Métodos de Integración de funciones trigonométricas de potencia.

Caso 1: Donde n es entero, positivo e impar, en:

$(i)\ \int sen^n x\,dx$ ó $(ii)\ \int cos^n x\,dx$

$$
\begin{aligned}
(i)\quad sen^n x\,dx &= (sen^{n-1} x)(sen\,x\,dx)\\
&= (sen^2 x)^{\frac{n-1}{2}}(sen\,x\,dx)\\
&= (1-cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}}(sen\,x\,dx)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(ii)\quad cos^n x\,dx &= (cos^{n-1} x)(cos\,x\,dx)\\
&= (cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}}(cos\,x\,dx)\\
&= (1-sen^2 x)^{\frac{n-1}{2}}(cos\,x\,dx)
\end{aligned}
$$

Caso 2: Donde alguno de los exponentes es entero, positivo e impar:

$(i)\ \int sen^n x\,cos^m x\,dx$

Si n es impar, entonces:

$$
\begin{aligned}
(i)\quad sen^n x\,cos^m x\,dx &= sen^{n-1} x\,cos^m x\,(sen\,x\,dx)\\
&= (sen^2 x)^{\frac{n-1}{2}}cos^m x\,(sen\,x\,dx)\\
&= (1-cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}}cos^m x\,(sen\,x\,dx)
\end{aligned}
$$

Si m es impar, entonces;

$$
\begin{aligned}
(ii)\quad sen^n x\,cos^m x\,dx &= sen^n x\,cos^{m-1} x\,(cos\,x\,dx)\\
&= sen^n x\,(cos^2 x)^{\frac{m-1}{2}}(cos\,x\,dx)\\
&= sen^n x\,(1-sen^2 x)^{\frac{m-1}{2}}(cos\,x\,dx)
\end{aligned}
$$

Caso 3: Donde m y n son enteros, positivos y pares en:

$(i)\ \int sen^n x\,dx$ ó $(ii)\ \int cos^n x\,dx$ ó $(iii)\int sen^n x\,cos^m x\,dx$

$$
\begin{aligned}
(i)\quad sen^n x\,dx &= (sen^2 x)^{\frac{n}{2}}dx\\
&= \left(\frac{1-cos\,2x}{2}\right)^{\frac{n}{2}}dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(ii)\quad cos^n x\,dx &= (cos^2 x)^{\frac{n}{2}}dx\\
&= \left(\frac{1+cos\,2x}{2}\right)^{\frac{n}{2}}dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(iii)\,sen^n x\,cos^m x\,dx &= (sen^2 x)^{\frac{n}{2}}(cos^2 x)^{\frac{m}{2}}dx\\
&= \left(\frac{1-cos\,2x}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1+cos\,2x}{2}\right)^{\frac{m}{2}}dx
\end{aligned}
$$

Caso 4: Donde n es entero y positivo en:

$(i)\ \int tan^n x\,dx$ ó $(ii)\ \int cot^n x\,dx$

$$
\begin{aligned}
(i)\quad tan^n x\,dx &= tan^{n-2} x\,tan^2 x\,dx\\
&= tan^{n-2} x\,(sec^2 x-1)\,dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(ii)\quad cot^n x\,dx &= cot^{n-2} x\,cot^2 x\,dx\\
&= cot^{n-2} x\,(csc^2 x-1)\,dx
\end{aligned}
$$

Caso 5: Donde n es entero, positivo y par en:

$(i)\ \int sec^n x\,dx$ ó $(ii)\ \int csc^n x\,dx$

$$
\begin{aligned}
(i)\quad sec^n x\,dx &= (sen^{n-2} x)(sec^2 x\,dx)\\
&= (sec^2 x)^{\frac{n-2}{2}}(sec^2 x\,dx)\\
&= (1+tan^2 x)^{\frac{n-2}{2}}(sec^2 x\,dx)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(ii)\quad csc^n x\,dx &= (csc^{n-2} x)(csc^2 x\,dx)\\
&= (csc^2 x)^{\frac{n-2}{2}}(csc^2 x\,dx)\\
&= (1+cot^2 x)^{\frac{n-2}{2}}(csc^2 x\,dx)
\end{aligned}
$$

Caso 6: Donde m es entero, positivo y par en:

$(i)\ \int tan^n x\,sec^m x\,dx$ ó $(ii)\ \int cot^n x\,csc^m x\,dx$

$$
\begin{aligned}
(i)\quad tan^n x\,sec^m x\,dx &= tan^n x\,sec^{m-2} x\,(sec^2 x)\,dx\\
&= tan^n x\,(sec^2 x)^{\frac{m-2}{2}}(sec^2 x)\,dx\\
&= tan^n x\,(tan^2 x+1)^{\frac{m-2}{2}}(sec^2 x)\,dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(ii)\quad cot^n x\,csc^m x\,dx &= cot^n x\,csc^{m-2} x\,(csc^2 x)\,dx\\
&= cot^n x\,(csc^2 x)^{\frac{m-2}{2}}(csc^2 x)\,dx\\
&= cot^n x\,(cot^2 x+1)^{\frac{m-2}{2}}(csc^2 x)\,dx
\end{aligned}
$$

Caso 7: Donde n es entero positivo e impar en:

$(i)\ \int tan^n x\,sec^m x\,dx$ ó $(ii)\ \int cot^n x\,csc^m x\,dx$

$$
\begin{aligned}
(i)\quad tan^n x\,sec^m x\,dx &= tan^{n-1} x\,sec^{m-1} x\,(sec\,x\,tan\,x)\,dx\\
&= (tan^2 x)^{\frac{n-1}{2}}sec^{m-1} x\,(sec\,x\,tan\,x)\,dx\\
&= (sec^2 x-1)^{\frac{n-1}{2}}sec^{m-1} x\,(sec\,x\,tan\,x)\,dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(ii)\quad cot^n x\,csc^m x\,dx &= cot^{n-1} x\,csc^{m-1} x\,(csc\,x\,cot\,x)\,dx\\
&= (cot^2 x)^{\frac{n-1}{2}}csc^{m-1} x\,(csc\,x\,cot\,x)\,dx\\
&= (csc^2 x-1)^{\frac{n-1}{2}}csc^{m-1} x\,(csc\,x\,cot\,x)\,dx
\end{aligned}
$$

Caso 8: Donde n es entero, positivo e impar en:

$(i)\ \int sec^n x\,dx$ ó $(ii)\ \int csc^n x\,dx$

Se aplica integración por partes.
Considere:

$(i)\quad u = sec^{n-2} x\ \ y\ \ dv = sec^2 x\,dx$

$(ii)\quad u = csc^{n-2} x\ \ y\ \ dv = csc^2 x\,dx$

Caso 9: Donde n es entero, positivo, par y m es entero, positivo e impar.

$(i)\ \int tan^n x\,sec^m x\,dx$ ó $(ii)\ \int cot^n x\,csc^m x\,dx$

Exprese el integrando en términos de potencias impares de la secante o cosecante y después siga la sugerencia del caso 8.

$$
\begin{aligned}
(i)\quad tan^n x\,sec^m x\,dx &= (tan^2 x)^{\frac{n}{2}}sec^m x\,dx\\
&= (sec^2 x-1)^{\frac{n}{2}}sec^m x\,dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(ii)\quad cot^n x\,csc^m x\,dx &= (cot^2 x)^{\frac{n}{2}}csc^m x\,dx\\
&= (csc^2 x-1)^{\frac{n}{2}}csc^m x\,dx
\end{aligned}
$$

Método de Integración por sustitución trigonométrica.

Tenemos 3 casos para resolver integrales que contienen alguna expresión de las siguientes formas:

$$\sqrt{a^2-u^2} \qquad \sqrt{a^2+u^2} \qquad \sqrt{u^2-a^2}$$

Caso 1 : El integrando tiene una expresión de la forma $\sqrt{a^2-u^2}$

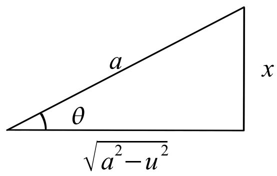
Introducimos una variable θ considerando:

$u=a\,sen\,\theta$

$du=a\cos\theta\,d\theta$

$\sqrt{a^2-u^2}=a\cos\theta$

$\theta=arcsen\frac{u}{a},\ si\ a>1$



Caso 2 : El integrando tiene una expresión de la forma $\sqrt{a^2+u^2}$

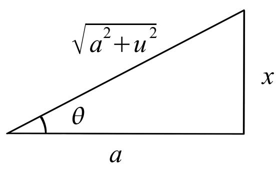
Introducimos una variable θ considerando:

$u=a\tan\theta$

$du=a\sec^2\theta\,d\theta$

$\sqrt{a^2+u^2}=a\sec\theta$

$\theta=arctan\frac{u}{a}\ si\ a>1$



Caso 3 : El integrando tiene una expresión de la forma $\sqrt{u^2-a^2}$

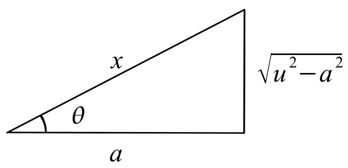
Introducimos una variable θ considerando:

$u=a\sec\theta$

$du=a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

$\sqrt{u^2-a^2}=a\tan\theta$

$\theta=arcsec\frac{u}{a}\ si\ a>1$



Método de Integración por fracciones parciales.

Aplicamos cuando queremos integrar una fracción propia:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

Donde $P(x)$ es de menor grado que $Q(x)$.

Para hacer esto, hay que escribir la expresión como la suma de las fracciones parciales, los denominadores de tales fracciones se obtienen al factorizar $Q(x)$ como un producto de factores lineales y cuadráticos.

Caso 1: Los factores de $Q(x)$ son todos lineales y no se repiten.

Es decir:

$$Q(x)=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\ldots(a_nx+b_n)$$

Transcribimos como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+\ldots+\frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

Caso 2: $Q(x)$ está conformado por factores lineales y algunos se repiten.

Supongamos que (a_1x+b_1) se repite n veces, entonces, correspondiente a este factor será nuestra suma de fracciones parciales.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(a_1x+b_1)^n}+\frac{A_2}{(a_1x+b_1)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{(a_1x+b_1)^2}+\frac{A_n}{(a_1x+b_1)}$$

Caso 3 : Los factores en $Q(x)$ son cuadráticos y no se repiten.

$$Q(x)=(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)\ldots(a_nx^2+b_nx+c_n)$$

Se expresa como suma de fracciones parciales de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2}+\ldots+\frac{A_nx+B_n}{a_nx^2+b_nx+c_n}$$

Caso 4 : $Q(x)$ tiene factores cuadráticos y algunos se repiten.

Si (ax^2+bx+c) es un factor cuadrático que se repite n veces, tenemos la suma de las siguientes fracciones parciales.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)^n}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)}$$