

Introduzione alla Meccanica Quantistica per il Quantum Computing

Angelo Vaccaro

1 Introduzione

Nel corso di "Introduzione alla Meccanica Quantistica per il Quantum Computing" sono stati analizzati i seguenti argomenti fondamentali:

- Esperimenti di Stern–Gerlach e sistemi a due stati
- Diffrazione dell’elettrone nella doppia fenditura e informazione "which-way"
- Formalismo della MQ e quantizzazione dello spin
- Principi generali della MQ
- Legame tra MQ e Quantum Computing
- Entanglement

Per rendere concreti tali concetti, è stato sviluppato un codice Python basato su Cirq che esplora:

- Interferenza e distruzione dell’interferenza tramite informazione di percorso ("which-way").
- Cancellazione di tale informazione (quantum eraser).
- Effetto dello spostamento di fase sulle frange di interferenza.
- Applicazioni avanzate, tra cui il teletrasporto quantistico, a dimostrazione del ruolo cruciale dell’entanglement.

2 Sistemi a due stati e Stern–Gerlach

2.1 Teoria

Un sistema a due stati costituisce il modello più semplice di qubit: lo spazio di Hilbert bidimensionale $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Nell’esperimento di Stern–Gerlach, un fascio di atomi attraversa un campo magnetico non uniforme e si divide nei due autostati di spin $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$, corrispondenti a $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Le probabilità di misura di uno stato generico $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ sono $|\alpha|^2$ e $|\beta|^2$.

2.2 Implementazione in Cirq

Creazione di una sovrapposizione bilanciata
cirq.H(q0)

La porta di Hadamard H trasforma

$$H |0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (1)$$

riproducendo sperimentalmente la sovrapposizione di spin a 45° rispetto all'asse di misura.

3 Diffrazione a doppia fenditura e informazione "which-way"

3.1 Teoria

Nell'esperimento a doppia fenditura un elettrone in sovrapposizione attraversa entrambe le fenditure e genera un pattern di interferenza. La registrazione del percorso ("which-way information") distrugge tale interferenza, illustrando il principio di complementarità.

3.2 Codice "which-way" senza eraser

```
circuit_now = cirq.Circuit(  
    cirq.H(q0),          # sovrapposizione iniziale  
    cirq.CNOT(q0, q1),   # entanglement: marcatore di percorso  
    cirq.H(q0),          # ricombinazione  
    cirq.measure(q0, key='m0'),  
    cirq.measure(q1, key='m1'),  
)
```

CNOT(q0, q1): crea entanglement fra sistema e marcatore, analogamente al rivelatore di percorso.

La successiva H(q0) tenta di ricombinare gli stati, ma la traccia lasciata su q1 annulla l'interferenza, producendo misure di m0 equiprobabili (50% $|0\rangle$, 50% $|1\rangle$).

4 Quantum Eraser

4.1 Teoria

Il "quantum eraser" dimostra che cancellando l'informazione di percorso—misurando o ruotando il marcatore in una base che rende i due cammini indistinguibili—l'interferenza può essere recuperata.

4.2 Codice con eraser

```
circuit_erase = cirq.Circuit(  
    cirq.H(q0),  
    cirq.CNOT(q0, q1),
```

```

    cirq.H(q1),          # eraser: cambio di base del marcatore
    cirq.H(q0),
    cirq.measure(q0, key='m0'),
    cirq.measure(q1, key='m1'),
)

```

$H(q1)$: trasforma $|0\rangle, |1\rangle$ del marcatore in $(|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$, annullando la "marcatura".
 Condizionando le misure di $m0$ sugli esiti di $m1$, si ripristinano frange di interferenza complementari, visibili tramite la funzione `analyze_conditional_results(result_erase)`.

5 Effetto dello spostamento di fase

5.1 Teoria

Uno shift di fase ϕ in un braccio di un interferometro altera il pattern di interferenza secondo la legge $P \propto \cos(\phi)$.

5.2 Codice phase shift

```

cirq.Z(q0)**angle # spostamento di fase = angle.

```

La porta Z^α applica uno shift relativo $\phi = \alpha\pi$ allo stato $|1\rangle$.

La funzione `phase_shift_experiment(angles)` esplora $\phi \in [0, 2\pi]$ e mostra come la probabilità condizionata $P(m_0 = 0|m_1)$ oscilli periodicamente con periodo 2π .

6 Formalismo della Meccanica Quantistica e quantizzazione dello spin

La MQ si basa sullo spazio di Hilbert:

- **Stato:** vettore $|\psi\rangle$ in uno spazio complesso, la cui norma unitaria garantisce la conservazione della probabilità.
- **Osservabili:** operatori auto-coniugati (Hermitiani), i cui autovalori sono i possibili risultati di misura.
- **Spin:** descritto dalle matrici di Pauli $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ con autovalori ± 1 ; uno spin $\frac{1}{2}$ possiede solo due proiezioni discrete lungo qualunque asse.
- **Evoluzione unitaria:** data da $U(t) = \exp(-iHt/\hbar)$, dove H è l'operatore Hamiltoniano del sistema.

7 Principi fondamentali della MQ

- **Sovrapposizione:** combinazioni lineari di stati sono esse stesse stati fisici validi.
- **Misura e collasso:** la misura proiettiva di un osservabile A proietta $|\psi\rangle$ su un suo autostato $|a_i\rangle$ con probabilità $|\langle a_i|\psi\rangle|^2$.

- **Entanglement:** sistemi multipli possono assumere stati globali non fattorizzabili in prodotti di stati locali, generando correlazioni che sfidano ogni descrizione classica.
- **Evoluzione reversibile:** tra misure, l'evoluzione è descritta da trasformazioni unitarie che preservano la coerenza quantistica.

8 Meccanica Quantistica e Quantum Computing

Il qubit generalizza il bit classico sfruttando sovrapposizione ed entanglement per realizzare un parallelismo intrinseco.

Porte quantistiche (Hadamard, CNOT, Pauli-X/Z, rotazioni di fase) implementano le trasformazioni unitarie.

Un circuito quantistico è una sequenza di tali porte, seguita da misure che estraggono informazioni classiche dal sistema.

Algoritmi quali Shor (fattorizzazione polinomiale) e Grover (ricerca in database non strutturato) dimostrano vantaggi computazionali significativi rispetto a metodi classici noti.

9 Entanglement

L'entanglement, risorsa cardine del quantum computing, si esemplifica nello stato di Bell:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (2)$$

Misurando un qubit in questo stato si determina istantaneamente lo stato dell'altro, indipendentemente dalla distanza, senza alcuna trasmissione di segnale. In Cirq, tale correlazione si ottiene con:

```
cirq.H(channel)
cirq.CNOT(channel, target)
```

Applicando H e poi CNOT si prepara la coppia entangled tra channel e target, base di protocolli quali il quantum eraser e il teletrasporto.

10 Applicazione: Teletrasporto Quantistico

Il teletrasporto quantistico trasferisce uno stato ignoto da un qubit "source" a uno "target" usando entanglement e comunicazione classica:

1. Preparazione di una coppia di Bell fra "channel" e "target".
2. Bell-measurement congiunta su "source" e "channel".
3. Invio classico dei due bit di misura e applicazione delle porte di correzione X, Z su "target".

Il codice Cirq implementa questa procedura e conferma, tramite istogrammi, l'alta fedeltà del trasferimento di sovrapposizione $|+\rangle$.

11 Spiegazione delle porte utilizzate

Nella simulazione con Cirq sono impiegate le seguenti porte fondamentali, descritte qui nel loro ruolo teorico e operativo:

11.1 Porta di Hadamard (H)

- **Definizione e matrice**

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

- **Funzione** Trasforma gli stati computazionali $|0\rangle$ e $|1\rangle$ in sovrapposizioni bilanciate:

$$H|0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (4)$$

$$H|1\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (5)$$

- **Uso nel codice**

- Creazione della superposizione iniziale di q_0
- "Ricombinazione" dei rami nell'esperimento "which-way"
- Preparazione dello stato $|+\rangle$ per il teletrasporto

11.2 Porta CNOT (Controlled-NOT)

- **Definizione e matrice** Opera su due qubit (controllore c , target t):

$$\text{CNOT}|c, t\rangle = |c, t \oplus c\rangle. \quad (6)$$

- **Funzione** Se il qubit di controllo è $|1\rangle$, inverte lo stato del target; altrimenti lo lascia invariato.
- **Ruolo teorico** Generazione di entanglement: ad es. costruzione della coppia di Bell

- **Uso nel codice**

- "Which-way marker": entanglement tra q_0 e q_1
- Creazione della coppia entangled tra channel e target nel protocollo di teletrasporto
- Operazione di Bell-measurement congiunta su source e channel

11.3 Porta di fase Z e rotazione parametrica (Z^ϕ)

- **Matrice di Pauli-Z**

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

- **Rotazione parametrica**

$$Z^\phi = e^{-i\phi/2} \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}, \quad \text{qui usato come } Z(q_0)^{\text{angle}}. \quad (8)$$

- **Funzione** Applica uno spostamento di fase ϕ allo stato $|1\rangle$ lasciando invariato $|0\rangle$.
- **Uso nel codice**
 - Introduzione dello shift di fase variabile tra i due rami dell'interferometro per studiare le frange di interferenza

11.4 Porta Pauli-X (X)

- **Matrice**

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

- **Funzione** Effettua un "bit-flip": scambia $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$.
- **Uso nel codice**
 - Correzione condizionata sul qubit target nel protocollo di teletrasporto quando il bit $m_channel = 1$

11.5 Porta Pauli-Z (Z)

- **Matrice** Vedi sezione 3 (senza fattore globale).
- **Funzione** Effettua un "phase-flip": aggiunge un segno $-$ a $|1\rangle$.
- **Uso nel codice**
 - Correzione condizionata sul qubit target nel teletrasporto quando il bit $m_source = 1$

11.6 Misura proiettiva (Measure)

- **Operazione** Proietta il qubit nella base computazionale $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, restituendo un valore classico (0 o 1).
- **Effetto** Collasso dello stato quantistico e distruzione di eventuali coerenze.
- **Uso nel codice**
 - Raccolta dati di q_0 e q_1 nei vari esperimenti
 - Misure $m_source, m_channel$ per abilitare le correzioni di teletrasporto

Conclusione Le porte H, CNOT, Z (e la sua rotazione parametrica), X e l'operazione di misura costituiscono il nucleo operativo di molti esperimenti quantistici: dalla creazione di sovrapposizione e entanglement, alla manipolazione di fasi per osservare interferenze, fino al teletrasporto di stati. Comprimerne matrice, azione sullo stato e ruolo nel protocollo è essenziale per padroneggiare il linguaggio del quantum computing.

12 Conclusioni

L'integrazione tra teoria e codice evidenzia come i principi della meccanica quantistica—sovrapposizione, entanglement, collasso di misura e dinamica unitaria—siano alla base delle potenzialità del quantum computing. Cirq offre un ambiente flessibile per sperimentare digitalmente interferenza, quantum eraser, spostamenti di fase e teletrasporto, trasformando concetti astratti in esperimenti riproducibili e analizzabili. Questo approccio facilita la comprensione profonda e applicativa dei fenomeni quantistici, ponendo le basi per lo sviluppo di algoritmi e protocolli quantistici avanzati.