Mappa teoria+esercizi

martedì 11 febbraio 2025 17:19

NUMERI COMPLESSI

- FORMA ALGEBRICA:
  $z = a + ib$ dove a, b sono numeri reali e i la unità immaginaria ($i^2 = -1$)
- OPERAZIONI ALGEBRICHE:
  Somma: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
  Differenza: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$
  moltiplicazione: $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$
  divisione: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$
- CONIUGATO E MODULO:
  $\bar{z} = a - ib$
  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
  $\text{modulo} = |z| = \sqrt{z\bar{z}}$
- COORDINATE POLARI E FORMA TRIGONOMETRICA:
  $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$
  $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
  $\theta = \arg(z)$

$\cos\theta = \frac{x}{\rho}$, $\sin\theta = \frac{y}{\rho}$

$\arctan(\frac{y}{x}) = \begin{cases} \theta & \text{se } x > 0 \text{ e } y > 0 \\ \pi - \theta & \text{se } x < 0 \text{ e } y > 0 \\ \pi + \theta & \text{se } x < 0 \text{ e } y < 0 \\ 2\pi - \theta & \text{se } x > 0 \text{ e } y < 0 \end{cases}$

$\arctan(\frac{y}{x}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \text{ e } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \text{ e } y < 0 \end{cases}$

- PRODOTTO DI NUMERI IN COMPLESSI IN FORMA TRIGONOMETRICA:
  $z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$
  $z_1 / z_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$
- FORMULA DI DE MOIVRE:
  $z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$
  $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)$, dove $k = 0, 1, \dots, n-1$

MATRICI

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

- VETTORE COLONNA:
  $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$
- FORMA MATRICIALE DI UN SISTEMA:
  $Ax = b$
  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

  un sistema è compatibile se ha almeno una soluzione, altrimenti è incompatibile.
  La matrice aumentata di un sistema è una matrice che include tutti i coefficienti delle incognite (ovvero A) più i termini noti.
  Pivot: primo elemento non nullo di una colonna dopo l'applicazione di un EG.
  Un pivot si dice colonna dominante se la prima riga di una matrice, è quella in cui ogni pivot di A, è più alto rispetto a quello sotto di lui.
  Le variabili libere sono quelle corrispondenti ai pivot, se la colonna non ha pivot, la variabile corrispondente è una variabile libera.
- RANGO DI UNA MATRICE:
  indicato con $rk(A)$ è corrispondente al numero di pivot in ci sono di righe linearmente indipendenti.
- TRASPOSTA DI PRODOTTO CARTESIANO:
  Se I sistema lineare $Ax = B$ è compatibile: $rk(A) = rk(A|B)$
- SOMMA TRA MATRICI:
  $(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$
- PRODOTTO DI UNA MATRICE PER UNO SCALARE:
  $(\lambda A)_{ij} = \lambda A_{ij}$
- MATRICE TRASPOSTA:
  $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
- PRODOTTO TRA MATRICI: $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$
  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ $AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$
- TRASPOSTA DEL PRODOTTO: $(AB)^T = B^T A^T$
- MATRICE IDENTITÀ: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ soddisfano operazioni elementari: si ottiene una MATRICE ELEMENTARE $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- MATRICI TRIANGOLARE SUPERIORE:
  $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

INVERTIBILITÀ, DETERMINANTE

- MATRICE INVERTIBILE:
  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$
- CALCOLO DELL'INVERSA CON EG: $[A|I^T]$
  una matrice è invertibile se ha il dato
  $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
- DETERMINANTE:
  $\det A = \det(A^T) = ad - bc$
  $\det A = (\text{Regola di Laplace}) = \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$
  1. Scambi degli ordinati: $\det(A) = -\det(B)$
  2. Moltiplicazione per una riga: $\det(A) = \frac{1}{\lambda}\det(B)$
  - Moltiplicazione per una riga: $\det(A) = \lambda\det(B)$
  - Aggiunta di una riga: $\det(A) = \det(B)$
  - Sottrazione di una riga: $\det(A) = \det(B)$
  - Sostituzione di una riga: $\det(A) = \det(B)$
  - Trasposta: $\det(A) = \det(A^T)$
  - Prodotto: $\det(A) = \det(B)\det(C)$
- TEOREMA DI CRAMER:
  Se A è una matrice non singolare il sistema lineare ha soluzione unica data da: $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$ per $i = 1, 2, \dots, n$

SISTEMI LINEARI

- SISTEMA LINEARE:
  $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ dove $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono le incognite, a_{ij} i coefficienti, $b_1, b_2, \dots, b_m$ sono i termini noti
- SISTEMA LINEARE OMOGENEO:
  Sistema in cui termini noti sono tutti 0.

SPAZI VETTORIALI E SOTTOSPAZI VETTORIALI

- SPAZIO VETTORIALE:
  Uno spazio vettoriale è un insieme di elementi, chiamati vettori, insieme a due operazioni: l'addizione tra vettori e la moltiplicazione per uno scalare. Due soddisfano certe assiomi di regole. Queste operazioni permettono di "muovere" vettori e di "lavorare" con vettori, mantenendo loro struttura matematica e geometrica.
  - DIPENDENZA DI UNO SPAZIO VETTORIALE: Gli elementi, possono essere, per esempio, delle frecce in un piano, delle liste di numeri, funzioni, polinomi o anche matrici. L'importanza è che siano dotati delle operazioni di addizione e moltiplicazione per scalare.
  - DIMENSIONE DI UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE: Se U è un sottospazio di V allora $\dim(U) \leq \dim(V)$
  - Sottospazi: $\{0\}$ e V stesso.
  - Sottospazio: dati v e w in V allora v, w sono linearmente dipendenti se uno dei vettori è un multiplo dell'altro.
  - Sottospazio per più vettori: $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti se uno dei vettori è una combinazione lineare di tutti gli altri.
  - Moltiplicazione per uno scalare: λv è un vettore che ha la stessa direzione di v ma lunghezza $|\lambda|$ volte più lunga.
  - Somma: $v + w$ è il vettore che si ottiene mettendo w dopo v.
  - Sottospazio: $\{0\}$ e V stesso.
  - Sottospazio generato: $\operatorname{span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ è l'insieme di tutte le combinazioni lineari di $v_1, v_2, \dots, v_n