_0^4 f(x)\, dx$, donde f es la función cuya gráfica se ilustra a continuación.
(a) Emplee la gráfica para determinar L_2, R_2 y M_2.
(b) ¿Éstas son sobreestimaciones o subestimaciones de I?
(c) Use la gráfica para encontrar T_2. ¿Cómo se compara con I?
(d) Para cualquier valor de n, liste los números L_n, R_n, M_n, T_n e I en orden creciente



2. Se usaron las aproximaciones, izquierda, derecha, de la regla del trapecio y la regla del punto medio para estimar $\int_0^2 f(x)\, dx$, donde f es la función cuya gráfica se muestra. Las estimaciones fueron, 0.7811, 0.8675, 0.8632 y 0.9540, y el mismo número de subintervalos se emplearon en cada caso.
(a) ¿Cuál regla produce cuál estimación?
(b) ¿Entre cuáles dos aproximaciones está el valor verdadero de $\int_0^2 f(x)\, dx$?



3. Estime $\int_0^1 \cos(x^2)\, dx$ con (a) la Regla del Trapecio y (b) la Regla del Punto Medio, cada una con $n = 4$. A partir de una gráfica del integrando, decida si sus respuestas son sobreestimaciones o subestimaciones. ¿Qué puede concluir acerca del valor verdadero de la integral?

4. Trace la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}(x^2/2)$ en el rectángulo de visión $[0, 1]$ por $[0, 0.5]$ y sea $I = \int_0^1 f(x)\, dx$.
(a) Utilice la gráfica para decidir si L_2, R_2, M_2 y T_2 son sobreestimaciones o subestimaciones de I.
(b) Para cualquier valor de n, liste los números L_n, R_n, M_n, T_n e I en orden creciente.
(c) Calcule L_5, R_5, M_5 y T_5. De la gráfica, ¿cuál considera que da la mejor estimación de I?

5–6 Use (a) la regla del punto medio y (b) la regla de Simpson para aproximar la integral dada con el valor especificado de n. (Redondee sus respuestas a seis decimales.) Compare sus reultados con el valor real para determinar el error en cada aproximación.

5. $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x\, dx, \quad n = 8$

6. $\displaystyle\int_0^1 e^{-\sqrt{x}}\, dx, \quad n = 6$

7–18 Use (a) la regla del trapecio, (b) la regla del punto medio y (c) la Regla de Simpson para aproximar la integral con el valor especificado de n. (Redondee sus respuestas a seis decimales.)

7. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt[4]{1 + x^2}\, dx, \quad n = 8$

8. $\displaystyle\int_0^{1/2} \operatorname{sen}(x^2)\, dx, \quad n = 4$

9. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{1 + x}\, dx, \quad n = 10$

10. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dt}{1 + t^2 + t^4}, \quad n = 6$

11. $\displaystyle\int_0^{1/2} \operatorname{sen}(e^{t/2})\, dt, \quad n = 8$

12. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{1 + \sqrt{x}}\, dx, \quad n = 8$

13. $\displaystyle\int_0^4 e^{\sqrt{t}} \operatorname{sen} t\, dt, \quad n = 8$

14. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{z}\, e^{-z}\, dz, \quad n = 10$

15. $\displaystyle\int_1^5 \frac{\cos x}{x}\, dx, \quad n = 8$

16. $\displaystyle\int_4^6 \ln(x^3 + 2)\, dx, \quad n = 10$

17. $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{1 + y^5}\, dy, \quad n = 6$

18. $\displaystyle\int_0^4 \cos \sqrt{x}\, dx, \quad n = 10$

19. (a) Halle las aproximaciones T_8 y M_8 para la integral $\int_0^1 \cos(x^2)\, dx$.
(b) Estime los errores relacionados con las aproximaciones del inciso (a).
(c) ¿Qué tan grande se tiene que elegir n de modo que las aproximaciones T_n y M_n a la integral del inciso (a) sean exactas hasta dentro de 0.0001?

20. (a) Halle las aproximaciones T_{10} y M_{10} para $\int_1^2 e^{1/x}\, dx$.
(b) Estimar los errores en las aproximaciones del inciso (a).
(c) ¿Qué tan grande se tiene que elegir n para que las aproximaciones T_n y M_n a la integral del inciso (a) sean exactas hasta dentro de 0.0001?

21. (a) Encuentre las aproximaciones T_{10} M_{10} y S_{10} para $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$ y los errores correspondientes E_T E_M y E_S.
(b) Compare los errores reales del inciso (a) con las estimaciones del error dadas por (3) y (4).
(c) ¿Qué tan grande se tiene que elegir n para que las aproximaciones T_n, M_n, y S_n a la integral del inciso (a) sean exactas hasta dentro de 0.00001?

22. ¿Qué tan grande debe ser n para garantizar que la aproximación de la regla de Simpson a $\int_0^1 e^{x^2}\, dx$ sea exacta hasta dentro de 0.00001?

SAC **23.** El problema con las estimaciones del error es que suele ser muy difícil calcular cuatro derivadas y obtener una buena cota superior K para $|f^{(4)}(x)|$ a mano. Pero los sistemas algebraicos computacionales no tienen problema para calcular $f^{(4)}$ y graficarla, así que se puede hallar con facilidad un valor de K a partir de una gráfica de máquina. Este ejercicio trata con aproximaciones a la integral $I = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$, donde $f(x) = e^{\cos x}$.

(a) Use una gráfica a fin de obtener una buena cota superior para $|f''(x)|$.
(b) Emplee M_{10} para aproximar I.
(c) Utilice el inciso (a) para estimar el error en el inciso (b).
(d) Use la capacidad de integración numérica integrada de su CAS para aproximar I.
(e) ¿Cómo se compara el error real con la estimación de error del inciso (c)?
(f) Use una gráfica para obtener una buena cota superior para $|f^{(4)}(x)|$.
(g) Emplee S_{10} para aproximar I.
(h) Utilice el inciso (f) para estimar el error del inciso (g).
(i) ¿Cómo se compara el error real con la estimación del error del inciso (h)?
(j) ¿Qué tan grande debe ser n para garantizar que el tamaño del error al usar S_n sea menor que 0.0001?

CAS **24.** Repita el ejercicio 23 para la integral $\int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^3}\,dx$.

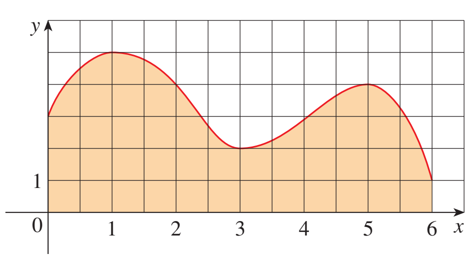
25–26 Encuentre las aproximaciones L_n, R_n, T_n y M_n para $n = 5$, 10, y 20. Después calcule los errores correspondientes E_L, E_R, E_T, y E_M. (Redondee sus respuestas hasta seis decimales. Es posible que desee usar el comando de suma en un sistema algebraico computacional.) ¿Qué observaciones puede hacer? En particular, ¿qué sucede con los errores cuando se duplica n?

25. $\int_0^1 xe^x\,dx$ **26.** $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$

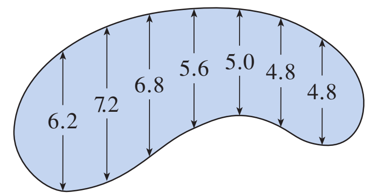
27–28 Determine las aproximaciones T_n, M_n, y S_n para $n = 6$ y 12. A continuación calcule los errores correspondientes E_T, E_M, y E_S. (Redondee sus respuestas a seis decimales. Quizá desee usar el comando de suma de un sistema algebraico computacional.) ¿Qué observaciones puede hacer? En particular, ¿qué sucede con los errores cuando se duplica n?

27. $\int_0^2 x^4\,dx$ **28.** $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

29. Estime el área bajo la gráfica en la figura usando (a) la regla del trapecio, (b) la regla del punto medio y (c) la regla de Simpson, cada una con $n = 4$.



30. Las amplitudes (en metros) de una alberca en forma de riñón se midieron a intervalos de 2 metros como se indica en la figura. Use la regla de Simpson para estimar el área de la alberca.



31. (a) Emplee la regla del punto medio y los datos de la tabla para estimar el valor de la integral $\int_0^{3.2} f(x)\,dx$.

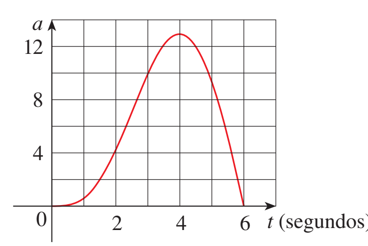
x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.0	6.8	2.0	7.6
0.4	6.5	2.4	8.4
0.8	6.3	2.8	8.8
1.2	6.4	3.2	9.0
1.6	6.9		

(b) Si se sabe que $-4 \leqslant f''(x) \leqslant 1$ para toda x, estime el error relacionado con la aproximación del inciso (a).

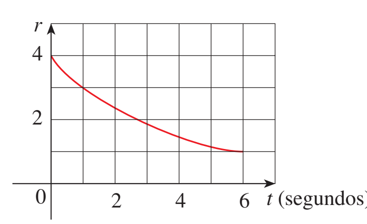
32. Se empleó una pistola de radar para registrar la rapidez de un corredor durante los primeros 5 segundos de una competencia (véase la tabla). Emplee la regla de Simpson para estimar la distancia del corredor cubierta durante esos 5 segundos.

t (s)	v (m/s)	t (s)	v (m/s)
0	0	3.0	10.51
0.5	4.67	3.5	10.67
1.0	7.34	4.0	10.76
1.5	8.86	4.5	10.81
2.0	9.73	5.0	10.81
2.5	10.22		

33. Se muestra la gráfica de la aceleración $a(t)$ de un automóvil medida en pies/s^2. Emplee la regla de Simpson para estimar el incremento de velocidad del automóvil durante el intervalo de tiempo de 6 segundos.



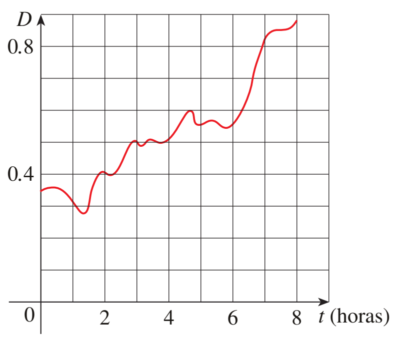
34. De un depósito se fuga agua a una rapidez de $r(t)$ litros por hora, donde la gráfica de r es como se muestra. Use la regla de Simpson para estimar la cantidad total de agua que se fuga durante las primeras seis horas.



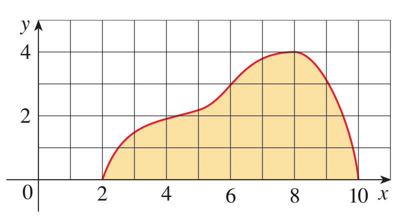
35. La tabla (suministrada por San Diego Gas and Electric) da el consumo de energia en megawatts en el condado de San Diego de la medianoche a las 6:00 A.M. el 8 de diciembre de 1999. Use la regla de Simpson para estimar la energía empleada durante ese periodo. (Use el hecho de que la potencia es la derivada de la energía.)

t	P	t	P
0:00	1814	3:30	1611
0:30	1735	4:00	1621
1:00	1686	4:30	1666
1:30	1646	5:00	1745
2:00	1637	5:30	1886
2:30	1609	6:00	2052
3:00	1604		

36. En la gráfica se muestra el tránsito de datos en una línea de datos T1 del proveedor de servicio de Internet de la medianoche a las 8:00 A.M. D es el caudal de datos, medido en megabits por segundo. Use la regla de Simpson para estimar la cantidad total de datos transmitidos durante ese periodo.



37. Si la región mostrada en la figura se hace girar respecto al eje y para formar un sólido, use la regla de Simpson con $n = 8$ para estimar el volumen del sólido.



38. En la tabla se muestran los valores de una función de fuerza $f(x)$ donde x se mide en metros y $f(x)$ en newtons. Use la regla de Simpson para estimar el trabajo hecho por la fuerza al mover un objeto una distancia de 18 m.

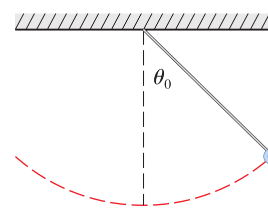
x	0	3	6	9	12	15	18
$f(x)$	9.8	9.1	8.5	8.0	7.7	7.5	7.4

39. La región acotada por las curvas $y = e^{-1/x}$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = 5$ se hace girar respecto al eje x. Use la regla de Simpson con $n = 10$ para estimar el volumen del sólido resultante.

CAS **40.** En la figura se muestra un péndulo con longitud L que forma un ángulo máximo θ_0 con la vertical. Usando la segunda Ley de Newton, se puede mostrar que el periodo T (el tiempo para una oscilación completa) está dado por

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1 - k^2\,\mathrm{sen}^2 x}}$$

donde $k = \mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)$ y g es la aceleración debida a la gravedad. Si $L = 1$ m y $\theta_0 = 42°$, use la regla de Simpson con $n = 10$ para determinar el periodo.



41. La intensidad de la luz con longitud de onda λ que viaja por una rejilla de difracción con N ranuras a un ángulo θ está dada por $I(\theta) = N^2\,\mathrm{sen}^2 k/k^2$, donde $k = (\pi N d\,\mathrm{sen}\,\theta)/\lambda$ y d es la distancia entre ranuras adyacentes. Un láser de helio-neón con longitud de onda $\lambda = 632.8 \times 10^{-9}$ m emite una banda estrecha de luz, dada por $-10^{-6} < \theta < 10^{-6}$, por una rejilla con 10 000 ranuras espaciadas 10^{-4} m. Use la regla del punto medio con $n = 10$ para estimar la intensidad de luz total $\int_{-10^{-6}}^{10^{-6}} I(\theta)\,d\theta$ que emerge de la rejilla.

42. Use la regla del trapecio con $n = 10$ para aproximar $\int_0^{20}\cos(\pi x)\,dx$. Compare su resultado con el valor real. ¿Puede explicar la discrepancia?

43. Bosqueje la gráfica de una función continua en $[0, 2]$ para la cual la regla del trapecio con $n = 2$ es más exacta que la regla del punto medio.

44. Bosqueje la gráfica de una función continua en $[0, 2]$ para la cual la aproximación del punto final derecho con $n = 2$ es más exacta que la regla de Simpson.

45. Si f es una función positiva y $f''(x) < 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$, muestre que

$$T_n < \int_a^b f(x)\,dx < M_n$$

46. Muestre que si f es un polinomio de grado 3 o menor, en tal caso la regla de Simpson da el valor exacto de $\int_a^b f(x)\,dx$.

47. Muestre que $\frac{1}{2}(T_n + M_n) = T_{2n}$.

48. Muestre que $\frac{1}{3}T_n + \frac{2}{3}M_n = S_{2n}$.

55. $2 \ln \sqrt{x} - 2 \ln\left(1 + \sqrt{x}\right) + C$

57. $\frac{3}{7}(x + c)^{7/3} - \frac{3}{4}c(x + c)^{4/3} + C$

59. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3(\operatorname{sen} x) + C$ **61.** $2(x - 2\sqrt{x} + 2)e^{\sqrt{x}} + C$

63. $-\tan^{-1}(\cos^2 x) + C$ **65.** $\frac{2}{3}[(x + 1)^{3/2} - x^{3/2}] + C$

67. $\sqrt{2} - 2/\sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3}) - \ln(1 + \sqrt{2})$

69. $e^x - \ln(1 + e^x) + C$

71. $-\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}(\operatorname{arcsen} x)^2 + C$

73. $\frac{1}{8}\ln|x - 2| - \frac{1}{16}\ln(x^2 + 4) - \frac{1}{8}\tan^{-1}(x/2) + C$

75. $2(x - 2)\sqrt{1 + e^x} + 2\ln\dfrac{\sqrt{1 + e^x} + 1}{\sqrt{1 + e^x} - 1} + C$

77. $\frac{2}{3}\tan^{-1}(x^{3/2}) + C$

79. $\frac{1}{3}x \operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{3}\cos x - \frac{1}{9}\cos^3 x + C$ **81.** $xe^{x^2} + C$

EJERCICIOS 7.6 ■ PÁGINA 493

1. $(-1/x)\sqrt{7 - 2x^2} - \sqrt{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\sqrt{2}x/\sqrt{7}\right) + C$

3. $\dfrac{1}{2\pi}\sec(\pi x)\tan(\pi x) + \dfrac{1}{2\pi}\ln|\sec(\pi x) + \tan(\pi x)| + C$

5. $\pi/4$ **7.** $\dfrac{1}{2\pi}\tan^2(\pi x) + \dfrac{1}{\pi}\ln|\cos(\pi x)| + C$

9. $-\sqrt{4x^2 + 9}/(9x) + C$ **11.** $e - 2$

13. $-\frac{1}{2}\tan^2(1/z) - \ln|\cos(1/z)| + C$

15. $\frac{1}{2}(e^{2x} + 1)\arctan(e^x) - \frac{1}{2}e^x + C$

17. $\dfrac{2y - 1}{8}\sqrt{6 + 4y - 4y^2} + \frac{7}{8}\operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{2y - 1}{\sqrt{7}}\right)$
$- \frac{1}{12}(6 + 4y - 4y^2)^{3/2} + C$

19. $\frac{1}{9}\operatorname{sen}^3 x\,[3\ln(\operatorname{sen} x) - 1] + C$

21. $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{e^x + \sqrt{3}}{e^x - \sqrt{3}}\right| + C$

23. $\frac{1}{4}\tan x \sec^3 x + \frac{3}{8}\tan x \sec x + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \tan x| + C$

25. $\frac{1}{2}(\ln x)\sqrt{4 + (\ln x)^2} + 2\ln\left[\ln x + \sqrt{4 + (\ln x)^2}\right] + C$

27. $\sqrt{e^{2x} - 1} - \cos^{-1}(e^{-x}) + C$

29. $\frac{1}{5}\ln|x^5 + \sqrt{x^{10} - 2}| + C$ **31.** $2\pi^2$

35. $\frac{1}{3}x\tan x \sec^2 x + \frac{2}{3}\tan x + C$

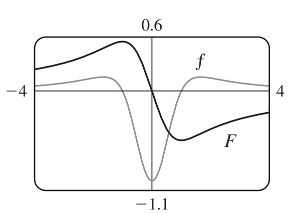
37. $\frac{1}{4}x(x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 4} - 2\ln\left(\sqrt{x^2 + 4} + x\right) + C$

39. $\frac{1}{10}(1 + 2x)^{5/2} - \frac{1}{6}(1 + 2x)^{3/2} + C$

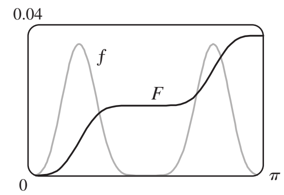
41. $-\ln|\cos x| - \frac{1}{2}\tan^2 x + \frac{1}{4}\tan^4 x + C$

43. (a) $-\ln\left|\dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right| + C$;
ambos tienen dominio $(-1, 0) \cup (0, 1)$

45. $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 - x + 1) - \frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1)$;
máx. en -1, mín. en 1; PI en -1.7, 0, y 1.7



47. $F(x) = -\frac{1}{10}\operatorname{sen}^3 x \cos^7 x - \frac{3}{80}\operatorname{sen} x \cos^7 x + \frac{1}{160}\operatorname{sen} x \cos^5 x$
$+ \frac{1}{128}\operatorname{sen} x \cos^3 x + \frac{3}{256}\operatorname{sen} x \cos x + \frac{3}{256}x$;
máx. en π, mín. en 0; PI en 0.7, $\pi/2$, y 2.5



EJERCICIOS 7.7 ■ PÁGINA 505

1. (a) $L_2 = 6$, $R_2 = 12$, $M_2 \approx 9.6$
(b) L_2 está subestimada, R_2 y M_2 están sobreestimadas.
(c) $T_2 = 9 < I$ (d) $L_n < T_n < I < M_n < R_n$

3. (a) $T_4 \approx 0.895759$ (subestimada)
(b) $M_4 \approx 0.908907$ (sobreestimada)
$T_4 < I < M_4$

5. (a) 5.932957, $E_M \approx -0.063353$
(b) 5.869247, $E_S \approx 0.000357$

7. (a) 2.413790 (b) 2.411453 (c) 2.412232

9. (a) 0.146879 (b) 0.147391 (c) 0.147219

11. (a) 0.451948 (b) 0.451991 (c) 0.451976

13. (a) 4.513618 (b) 4.748256 (c) 4.675111

15. (a) −0.495333 (b) −0.543321 (c) −0.526123

17. (a) 1.064275 (b) 1.067416 (c) 1.074915

19. (a) $T_8 \approx 0.902333$, $M_8 \approx 0.905620$
(b) $|E_T| \leqslant 0.0078$, $|E_M| \leqslant 0.0039$
(c) $n = 71$ para T_n, $n = 50$ para M_n

21. (a) $T_{10} \approx 1.983524$, $E_T \approx 0.016476$;
$M_{10} \approx 2.008248$, $E_M \approx -0.008248$
$S_{10} \approx 2.000110$, $E_S \approx -0.000110$
(b) $|E_T| \leqslant 0.025839$, $|E_M| \leqslant 0.012919$, $|E_S| \leqslant 0.000170$
(c) $n = 509$ para T_n, $n = 360$ para M_n, $n = 22$ para S_n

23. (a) 2.8 (b) 7.954926518 (c) 0.2894
(d) 7.954926521 (e) El error real es mucho más pequeño.
(f) 10.9 (g) 7.953789422 (h) 0.0593
(i) El error real es más pequeño. (j) $n \geqslant 50$

25.

n	L_n	R_n	T_n	M_n
5	0.742943	1.286599	1.014771	0.992621
10	0.867782	1.139610	1.003696	0.998152
20	0.932967	1.068881	1.000924	0.999538

n	E_L	E_R	E_T	E_M
5	0.257057	−0.286599	−0.014771	0.007379
10	0.132218	−0.139610	−0.003696	0.001848
20	0.067033	−0.068881	−0.000924	0.000462

Las observaciones son iguales que después del ejemplo 1.

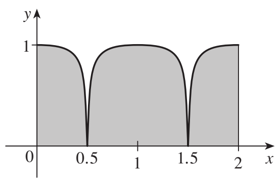
27.

n	T_n	M_n	S_n
6	6.695473	6.252572	6.403292
12	6.474023	6.363008	6.400206

n	E_T	E_M	E_S
6	-0.295473	0.147428	-0.003292
12	-0.074023	0.036992	-0.000206

Las observaciones son iguales que después del ejemplo 1.

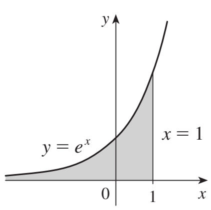
29. (a) 19.8 (b) 20.6 (c) $20.\overline{53}$
31. (a) 23.44 (b) 0.3413 **33.** $37.7\overline{3}$ pies/s
35. 10,177 megawatts-horas **37.** 828 **39.** 6.0 **41.** 59.4
43.



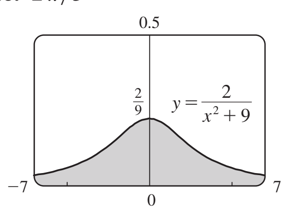
EJERCICIOS 7.8 ■ PÁGINA 515

Abreviaturas: C, convergente; D, divergente

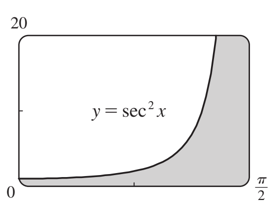
1. (a) Intervalo infinito (b) Discontinuidad infinita
(c) Discontinuidad infinita (d) Intervalo infinito
3. $\frac{1}{2} - 1/(2t^2)$; 0.495, 0.49995, 0.4999995; 0.5
5. $\frac{1}{12}$ **7.** D **9.** $2e^{-2}$ **11.** D **13.** 0 **15.** D
17. D **19.** $\frac{1}{25}$ **21.** D **23.** $\pi/9$
25. $\frac{1}{2}$ **27.** D **29.** $\frac{32}{3}$ **31.** D **33.** $\frac{75}{4}$
35. D **37.** $-2e$ **39.** $\frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9}$
41. e



43. $2\pi/3$



45. Área infinita

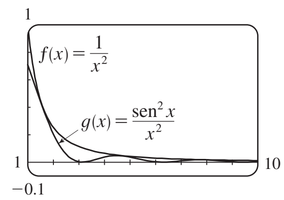


47. (a)

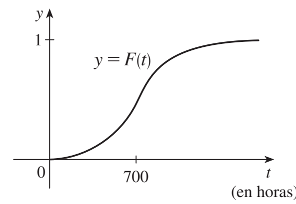
t	$\int_1^t [(\text{sen}^2 x)/x^2]\,dx$
2	0.447453
5	0.577101
10	0.621306
100	0.668479
1 000	0.672957
10 000	0.673407

Parece que la integral es convergente

(c)



49. C **51.** D **53.** D **55.** π **57.** $p < 1$, $1/(1 - p)$
59. $p > -1$, $-1/(p + 1)^2$ **65.** $\sqrt{2GM/R}$
67. (a)



(b) La rapidez a la que aumenta la fracción $F(t)$ cuando t aumenta
(c) 1; todas las bombillas se queman finalmente
69. 1 000
71. (a) $F(s) = 1/s$, $s > 0$ (b) $F(s) = 1/(s - 1)$, $s > 1$
(c) $F(s) = 1/s^2$, $s > 0$
77. $C = 1$; $\ln 2$ **79.** No

REPASO DEL CAPÍTULO 7 ■ PÁGINA 518

Preguntas de verdadero-falso

1. Falso **3.** Falso **5.** Falso **7.** Falso
9. (a) Verdadero (b) Falso **11.** Falso **13.** Falso

Ejercicios

1. $5 + 10 \ln \frac{2}{3}$ **3.** $\ln 2$ **5.** $\frac{2}{15}$
7. $-\cos(\ln t) + C$ **9.** $\frac{64}{5}\ln 4 - \frac{124}{25}$
11. $\sqrt{3} - (\pi/3)$ **13.** $3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + C$
15. $-\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x + 2| + C$
17. $x \sec x - \ln|\sec x + \tan x| + C$
19. $\frac{1}{18}\ln(9x^2 + 6x + 5) + \frac{1}{9}\tan^{-1}[\frac{1}{2}(3x + 1)] + C$
21. $\ln\left|x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x}\right| + C$
23. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}\right| + C$
25. $\frac{3}{2}\ln(x^2 + 1) - 3\tan^{-1}x + \sqrt{2}\tan^{-1}(x/\sqrt{2}) + C$
27. $\frac{2}{5}$ **29.** 0 **31.** $6 - \frac{3\pi}{2}$
33. $\dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}} - \text{sen}^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right) + C$
35. $4\sqrt{1 + \sqrt{x}} + C$ **37.** $\frac{1}{2}\,\text{sen}\,2x - \frac{1}{8}\cos 4x + C$
39. $\frac{1}{8}e - \frac{1}{4}$ **41.** $\frac{1}{36}$ **43.** D
45. $4\ln 4 - 8$ **47.** $-\frac{4}{3}$ **49.** $\pi/4$
51. $(x + 1)\ln(x^2 + 2x + 2) + 2\arctan(x + 1) - 2x + C$
53. 0
55. $\frac{1}{4}(2x + 1)\sqrt{4x^2 - 4x - 3} -$
$\ln\left|2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 4x - 3}\right| + C$