# PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Maicon Felipe Malacarne

21 de fevereiro de 2024

**BIBLIOGRAFIA:**

1. DEVORE, Jay L.; VISCONTE, Solange Aparecida (Trad.); PIRES, Magda Carvalho (Rev. téc.). Probabilidade e estatística para engenharia e ciências. 3. ed., tradução da 9. ed. norte-americana. São Paulo: Cengage Learning, 2018. 630 p.ISBN: 9788522128037.

2. MORETTIN, Pedro Alberto; BUSSADA, Wilson. Estatística básica. 9. ed. São Paulo: Saraiva S.A. - Livreiros Editores, 2017. 554 p.ISBN: 9788547220228.

3. TRIOLA, Mario F. ; FLORES, Vera Regina Lima e (trad.). Introdução à estatística: atualização da tecnologia. 11. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.- LTC, 2015. 707. p. ISBN: 9788521622062.

4. BORNIA, Antonio Cezar; BARBETTA, Pedro Alberto; REIS, Marcelo Menezes. Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. 2.ed. Rio de Janeiro: Atlas, 2010. ISBN 9788522459940.

5. WALPOLE, Ronald. MYERS, Raymond H et al. Probabilidade e Estatística para Engenharia e Ciências. Pearson, 2008. ISBN 978-8576051992.

6. WHEELAN, Charles. Estatística: O que é, para que serve, como funciona. Zahar, 2016. ISBN 978-8537815120.

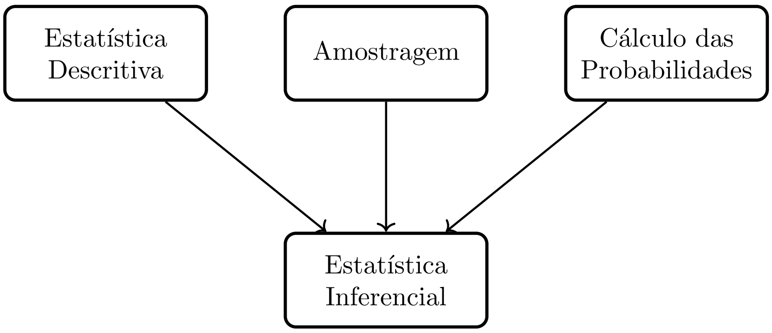
**Observação:**

O presente material foi elaborado com o objetivo de facilitar as atividades em sala de aula, seguindo a bibliografia apresentada acima. Esclarece-se que o material, não substitui a bibliografia apresentada, portanto, é necessário consultar os livros recomendados.

# 1 ESTATÍSTICA DESCRITIVA

**Definição:** Estatística é a ciência que trata da coleta, organização, descrição, análise e interpretação dos dados experimentais. A FIGURA 1, a seguir, mostra o contexto em que se situa o estudo completo da Estatística, aqui subdividido em Estatística Descritiva e Estatística Indutiva (ou Inferência Estatística).

FIGURA 1 – ESQUEMA GERAL DA ESTATÍSTICA




FONTE: O autor (2019).

A **Estatística Descritiva** é a parte que trata da organização e descrição de dados, através dos cálculos de médias, variâncias, estudo de gráficos, tabelas etc.

A **Teoria das Probabilidades** permite-nos modelar os fenômenos aleatórios, ou seja, aqueles em que está presente a incerteza. É uma ferramenta fundamental para a inferência estatística.

A **Estatística Inferencial** compreende um conjunto de técnicas baseadas em probabilidades, que a partir de dados amostrais, permite-nos tirar conclusões sobre a população de interesse.

A **Amostragem** é o ponto de partida para um estudo estatístico. O estudo de qualquer fenômeno, seja ele natural, social, econômico ou biológico, exige a coleta e a análise de dados estatísticos. Portanto, a coleta de dados é a fase inicial de qualquer pesquisa.

A **População** é o conjunto de todas as observações potenciais sobre determinado fenômeno.

**Exemplos:**

O conjunto de dados efetivamente observados, ou extraídos, constitui uma **amostra** da população. É a partir do dado amostral, que se desenvolvem os estudos, com o objetivo de se fazer inferências sobre a população.

**Exemplos:**

## 1.1 VARIÁVEL

É usada para atribuição dos valores correspondentes aos dados observados. É importante ressaltar que os dados em questão não são necessariamente numéricos, uma vez que podem dizer respeito a atributos qualitativos observados na população. Por esta razão,a variável pode ser classificada em **qualitativa** ou **quantitativa**.

### 1.1.1 Variável Qualitativa: É utilizada para representação de atributos.

#### 1.1.1.1 Variável Qualitativa nominal é caracterizada por dados que consistem em nomes, rótulos ou categorias apenas.

**Exemplo:**

#### 1.1.1.2 Variável Qualitativa ordinal é utilizada em situações nas quais presume-se a necessidade de uma ordem, crescente ou decrescente, para os resultados.

**Exemplo:**

### 1.1.2 Variável Quantitativa é utilizada para representação de dados numéricos, ou quantitativos.

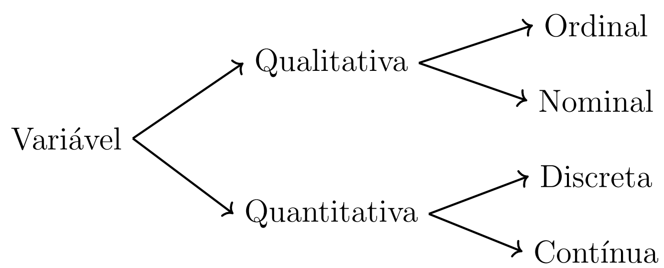
#### 1.1.2.1 Variável Quantitativa Discreta é a variável cujo domínio é um conjunto enumerável. Geralmente corresponde a dados de contagem.

**Exemplo:**

#### 1.1.2.2 Variável Quantitativa Contínua é a variável cujo domínio é um conjunto não enumerável. Refere-se a dados de mensuração.

**Exemplo:**

FIGURA 2 – TIPOS DE VARIÁVEIS




FONTE: O autor (2019).

**Exemplo de aplicação:** Seja uma população de peças produzidas em um determinado processo. É possível ter as seguintes situações conforme o QUADRO 1, abaixo:

QUADRO 1 - CLASSIFICAÇÃO DAS VARIÁVEIS SEGUNDO TIPO

| VARIÁVEIS | TIPO |
|---|---|
| Estado: Conforme ou Não-conforme | |
| Qualidade: 1ª, 2ª ou 3ª categoria | |
| Número de peças conformes | |
| Comprimento das peças | |

FONTE: O autor (2019).

## 1.2 ARREDONDAMENTO DE NÚMEROS

1. Quando o primeiro algarismo a ser abandonado for 0, 1, 2, 3 ou 4, fica inalterado o último número que permanecer.

   **Exemplo:**

2. Quando o primeiro algarismo a ser abandonado for 6, 7, 8 ou 9, aumenta-se de uma unidade o último algarismo a permanecer.

   **Exemplo:**

3. Quando o primeiro algarismo a ser abandonado for 5, haverá duas formas:

   a) como regra geral, aumenta-se de uma unidade o último algarismo a permanecer.
   **Exemplo:**

   b) se ao 5 só seguirem zeros, o último algarismo a ser conservado só será aumentado se for ímpar.
   **Exemplo:**

**Exercícios:** arredondar os números dados para 2 casas decimais.
17,44452 ficará
179,5673 ficará
87,4931 ficará
4,5652 ficará
4,5650 ficará
4,575 ficará

## 1.3 APRESENTAÇÃO DE DADOS

A apresentação de dados pode ser efetuada através de dois modos, tabular ou gráfico, não mutuamente exclusivos. Para esta tarefa deve-se ter em mente o objetivo da apresentação, no que diz respeito ao nível de detalhamento e ao tipo de informação que se deseja extrair dos dados em questão. A apresentação tabular permite obter informações mais detalhadas, enquanto a apresentação gráfica permite uma compreensão mais rápida a respeito do comportamento da variável observada.

### 1.3.1 Tabelas

Uma tabela deve apresentar os dados de forma resumida, oferecendo uma visão geral do comportamento do fenômeno analisado.

#### 1.3.1.1 Elementos essenciais de uma tabela

Uma tabela é constituída dos seguintes elementos:

1. **Título:** é a indicação que precede a tabela e contém a identificação de três fatores do fenômeno.
    a) A data a qual se refere;
    b) o local onde ocorreu o evento;
    c) o fenômeno que é descrito.
2. **Cabeçalho:** é a parte superior da tabela que especifica o conteúdo das colunas.
3. **Corpo da tabela:** é o espaço que contém as informações sobre o fenômeno observado.
4. **Fonte:** é a indicação da entidade responsável pelo levantamento dos dados.

Para obter mais informações consultar o manual de normalização de documentos científicos de acordo com as normas da ABNT.

#### 1.3.1.2 Tabela Simples

É o tipo mais comum de tabela, utilizado para representar os valores correspondentes a uma série estatística. A disposição pode ser feita tanto por colunas como por linhas.

**Exemplo de tabela simples:** Dados dispostos em linha.

TABELA 1 – Faturamento mensal (R$ 1.000.000) da empresa ABC (20XY).

| Mês | jan | fev | mar | abr | mai | jun | jul | ago | set | out | nov | dez | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Faturamento | 0,95 | 1,03 | 1,12 | 1,24 | 1,02 | 0,92 | 0,84 | 0,78 | 0,72 | 0,65 | 0,68 | 0,82 | 10,77 |

FONTE: Dados Fictícios.

**Exemplo de tabela simples:** Dados dispostos em coluna.

TABELA 2 – Número de beneficiários de planos privados de saúde, em milhões, no período 2000 - 2006

| Ano | Beneficiários (milhões) |
|---|---|
| 2000 | 34,5 |
| 2001 | 34,3 |
| 2002 | 35,0 |
| 2003 | 36,2 |
| 2004 | 38,8 |
| 2005 | 41,6 |
| 2006 | 44,7 |

FONTE: Jornal Folha de São Paulo. 4/6/2007

#### 1.3.1.3 Tabela de dupla entrada: é utilizada para representar dados de duas séries combinadas.

**Exemplo de tabela de dupla entrada:**

TABELA 3 – Faturamento (R$ 1.000.000) da empresa ABC, por produto e região (20XY).

| **Região** | **Produto** | | | | | | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Rolamento | Mancal | Óleo | Junta | Válvula | Retentor | |
| Grande Curitiba | 0,89 | 0,46 | 0,45 | 0,37 | 0,32 | 0,26 | 2,75 |
| Interior do PR | 0,83 | 0,44 | 0,42 | 0,35 | 0,30 | 0,24 | 2,58 |
| Interior de SC | 0,59 | 0,31 | 0,30 | 0,25 | 0,21 | 0,16 | 1,82 |
| Porto Alegre | 0,23 | 0,10 | 0,74 | 0,58 | 0,79 | 0,56 | 3,00 |
| Interior do RS | 0,30 | 0,41 | 0,59 | 0,08 | 0,23 | 0,80 | 2,41 |
| Campo Grande | 0,86 | 0,40 | 0,43 | 0,20 | 0,05 | 0,96 | 2,90 |
| Cuiabá | 3,70 | 2,12 | 2,93 | 1,83 | 1,90 | 2,98 | 15,46 |
| Total | 3,71 | 3,50 | 3,02 | 3,03 | 2,47 | 4,29 | 20,01 |

FONTE: Dados Fictícios.

#### 1.3.1.4 Tabela de Múltiplas Entradas: é utilizada na representação de dados correspondentes a mais de duas séries.

**Exemplo de tabela de múltiplas entradas:**

TABELA 4 – Unidades vendidas por região e por semestre (20XY).

| Região | Produto | | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| | Rolamento | | Mancal | | |
| | 1º Semestre | 2º Semestre | 1º Semestre | 2º Semestre | |
| Sul | 43,00 | 41,00 | 13,00 | 11,00 | 108,00 |
| Sudeste | 45,00 | 8,00 | 29,00 | 42,00 | 124,00 |
| Centro Oeste | 3,00 | 19,00 | 43,00 | 14,00 | 79,00 |
| Total | 91,00 | 68,00 | 85,00 | 67,00 | 311,00 |

FONTE: Dados Fictícios.

### 1.3.2 Gráficos

#### 1.3.2.1 Representação Gráfica

O objetivo do gráfico é passar para o leitor uma visão clara do comportamento do fenômeno em estudo, uma vez que os gráficos transmitem informação mais imediata do que uma tabela.

A representação gráfica de um fenômeno deve obedecer a certos requisitos fundamentais:

a) Simplicidade: O gráfico deve ser destituído de detalhes de importância secundária.

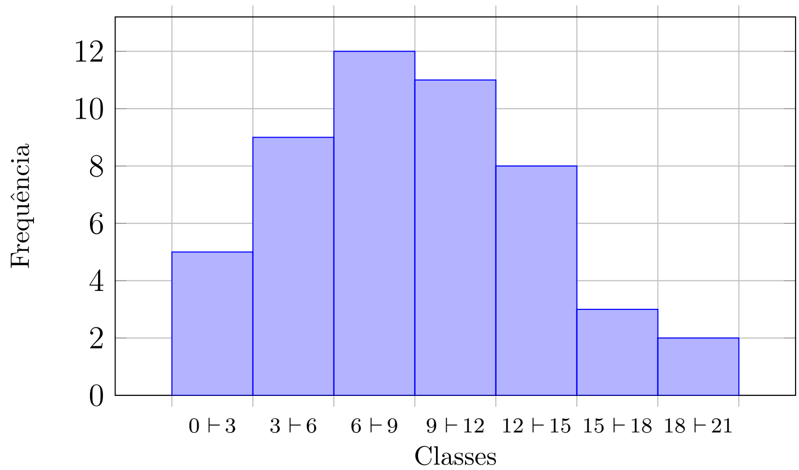
b) Clareza: o gráfico deve possibilitar uma correta interpretação dos valores representativos do fenômeno em estudo.

c) Veracidade: o gráfico deve ser a verdadeira expressão do fenômeno em estudo.

#### 1.3.2.2 HISTOGRAMA DE FREQUÊNCIAS

Este é um gráfico usado para apresentar dados organizados em intervalos de classes, utilizado principalmente para representar a distribuição de variáveis contínuas.

FIGURA 3 – HISTOGRAMA DE FREQUÊNCIAS DA VARIÁVEL ALEATÓRIA X

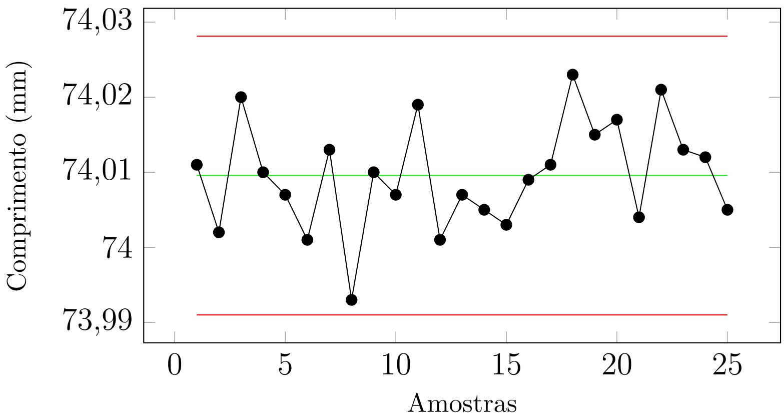



#### 1.3.2.3 GRÁFICO DE LINHAS

O gráfico de linhas é indicado para representar séries temporais ou sequência temporal, que é um conjunto de dados em que as observações são registradas na ordem em que elas ocorrem. Este tipo de gráfico é importante para a análise do controle de processo de produção e de séries temporais.

A seguir, a FIGURA 4 apresenta um exemplo de gráfico de média (Gráfico de $\overline{X}$ ) das medidas dos diâmetros internos (mm) de anéis de pistão de motores de automóveis, de 25 amostras de tamanho $n = 25$.

FIGURA 4 – GRÁFICO DE CONTROLE DE MÉDIAS




## 1.4 DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIAS

As distribuições de freqüências são usadas principalmente para a apresentação de grandes conjuntos de dados.

### 1.4.1 Dados Brutos: É o conjunto de dados numéricos obtidos e que ainda não foram organizados.

**Exemplo:** Observe o QUADRO 2 a seguir que apresenta as notas de quarenta e oito alunos de uma turma de Ciência de Dados na disciplina de Probabilidade e Estatística:

QUADRO 2 - NOTAS DE 48 ALUNOS DE CIÊNCIA DE DADOS NA DISCIPLINA DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA NO ANO DE 2023

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2,0 | 8,0 | 1,5 | 4,5 | 3,0 | 8,5 |
| 4,0 | 7,5 | 9,0 | 5,0 | 2,5 | 6,5 |
| 4,5 | 5,5 | 6,5 | 3,0 | 7,5 | 4,5 |
| 3,5 | 2,5 | 3,5 | 2,0 | 4,5 | 3,0 |
| 3,5 | 2,0 | 6,5 | 7,5 | 3,5 | 6,5 |
| 8,5 | 2,0 | 1,5 | 1,5 | 2,5 | 4,5 |
| 8,0 | 1,0 | 7,5 | 7,5 | 8,0 | 8,0 |
| 9,0 | 8,0 | 9,5 | 4,0 | 9,5 | 8,0 |

FONTE: Dados fictícios.

### 1.4.2 Rol: É o arranjo dos dados brutos em ordem crescente (ou decrescente).

**Exemplo:** Observe o QUADRO 3, a seguir, que apresenta o rol das notas de quarenta e oito alunos de uma turma de Ciência de Dadosna disciplina de Probabilidade e Estatística:

QUADRO 3 - ROL DAS NOTAS DE 48 ALUNOS DE CIÊNCIA DE DADOS NA DISCIPLINA DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA NO ANO DE 2023

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1,0 | 2,5 | 3,5 | 4,5 | 7,5 | 8,0 |
| 1,5 | 2,5 | 3,5 | 5,0 | 7,5 | 8,0 |
| 1,5 | 2,5 | 4,0 | 5,5 | 7,5 | 8,5 |
| 1,5 | 3,0 | 4,0 | 6,5 | 7,5 | 8,5 |
| 2,0 | 3,0 | 4,5 | 6,5 | 8,0 | 9,0 |
| 2,0 | 3,0 | 4,5 | 6,5 | 8,0 | 9,0 |
| 2,0 | 3,5 | 4,5 | 6,5 | 8,0 | 9,5 |
| 2,0 | 3,5 | 4,5 | 7,5 | 8,0 | 9,5 |

FONTE: Dados fictícios.

**1.4.3 Amplitude Total** ($AT$ )**:** É a diferença entre o maior e o menor dos valores observados.

$$AT = x_{(n)} - x_{(1)} \tag{1.1}$$

**Exemplo:** Para o conjunto de dados do exemplo anterior a amplitude total é

**1.4.4 Número de Classes** ($k$)**:** Pode ser determinado arbitrariamente ou de acordo com a expressão a seguir, denominada fórmula de Sturges, onde $n$ é o número de observações, ou tamanho da amostra.

$$k \simeq 1 + 3,322 \log_{10} n \tag{1.2}$$

**Exemplo:** Uma distribuição de frequências para os dados do QUADRO 3, de acordo com a fórmula de Sturges, terá

### 1.4.5 **Amplitude de Classe** $(A_i, h)$**:** Quando as classes tem amplitudes diferentes, podem ser calculadas as amplitudes de cada classe por:

$$A_i = LS - LI \tag{1.3}$$

Onde: $LS$ é o limite superior da classe e $LI$ é o limite inferior da classe.

Quando se deseja criar uma distribuição com classes de mesma amplitude, utiliza-se a equação abaixo:

$$A_i = \frac{AT}{k} \tag{1.4}$$

**Exemplo:** Para os dados dos exemplos anteriores, a amplitude de classe é

### 1.4.6 **Frequência:** É o número de vezes que determinado valor se repete.

Podemos, então, montar um novo quadro em que a cada valor associamos a sua freqüência:

QUADRO 4 - FREQUÊNCIAS DE NOTAS DE 48 ALUNOS DE CIÊNCIA DE DADOS NA DISCIPLINA DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA NO ANO DE 2023

| Notas | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 4,5 | 5,0 | 5,5 | 6,5 | 7,5 | 8,0 | 8,5 | 9,0 | 9,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Frequência | | | | | | | | | | | | | | | | |

FONTE: Dados fictícios.

### 1.4.7 **Frequências com Intervalos de Classes:** Os limites de cada classe podem ser definidos de quatro modos distintos, mostrados a seguir.

1. Intervalo "exclusive – exclusive":

2. Intervalo "inclusive – exclusive":

3. Intervalo "exclusive – inclusive":

4. Intervalo "inclusive – inclusive":

**Exemplo:** Para os dados utilizados como exemplo até agora, as classes e intervalos são:

TABELA 5 – DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIAS PARA AS NOTAS DE 48 ALUNOS DE CIÊNCIA DE DADOS NA DISCIPLINA DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA DE 2023

| **Classe** | **Notas** | **Frequência ($f_i$)** |
|---|---|---|
| 1 | 1,0 ⊢ 2,3 | |
| 2 | 2,3 ⊢ 3,6 | |
| 3 | 3,6 ⊢ 4,9 | |
| 4 | 4,9 ⊢ 6,2 | |
| 5 | 6,2 ⊢ 7,5 | |
| 6 | 7,5 ⊢ 8,8 | |
| 7 | 8,8 ⊢ 10,1 | |
| | **Total** | |

FONTE: Dados Fictícios.

**Exercícios:**

1. Qual o limite inferior da primeira classe da TABELA 5?

   RESPOSTA:

2. Qual o limite superior da quarta classe da TABELA 5?

   RESPOSTA:

3. Qual a amplitude da classe 6 da TABELA 5??

   RESPOSTA:

4. Qual a amplitude total dos dados da da TABELA 5?

   RESPOSTA:

5. Monte uma tabela de distribuição de frequências para os dados do QUADRO 4, tendo zero como limite inferior da primeira classe e a amplitude das classes igual a 2,0.

### 1.4.8 Elementos de uma distribuição

1. **Frequência simples($f_i$):** A freqüência simples da $i$–ésima classe é igual ao número do observações pertencentes à mesma.

   **Exemplo:** na TABELA 5: $f_1 = 8, f_2 = 10, ..., f_7 = 4$

2. **Frequência Acumulada($F_i$):** A frequência acumulada é a soma da frequência absoluta do valor $i$ assumida pela variável com todas as frequências absolutas anteriores.

$$F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j \tag{1.5}$$

   **Exemplo:** A frequência acumulada da quarta classe, na distribuição mostrada na Tabela 5, é

3. **Frequência Relativa($fr_i$):** A frequência relativa da $i$–ésima classe é dada por:

$$fr_i = \frac{f_i}{\sum f_i} \tag{1.6}$$

   **Exemplo:** A frequência relativa da sexta classe, na distribuição mostrada na Tabela 5, é

4. **Frequência Acumulada Relativa($Fr_i$):** é a divisão da frequência acumulada relativa de um elemento, pelo número total de elementos da série.

$$Fr_i = \frac{F_i}{\sum f_i} \tag{1.7}$$

   **Exemplo:** A frequência relativa da terceira classe, na distribuição mostrada na Tabela 5, é

5. **Ponto Médio de Classe** ($Pm_i, X_i$)**:** é a média aritmética de cada classe.

$$Pm_i = \frac{LS_i + LI_i}{2} \tag{1.8}$$

**Exemplo:** Seja $x$ a variável: número de cômodos das casas ocupadas por 20 famílias entrevistadas.

2 - 7 - 3 - 4 - 5 - 2 - 3 - 4 - 2 - 6

5 - 4 - 3 - 3 - 2 - 3 - 3 - 3 - 4 - 4

Com esses dados, monte uma tabela de distribuição e calcule as frequências.

TABELA 6 – NÚMERO DE CÔMODOS OCUPADOS - POR 20 FAMÍLIAS (20XY)

| x = nº de cômodos | $f_i$ | $F_i$ | $fr_i$ | $Fr_i$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| Total | | | | |

FONTE: Dados Fictícios.

**Exemplo:** Monte uma tabela de distribuição de frequências para os dados do QUADRO 4, tendo zero como limite inferior da primeira classe e a amplitude das classes igual a 2,0.

TABELA 7 – DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIAS PARA AS NOTAS DE 48 ALUNOS DE ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO NA DISCIPLINA DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA NO ANO DE 2019

| Notas | $f_i$ | $F_i$ | $fr_i$ | $Fr_i$ | $Pm_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| Total | | | | | |

FONTE: Dados Fictícios.

**Exercícios:**

1. O quadro abaixo apresenta as estaturas, em centímetros, de uma turma de 48 alunos do BIOPARK. Construir a tabela de distribuição de frequências em classes.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 182 | 164 | 180 | 186 | 167 | 171 | 161 | 180 |
| 176 | 174 | 165 | 180 | 185 | 172 | 165 | 174 |
| 179 | 163 | 177 | 170 | 186 | 186 | 186 | 171 |
| 160 | 166 | 187 | 162 | 163 | 166 | 167 | 187 |
| 174 | 169 | 175 | 161 | 182 | 183 | 160 | 186 |
| 174 | 176 | 188 | 169 | 173 | 160 | 161 | 183 |

2. Os dados abaixo representam as medidas de uma dimensão de uma peça (em mm) produzida por um processo de usinagem. Construir a tabela de distribuição de frequências em classes.

   102,8 - 136,4 - 110,1 - 115,9 - 118,5 - 149,3 - 125,3 - 144,8 - 129,7 - 132,7
   135,0 - 108,2 - 138,1 - 138,6 - 139,6 - 144,4 - 125,9 - 145,2 - 145,7 - 120,4

3. O tempo necessário para se realizar certa operação industrial foi cronometrado (em segundos), sendo feita 30 determinações:

   45 - 37 - 39 - 48 - 51 - 40 - 53 - 49 - 39 - 41 - 45 - 43 - 45 - 34 - 45
   41 - 57 - 38 - 46 - 46 - 58 - 57 - 36 - 58 - 35 - 31 - 59 - 44 - 57 - 35

   Construa a tabela de distribuição de frequências em classes.

4. Uma importante característica de qualidade da água é a concentração de material sólido suspenso. A seguir, são apresentadas 30 medidas de sólidos suspensos de um certo lago.

   42,4 - 65,7 - 29,8 - 58,7 - 52,1 - 55,8 - 57,0 - 68,7 - 67,3 - 67,3
   54,3 - 54,0 - 73,1 - 81,3 - 59,9 - 56,9 - 62,2 - 69,9 - 66,9 - 59,0
   56,3 - 43,3 - 57,4 - 45,3 - 80,1 - 49,7 - 42,8 - 42,4 - 59,6 - 65,8

   a) Construa a tabela de distribuição de frequências em classes com todas as frequências calculadas e ponto médio de cada classe.

   b) Construa o histograma de frequências.

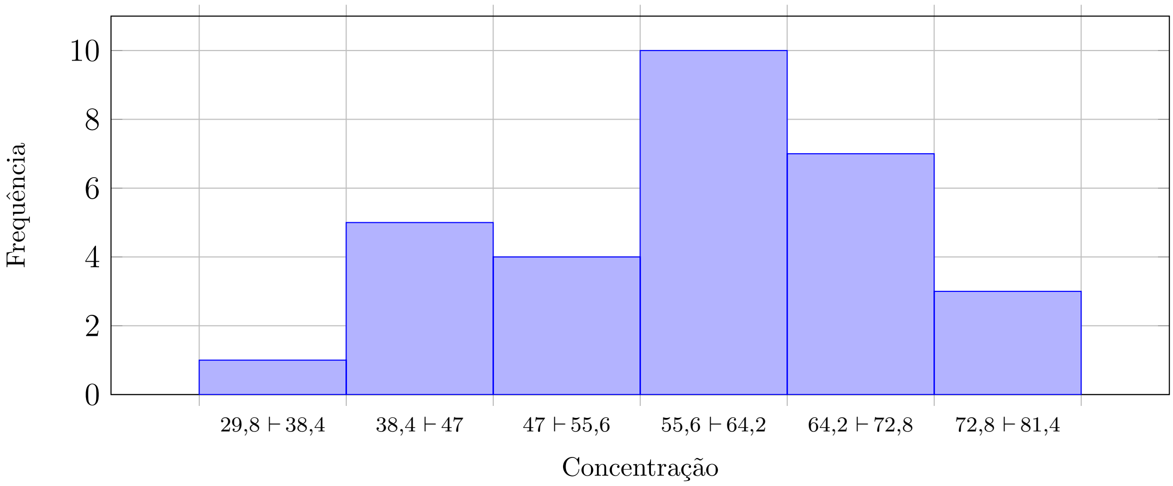
### 1.4.9 Histograma

O histograma é uma disposição visual da distribuição de frequências. Os estágios para construir um histograma são dados a seguir:

1. Marque os limites da célula (intervalos de classe) em um eixo horizontal.
2. Marque e nomeie o eixo vertical com as frequências relativas.
3. Acima de cada célula, desehe um retângulo em que a altura seja igual a frequência (ou frequência relativa) correspondente àquela célula.

**Exemplo:** Para os dados do exercício 4 da subseção anterior, o histograma de frequências é apresentado na FIGURA 5:

FIGURA 5 – HISTOGRAMA DOS DADOS DE CONCENTRAÇÃO DE MATERIAL SÓLIDO SUSPENSO NA ÁGUA DE CERTO LAGO




FONTE: Exercício 4 (subseção 1.4.8).

**Exercícios:**

1. Construa um histograma de frequências para os dados da tabela 7

2. Os transdutores de temperatura de um determinado tipo são enviados em lotes de 50. Uma amostra de 60 lotes foi selecionada e o número de transdutores fora das especificações em cada lote foi determinado, resultando nos dados a seguir:

2 - 1 - 2 - 4 - 0 - 1 - 3 - 2 - 0 - 5 - 3 - 3 - 1 - 3 - 2 - 4 - 7 - 0 - 2 - 3
0 - 4 - 2 - 1 - 3 - 1 - 1 - 3 - 4 - 1 - 2 - 3 - 2 - 2 - 8 - 4 - 5 - 1 - 3 - 1
5 - 0 - 2 - 3 - 2 - 1 - 0 - 6 - 4 - 2 - 1 - 6 - 0 - 3 - 3 - 3 - 6 - 1 - 2 - 3

a) Determine as frequências e frequências relativas dos valores observados de x = número de transdutores fora das especificações em um lote.

b) Que proporção de lotes na amostra possui no máximo cinco transdutores fora das especificações? Que proporção tem menos de cinco? Que proporção possui no mínimo cinco unidades fora das especificações?

c) Desenhe um histograma dos dados, usando a frequência relativa na escala vertical e comente suas características.

3. O número de partículas de contaminação de uma pastilha de silício antes de certo processo de limpeza foi determinado para cada pastilha em uma amostra de tamanho 100, resultando nas frequências a seguir:

FREQUÊNCIAS PARA O NÚMERO DE PARTÍCULAS CONTAMINADAS DE UMA PASTILHA DE SILÍCIO

| Nº de Partículas | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Frequência | 1 | 2 | 3 | 12 | 11 | 15 | 18 | 10 | 12 | 4 | 5 | 3 | 1 | 2 | 1 |

Fonte: Dados do exercício.

a) Que proporção das pastilhas da amostra tinha ao menos uma partícula? Ao menos cinco partículas?

b) Que proporção das pastilhas da amostra tinha entre cinco e 10 (inclusive) partículas? Estritamente entre cinco e 10 partículas?

c) Desenhe um histograma usando a frequência relativa no eixo vertical. Como você descreveria o formato do histograma?

4. Em um estudo de quebras de urdidura durante a tecelagem de tecidos, 100 amostras de fios foram testadas. O número de ciclos de esforço para quebra foi determinado para cada amostra de fio, resultando nos dados a seguir:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 86 | 146 | 251 | 653 | 98 | 249 | 400 | 292 | 131 | 169 |
| 175 | 176 | 76 | 264 | 15 | 364 | 195 | 262 | 88 | 264 |
| 157 | 220 | 42 | 321 | 180 | 198 | 38 | 20 | 61 | 121 |
| 282 | 224 | 149 | 180 | 325 | 250 | 196 | 90 | 229 | 166 |
| 38 | 337 | 65 | 151 | 341 | 40 | 40 | 135 | 597 | 246 |
| 211 | 180 | 93 | 315 | 353 | 571 | 124 | 279 | 81 | 186 |
| 497 | 182 | 423 | 185 | 229 | 400 | 338 | 290 | 398 | 71 |
| 246 | 185 | 188 | 568 | 55 | 55 | 61 | 244 | 20 | 284 |
| 393 | 396 | 203 | 829 | 239 | 236 | 286 | 194 | 277 | 143 |
| 198 | 264 | 105 | 203 | 124 | 137 | 135 | 350 | 193 | 188 |

a) Construa um histograma de freqüência relativa com base nos intervalos de classe $0 \vdash 100$, $100 \vdash 200$, ... e comente as características do histograma.

b) Construa um histograma com base nos seguintes intervalos de classe: $0 \vdash 50$, $50 \vdash 100$, $100 \vdash 150$, $150 \vdash 200$, $200 \vdash 300$, $300 \vdash 400$, $400 \vdash 500$, $500 \vdash 600$ e $600 \vdash 900$.

c) Se as especificações de tecelagem exigem um esforço de quebra de ao menos 100 ciclos, que proporção das amostras de fio dessa amostra deve ser considerada satisfatória?

## 1.5 MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

São medidas utilizadas principalmente para a descrição de dados. Neste caso o que se deseja encontrar são os valores representativos do conjunto de dados, de modo a resumir ao máximo as observações sobre os dados em questão. As principais medidas de posição são a **média aritmética**, a **mediana** e a **moda**. As definições, e algumas propriedades, destas medidas são brevemente descritas a seguir.

### 1.5.1 Esperança Matemátca ou Média Aritmética

A esperança matemática ou média aritmética de uma variável aleatória X é o centro de gravidade do conjunto de dados, e é definida como a soma de todos os valores da variável dividida pelo número de observações.

1. **Para dados simples**

a) A média aritmética populacional é dada pela expressão:

$$E(X) = \mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad (1.9)$$

b) A média aritmética amostral é obtida através da seguinte expressão:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1.10}$$

2. **Para dados agrupados em classes**

   Sendo $k$ é o número de classes; $Pm_i$ é o ponto médio de classe e $f_i$ é a frequência de classe.

   a) A média aritmética populacional é dada pela expressão:

$$E(X) = \mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} Pm_i f_i \tag{1.11}$$

   b) A média aritmética amostral é obtida através da seguinte expressão:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} Pm_i f_i \tag{1.12}$$

**A média e os valores extremos:** a média apresenta um grave problema, ela é fortemente influenciada pelos valores extremos. Por esta razão, deve-se fazer uma análise cuidadosa dos dados.

**Exemplos de aplicação:**

1. Suponha que um engenheiro esteja projetando um conector de nylon para ser usado em uma aplicação automotiva. O engenheiro estabelece como especificação do projeto uma espessura de 3/32 polegadas, mas está inseguro acerca do efeito dessa decisão na força da remoção do conector.

   Oito unidades do protótipo são produzidas e suas forças de remoção são medidas (em libras-força):

   12,6 - 12,9 - 13,4 - 12,3 - 13,6 - 13,5 - 12,6 - 13,1

   A média da força de remoção será:

2. Considere a seguinte distribuição:

TABELA 8 – DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIAS DO TEMPO NECESSÁRIO PARA REALIZAÇÃO DE CERTA OPERAÇÃO INDUSTRIAL

| Intervalo de Classes | $f_i$ | $fr_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|---|
| $31 \vdash 36$ | 4 | 0,13 | 4 |
| $36 \vdash 41$ | 6 | 0,20 | 10 |
| $41 \vdash 46$ | 8 | 0,27 | 18 |
| $46 \vdash 51$ | 4 | 0,13 | 22 |
| $51 \vdash 56$ | 2 | 0,07 | 24 |
| $56 \vdash 61$ | 6 | 0,20 | 30 |
| Total | 30 | 1,00 | ### |

FONTE: Dados Fictícios.

Calcular o tempo médio necessário para realizar a operação industrial.

| Intervalo de Classes | $f_i$ | $Pm_i$ | $Pm_i f_i$ |
|---|---|---|---|
| $31 \vdash 36$ | 4 | | |
| $36 \vdash 41$ | 6 | | |
| $41 \vdash 46$ | 8 | | |
| $46 \vdash 51$ | 4 | | |
| $51 \vdash 56$ | 2 | | |
| $56 \vdash 61$ | 6 | | |
| Total | 30 | | |

3. Seja a distribuição de frequências a seguir. Calcular a média das medidas da dimensão das peças.

TABELA 9 – DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIAS DAS MEDIDAS DE UMA DIMENSÃO DAS PEÇAS

| Intervalo de Classes | $f_i$ | $f_r$ | $F_i$ | $Pm_i$ | $Pm_i f_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $102{,}8 \vdash 112{,}8$ | 3 | 0,15 | 3 | | |
| $112{,}8 \vdash 122{,}8$ | 3 | 0,15 | 6 | | |
| $122{,}8 \vdash 132{,}8$ | 4 | 0,20 | 10 | | |
| $132{,}8 \vdash 142{,}8$ | 5 | 0,25 | 15 | | |
| $142{,}8 \vdash 152{,}8$ | 5 | 0,25 | 20 | | |
| Total | 20 | 1,00 | ### | | |

FONTE: Dados Fictícios.

### 1.5.2 Mediana ($Me$; $\tilde{X}$ )

Construindo um Rol, é uma medida de posição cujo número divide um conjunto de dados em duas partes iguais. Portanto, a mediana se localiza no centro de um conjunto de números ordenados segundo uma ordem de grandeza.

#### 1.5.2.1 Para dados discretos

Há duas situações que podem ocorrer, se o número de elemento é par ou ímpar.

1. Se o número de dados é **ímpar**, a mediana pertence a série

$$P = \frac{n+1}{2}$$

Onde: $P$ é a posição onde se encontra o valor da mediana; $n$ é o número de elementos da distribuição.

**Exemplo:** para os elementos dados, encontrar a mediana:

2 - 12 - 3 - 7 - 9 - 8 - 1

2. Se o número de dados é **par**, a mediana não é da série

$$P' = \frac{n}{2} \qquad\qquad P'' = \frac{n}{2} + 1$$

Me = média dos números indicados por $P'$ e $P''$

**Exemplo:** Consideremos os seguintes dados correspondentes aos comprimentos de 8 rolos de fio de aço: 65, 72, 70, 72, 60, 67, 69, 68.

#### 1.5.2.2 Dados agrupados em classes

Para dados agrupados em distribuições de freqüências pode-se utilizar para o cálculo da mediana a expressão:

$$Me = L_i + \left[\frac{(n/2) - F_{i-1}}{f_i}\right] h \tag{1.13}$$

onde: $L_i$ é o limite inferior da classe que contém a mediana;

$n$ é o número de elementos do conjunto de dados;

$F_{i-1}$ é a frequência acumulada da classe anterior a que contém a mediana;

$f_i$ é a frequência simples da classe que contém a mediana;

$h$ é o intervalo ou amplitude da classe que contém a mediana.

**Exemplo:** Seja a distribuição de frequências a seguir. Calcular a mediana das medidas da dimensão das peças.

TABELA 10 – DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIAS DAS MEDIDAS DE UMA DIMENSÃO DAS PEÇAS

| Intervalo de Classes | $f_i$ |
|---|---|
| 102,8 $\vdash$ 112,8 | 3 |
| 112,8 $\vdash$ 122,8 | 3 |
| 122,8 $\vdash$ 132,8 | 4 |
| 132,8 $\vdash$ 142,8 | 5 |
| 142,8 $\vdash$ 152,8 | 5 |
| Total | 20 |

FONTE: Dados Fictícios.

### 1.5.3 Moda ($Mo$)

A moda é o valor que apresenta maior frequência. Ela pode não existir (distribuição amodal), ter somente um valor (unimodal) ou pode ter dois ou mais (bimodal ou multimodal), principalmente quando a variável assume muitos valores.

**Exemplo: Para dados discretos**

Considerando-se as forças de remoção, medidas em uma amostra de oito unidades do protótipo (em libras-força):

12,6 - 12,9 - 13,4 - 12,3 - 13,6 - 13,5 - 12,6 - 13,1.

Para o exemplo tem-se que a moda é igual a            libras-força.

**Exemplo: Dados agrupados em classes**

$$Mo = 3Me - 2\overline{X} \text{ (Moda de Pearson)}$$

Onde: $Me$ é a mediana da distribuição de dados e $\overline{X}$ é a média da distribuição de dados.

**Exercícios:**

1. Calcule a média, mediana e a moda dos dados a seguir:

TABELA 11 – DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIAS DO TEMPO NECESSÁRIO PARA REALIZAÇÃO DE CERTA OPERAÇÃO INDUSTRIAL

| Intervalo de Classes | $f_i$ | $fr_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|---|
| $31 \vdash 36$ | 4 | 0,13 | 4 |
| $36 \vdash 41$ | 6 | 0,20 | 10 |
| $41 \vdash 46$ | 8 | 0,27 | 18 |
| $46 \vdash 51$ | 4 | 0,13 | 22 |
| $51 \vdash 56$ | 2 | 0,07 | 24 |
| $56 \vdash 61$ | 6 | 0,20 | 30 |
| Total | 30 | 1,00 | ### |

FONTE: Dados Fictícios.

2. Calcule a média, mediana e a moda dos dados a seguir:

TABELA 12 – DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIAS PARA AS NOTAS DE 48 ALUNOS DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO NA DISCIPLINA DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA NO ANO DE 2019

| **Classe** | **Notas** | $f_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 1,0 $\vdash$ 2,3 | 8 |
| 2 | 2,3 $\vdash$ 3,6 | 10 |
| 3 | 3,6 $\vdash$ 4,9 | 7 |
| 4 | 4,9 $\vdash$ 6,2 | 2 |
| 5 | 6,2 $\vdash$ 7,5 | 4 |
| 6 | 7,5 $\vdash$ 8,8 | 13 |
| 7 | 8,8 $\vdash$ 10,1 | 4 |
| | **Total** | 48 |

FONTE: Dados Fictícios.

3. Calcule a média, mediana e a moda dos dados a seguir:

TABELA 13 – NÚMERO DE CÔMODOS OCUPADOS - POR 20 FAMÍLIAS (20XY)

| x = nº de cômodos | $f_i$ | $F_i$ | $fr_i$ | $Fr_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 4 | 0,20 | 0,20 |
| 3 | 7 | 11 | 0,35 | 0,55 |
| 4 | 5 | 16 | 0,25 | 0,80 |
| 5 | 2 | 18 | 0,10 | 0,90 |
| 6 | 1 | 19 | 0,05 | 0,95 |
| 7 | 1 | 20 | 0,05 | 1,00 |
| Total | 20 | ### | 1,00 | ### |

FONTE: Dados Fictícios.

## 1.6 MEDIDAS DE DISPERSÃO

Para descrever adequadamente a distribuição de frequências de uma variável quantitativa, além da informação do valor representativo da variável (tendência central), é necessário dizer também o quanto estes valores variam, ou seja, o quanto eles são dispersos. Somente a informação sobre a tendência central de um conjunto de dados não consegue representá-lo adequadamente. As medidas de dispersão medem o grau de variabilidade ou dispersão dos dados.

### 1.6.1 VARIÂNCIA E DESVIO PADRÃO

A variância da variável aleatória, representada por $V(X)$ ou $\sigma^2$, é obtida elevando-se os desvios em relação à média ao quadrado. Quando se extrai a raiz quadrada da variância, tem-se o desvio padrão.

#### 1.6.1.1 Para dados simples:

A variância e o desvio padrão amostral são obtidas pelas expressões 1.14 e 1.15, respectivamente:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2 \tag{1.14}$$

$$S = \sqrt{S^2} \tag{1.15}$$

**Exemplo:** Considerando o exemplo abaixo, tem-se

QUADRO 5 - VALORES DA VARIÁVEL X E DESVIOS SIMPLES E QUADRÁTICOS EM RELAÇÃO À MÉDIA

| $x_i$ | $x_i - \overline{X}$ | $(x_i - \overline{X})^2$ |
|---|---|---|
| 12,3 | | |
| 12,6 | | |
| 12,6 | | |
| 12,9 | | |
| 13,1 | | |
| 13,4 | | |
| 13,5 | | |
| 13,6 | | |
| 15,0 | | |
| $\sum$ | | |

#### 1.6.1.2 Para dados agrupados em classes:

A variância e o desvio padrão amostral são obtidas pelas expressões 1.16 e 1.17, respectivamente:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(Pm_i - \overline{X})^2 f_i \tag{1.16}$$

$$S = \sqrt{S^2} \tag{1.17}$$

**Exemplo:** Seja a distribuição de frequências a seguir. Calcular a variância e o desvio padrão.

TABELA 14 – DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIAS PARA AS NOTAS DE 48 ALUNOS DE CIÊNCIA DE DADOS NA DISCIPLINA DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA NO ANO DE 2023

| Notas | $f_i$ | $F_i$ | $fr_i$ | $Fr_i$ | $Pm_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $0 \vdash 2$ | 4 | 4 | 0,08 | 0,08 | 1 |
| $2 \vdash 4$ | 14 | 18 | 0,29 | 0,38 | 3 |
| $4 \vdash 6$ | 9 | 27 | 0,19 | 0,56 | 5 |
| $6 \vdash 8$ | 9 | 36 | 0,19 | 0,75 | 7 |
| $8 \vdash 10$ | 12 | 48 | 0,25 | 1,00 | 9 |
| Total | 48 | ### | 1,00 | ### | ### |

FONTE: Dados Fictícios.

**Exercício:** Seja a distribuição de frequências a seguir. Calcular a variância e o desvio padrão.

TABELA 15 – NÚMERO DE CÔMODOS OCUPADOS - POR 20 FAMÍLIAS (20XY)

| x = nº de cômodos | $f_i$ | $F_i$ | $fr_i$ | $Fr_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 4 | 0,20 | 0,20 |
| 3 | 7 | 11 | 0,35 | 0,55 |
| 4 | 5 | 16 | 0,25 | 0,80 |
| 5 | 2 | 18 | 0,10 | 0,90 |
| 6 | 1 | 19 | 0,05 | 0,95 |
| 7 | 1 | 20 | 0,05 | 1,00 |
| Total | 20 | ### | 1,00 | ### |

FONTE: Dados Fictícios.

#### 1.6.1.3 Coeficiente de variação ($CV$)

É a estatística utilizada quando se deseja comparar a variação de conjuntos de observações que diferem na média ou são medidos em grandezas diferentes (unidades de medida diferentes).

O $CV$ é o desvio padrão expresso como uma porcentagem média

$$CV = 100\,\frac{S}{\overline{X}}\,\% \tag{1.18}$$

**Exemplo:** Calcule o C.V. dos dados abaixo

a) $3 - 7 - 2 - 4 - 8 - 3$

b) $16 - 16 - 16 - 16 - 16$

**Exercícios**

1. A média de salários anuais da cidade $A$ é de R$ 27.000,00 com desvio padrão de R$ 1.500,00. A cidade $B$ possui uma média de salários anuais por trabalhador de R$ 32.000,00 com desvio padrão de R$ 1.700,00. Qual a cidade que possui menor dispersão salarial?

2. Separe os dados do QUADRO 3, na página 9, em dois grupos: Os aprovados ($\geq 6,0$) e os reprovados.

   a) Calcule a média, mediana e moda dos dois grupos.

   b) Comparando os dois grupos, qual possui maior dispersão nas notas?

### 1.6.2 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1. O tempo necessário para se realizar certa operação industrial foi cronometrado (em segundos), sendo feita 40 determinações:

   45 - 37 - 39 - 48 - 51 - 40 - 53 - 49 - 39 - 41
   45 - 43 - 45 – 34 - 45 - 35 - 41 - 57 - 38 - 46
   46 - 58 - 57 - 36 - 58 - 35 - 31 - 59 - 44 - 57
   45 - 44 - 38 - 43 - 33 - 56 - 47 - 48 - 44 - 49

   a) construir a distribuição de frequências em classes;

   b) calcular as frequências relativa e acumulada;

   c) construir o histograma de frequências.

2. Foram obtidas oito medidas do diâmetro interno de anéis de pistão forjados de um motor de um automóvel. Os dados (em mm) são:

   74,001 - 74,003 - 74,015 - 74,000 - 74,005 - 74,002 - 74,005 - 74,004

   Calcule a média, a mediana, a moda, a variância e o desvio padrão da amostra.

3. O pH de uma solução é medido oito vezes por uma operadora que usa o mesmo instrumento. Ela obteve os seguintes dados:

   7,15 - 7,20 - 7,18 - 7,19 - 7,21 - 7,20 -7,16 - 7,18

   Faça uma análise estatística dos dados e comente.

4. Uma carga de incêndio (MJ/m2) é a energia térmica que pode ser liberada por metro quadrado de área de piso pela combustão de seu conteúdo e da estrutura em si. O artigo "*Fire Loads in Office Buildings*"(J. of Structural Engr. , 1997, p. 365-368) forneceu as seguintes porcentagens acumuladas (lidas de um gráfico) relativas a cargas de incêndio em uma amostra de 388 salas:

| Valor | 0 | 150 | 300 | 450 | 600 | 750 | 900 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| % Acumulada | 0 | 19,3 | 37,6 | 62,7 | 77,5 | 87,2 | 93,8 |
| Valor | 1050 | 1200 | 1350 | 1500 | 1650 | 1800 | 1950 |
| % Acumulada | 95,7 | 98,6 | 99,1 | 99,5 | 99,6 | 99,8 | 100,0 |

   a) Construa um histograma de frequência relativa e comente as características interessantes.

   b) Que proporção das cargas de incêndio é inferior a 600? Maior ou igual a 1200?

   c) Que proporção das cargas está entre 600 e 1200?

5. Um **Diagrama de Pareto** é uma variação de um histograma para dados categorizados resultantes de um estudo de controle de qualidade. Cada categoria representa um tipo diferente de não-conformidade de produto ou problema de produção. As categorias são ordenadas de forma que aquela com maior frequência seja exibida na extremidade esquerda, seguida pela categoria com a segunda maior frequência e assim por diante. Suponha que as informações a seguir tenham sido obtidas sobre não-conformidades em pacotes de circuitos: componentes com falha, 126; componentes incorretos, 210; soldas insuficientes, 67; soldas em excesso, 54; falta de componentes, 131. Construa um Diagrama de Pareto.

6. A propagação de trincas por fadiga em diversas peças de aeronaves tem sido objeto de muitos estudos nos últimos anos. Os dados a seguir consistem dos tempos de propagação (horas de vôo/$10^4$) para atingir um determinado tamanho de trinca em furos de fixadores propostos para uso em aeronaves militares("*Statistical Crack Propagation in Fastener Holes under Spectrum Loading*", J. Aircraft, 1983, p. 1028-1032):

   0,736 - 0,863 - 0,865 - 0,913 - 0,915 - 0,937 - 0,983 - 1,007
   1,011 - 1,064 - 1,109 - 1,132 - 1,140 - 1,153 - 1,253 - 1,394

   a) Calcule e compare os valores da média e da mediana amostrais.
   b) Em quanto a maior observação da amostra pode ser diminuída sem afetar o valor da mediana?

7. Calcule e interprete os valores da mediana amostral, da média amostral e do desvio padrão amostral das observações a seguir da resistência à ruptura (MPa, lidas de um gráfiep de "*Heat-Resistant Aclive Brazing of Silicon Nitride: Mechanical Evaluation of Braze Joints*", Welding J., August, 1 997):

   87 - 93 - 96 - 98 - 105 - 114 - 128 - 131 - 142 - 168

8. O número de partículas de contaminação de uma pastilha de silício antes de certo processo de limpeza foi determinado para cada pastilha em uma amostra de tamanho 100, resultando nas frequências a seguir:

   FREQUÊNCIAS PARA O NÚMERO DE PARTÍCULAS CONTAMINADAS DE UMA PASTILHA DE SILÍCIO

| Nº de Partículas | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Frequência Simples | 1 | 2 | 3 | 12 | 11 | 15 | 18 | 10 | 12 | 4 | 5 | 3 | 1 | 2 | 1 |

   Fonte: Dados do exercício.

   Calcule a média, moda, mediana e o desvio padrão do número de partículas de silício.

# 2 PROBABILIDADE

O termo **probabilidade** se refere ao estudo da aleatoriedade e da incerteza.

As origens históricas da teoria das probabilidades estão vinculadas à teoria dos jogos e aos nomes de Fermat e Pascal, que na metade do século XVII formalizaram pela primeira vez o conceito de probabilidade. Falamos aqui de história escrita (mesmo que isto seja uma redundância), já que existem indícios o trabalho de Fermat e Pascal consolidou ideias que foram desenvolvidas a partir do século XII.

No decorrer do tempo a teoria das probabilidades foi superando o marco original da teoria dos jogos para constituir na atualidade um ramo da matemática pura com aplicações nas ciências de um modo geral.

Muitos livros se dedicam exclusivamente à probabilidade, mas nosso objetivo é cobrir apenas a parte da disciplina que tem maior ligação com os problemas de inferência estatística.

## 2.1 TÉCNICAS DE CONTAGEM

### 2.1.1 Princípio Fundamental da Contagem

O princípio fundamental da contagem diz que um evento que ocorre em $n$ situações independentes e sucessivas, tendo a primeira situação ocorrendo de $m_1$ maneiras, a segunda situação ocorrendo de $m_2$ maneiras e assim sucessivamente até a $n$-ésima situação ocorrendo de $m_n$ maneiras, temos que o número total de ocorrências será dado pelo produto:

$$m_1 \times m_2 \times ... \times m_n$$

**Exemplo:** De quantas formas podemos dispor as letras da palavra FLUOR de sorte que a última letra seja sempre a letra R?

**Exercícios**

1. Seja um experimento que consiste em lançar um dado e, na sequência, uma moeda. Qual o número de possíveis resultados ao ser feito o experimento?

2. No Brasil, as placas de automóveis são formadas por três letras seguidas por quatro algarismos. Usando o alfabeto de 26 letras, quantas placas diferentes são possíveis formar?

3. Quantas placas com três letras seguidas de quatro algarismos podem ser confeccionadas,sabendo que nenhuma placa possui quatro algarismos iguais a zero

4. Uma moeda é lançada para o alto. Ao cair mostrará cara ou coroa. Se jogarmos a moeda 3 vezes, quantos serão os resultados possíveis?

5. Uma prova possui 5 questões de múltipla escolha, onde cada uma possui 4 opções distintas. De quantas maneiras a prova pode ser resolvida?

6. Quantos números de três algarismos distintos existem?

7. Cinco cavalos disputam um páreo. Qualo número de resultados possíveis para os três primeiros lugares?

8. Quantas comissões de dois membros podemos formar com os alunos Brenda, Fagner, Moises e Natan?

### 2.1.2 Fatorial

Seja $n$ um número inteiro positivo. O fatorial de $n$ é dado por:

$$n! = \begin{cases} n(n-1)(n-2)...1 & \text{se} \quad n \geq 2 \\ 1 & \text{se} \quad n = 1 \text{ ou } n = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

**Exemplo:**

**Exercícios**

1. Desenvolva:

   a) $(k-1)!$

   b) $\frac{12!}{9!}$

2. Resolva

   a) $(2x-5)! = 720$

   b) $(x+6)! = 120$

   c) $(3x-2)! = 24$

3. Simplifique:

   a) $\frac{8!}{6!}$

   b) $\frac{11!}{3!8!}$

   c) $\frac{n!}{(n-2)!}$

   d) $\frac{(n+1)!-(n+1)(n-1)!}{n!+(n-1)!}$

   e) $\frac{(n+2)!-(n+1)!}{(n+2)n!-n!}$

### 2.1.3 Permutação

Uma **permutação** de $n$ elementos distintos é um agrupamento ordenado desses elementos. Pode ser calculada pela fórmula $P_n = n!$ a deve ser utilizada quando você quiser contar quantas possibilidades existem de se organizar um número de objetos de forma distinta.

**Exemplo:** : O número de anagramas da palavra LIVRO é uma permutação de 5 elementos, calculada através de $5! = 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 120$, pois para a primeira posição você pode colocar 5 letras; para a segunda, restaram 4, para a terceira, 3 e assim por diante.

Um conjunto qualquer pode apresentar **elementos repetidos**. As permutações desse conjunto devem considerar a repetição desses elementos, pois, a ordem em que eles aparecem não importa, diferentemente da ordem dos outros elementos do conjunto. Se trocarmos apenas os dois "A"de lugar na palavra AMAR, obteremos a mesma palavra. Palavras iguais não são permutações, por isso, essa repetição deve ser subtraída na fórmula para as permutações.

Para subtrair todas as repetições possíveis de elementos em uma permutação com elementos repetidos, devemos fazer o seguinte:

Seja $A$ um conjunto com $n$ elementos, dos quais $j$ elementos repetem-se. A fórmula para o cálculo das permutações de A é:

$$P_n^j = \frac{n!}{j!} \tag{2.2}$$

Se um conjunto $A$, com $n$ elementos, possui $j$ repetições de um elemento, $k$ repetições de outro, ... , $m$ repetições de outro, a fórmula assume a seguinte forma:

$$P_n^{j,k,...m} = \frac{n!}{j!k!...m!} \tag{2.3}$$

**Exemplo:** Calcule o número de anagramas da palavra MATEMÁTICA.

#### Exercícios

1. Calcular o número de anagramas da palavra FLORESTA.
2. Calcular o número de anagramas da palavra COMPUTAÇÃO.
3. Calcular o número de anagramas da palavra PARANÁ.

### 2.1.4 Arranjo Simples

Um arranjo de $n$ elementos dispostos $p$ a $p$, com $p$ menor ou igual a $n$, é uma escolha de $p$ entre esses $n$ objetos na qual a ordem importa. Sua fórmula é dada por

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \tag{2.4}$$

O exemplo mais clássico de arranjo é o pódio: em uma competição de 20 jogadores, quantas são as possibilidades de se formar um pódio com os três primeiros lugares?

**Exercícios**

1. Numa sala com 10 pessoas, vai-se selecionar aleatoriamente 4 pessoas para se colocar numa fila de atendimento. De quantas maneiras isso pode ser feito?

2. Sejam os algarismos 1 , 2 , ... , 8 , 9. Quantos números com três dígitos podem ser formados a partir dos algarismos dados ?

3. Em uma empresa, quinze funcionários se candidataram para as vagas de diretor e vice-diretor financeiro. Eles serão escolhidos através do voto individual dos membros do conselho da empresa. Quantas maneiras distintas essa escolha pode ser feita?

### 2.1.5 Combinação

A combinação simples pode ser definida como sendo um agrupamento dos elementos de um conjunto em subconjuntos. Na combinação a ordem dos elementos não é considerada na formação dos subconjuntos, ou seja, o subconjunto A, B e B, A são iguais, devendo ser considerado uma única vez na contagem da quantidade de combinações. A fórmula geral para encontrar as quantidades de combinações simples de um conjunto é representada por:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \tag{2.5}$$

onde: $n$ é o número de elementos do conjunto;

$p$ é a quantidade de elementos do subconjunto.

**Exemplo:** Calcule

1. $C_{10,5}$
2. $C_{x,2} = 15$
3. $C_{n,2} + 2\,C_{n,1} = 9$

**Exercícios**

1. Um Departamento é composto por 25 professores titulares, 15 professores adjuntos e 35 professores assistentes. Uma comissão de 6 membros deve ser selecionada ao acaso do corpo discente do Departamento. Determine:

    a) O número de comissões distintas que podem ser formadas com esses professores;

    b) O número de comissões que podem ser constituídas somente com professores assistentes;

2. Com algarismos de 1 a 9, sem repeti-los, quantos números de 3 algarismos pares e 2 algarismos ímpares podem ser formados?

3. O Truco é um popular jogo de cartas praticado em diversos locais da América do Sul e algumas regiões da Espanha e Itália. É jogado com o baralho espanhol, por dois, quatro ou seis jogadores, divididos em dois lados opostos. No Brasil geralmente é jogado com o baralho francês, exceto pela variante praticada na Região Sul, que usa o Baralho espanhol. Cada jogador recebe três cartas que são de um subconjunto do baralho constituído pelos números 1 a 7, a dama, no valor de 8, o valete ou o Cavalo, no valor de 9 e o Rei, no valor de 10. Os valores das cartas se repetem em 4 naipes, sendo eles: ouro ($\diamondsuit$), espada ($\spadesuit$), copa ($\heartsuit$) e paus ($\clubsuit$). Quantas combinações diferentes de cartas um jogador pode ter?

4. Uma loteria consiste em 60 números, numerados de 1 a 60, entre os quais o apostador deve escolher seis. De quantos modos é possível escolher os seis números?

5. Um baralho completo possui 52 cartas, divididas em quatro grupos iguais (naipes). Deste baralho são retiradas cinco cartas. Quantos resultados são possíveis?

## 2.2 ELEMENTOS DE PROBABILIDADE

### 2.2.1 Experimento aleatório (E)

Um experimento que pode fornecer diferentes resultados, muito embora seja repetido toda vez da mesma maneira, é chamado de um **experimento aleatório**.

**Exemplo:** Lançamento de um dado.

**Exemplo:** Medição da corrente elétrica em dias diferentes.

**Exemplo:** Em uma linha de produção, fabrica-se peças em série e conta-se o número de peças defeituosas produzidas em um período de 24 horas.

### 2.2.2 Espaço Amostral ($\Omega$)

O **espaço amostral** de um experimento realizado sob condições fixas, é o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento, entendendo-se por resultado possível todo resultado elementar e indivisível do experimento.

**Exemplos:**

a) Inspecionar uma peça de automóvel.

b) Tomar uma válvula eletrônica e verificar o tempo de vida útil.

c) Lançamento de um dado equilibrado.

**Exercícios** Dar o espaço amostral para cada experimento abaixo

1. Uma letra é escolhida entre as letras da palavra ENGENHARIA

2. Uma urna contém volas vermelhas (V), bolas brancas (B) e bolas azuis (A). Uma bola é extraída e observada sua cor.

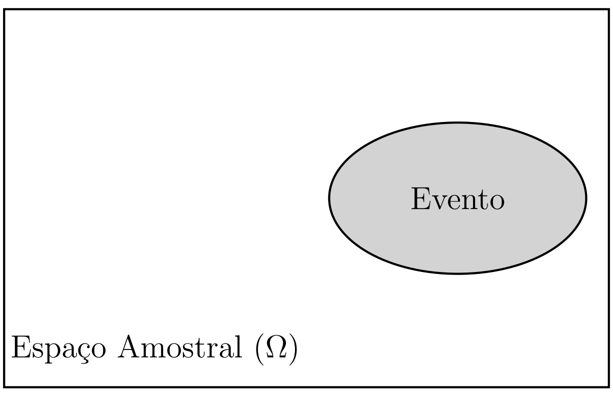
3. Uma urna tem 50 bolinhas numeradas de 1 a 50. Uma bolinha é extrída e observado seu número.

4. Uma urna contém 5 bolas vermelhas (V) e 2 bolas brancas (B). Duas bolas são extraídas, sem reposição, e obervada suas cores, na sequência que forem extraídas.

5. Um casal planeja ter 3 filhos. Observa-se a sequência do sexo dos 3 filhos.

### 2.2.3 Evento

É um subconjunto do espaço amostral $\Omega$ de um experimento aleatório. Em geral, indicamos um evento por uma letra maiúscula do alfabeto.



**Exemplo:** Um dado é lançado e observa-se o número da face de cima. Descreva os eventos:

1. A ocorrência de número ímpar.
2. A ocorrência de número primo.
3. A ocorrência de número menor que 4.
4. A ocorrência de número menor que 7.
5. A ocorrência de número maior ou igual a 7.

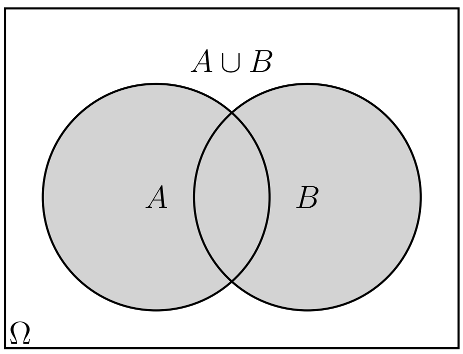
**Exercícios**

Descreva os eventos abaixo.

1. Uma moeda é lançada 3 vezes e observa-se a sequênca de caras e coroas.
   a) Ocorrência de cara (K) no 1º lançamento.
   b) Ocorrência de, exatamente, uma coroa (C).
   c) Ocorrência de, no máximo, duas coroas (C).
   d) Ocorrência de, pelo menos, duas caras (K).
2. De um grupo de 5 operários $(a, b, c, d, e)$ são formadas comissões de três operários. Descreva os eventos
   a) O operário $a$ não faz parte da comissão.
   b) O operário $a$ sempre faz parte da comissão.

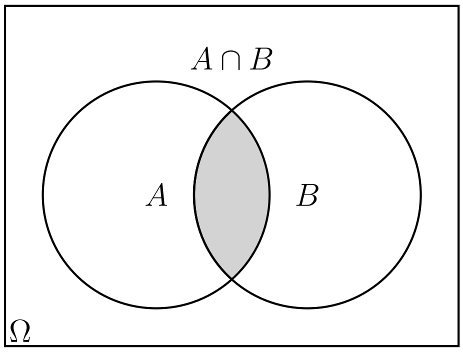
#### 2.2.3.1 União de dois eventos

Sejam $A$ e $B$ dois eventos, então $A \cup B$ será também um evento que ocorrerá se, e somente se, A ou B (ou ambos) ocorrem. Dizemos que $A \cup B$ é a únião entre o evento $A$ e o evento $B$.



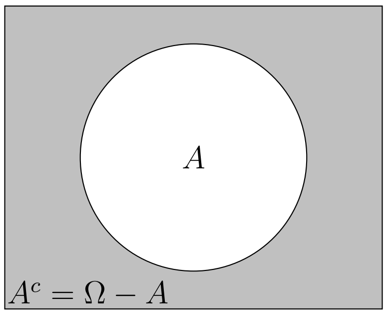
#### 2.2.3.2 Interseção de dois eventos

Sejam $A$ e $B$ dois eventos, então $A \cap B$ será também um evento que ocorrerá se, e somente se, A e B ocorrerem simultaneamente. Dizemos que $A \cap B$ é a interseção entre o evento $A$ e o evento $B$. Em particular, se $A \cap B = \emptyset$, $A$ e $B$ são chamados de eventos **mutuamente exclusivos**.




#### 2.2.3.3 Complementar de um evento

Seja $A$ um evento. Então $A^c$ será também um evento que ocorrerá se, e somente se, $A$ não ocorrer. Disemos que $A^c$ é o evento comlementar de A.




**Exemplo:** Um dado é lançado e obserdo o número da face de cima. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Sejam os eventos independentes:

A: ocorrência de um número par.

B: ocorrência de um número maior ou igual a 4.

C: ocorrência de um número ímpar.

então temos:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A \cap C$

d) $A^c$

e) $B^c$

f) $A \cup C$

**Exercícios**

1. Um departamento acadêmico terminou a votação secreta para sua chefia. A urna contém quatro cédulas com votos para o candidato $A$ e três com votos para o candidato $B$. Suponha que essas cédulas sejam removidas da urna uma a uma.

   a) Relacione todos os resultados possíveis.

   b) Suponha que uma contagem seja feita conforme as cédulas são removidas. Para que resultados A se mantém na frente de B na contagem?

2. Suponha que os veículos que trafegam em uma determinada estrada possam tomar uma saída à direita (D), à esquerda (E) ou ir em frente (F). Observe a direção de cada um de três veículos sucessivamente.

   a) Relacione todos os resultados do evento $A$ em que os três veículos seguem na mesma direção.

   b) Relacione todos os resultados do evento $B$ em que os três veículos tomam diferentes direções.

   c) Relacione os resultados do evento $C$ em que exatamente dois dos três veículos viram à direita.

   d) Relacione todos os resultados do evento $D$ em que exatamente dois veículos seguem na mesma direção.

   e) Relacione os resultados em $D^c, C \cup D$ e $C \cap D$

3. Quatro universidades - 1, 2, 3 e 4 - estão participando de um torneio de basquete. Na *primeira etapa*, 1 jogará com 2 e 3 com 4. Os dois vencedores disputarão o campeonato e os dois perdedores também jogarão. Um resultado possível pode ser representado por 1324 (1 ganha de 2 e 3 ganha de 4 nos jogos da *primeira etapa* e 1 ganha de 3 e 2 ganha de 4).

   a) Relacione todos os resultados de $\Omega$.

   b) Represente por $A$ o evento em que 1 ganha o torneio. Relacione os resultados de $A$.

   c) Represente por $B$ o evento em que 2 seja um dos finalistas do campeonato. Relacione os resultados de $B$.

   d) Quais são os resultados de $A \cup B$ e de $A \cap B$? Quais são os resultados de $A^c$?

## 2.3 DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES DE PROBABILIDADE

Dados um experimento e um espaço amostral $\Omega$, o objetivo da probabilidade é atribuir a cada evento $A$ um número $P(A)$, denominado probabilidade do evento $A$, que fornecerá uma medida precisa da chance de ocorrência de $A$.

### 2.3.1 Definição clássica de Probabilidade

Seja $A$ um subconjunto do espaço amostral $\Omega$. Então, se todos os resultados elementares de $\Omega$ são equiprováveis, a medida da probabilidade de ocorrência do evento A é dada por:

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos em } A}{\text{número de elementos em } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \tag{2.6}$$

### 2.3.2 Definição axiomática de Probabilidade

Seja o espaço amostral $\Omega$ associado a um certo experimento. $A$ cada evento associa-se um número real representado por $P(A)$ , chamado de probabilidade de $A$, satisfazendo as propriedades:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Se $A$ e $B$ são eventos mutuamente exclusivos, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

**Exemplo:** Uma moeda é lançada e observada a face de cima. Qual a probabilidade de observar cara $(K)$?

**Exercícios**

1. Um dado é lançado e observado o número da face de cima. Determine as probabilidades:

   a) $A =$ ocorrência de um número ímpar;
   b) $B =$ ocorrência de um número maior igual a 3;

2. Qual a probabilidade de acidentes de trabalho, por ano, em uma determinada indústria se uma amostra aleatória de 10 firmas, que empregam um total de 8.000 pessoas, mostrou que ocorreram 400 acidentes de trabalho durante os últimos doze meses?

3. Um baralho tem 52 cartas, das quais 4 são reis e 4 são valetes. Retira-se uma carta ao acaso. Determine a probabilidade de:

   a) de ser retirado um rei.

   b) não ser retirado um valete.

4. Uma urna contém 30 bolinhas numeradas de 1 a 30. Retirando-se ao acaso uma bolinha da urna, qual a probabilidade de essa bolinha ter um número múltiplo de 4?

5. Em um baralho de truco, qual a probabilidade da primeira carta retirada ser um três de paus?

### 2.3.3 Teoremas de Probabilidade

**Teorema 1:** Se $\emptyset$ for o conjunto vazio, então

$$P(\emptyset) =$$

**Teorema 2:** Se $A^c$ for o evento complementar de $A$, então

$$P(A) =$$

**Teorema 3:** Se $A$ e $B$ forem dois eventos quaisquer, então

**Teorema 4:** Se $A$ e $B$ forem mutuamente exclusivos, então

$$P(A \cap B) =$$

**Exemplo:** Numa urna existem 10 bolas numeradas de 1 a 10. Retirando uma bola ao acaso, qual a probabilidade de ocorrer múltiplos de 2 ou múltiplos de 3?

### 2.3.4 Eventos Independentes

Sejam $A$ e $B$ dois eventos de um espaço amostral $\Omega$, observados em sequência. Diz-se que ambos são independentes quando a ocorrência, ou não, do primeiro não afeta a probabilidade de ocorrência do outro, ou seja, $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$. Neste caso:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

**Exemplo:** Um dado é lançado duas vezes. Qual a probabilidade de obter os resultados 4 e 5?

**Exercícios**

1. Cada uma de 2 pessoas joga três moedas equilibradas. Qual é a probabilidade de que elas obtenham o mesmo número de caras?
2. Um dado é lançado e, independentemente, uma carta é extraída de um baralho completo (52 cartas). Qual será a probabilidade de que:
   a) O dado mostre um número PAR e a carta seja de naipe VERMELHO?
   b) O dado mostre um númeor PAR ou a carta seja de naipe VERMELHO?

### 2.3.5 Probabilidade Condicional

**Definição:** Para quaisquer dois eventos $A$ e $B$ com $P(B) > 0$, a probabilidade condicional de $A$ dado que ocorreu $B$ é definida por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{2.7}$$

**Exemplo:** Suponha que, de todos os indivíduos que compram uma determinada câmera digital, 60% incluem um cartão de memória opcional na compra, 40% incluem uma pilha extra e 30% incluem um cartão e uma pilha. Considere a seleção aleatória de um comprador e sejam $A = \{\text{compra de cartão de memória}\}$ e $B = \{\text{compra de pilha}\}$. Dessa forma, $P(A) = 0,60$, $P(B) = 0,40$ e $P(\text{compra de ambos}) = P(A \cap B) = 0,30$. Dado que o indivíduo selecionado comprou uma pilha extra, a probabilidade de compra de um cartão opcional é

De forma análoga,

$$P(\text{Pilha} \mid \text{Cartão de memória}) =$$

**Exemplo:** O quadro a seguir fornece um exemplo de 400 itens classificados por falhas na superfície e como defeituosos (funcionalmente).

QUADRO 6 - CLASSIFICAÇÃO DE 400 ITENS DE UMA EMPRESA EM PERÍODO FICTÍCIO

| DEFEITUOSO | FALHAS NA SUPERFÍCIE | | |
|---|---|---|---|
| | Sim | Não | TOTAL |
| Sim | 10 | 18 | 28 |
| Não | 30 | 342 | 372 |
| TOTAL | 40 | 360 | 400 |

(a) Qual é a probabilidade do item ser defeituoso, dado que apresenta falhas na superfície?

(b) Qual é a probabilidade de ter falhas na superfície dado que é defeituoso?

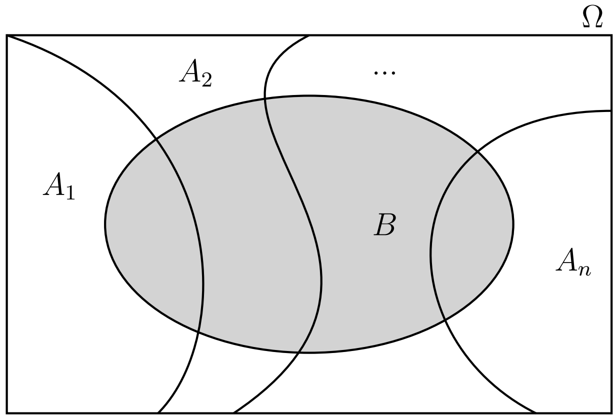
A **Probabilidade Condicional** pode assumir a forma abaixo, chamada algumas vezes de **teorema da multiplicação de probabilidades**:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \quad \text{ou} \quad P(A \cap B) = P(B)P(A|B) \tag{2.8}$$

**Exemplo:** A probabilidade de que o primeiro estágio de uma operação, numericamente controlada, de usinagem para pistões com alta rpm atenda às especificações é igual a 0,90. Falhas são devido a variações no metal, alinhamento de acessórios, condições da lâmina de corte, vibração e condições ambientais. Dado que o primeiro estágio atende às especificações, a probabilidade de que o segundo estágio de usinagem atenda à especificações é de 0,95. Qual a probabilidade de ambos os estágios atenderem as especificações?

### 2.3.6 Teorema da Probabilidade Total

Seja um espaço amostral $\Omega$ e sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ partições de $\Omega$, isto é, $A_i \cap A_j = \emptyset$ e a união de todos os $A_i$ é o próprio espaço $\Omega$. Seja $B$ um evento qualquer de $\Omega$.




Então, a probabilidade de $B$ é dada por

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i) \tag{2.9}$$

**Exemplo:** A probabilidade de que um conector elétrico, que seja mantido seco, falhe durante o período de garantia de um computador portátil é 1%. Se o conector for molhado, a probabilidade de falha durante o período de garantia será de 5%. Se 90% dos conectores forem mantidos secos e 10% forem mantidos molhados, qual é a probabilidade dos conectores falharem durante o período da garantia?

**Exercício:** Uma indústria adquire certo componente de três fornecedores, $A$, $B$ e $C$. O primeiro é responsável por 40% da produção e o segundo é responsável por 25% da produção. A proporção de defeituosos é de 2% para o fornecedor $A$, 5% para o fornecedor $B$ e 4% para o fornecedor $C$. Qual a probabilidade de uma unidade selecionada ao acaso ser defeituosa?

### 2.3.7 Teorema de Bayes

Uma das relações mais importantes envolvendo probabilidades condicionais é dada pelo teorema de Bayes, que expressa uma probabilidade condicional em termos de outras probabilidades condicionais.

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A_j)P(B|A_j)} \tag{2.10}$$

**Exemplo:** Para os dados do exercício do Teorema da Probabiidade Total. Se uma peça é defeituosa, qual a probabilidade de ter sido entregue pelo fornecedor $A$?

**Exercício:** Um técnico em aparelhos elétricos faz consertos em domicílio e deve consertar um ferro elétrico na casa de um cliente. Ele avalia que o defeito deve estar na tomada de força da área de serviço, no cabo de força de alimentação ou na resistência do ferro. Por experiência, ele sabe que as probabilidades do defeito estar na tomada, no cabo ou na resistência são de 20%, 50% e 30%, respectivamente. Pensando em termos de ferramentas e peças de reposição do estoque que ele carrega, ele imagina que se o defeito for na tomada a probabilidade de conserto é de 95%. Se for no cabo de força é de 70% e se for na resistência é de 20%.

a) Qual a probabilidade de o técnico consertar o ferro no local com os seus recursos?

b) Qual a probabilidade do defeito ter sido no cabo de força, se o técnico conseguiu realizar o conserto?

c) O técnico chama o cliente e apresenta o ferro consertado. Perguntado do defeito, ele diz que teve que trocar a resistência (conserto mais caro). Qual a probabilidade de ele estar sendo sincero?

### 2.3.8 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1. Em um jogo, dentre dez fichas numeradas com números distintos de 1 a 10, duas fichas são distribuídas ao jogador, que ganhará um prêmio se tiver recebido fichas com dois números consecutivos. A probabilidade de ganhar o prêmio neste jogo é de:

   **Resposta:** 20%

2. Deseja-se construir um triângulo com os vértices sobre os vértices de um octógono regular. A probabilidade de que sejam usados somente diagonais e nenhum dos lados do octógono é:

   **Resposta:** 28,57%

3. Em uma tribo indígena o pajé conversava com seu tótem por meio de um alfabeto musical. Tal alfabeto era formado por batidas feitas em cinco tambores de diferentes sons e tamanhos. Se cada letra era formada por três batidas, sendo cada uma em um tambor diferente, pode-se afirmar que esse alfabeto possuía quantas letras?

   **Resposta:** 60 letras.

4. Durante um exercício da Marinha de Guerra, empregaram-se sinais luminosos para transmitir o código Morse. Este código só emprega duas letras (sinais): ponto e traço. As palavras transmitidas tinham de uma a seis letras. O número de palavras que podiam ser transmitidas é:

   **Resposta:** 126 palavras.

5. Considerando dois dados, cada um deles com seis faces, numeradas de 1 a 6. Se os dados são lançados ao acaso, a probabilidade de que a soma dos números seja 5 é:

   **Resposta:** $\frac{1}{9}$

6. Seis refrigerantes diferentes devem ser distribuídos entre 2 pessoas, de modo que cada pessoa receba 3 refrigerantes. O número de formas de se fazer isso é:

   **Resposta:** 20 formas.

7. Uma urna contém bolas numeradas de 1 a 15. Retirando-se da urna 3 bolas, sem reposição, a probabilidade de a soma dos números que aparecem nas bolas ser par é:

   **Resposta:** $\frac{33}{65}$

8. Em 3 lançamentos consecutivos de um dado perfeito, a probabilidade de que a face 6 apareça voltada para cima em pelo menos um dos lançamentos é:

   **Resposta:** $1 - (\frac{5}{6})^3$

9. Dois dados perfeitos numerados de 1 a 6 são jogados simultaneamente. Multiplica-se os números sorteados. A probabilidade de que o produto seja par é:

   **Resposta:** P(produto seja par)= 75%

10. Sendo $\frac{3}{7}$ a razão entre $C_{n,2}$ e $C_{n,3}$. Qual o valor de $C_{n,5}$?

    **Resposta:** 126

11. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Sendo $m$ o número de todas as permutações simples que podem ser feitas com os elementos de $A$. Sendo $n$ o número de todos os subconjuntos de $A$, assinale a alternativa correta:

    (a) $m < n$ (b) $m > n$ (c) $m = n + 1$ (d) $m = n + 2$ (e) $m = n + 3$

12. Uma escola de ensino médio tem 400 alunos em seu cadastro, sendo que:

    I. 140 são rapazes;
    II. 200 são moças que já concluíram o curso;
    III. 30 rapazes ainda não concluíram o curso.

    Ao se selecionar aleatoriamente um nome desse cadastro e sabendo-se que o nome retirado foi o de um rapaz, a probabilidade de ele já ter concluído o curso é de: **Resposta:** $\frac{11}{14}$

13. Ao lançar duas moedas e um dado.

    a) Descreva o espaço amostral $\Omega$.
    b) Expresse os eventos:
       i. $A = \{\text{aparecem duas caras e um número par}\}$;
       ii. $B = \{\text{aparece } 2\}$;
       iii. $C = \{\text{aparecem exatamente uma cara e um número primo}\}$.
    c) Expresse claramente o evento em que :
       i. $A$ e $B$ ocorrem;
       ii. somente $B$ ocorre;
       iii. $B$ ou $C$ ocorrem.

14. Uma caixa contém 40 parafusos bons e 10 defeituosos. Seleciona-se uma amostra de 5 parafusos. Calcule as probabilidades dos seguintes evento:

    a) Nenhum parafuso na amostra é defeituoso.

       **Resposta:** 31,06%

    b) Nenhum, um ou dois parafusos na amostra são defeituosos.

       **Resposta:** $= 95,17\%$

c) A amostra contém pelo menos um parafuso bom.

**Resposta:** $\frac{75661}{75670} = 99,988\%$

15. Lançam-se dois dados comuns equilibrados de 6 faces.

a) Encontre a probabilidade de obter duas faces iguais;

**Resposta:** P(faces iguais)= $\frac{1}{6}$

b) Calcule a probabilidade da soma das faces ser igual menor ou igual a 4.

**Resposta:** P($\sum \leq 4$)= $\frac{1}{6}$

c) Determine a probabilidade de que pelo menos um dado resultou em 6.

**Resposta:** P(pelo menos uma face 6) $= \frac{11}{36}$

d) Sabendo-se que nos dois dados saíram valores diferentes, determine a probabilidade de que um dado tenha a face superior sendo 6.

**Resposta:** P(pelo menos uma face 6 | faces $\neq$) $= \frac{1}{3}$

16. De uma caixa contendo 100 peças entre as quais 10 são defeituosas se extraem quatro peças ao acaso, sem reposição. Encontrar a probabilidade de que entre estas não ocorra:

a) nenhuma peça defeituosa;

**Resposta:** $P(p, p, p, p) = 65,16\%$

b) nenhuma peça boa.

**Resposta:** $P(d, d, d, d) = 0,01\%$

17. De um lote de 15 válvulas 10 são boas. Encontrar a probabilidade de que de 3 válvulas extraídas ao acaso, sem reposição, 2 sejam boas.

**Resposta:** $P(x = 2b) = 49,45\%$

18. Uma caixa contém 20 peças das quais 5 são defeituosas. Extraem-se duas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de:

a) Ambas serem boas?

**Resposta:** $P(beb) = 55,26\%$.

b) Ambas serem defeituosas?

**Resposta:** $P(ded) = 5,26\%$

c) Ser uma boa e outra defeituosa?

**Resposta:** P(1peça boa e 1 peça defeituosa) $= P(bed) + P(deb) = 39,48\%$

19. A probabilidade de que uma peça do tipo exigido se ache em cada uma de quatro caixas é igual, respectivamente, a 0,60; 0,70; 0,80 e 0,90. Calcular a probabilidade de que tal peça se encontre:

a) no máximo em três caixas;

**Resposta:** $P(X \leq 3) = 69,76\%$

b) pelo menos em duas caixas.

**Resposta:** $P(X \geq 2) = 1 - 0,0428 = 95,72\%$

20. Um dispositivo de freio de automóvel consiste de três subsistemas, que devem funcionar simultaneamente para que o freio funcione. Os subsistemas são um sistema eletrônico, um sistema hidráulico e um ativador mecânico. Ao frear, a probabilidade de sucesso dessas unidades é de 0,96, 0,95 e 0,95, respectivamente. Estime a confiabilidade do sistema, admitindo que os subsistemas funcionem independentemente.

    **Resposta:** 86,64%

21. Suponha que, na fabricação de semicondutores, as probabilidades de que um chip, sujeito a alto, médio ou baixo nível de contaminação durante a fabricação, cause uma falha no produto, sejam respectivamente iguais a 0,10, 0,01 e 0,001. Em um experimento particular da produção, 20% dos chips estão sujeitos a altos níveis de contaminação, 30% a níveis médios de contaminação e 50% a baixos níveis de contaminação. Qual a probabilidade de um produto falhar ao usar um desses chips?

    **Resposta:** 2,35%

22. Uma loja comercializa pontes rolantes de três marcas distintas. As pontes da marca X respondem por 50% das vendas, enquanto 30% são da marca Y e 20% são da marca Z. Todos os fabricantes oferecem um ano de garantia para peças e mão de obra. Sabe-se que 25% das pontes rolantes da marca X necessitam de reparos durante o período de garantia, o mesmo ocorrendo com 20% das pontes da marca Y e com 10% das pontes da marca Z.

    a) Qual a probabilidade de que um comprador adquira uma ponte rolante da marca X que necessite de reparos durante a garantia?

    **Resposta:** 12,5%

    b) Se um cliente solicita à loja reparos na ponte durante a garantia, qual a probabilidade de que seja da marca Y?

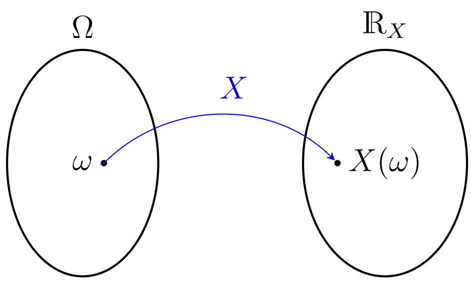
    **Resposta:** 30%

# 3 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

## 3.1 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

### 3.1.1 Variável aleatória

Sejam E um experimento e $\Omega$ um espaço amostral associado ao experimento. Uma *função* $X$, que associe a cada elemento $\omega \in \Omega$ um número real $x$ $(x = X(\omega))$ $\forall$ $x \in \mathbb{R}$, isto é, a função $X : \Omega \to \mathbb{R}$ é denominada **variável aleatória**.




**Exemplo:** Uma caixa contém 4 válvulas, sendo duas perfeitas e duas defeituosas. Duas válvulas são retiradas aleatoriamente da caixa e testadas (sendo representadas por $D$ se a peça é defeituosa e $P$ se a peça é perfeita). O espaço amostral associado a este evento é:

Seja a variável aleatória $X$ = número de válvulas defeituosas. Os valores possíveis da variável aleatória $X$, serão:

### 3.1.2 Variável Aleatória Discreta

A variável aleatória $X$ é chamada de **discreta** quando o seu contradomínio é um conjunto finito ou infinito enumerável, ou melhor, se existe um conjunto finito ou infinito enumerável $\{x_1, x_2, x_3, ...\} \subset \mathbb{R}$ tal que $X(\omega) \in \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ $\forall$ $\omega \in \Omega$.

### 3.1.3 Variável Aleatória Contínua

A variável aleatória $X$ é chamada de **contínua** quando o seu contradomínio é um conjunto infinito.

## 3.2 DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

### 3.2.1 Função de Probabilidade (f.p.) e Função Densidade de Probabilidade (f.d.p.)

Uma vez que uma variável aleatória assume um valor do seu contradomínio com certa probabilidade, tem-se que as probabilidades são associadas a valores da variável aleatória discreta por uma função de probabilidade (f.p.) e as probabilidades são associadas a intervalos de valores de uma variável aleatória contínua por uma função densidade de probabilidade (f.d.p.).

#### 3.2.1.1 Função de Probabilidade

Seja $X$ uma variável aleatória *discreta*. A **função de probabilidade**, associa um número real $P(X = x_i)$, chamado de probabilidade de $x_i$, a cada possível resultado $x_i$. Tem-se que:

1. $p(x_i) = P(X = x_i)$
2. $p(x_i) > 0$
3. $\sum\limits_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$

#### 3.2.1.2 Função Densidade de Probabilidade

Seja $X$ uma variável aleatória *continua*. **A função densidade de probabilidade** $f(x_i)$, é uma função que satisfaz as seguintes condições:

1. $f(x_i) \geq 0$
2. $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(X)dX$
3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(X)dX = 1$

**DEFINIÇÃO:** Uma **distribuição de probabilidade** é uma descrição, que fornece a probabilidade para cada valor da variável aleatória. Ela é frequentemente expressa na forma de um gráfico, de uma tabela ou uma fórmula.

**Exemplo:** No lançamento de duas moedas ao ar, tem-se que os possíveis resultados são: KK, KC, CK, CC (K=cara e C=coroa). Seja $X$ a variável aleatória "*número de caras*". Então, $X$ poderá assumir os valores:

A distribuição de probabilidade da variável aleatória $X$ é:

**Exemplo:** Em um processo de fabricação de semicondutores, 3 pastilhas de um lote são testadas. Cada pastilha é classificada como "passa" ou "falha". Suponha que a probabilidade de uma pastilha passar no teste seja de 0,8 e que as pastilhas sejam independentes. Seja $X$ a variável "*número de pastilhas de um lote que passam no teste*". A distribuição de probabilidade de $X$ será:

### 3.2.2 Função Distribuição (f.d.)

A **função distribuição** (f.d.) (ou função distribuição acumulada) da variável aleatória $X$ é definida por:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Ou seja,

1. $F(x_i) = \sum\limits_{j=1}^{i} p(x_i)$ se $X$ é uma variável aleatória *discreta*.

2. $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$ se $X$ é uma variável aleatória *contínua*.

**Exemplo:** Utilizando os mesmos dados do exemplo do processo de fabricação de semicondutores, obtemos o seguinte quadro:

| $X = x$ | $P(X = x)$ |
|---|---|
| 0 | 0,008 |
| 1 | 0,096 |
| 2 | 0,384 |
| 3 | 0,512 |

Qual seria a distribuição acumulada para $F(2)$?

### 3.2.3 Esperança

O valor esperado, expectância ou a esperança matemática $E(X)$, de uma variável aleatória **discreta** $X$, que é a média da distribuição, é definida por:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) \tag{3.1}$$

### 3.2.4 Variância

A variância da variável aleatória discreta $X$, representada por $V(X)$ , é definida por:

$$\sigma^2 = V(X) = E[X - E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 P(X = x_i) = E(X^2) - [E(X)]^2 \tag{3.2}$$

### 3.2.5 Desvio Padrão

A raiz quadrada da variância da variável aleatória $X$ é denominada **desvio padrão** e é definido por:

$$\sigma = \sqrt{V(X)} \tag{3.3}$$

**Obs:** Da mesma forma, se a variável aleatória é **contínua**, tem-se a esperança de $X$ dada por $\mu = E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ e a variância por $\sigma^2 = E(X - \mu)^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$.

É importante observar que a variância mede a dispersão (espalhamento) dos dados em torno da média $\mu = E(X)$ e o desvio padrão faz isto também, mas na mesma unidade de medida dos dados.

## 3.3 DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE DISCRETA

Certos problemas práticos são bastante adequados à utilização de variáveis aleatórias discretas. Em tais situações, a compreensão da natureza destas variáveis é requisito fundamental para a formulação de modelos probabilísticos associados a este tipo de variável. Os principais modelos probabilísticos para variáveis aleatórias discretas, também chamados distribuições, são apresentados na sequência.

### 3.3.1 Distribuição de Bernoulli

Os modelos de distribuição de Bernoulli são um processo em um experimento que pode resultar em sucesso ou fracasso. Esta é uma importante distribuição e, também, a mais simples.

Uma variável aleatória $X$ tem uma distribuição de Bernoulli com parâmetro $p$ quando assume apenas os valores 1 e 0 com probabilidade $P(X = 1) = p$ e $P(X = 0) = (1 - p)$, respectivamente. O número 1, em geral, representa sucesso e 0 fracasso.

**Exemplo:**

Denota-se $X \sim$ Bernoulli($p$) e lê-se: "$X$ segue uma distribuição de Bernoulli com o parâmetro $p$" ou "$X$ é extraído de uma distribuição de Bernoulli com o parâmetro $p$"

A variável aleatória $X$ é chamada **variável de Bernoulli**, onde $p$ é a probabilidade de "sucesso" e a f.p. de $X$ é:

$$P_X(x) = P_X(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x} \tag{3.4}$$

Sendo $x = 0, 1$ e $0 \leq p \leq 1$

**Obs:** Os parâmetros de uma variável de Bernoulli são: $E(X) = p$ e $V(X) = p(1 - p)$

**Exemplo:** Qual a esperança e a variância de $X \sim$ Bernoulli($\frac{1}{4}$)? Faça um gráfico para a função de probabilidade e outro para a função distribuição de $X \sim$ Bernoulli($\frac{1}{4}$).

**Exercícios:**

1. Suponha que a probabilidade de óbito de um paciente, ao dar entrada na terapia intensiva, seja de 20% (risco de morte). Seja X uma variável binária indicadora de óbito. Se um paciente der entrada no CTI, obtenha a distribuição de probabilidade, a média e a variância.

2. Tendo uma questão objetiva de 3 opções, descreva em forma de distribuição de probabilidade qual seria a probabilidade de acertar e a de errar a questão chutando.

### 3.3.2 Distribuição Binomial

A distribuição binomial modela o número de sucessos em $n$ tentativas independentes de Bernoulli($p$).

Uma única tentativa de Bernoulli é, digamos, um lance de moeda. Um único estudo binomial consiste em $n$ tentativas de Bernoulli. Para a moeda, o espaço amostral para um teste de Bernoulli é $\{K, C\}$. O espaço amostral para uma tentativa binomial é composto por todas as sequências de caras e coroas de comprimento $n$. Da mesma forma, uma variável aleatória de Bernoulli toma valores 0 e 1 e uma variável aleatória binomial toma valores $0, 1, 2, ..., n$.

Desta forma, definimos que uma variável aleatória discreta $X$, que conta o número de *sucessos* em $n$ provas independentes, que apresentam os resultados ($p$) sucesso ou ($q = 1 - p$) fracasso, tem distribuição binomial. Sua função de probabilidade é dada por:

$$P_X(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \tag{3.5}$$

Sendo $x = 0, 1, ..., n$ e $0 \leq p \leq 1$

Denota-se $X \sim b(n,p)$ e lê-se: "$X$ segue uma distribuição binomial com parâmetros $n$ e $p$" ou "$X$ é extraído de uma distribuição binomial de $n$ tentativas com probabilidade $p$".

A função de distribuição é dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{x} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & \text{se} \quad 0 \leq x \leq n \\ 1 & \text{se} \quad x > n \end{cases} \tag{3.6}$$

A sua esperança e a sua variância são dados, respectivamente, por: $E(X) = np$ e $V(X) = npq$.

**Exemplo:** Seja $X$ uma v.a. que indica o número de peças não conformes (não segue a especificação definida no projeto de qualidade) produzidas pela máquina "Z". Se a probabilidade desta maquina produzir uma peça não conforme é de 15%, ao selecionar aleatoriamente 5 peças, pede-se:

a) a probabilidade de nenhuma peça ser não conforme;

b) a probabilidade de todas as peças serem de acordo com especificação do projeto de qualidade;

c) obter a distribuição de probabilidade e o gráfico.

**Exercício:** Suponha que numa linha de produção a probabilidade de se obter uma peça defeituosa (sucesso) é $p = 0,1$. Toma-se uma amostra de 10 peças para serem inspecionadas. Qual a probabilidade de se obter:

a) Uma peça defeituosa?

b) Nenhuma peça defeituosa?

c) Duas peças defeituosas?

d) No mínimo duas peças defeituosas?

e) No máximo duas peças defeituosas?

**Exercício:** Suponha que um aluno pretende fazer um teste de múltipla escolha com 10 questões e cinco alternativas por questão respondendo cada uma das questões de forma aleatória. Qual é probabilidade dele acertar no máximo 3 questões?
$P(X \leq 3) \approx 0,879$.

### 3.3.3 Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson pode ser aplicada a muitos casos práticos nos quais interessa o número de vezes que um determinado evento pode ocorrer durante um intervalo de tempo ou distância, área ou outra unidade de medida análoga.

Definimos que uma variável aleatória discreta $X$ segue a distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda$, $\lambda > 0$, se sua função de probabilidade for dada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \tag{3.7}$$

Denota-se $X \sim$ Poisson($\lambda$) ou $X \sim$ Po($\lambda$). O parâmetro $\lambda$ indica a taxa de ocorrência por unidade de medida, ou seja, $\lambda = np$.

A função de distribuição é dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

A sua esperança e a sua variância são dados, respectivamente, por: $E(X) = \lambda$ e $V(X) = \lambda$.

**Exemplo:** São contados os números de partículas radioativas emitidas em cada intervalo de 5 segundos. Suponha que o número de partículas emitidas, durante cada intervalo de 5 segundos, tenha uma distribuição de Poisson com parâmetro 2,0. Pede-se:

a) qual é a probabilidade de que menos de 3 partículas sejam emitidas?

b) supondo que 10 contagens são realizadas, construir a distribuição de probabilidade.

**Exemplo:** Suponhamos que em uma indústria farmacêutica 0,001% de um determinado medicamento sai da linha de produção somente com o excipiente, ou seja, sem nenhum princípio ativo. Qual a probabilidade de que em uma amostra de 4 mil medicamentos mais de 2 deles esteja somente com o excipiente?

**Exercício:** Suponha que uma aplicação de tinta em um automóvel é feita de forma mecânica, e pode produzir defeitos de fabricação, como bolhas ou áreas mal pintadas, de acordo com uma variável aleatória $X$ que segue uma distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda = 1$. Suponha que sorteamos um carro ao acaso para que sua pintura seja inspecionada, qual a probabilidade de encontrarmos, pelo menos, 1 defeito? E qual a probabilidade de encontrarmos de 2 a 4 defeitos?

**Exercício:** Em um fio delgado de cobre, o número de falhas no fio segue a distribuição de Poisson, com uma média de 2,3 falhas por milímetro.

a) Determine a probabilidade de existir exatamente 2 falhas em um milímetro de fio.

b) Determine a probabilidade de 10 falhas em 5 milímetros de fio.

### 3.3.4 Distribuição Geométrica

Considere um experimento aleatório que esteja bem relacionado ao usado na definição de uma distribuição binomial. Novamente, assuma uma série de tentativas de Bernoulli (tentativas independentes, com probabilidade constante $p$ de um sucesso em cada tentativa). No entanto, em vez de um número fixo de tentativas, os ensaios são conduzidos até que um sucesso seja obtido. Desta forma, a variável aleatória $X$ conta o número de **tentativas** até que o primeiro sucesso seja atingido.

Definimos que uma variável aleatória discreta $X$ segue a distribuição geométrica com parâmetro $p$, se sua função de probabilidade for dada por

$$P(X = x) = (1 - p)^{x-1}p \tag{3.9}$$

Sendo $X = 0, 1, 2, ...$

Denota-se $X \sim$ Geometrica($p$) ou $X \sim$ Geo$(0, 5)$ e lê-se: "$X$ segue uma distribuição geométrica com parâmetro $p$".

A sua esperança e a sua variância são dados, respectivamente, por: $E(X) = \frac{1}{p}$ e $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

**Exemplo:** Uma linha de produção está sendo analisada para efeito de controle da qualidade das peças produzidas. Tendo em vista o alto padrão requerido, a produção é interrompida para regulagem toda vez que uma peça defeituosa é observada. Se a probabilidade da peça ser defeituosa é de 1%, determine a probabilidade de ocorrer uma peça defeituosa na 1ª peça produzida, na 2ª, na 5ª, na 10ª, na 20ª e na 40ª.

**Exercício:** Em uma indústria há uma máquina que é inspecionada todos os dias antes de os trabalhos serem iniciados. Por experiências anteriores, sabe-se que a probabilidade dessa máquina estar funcionando corretamente é de 90%. Caso haja algum problema, a produção não é iniciada e a máquina deve passar por uma revisão geral.

a) Qual é a probabilidade de que essa máquina funcione normalmente durante 15 dias e tenha que passar por uma revisão no 16º dia?

b) Qual a probabilidade de levarem pelo menos 5 dias até que aconteça a revisão geral?

c) Em média, a cada quantos dias ocorrerá uma revisão geral?

**Exercício:** O custo de realização de um experimento é de R$ 1.000,00. Se o experimento falha, um custo adicional de R$ 300,00 tem de ser imposto. Se a probabilidade de sucesso em cada prova é 0,2, e se as provas são independentes e continuadas até a ocorrência do primeiro sucesso, qual o custo esperado do experimento?

## 3.4 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1. Um produto eletrônico contém 40 circuitos integrados. A probabilidade de que qualquer circuito integrado seja defeituoso é de 0,01. Os circuitos integrados são independentes. O produto opera somente se não houver circuitos integrados defeituosos. Qual é a probabilidade de que o produto opere?

   **Resposta:** $P(X = 0) = 0,6690$

2. Um inspetor de qualidade extrai uma amostra de 10 tubos aleatoriamente de uma carga muito grande de tubos que se sabe que contém 20% de tubos defeituosos. Qual é a probabilidade de que não mais do que 2 dos tubos extraídos sejam defeituosos?

   **Resposta:** $P(X \leq 2) = 0,6778$

3. Um engenheiro de inspeção extrai uma amostra de 15 itens aleatoriamente de um processo de fabricação sabido produzir 85% de itens aceitáveis. Qual a probabilidade de que 10 dos itens extraídos sejam aceitáveis?

   **Resposta:** $P(X = 10) = 0,0449$

4. Um departamento de conserto de máquinas recebe uma média de 5 chamadas por hora.

   a) Qual a probabilidade de que em uma hora selecionada aleatoriamente sejam recebidas exatamente três chamadas?

      **Resposta:** $P(X = 3) = 0,1404$

   b) Qual a probabilidade de que em uma hora selecionada aleatoriamente sejam recebidas menos que três chamadas?

      **Resposta:** $P(X < 3) = 0,1246$

   c) Qual a probabilidade de que passadas duas horas sejam recebidas pelo menos três chamadas?

      **Resposta:** $P(X \geq 3) = 0,9972$

5. Bateladas que consistem em 50 molas helicoidais, provenientes de um processo de produção são verificadas com respeito à conformidade em relação aos requerimentos dos consumidores. O número médio de molas não-conformes em uma batelada é igual 5. Considere que o número de molas não-conformes em uma batelada, denotado por $X$, seja uma variável aleatória binomial. Pede-se:

   a) qual é a probabilidade do número de molas não-conformes em uma batelada seja menor ou igual a 2?

      **Resposta:** $P(X \leq 3) = 0,1246$

b) qual é a probabilidade do número de molas não-conformes em uma batelada seja maior ou igual a 49?

**Resposta:** $P(X \geq 49) = 4,51 \times 10^{-48}$

6. Supondo que o número médio de bactérias por litro de água purificada é 2, qual é a probabilidade que 5 ou mais bactérias sejam encontradas em uma amostra de 3 litros de água?

**Resposta:** $P(X \geq 5) = 0,7149$

7. A taxa de defeitos ao fim de um mês de um determinado componente eletrônico foi modelada por uma distribuição geométrica e é de 20%. Determine a probabilidade de que:

a) O componente eletrônico apresente falhas aos três meses de uso.

**Resposta:** $P(x = 3) = 0,1280$

b) Quatro meses se passe até ocorrer o primeiro defeito.

**Resposta:** $P(x = 5) = 0,0819$

8. Admite-se que uma bateria de íon lítio instalada em determinado circuito, tenha probabilidade 0,7 de funcionar mais de 6 horas seguidas. Se ensaiarmos alguns circuitos, qual será a probabilidade de que, entre eles uma determinada bateria se descarregue com 7 horas de uso?

**Resposta:** $P(x = 7) = 0,0353$

9. Uma máquina produz peças das quais 80% são consideradas perfeitas. Qual é a probabilidade de:

a) A 5ª peça ser a primeira defeituosa?

**Resposta:** $P(x = 5) = 0,08192$ ; $(p = 0,2; q = 0,8)$

b) A 10ª peça ser a primeira defeituosa?

**Resposta:** $P(x = 10) = 0,0268$

c) Tenha que produzir 3 peças até aparecer a primeira defeituosa?

**Resposta:** $P(x = 3) = 0,1280$

## 3.5 DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE CONTÍNUA

### 3.5.1 Distribuição Uniforme

Uma variável aleatória $X$ tem distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$, e denota-se $X \sim \mathrm{U}(a, b)$, se sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A média e a variância dessa v.a. são dadas, respectivamente por $E(X) = \mu = \frac{a+b}{2}$ e $V(X) = \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$.

O gráfico abaixo ilustra a função densidade da distribuição uniforme com parâmetros $a = 0$ e $b = 1$.

**Exemplo:** Seja a variável aleatória contínua $X$ a corrente medida em um fino fio de cobre em miliamperes. Considere que o intervalo de $X$ seja [0, 20 mA] e assuma que a função de densidade de probabilidade de $X$ é $f(x) = \frac{1}{20-0} = 0,05$, $0 \leq x \leq 20$. Qual é a probabilidade de que uma medida de corrente esteja entre 5 e 10 miliamperes?

**Exercício:** A ocorrência de panes em qualquer ponto de uma rede telefônica de 7 km foi modelada por uma distribuição Uniforme no intervalo $[0, 7]$. Qual é a probabilidade de que uma pane venha a ocorrer nos primeiros 800 metros? E qual a probabilidade de que ocorra nos 3 km centrais da rede?

A função densidade da distribuição Uniforme é dada por $f(x) = \frac{1}{7}$ se $0 \leq x \leq 7$ e zero, caso contrário. Assim, a probabilidade de ocorrer pane nos primeiros 800 metros é

$$\mathbb{P}\left(X \leq 0,8\right) = \int_0^{0,8} f(x)dx = \frac{0,8-0}{7} = 0,1142.$$

e a probabilidade de ocorrer pane nos 3 km centrais da rede é

$$\mathbb{P}\,(2 \leq X \leq 5) = \int_2^5 f(x)dx = \mathbb{P}\,(X \leq 5) - \mathbb{P}\,(X \leq 2) = 5/7 - 2/7 \approx 0,4285.$$

### 3.5.2 Distribuição Normal

Uma variável aleatória contínua $X$ tem distribuição Normal se sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Usamos a notação $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

A **função distribuição** é dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

**Representação gráfica**

É um gráfico em forma de sino. O seu posicionamento em relação ao eixo das ordenadas e seu achatamento são determinados pelos parâmetros $\mu$ e $\sigma^2$, respectivamente.

A área compreendida entre $\mu \pm \sigma$ é igual a $68,27\%$ ; entre $\mu \pm 2\sigma$ é igual a 95,45% e entre $\mu \pm 3\sigma$ é igual a 99,73%.

**Propriedades da distribuição normal:**

1. $f(x)$ possui um ponto de máximo para $X = \mu$;
2. $f(x)$ tem dois pontos de inflexão cujas abscissas valem $\mu + \sigma$ e $\mu - \sigma$;
3. $f(x)$ é simétrica em relação a $X = \mu$. E, ainda $\mu = Mo = Me$;
4. $f(x)$ tende a zero quando $x$ tende para $\pm\infty$.

#### 3.5.2.1 Distribuição normal padronizada

A variável normal padronizada $Z$ é obtida através de uma transformação linear da variável normal $X$, obtendo-se, assim, uma escala relativa de valores na qual, a média é o ponto de referência e o desvio padrão, uma medida de afastamento da média.

Considere a transformação: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ , então $dZ = \frac{dX}{\sigma}$.

Utilizando a transformação temos

$$F(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

que é a função de distribuição acumulada para a variável normal reduzida.

Os parâmetros da distribuição são $E(Z) = 0$ e $V(Z) = 1$

**Exemplo:** Calcular a área sob a curva para $Z$ maior que $2,75$.

A área sob a curva normal para $Z$ maior do que $2,75$ é dada por

TABELA

ou seja, a probabilidade de $Z$ ser maior do que $2,75$ é $0,3\%$.

## 3.6 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1. Suponha que $X$ tenha uma distribuição contínua uniforme no intervalo [-1,1].

   a) Determine a média, a variância e o desvio padrão de $X$.

   **Resposta:** $E(X) = 0$; $\sigma = 0,5774$

   b) Determine o valor de $x$, tal que $P(-x \leq X \leq x) = 0,9$.

   **Resposta:** $x = 0,90$

   c) Determine a função de distribuição acumulada.

   **Resposta:** $F(x) = \{0$ para $x < -1$ ; $0,5x + 0,5$ para $-1 \leq x \leq 1$; 1 para $x > 1\}$

2. O peso líquido, em libras, de um pacote com herbicida químico é uniforme para $49,75 < x < 50,25$ libras.

   a) Determine a média e a variância do peso dos pacotes

   **Resposta:** $E(X) = 50$; $V(X) = 0,02083$

   b) Determine $P(X < 50,1)$

   **Resposta:** $P(X < 50,1) = 0,7$;

3. A espessura de um flange em um componente de espaçonave é uniformemente distribuída entre 0,95 e 1,05 milímetros.

   a) Deterine a função de distribuição acumulada da espessura do flange.

   **Resposta:** $F(x) = \{0$ para $x < 0,95$ ; $10x + 9,5$ para $0,95 \leq x \leq 1,05$; 1 para $x > 1,05\}$

   b) Determine a proporção de flanges que excedem 1,02 milímetros.

   **Resposta:** 0,3

   c) Qual o valor da espessura que é excedida por 90% dos flanges?

   **Resposta:** 0,96

   d) determine a média e a variância da espessura do flange.

   **Resposta:** $E(X) = 1$; $V(X) = 0,00083$

4. Seja $Z$ uma v.a. de modo que $Z\ \mathcal{N}(0,1)$. Determine

   a) $P(Z > 1,26)$

   **Resposta:** $P(Z > 1,26) = 0,1038$

   b) $P(Z < -0,86)$

   **Resposta:** $P(Z < -0,86) = 0,1949$

c) $P(Z > -1,37)$

**Resposta:** $P(Z > -1,37) = 0,9147$

d) $P(-1,25 < Z < 0,37)$

5. Suponha que $X$ seja distribuída normalmente, com uma média de 10 e um desvio padrão de 2. Determine o seguinte:

a) $P(X < 13)$

**Resposta:** $P(X < 13) = 0,9332$

b) $P(X > 9)$

**Resposta:** $P(X > 9) = 0,6915$

c) $P(6 < X < 14)$

**Resposta:** $P(6 < X < 14) = 0,9545$

d) $P(2 < X < 4)$

**Resposta:** $P(-2 < X < 8) = 0,0013$

e) $P(-2 < X < 8)$

**Resposta:** $P(-2 < X < 8) = 0,1587$

6. O diâmetro de um eixo de um dispositivo óptico de armazenagem é normalmente distribuído com média 0,2508 polegada e desvio padrão de 0,0005 polegada. As especificações do eixo são $0,2500 \pm 0,0015$. Que proporção de eixos obedece às especificações?

**Resposta:** $P(0,2485 < X < 0,2515) = 91,92\%$

7. A resistência à compressão de uma amostra de cimento pode ser modelada por uma distribuição normal com uma média de 6.000 quilogramas por centímetro quadrado e um desvio padrão de 100 quilogramas por centímetro quadrado.

a) Qual é a probabilidade da resistência da amostra ser menor do que 6250 kg/cm$^2$?

**Resposta:** $P(X < 6250) = 0,9938\%$

b) Qual é a probabilidade da resistência da amostra estar entre 5.800 e 5.900 kg/cm$^2$?

**Resposta:** $P(5800 < X < 5900) = 0,1359\%$

c) Que resistência é excedida por 95% das amostras?

**Resposta:** 5835 kg/cm$^2$

8. A largura de uma linha para fabricação de semicondutores tem, supostamente, uma distribuição normal com média de 0,5 micrômetro e um desvio padrão de 0,05 micrômetro.

a) Qual é a probabilidade da largura linha ser maior do que 0,62 micrômetro?

**Resposta:** $P(X < 0,62) = 0,0082\%$

b) Qual é a probabilidade da largura linha estar entre 0,47 e 0,63 micrômetro?

**Resposta:** $P(0,47 < X < 0,63) = 0,7211\%$

c) Abaixo de que valor está a largura da linha de 90% das amostras?

**Resposta:** 0,564 micrômetro

# 4 ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

## 4.1 INTRODUÇÃO

**Inferência Estatística:**

- tem como objetivo fazer generalizações sobre uma população, com base nos dados amostrais
- divide-se em duas grandes áreas: estimação e teste de hipóteses.

**Estimação:** o objetivo é fornecer informações sobre os parâmetros populacionais, tendo como base uma amostra aleatória extraída da população de interesse.

**Estatística:** qualquer quantidade calculada em função dos elementos da amostra.

**Distribuição amostral** ou **distribuição por amostragem:** distribuição de probabilidade de uma estatística.

## 4.2 ESTIMADOR E ESTIMATIVA

**Estimador:** quantidade calculada em função dos elementos amostrais, que será utilizada no processo de estimação do parâmetro de interesse.

**Principais métodos de obtenção de estimadores:**

- Método dos momentos;
- Método da máxima verossimilhança;
- Método dos mínimos quadrados;

**Estimativa:** valor numérico obtido pelo estimador numa determinada amostra.

## 4.3 QUALIDADES DE UM ESTIMADOR

a) **Não tendencioso ou não viesado**

Um estimador $\hat{\theta}$ é não tendencioso ou não viesado quando a sua média (ou esperança ou expectância) é o próprio valor do parâmetro populacional que está se pretendendo estimar, ou seja:

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

b) **Consistência**

Um estimador $\hat{\theta}$ é consistente se (além de ser não viesado) sua variância tende para zero, quando n tende para infinito, isto é:

$$E(\hat{\theta}) = \theta \quad \text{e} \quad \lim_{n \to \infty}$$

c) **Suficiência**

Um estimador é suficiente quando permite obter um resumo das informações trazidas pela amostra, ou seja, resume os dados sem perder nenhuma informação sobre o parâmetro $\theta$.

## 4.4 ESTIMAÇÃO PONTUAL

Quando o parâmetro é estimado através de um único valor diz-se que a estimação é por ponto ou pontual. Por exemplo: $\overline{X}$ é um estimador pontual da média populacional $\mu$; $S^2$ é um estimador pontual da variância populacional $\sigma^2$; etc.

### 4.4.1 Estimador da Média Populacional

O estimador utilizado é a média aritmética amostral $\overline{X}$ , sendo um estimador não viesado, consistente e suficiente.

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

### 4.4.2 Estimador da Variância Populacional

O estimador utilizado é a variância amostral $S^2$. A estimativa obtida pela expressão apresentada a seguir é não tendenciosa e consistente.

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2$$

**Exemplo:** Os valores abaixo representam as notas de oito alunos de uma turma de Ciência de Dadosna disciplina de Probabilidade e Estatística no ano de 2019:

2,1 - 2,0 - 2,0 - 9,8 - 1,0 - 10,0 - 6,2 - 8,9

Com base nessas oito notas, estime a média e a variância da turma.

### 4.4.3 Estimador da Proporção Populacional

O estimador utilizado é a proporção amostral $\hat{p}$. A expressão de $\hat{p}$ é dada por:

$$\hat{p} = \frac{k}{n}$$

onde $k$ é o número de casos favoráveis.

**Exemplo:** Em 5 lançamentos de uma moeda considere que o evento "cara" (C) seja o sucesso. Um possível resultado seria o conjunto C, C, R, R, C. Estime a proporção populacional a partir desta amostra.

**Exemplo:** Em uma amostra de 2.500 eleitores de uma cidade, 1.784 deles eram favoráveis à reeleição do atual prefeito. Estime a proporção populacional favorável à reeleição do atual prefeito através da amostra destes 2.500 eleitores.

**Exercício:** Os valores abaixo representam as notas de oito alunos de uma turma de 44 alunos de Ciência de Dadosna disciplina de Probabilidade e Estatística no ano de 2019:

2,1 - 2,0 - 2,0 - 9,8 - 1,0 - 10,0 - 6,2 - 8,9

Estime a proporção dos alunos que obtiveram nota acima de 6,0.

## 4.5 ESTIMAÇÃO POR INTERVALO

Consiste em construir um intervalo em torno da estimativa por ponto, de tal forma que ele possua probabilidade conhecida (nível de confiança $(1-\alpha)$) de conter o verdadeiro valor do parâmetro.

Seja o parâmetro $\theta$, tal que $P(\hat{\theta}_1 \leq \theta \leq \hat{\theta}_2) = 1-\alpha$. Então, $\hat{\theta}_1 \leq \theta \leq \hat{\theta}_2$ é o intervalo de confiança (I.C.); $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ são denominados de limites de confiança; $1-\alpha$ nível de confiança.

A escolha do nível de confiança depende do grau de precisão com que se deseja estimar o parâmetro. É comum utilizar os níveis de 95% e 99%. Evidentemente, o aumento no nível de confiança implica no aumento de sua amplitude do intervalo de confiança.

### 4.5.1 Intervalo de confiança para médias

Seja $(X_1, X_2, ..., X_n)$ uma amostra aleatória de uma população $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ e, sabendo que $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ e $\frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$, obtemos os seguintes intervalos de confiança:

**(I) Quando a Variância Populacional $\sigma^2$ é Conhecida**

Partindo da probabilidade $P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$ substituímos $Z = \frac{(\overline{X}-\mu)}{\sigma/\sqrt{n}}$, e obtemos:

$$P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$
$$P\Big(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}\Big) = 1-\alpha$$

Isolando $\mu$, resulta em

$$P\Big(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big) = 1-\alpha$$

Onde:

$1-\alpha$ é o nível de confiança e fornece a probabilidade de conter o verdadeiro parâmetro.

$\alpha$ é o nível de significância, representa o erro que se está cometendo ao afirmar que a probabilidade do intervalo $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ conter o verdadeiro valor do parâmetro populacional $\theta$ é $(1-\alpha)$.

Portanto, o intervalo de confiança fica sendo

$$\Big[\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ ; \ \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big]$$

**Exemplo:** O projetista de uma indústria tomou uma amostra de 36 funcionários para verificar o tempo médio gasto para montar um determinado brinquedo. Lembrando que foi verificado que $\overline{x} = 19,9$ e $\sigma = 5,73$, construir um intervalo de confiança de nível 95% para $\mu$.

**(II) Quando a Variância Populacional $\sigma^2$ é Desconhecida**

Temos que $P(-t_{n-1} \leq Z \leq t_{n-1}) = 1 - \alpha$, que substituindo $t$, resulta:

$$P\Big( -t_{n-1} \leq \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{n-1}\Big) = 1 - \alpha$$

isolando $\mu$, obtemos:

$$P\Big(\overline{X} - t_{n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\Big) = 1 - \alpha$$

Desta forma, o intervalo de confiança é dado por

$$\Big[\overline{X} - t_{n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X} + t_{n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\Big]$$

**Exemplo:** Uma amostra de 20 cabos, produzidos por uma indústria, foram avaliados e medidas as tensões de rupturas (em kgf). A média e o desvio padrão da amostra são iguais a 762 kgf e 14,4 kgf, respectivamente. Deseja-se construir o intervalo de confiança de 95% para a tensão média de ruptura de cabos produzidos pela indústria.

**Solução:**

### 4.5.2 Intervalo de confiança para proporção

Para estimarmos um intervalo de confiança para proporção, utilizamos o seguinte intervalo:

$$\Big[\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\ ;\ \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\Big]$$

**Exemplo:** Em uma amostra de 200 peças produzidas por certa máquina, verificou-se que 10 eram defeituosas. Estimar a verdadeira proporção de peças defeituosas produzidas por essa máquina, utilizando I.C. de 90%.

# 5 TESTES DE HIPÓTESES

## 5.1 HIPÓTESE ESTATÍSTICA

Uma hipótese estatística é uma afirmação sobre os parâmetros de uma ou mais populações.

## 5.2 ETAPAS PARA TESTES DE HIPÓTESES

Etapas básicas para testar a significância estatística:

1. estabelecer a hipótese nula $H_0$;
2. estabelecer a hipótese alternativa $H_1$;
3. fixar o nível de significância $\alpha$;
4. escolher a distribuição de probabilidade adequada ao teste e a partir daí determinar a região de rejeição da hipótese nula $H_0$;

Para a definição da região de rejeição de $H_0$ é necessário considerar a hipótese $H_1$, uma vez que é ela que define o tipo do teste, se é unilateral à esquerda, unilateral à direita ou bilateral. Conforme o tipo do teste identifica-se a área de rejeição de $H_0$. Genericamente, tem-se:

$H_0 : T = T_0$

$H_1 : T < T_0$ (Teste Unilateral à esquerda), $T > T_0$ (teste unilateral à direita) ou $T \neq T_0$ (teste bilateral )

Os pontos $-c$ e $c$ são os pontos críticos, localizados nas tabelas das distribuições das estatísticas do teste, considerando-se o nível de significância adotado e o número de graus de liberdade em questão.

Deve-se rejeitar $H_0$ se o valor de da estatística do teste se situar na região de rejeição ou aceitar se situar na região de aceitação

### 5.2.1 ERRO ESTATÍSTICO

Dois tipos de erros são possíveis:

**Erro tipo I** – Rejeitar a hipótese nula quando ela for verdadeira, também denominado erro alfa ($\alpha$).

$$\alpha = P(\text{rejeitar } H_0/H_0 verdadeira)$$

**Erro tipo II** – Não rejeitar a hipótese nula quando ela for falsa, também denominado erro beta ($\beta$).

$$\beta = P(\text{aceitar } H_0/H_0 falsa)$$

### 5.2.2 NÍVEL DE SIGNIFICÂNCIA

É a probabilidade máxima com a qual se sujeitaria a correr o risco de um erro tipo I.

### 5.2.3 TESTE DE HIPÓTESES PARA A MÉDIA POPULACIONAL

#### 5.2.3.1 Quando a variância populacional $\sigma^2$ é conhecida

**Estatística do teste:** $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

Rejeita-se $H_0$ se o valor de $Z$ amostral se situar na região de rejeição. Caso contrário, aceita-se $H_0$.

**Exemplo:** Uma peça ao ser fabricada, foi planejada de tal forma que uma de suas dimensões seja igual a 10 cm. Conhece-se o desvio padrão do processo produtivo, que é igual a 0,8 cm e sabe-se que a distribuição das dimensões é normal. Uma amostra de 40 peças forneceu uma dimensão média igual a 10,09 cm. Há interesse em testar se a média populacional é maior que 10 cm, ao nível de 5% de significância.

#### 5.2.3.2 Quando a variância populacional $\sigma^2$ é desconhecida

**Estatística do teste:** $t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_n$

**Exemplo:** Um fabricante afirma que a tensão média de ruptura dos cabos produzidos por sua companhia não é inferior a 500 kgf. Uma amostra de 7 cabos foi ensaiada, obtendo-se os resultados (em kgf)

490 - 495 - 480 - 493 - 475 - 478 - 485.

Testar a afirmação do fabricante, utilizando o nível de significância de 5%.

### 5.2.4 TESTE DE HIPÓTESES PARA A PROPORÇÃO POPULACIONAL

**Estatística do teste:** $Z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Rejeita-se $H_0$ se o valor de $Z$ amostral se situar na região de rejeição. Caso contrário, aceita-se $H_0$.

**Exemplo:** Um fabricante afirma que no máximo 3% das peças produzidas por sua indústria são defeituosas. Um comerciante comprou 100 peças e verificou que 8 eram defeituosas. Testar a hipótese de que a proporção de peças defeituosas é superior a 3%, utilizando nível de significância de 5%.

## EXERCÍCIOS PARA SEREM FEITOS EM SALA

1. Sabendo que o desvio padrão das tensões limites de tração de barras de aço é 15 kgf/mm$^2$, e que, uma amostra de 35 barras foram ensaiadas apresentando tração média igual a 70 kgf/mm$^2$, estimar a verdadeira tensão limite de tração através de um I. C. de 99%.

2. Para estimarmos a resistência média à compressão, uma amostra de 5 corpos de prova de uma obra apresentou os seguintes resultados:

   245 260 254 248 e 256 (kgf/cm2).

   Construir o I. C. de 99% para a verdadeira resistência média à compressão.

3. Em uma amostra de 80 componentes eletrônicos, verificou-se que 10 estavam fora das especificações exigidas para os mesmos. Construir o I. C. de 99% para a proporção de comprimentos fora das especificações exigidas.

4. Uma peça ao ser fabricada, foi planejada de tal maneira que uma de suas dimensões é 10 cm. A variância do processo produtivo é de 0,0095 cm$^2$. Se uma amostra de 40 peças fornece essa dimensão média igual a 10,05 cm, devemos rejeitar a hipótese nula de que $\mu = 10$ cm, em favor da alternativa $\mu \neq 10$ cm? Usar $\alpha = 1\%$

5. Uma fábrica produz certo tipo de reguladores de pressão. Esses reguladores são produzidos para suportar uma pressão de 20 atm. Um ensaio é realizado com uma amostra de 7 reguladores de pressão e verificou-se que as pressões suportadas são (em atm)

   19,5 18,9 19,0 19,1 18,9 19,3 19,0.

   Com base no ensaio realizado, podemos concluir que a pressão suportada é na realidade menor que 20 atm? Usar $\alpha = 0,01$.

6. Um fabricante afirma que no máximo 3% das peças produzidas por sua indústria são defeituosas. Um comerciante comprou 100 peças e verificou que 8 eram defeituosas. Com base nesse resultado, qual a conlusão que podemos tirar ao nível de significância de 1%?

7. Para determinarmos se um certo tipo de tratamento para evitar a corrosão é eficiente, 45 tubos de um total de 50 apresentaram resultados satisfatórios. Sabe-se que o tratamento é considerado eficiente se pelo menos 95% dos tubos apresentarem resultado satisfatório. Qual a conclusão, ao nível de significância de 5%?

### 5.2.5 TESTE DE HIPÓTESES PARA A DIFERENÇA DE DUAS MÉDIAS

#### 5.2.5.1 Quando as variâncias populacionais $\sigma_1^2$ e $\sigma_2^2$ são conhecidas

**Estatística do teste:** $Z = \dfrac{(\overline{X_1} - \overline{X_2}) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

**Exemplo:** Uma amostra de 100 válvulas da Companhia $A$ tem média $\overline{X}_A = 1.530$ h, sendo $\sigma_A = 100$ h . Uma outra amostra de 70 válvulas da Companhia $B$, tem $\overline{X}_B = 1.420$ h, sendo $\sigma_B = 80$ h. Testar a hipótese de que as válvulas da Companhia $A$ em relação a $B$ tem duração média superior a 100 h. Utilizar $\alpha = 0,01$.

#### 5.2.5.2 Quando as variâncias populacionais $\sigma_1^2$ e $\sigma_2^2$ são desconhecidas e supostamente iguais

**Estatística do teste:** $T = \dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - d_0}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{n_1+n_2-2}$, sendo: $s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$

**Exemplo:** Dois tipos de soluções químicas foram ensaiadas para se determinar os pH. Os resultados obtidos foram

solução A: 7,50 - 7,54 - 7,51 - 7,53 - 7,50

solução B: 7,49 - 7,50 - 7,51 - 7,52 - 7,50 - 7,51.

Testar a hipótese de que não existe diferença entre os pH médios das duas soluções, supondo que os desvios padrões populacionais são iguais. Usar $\alpha = 0,05$.

#### 5.2.5.3 Quando as variâncias populacionais $\sigma_1^2$ e $\sigma_2^2$ são desconhecidas e supostamente diferentes

**Estatística do teste:** $T = \dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_\nu,$

onde: $\nu \simeq \dfrac{(w_1 + w_2)^2}{\frac{w_1^2}{n_1-1} + \frac{w_2^2}{n_2-1}}$, sendo $w_1 = \frac{s_1^2}{n_1}$ e $w_2 = \frac{s_2^2}{n_2}$

**Exemplo:** Uma mesma distância foi medida 5 vezes por certo instrumento, antes e após sofrer uma calibração. Antes da calibração os resultados foram (em metros)

100,8 - 101,3 - 100,6 - 99,5 - 100,1,

e após a calibração

100,5 - 100,4 - 100,5 - 100,3 - 100,3.

Testar a hipótese de que não existe diferença entre os resultados obtidos antes e após a calibração do instrumento. Utilizar o nível de significância de 5%.

#### 5.2.5.4 Quando os dados são emparelhados (pareados)

**Estatística do teste:** $T = \dfrac{\overline{d} - d_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1},$

onde: $s = \sqrt{\frac{\sum(d_i - \overline{d})^2}{n-1}}$ ; $\overline{d} = \frac{\sum d_i}{n}$; $d_i = x_{1i} - x_{2i}$ ; $n_1 = n_2 = n$

**Exemplo:** Dois operários determinaram os pesos (em g) das impurezas contidas em 6 amostras de certo produto químico, obtendo os resultados

| Amostras | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Operário A | 10,1 | 10,4 | 10,2 | 10,5 | 99 | 10 |
| Operário B | 9,8 | 10,0 | 10,1 | 10,0 | 10,1 | 9,5 |

Pode-se concordar com a hipótese de que não existe diferença entre as determinações dos dois operários, no nível de significância de 1%?

### 5.2.6 TESTE DE HIPÓTESES PARA A DIFERENÇA DE DUAS PROPORÇÕES

**Estatística do teste:** $Z = \dfrac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$, para $d_0 \neq 0$

ou:

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim \mathcal{N}(0,1), \text{ para } d_0 = 0$$

sendo $\hat{p} = \dfrac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2}$

**Exemplo:** Uma indústria automobilística anuncia que os automóveis do modelo $A$ supera em venda os do modelo $B$ de 10%. Tomadas duas amostras aleatórias independentes encontrou-se que 56 de 200 consumidores preferem o modelo $A$ e 29 de 150 preferem o modelo $B$.

Testar a hipótese ao nível de significância de 6% de que o modelo $A$ supera o modelo B em 10% contra a alternativa de que essa diferença é menor que 10%.

## EXERCÍCIOS PARA SEREM FEITOS EM SALA

1. Um idealizador de produtos está interessado em reduzir o tempo de secagem de um zarcão. Duas formulações de tinta são testadas: a formulação 1 tem uma química padrão e a formulação 2 tem um novo ingrediente para secagem, que deve reduzir o tempo de secagem, da experiência, sabe-se que o desvio padrão do tempo de secagem é igual a 8 minutos e essa variabilidade inerente não deve ser afetada pela adição do novo ingrediente. Dez espécimes são pintados com formulação 1 e outros 10 espécimes são pintados com formulação 2. Os 20 espécimes são pintados em uma ordem aleatória. Os tempos médios de secagem das duas amostras são $\overline{X}_1 = 121$ minutos e $\overline{X}_2 = 112$ minutos, respectivamente. Quais as conclusões que o idealizador de produtos pode retirar sobre a eficiência do novo ingrediente, usando $\alpha = 0,05$?

2. Duas amostras de tubos de aço das marcas A e B foram ensaiadas e as resistências médias obtidas foram de 40 kgf/mm$^2$ e 35 kgf/mm$^2$, com variâncias de 5,0 e 4,5 (kgf/mm$^2$)$^2$, respectivamente. Sabendo-se que foram ensaiados 15 tubos de cada marca, há evidência, ao nível de 1%, de que a resistência média dos tubos de marca A seja maior que a de marca B? Supor que as variâncias populacionais sejam iguais.

3. Foram ensaiadas válvulas das marcas A e B, e verificou-se que os tempos de vida (em h) foram:

   | | | | | | |
   |---|---|---|---|---|---|
   | **marca A:** | 1500 | 1450 | 1480 | 1520 | 1510. |
   | **marca B:** | 1000 | 1300 | 1180 | 1250. | |

   Podemos concluir, ao nível de significância de 1%, que o tempo médio de vida das válvulas de marca A supera o de B em mais de 300 h? Supor que os desvios padrões populacionais são diferentes.

4. Uma amostra de 5 cabos de aço foi ensaiada, ante e após sofrer um tratamento para aumentar a sua resistência. Os resultados obtidos foram

   | | | | | | | |
   |---|---|---|---|---|---|---|
   | **Antes** | 50 | 54 | 51 | 50 | 55 | kgf/mm$^2$ |
   | **Após** | 60 | 61 | 57 | 54 | 59 | kgf/mm$^2$ |

   Testar a hipótese de que o tratamento é eficiente, no nível de significância de 5%. Tratar os dados como emparelhados.

5. Dois tipos de solução de polimento estão sendo avaliados para possível uso em uma operação de polimento na fabricação de lentes intra-oculares usadas no olho humano depois de uma operação de catarata. Trezentas lentes foram polidas usando a primeira solução de polimento e, desse número 253 não tiveram defeitos induzidos pelo polimento. Outras 300 lentes foram polidas, usando a segunda solução de polimento sendo 196 lentes consideradas satisfatórios com relação ao acabamento.

   a) Há qualquer razão para acreditar que as duas soluções diferem? Use $\alpha = 0,01$.

   b) Pode-se afirmar, ao nível de significância de 1%, que a primeira solução é 10% mais eficiente do que a segunda?

### 5.2.7 TESTE DE HIPÓTESES PARA IGUALDADE DE DUAS VARIÂNCIAS

As hipóteses estatísticas são:

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$H_1 : \begin{cases} \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \text{ (teste unilateral à esquerda)} \\ \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \text{ (teste unilateral à direita)} \\ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \text{ (teste bilateral)} \end{cases}$$

**Estatística do teste:** $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$

**Exemplo:** Foram testadas as durabilidades (em km) dos pneus das marcas A e B, obtendo-se para 5 pneus de cada marca os resultados:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Marca A:** | 30.000 | 32.000 | 28.000 | 26.000 | 31.000. |
| **Marca B:** | 25.000 | 30.000 | 20.000 | 21.000 | 23.000. |

Existe diferença significativa entre as variâncias das durabilidades dos dois pneus, no nível de significância de 10%?

**Exercício:** Foram ensaiadas válvulas das marcas A e B, e verificou-se que os tempos de vida (em horas) foram:

Marca A: 1.500 - 1.450 - 1.480 - 1.520 - 1.510 Marca B: 1.000 - 1.300 - 1.180 - 1.250

Testar a hipótese de igualdade para as variâncias do tempo de vida das válvulas de marcas A e B, ao nível de significância de 10%.

## 5.3 ANÁLISE DA VARIÂNCIA (ANOVA)

A análise da variância, também conhecida por ANOVA, consiste de uma generalização do teste para a igualdade de duas médias populacionais.

Suponha que se deseja testar a hipótese de $k$ $(k \geq 2)$ médias populacionais, into é:

contra a alternativa de que pelo menos uma dessas médias seja diferente das demais.

Na aplicação deste método, supõe-se que as populações são normalmente distribuídas e as variâncias populacionais iguais (homocedasticidade), ou seja:

Sejam as $k$ amostras extraídas das populações, cujas médias serão testadas. A partir dessas amostras, é possível estimar a variância $\sigma^2$ de três maneiras, conforme apresentados a seguir.

Sejam as $k$ Amostras $A_1, A_2, \ ... \ , A_k$, onde:

$x_{ij}$ é o i-ésimo elemento da j-ésima amostra.

$\overline{x}_j$ é a média da j-ésima amostra.

$\overline{X}$ é a média do conjunto das $k$ amostras.

$n_j$ é o tamanho de cada amostra.

$N = n_1 + \cdots + n_k$ é o número de elementos do conjunto das $k$ amostras.

### 5.3.1 Variância Total

Consiste em estimar a variância $\sigma^2$ considerando todas as $k$ amostras reunidas em uma única amostra, o que é possível em função da suposição de que as variâncias populacionais são todas iguais a $\sigma^2$.

Essa variância será estimada por

$$S_t^2 = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \overline{X})^2}{N-1}$$

onde o numerador é denominado de **Soma Total dos Quadrados** e representaremos por **SQT**.

Evidentemente, essa estimativa terá sentido se a hipótese $H_0$, for verdadeira, o que implica em termos todas as populações normalmente distribuídas de mesma média e mesma variância.

### 5.3.2 Variância Entre Amostras

Sendo verdadeira a hipótese $H_0$, pode-se estimar a variância $\sigma^2$, através das médias das $k$ amostras, ou seja, como se fosse uma amostra de $k$ valores. Como

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$$

e chamando de $S^2_{\overline{X}}$ a estimativa de $\sigma^2_{\overline{X}}$, então, a estimativa $S_e^2$ de $\sigma^2$ será

$$S_e^2 = n_j \times S^2_{\overline{X}} = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(\overline{x_j} - \overline{X})^2}{k-1}$$

onde o numerador é denominado de **Soma de Quadrados Entre amostras** e representaremos por **SQE**.

### 5.3.3 Variância Residual (ou variância dentro)

Consiste em estimar a variância dentro de cada amostra e em seguida estimar um único valor de $\sigma^2$, através da combinação dessas $k$ variâncias.

Para uma amostra qualquer a estimativa individual será dada por

$$S_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij} - \overline{x}_j)^2}{n - 1}$$

Combinando as $k$ variâncias, obtém-se como estimativa de $\sigma^2$

$$S_r^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k} S_j^2}{k} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij} - \overline{x}_j)^2}{N - k}$$

onde o numerador é denominado de **Soma de Quadrados Residual** e representaremos por **SQR**.

### 5.3.4 Análise de Variância a um Critério de Classificação

As hipóteses estatísticas são:

$H_0 : \mu_1 = \mu_1 = \cdots = \mu_k = \mu$

$H_1 : \mu_i \neq \mu$

**Estatística do teste:** $F = \dfrac{S_e^2}{S_r^2} \sim F_{(k-1,N-k)}(\alpha)$

O teste será sempre do tipo unilateral, pois, sendo $H_0$ falsa, $F$ tenderá sempre a crescer. O valor crítico de $F$ será, para um nível de significância $\alpha$, dado por $F_\alpha$ com $\nu_1 = k$–$1$ e $\nu_2 = N$–$k$. Dessa forma, a hipótese $H_0$ será rejeitada para $F > F_{(k-1,N-k)}(\alpha)$

**QUADRO DA ANOVA**

**Exemplo:** Em uma indústria, quatro operários executam a mesma operação. Com o objetivo de identificar se existe diferença significativa entre os tempos gastos para executar a operação mencionada, foram realizadas as seguintes observações desses tempos (em segundos):

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Operário 1: | 8,1 | 8,3 | 8,0 | 8,1 | 8,5 | |
| Operário 2: | 8,4 | 8,4 | 8,5 | 8,3 | | |
| Operário 3: | 8,8 | 8,7 | 8,9 | | | |
| Operário 4: | 8,3 | 8,4 | 8,2 | 8,2 | 8,3 | 8,4 |

Verificar se a diferença é significativa ao nível de 5%.

### 5.3.5 Comparações múltiplas entre médias (Método de Scheffé)

Como foi visto, a Análise da Variância testa a existência ou não de diferença significativa entre $k$ ($k \geq 2$) médias populacionais. Mas, caso haja diferença, através da Análise da Variância somente, não se pode identificar quais médias diferem das demais. Existem diversos métodos para a solução desse problema: método de Tukey, método de Scheffé, método de Duncan e método dos contrastes ortogonais.

Será visto o método de Scheffé por ser o mais geral e mais completo, apesar de perder em precisão para os demais.

Para o modelo de classificação única, se duas médias $\mu_i$ e $\mu_j$ diferem significativamente, Scheffé demonstrou que

$$|\overline{x}_i - \overline{x}_j| > \Delta_\alpha$$

onde

$$\Delta_\alpha = \sqrt{QMR\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)(k-1)\,F_{(k-1,N-k)}(\alpha)}$$

**Exemplo:** Aplicar o método de Scheffé para o exemplo anterior.

## EXERCÍCIOS PARA SEREM FEITOS EM SALA

1. Uma empresa deseja adquirir certa máquina e verificou que existem no mercado três marcas diferentes: $A$, $B$, e $C$ que satisfazem. Decidiu-se que será comprada a máquina que apresentar melhor rendimento. Foi realizado um ensaio com as três máquinas em períodos iguais durante 5 dias e as produções resultantes foram:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 120 | 123 | 121 | 125 | 122 |
| $B$ | 119 | 121 | 118 | 120 | 123 |
| $C$ | 125 | 127 | 128 | 127 | 128 |

   Pergunta-se: com relação ao rendimento, existe diferença significativa entre as máquinas ao nível de 1% de significância? Aplicar o teste de Scheffé e concluir qual a máquina a ser adquirida.

2. Foram testados três tipos de lâmpadas elétricas e os tempos de vida (em horas) obtidos foram:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| lâmpada $A$: | 1.245 | 1.354 | 1.367 | 1.289 |
| lâmpada $B$: | 1.235 | 1.300 | 1.230 | 1.189 |
| lâmpada $C$: | 1.345 | 1.450 | 1.320 | |

   Existe diferença significativa entre os tempos médios de vida dessas três marcas de lâmpa-das, ao nível de significância de 1%? Se necessário, aplicar o teste de Scheffé.

3. A resistência de contato de um relé foi estudada para três materiais diferentes (todos eram ligas, tendo prata como base). Os dados encontram-se a seguir

| LIGA | RESISTÊNCIA DE CONTATO | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 95 | 87 | 99 | 98 |
| 2 | 104 | 102 | 102 | 105 |
| 3 | 119 | 130 | 132 | 136 |

   O tipo de liga afeta a resistência média de contato? Usar $\alpha = 0,01$.

# 6 CONTROLE ESTATÍSTICO DE PROCESSO

## 6.1 INTRODUÇÃO

Se um produto deve atender as exigências do cliente, em geral, deve ser produzido por um processo que seja estável ou replicável. Ou melhor, o processo deve ser capaz de operar com pequena variabilidade em torno das dimensões-alvo ou nominais, das características da qualidade do produto. O controle estatístico do processo (CEP) é um conjunto de ferramentas poderoso, útil para obter estabilidade do processo e melhoria da capacidade através da redução da variabilidade. O CEP pode ser aplicado a qualquer processo.

## 6.2 GRÁFICOS DE CONTROLE

O objetivo principal dos gráficos de controle é fornecer informações úteis no aperfeiçoamento do processo. Quando se atinge o controle estatístico do processo tem-se várias vantagens, tais como:

- Fração de defeituosos permanece constante (na média);
- Custos e índices de qualidade serão previsíveis;
- Produtividade será máxima com o sistema corrente.

**Gráfico de controle:** Representação gráfica de uma qualidade medida ou avaliada a partir de uma amostra, versus o número da amostra ou tempo.

- Contém uma linha central, representando o valor médio ou a média da característica da qualidade que corresponde ao estado sob controle, ou seja, estão presentes somente as causas aleatórias.

- São mostradas também, duas linhas horizontais (Limite superior de controle (LSC) e Limite inferior de controle (LIC))

Um modelo geral para um gráfico de controle apresenta uma linha central, o limite superior de controle e o limite inferior de controle da forma:

$$LSC = \mu_w + L\sigma_w;$$
$$LC = \mu_w;$$
$$LIC = \mu_w - L\sigma_w,$$

onde:

$L$: é a distância dos limites de controle à linha central, expressa em unidades de desvio padrão (geralmente utiliza-se $L = 3$).

$w$: uma estatística amostral que mede alguma característica da qualidade de interesse;

$\mu_w$: a média de $w$;

$\sigma_w$: desvio padrão de $w$.

A teoria geral dos gráficos de controle foi proposta, inicialmente pelo Dr. Walter S. Shewhart. Os gráficos de controle desenvolvidos segundo esses princípios são chamados **gráficos de controle de Shewhart**.

### 6.2.1 Gráfico de Controle para Variáveis

As características de qualidade podem ser expressas em termos de uma medida quantitativa, numérica. Exemplos: diâmetro dos cilindros de um automóvel; volume de um recipiente. São chamados de variáveis.

Neste caso, controla-se normalmente, tanto o valor médio como a sua variabilidade, através de gráficos separados.

#### 6.2.1.1 Gráfico de Controle de $\overline{X}$ (a partir de $\overline{R}$)

Este gráfico é utilizado para o controle do valor médio do desempenho do processo.

Suponha que a característica de qualidade (variável) que se pretende controlar tenha distribuição normal com média $\mu$ e desvio padrão $\sigma$, ambos desconhecidos.

Estes parâmetros devem ser estimados com base em pelo menos 20 a 25 amostras, sendo cada uma de tamanho 4 ou 5.

Seja $X_1X_2, \ ... \ , X_n$ uma amostra aleatória de um processo que está sob investigação. Então, temos

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

E, sejam $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ ... \ , \overline{X}_m$ as médias de cada uma das $m$ amostras. Então, o melhor estimador de $\mu$, a média do processo, é a média geral, isto é:

$$\overline{\overline{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \overline{X}_i}{m} = \frac{\overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \cdots + X_m}{m},$$

Assim, $\overline{\overline{X}}$ deve ser usado como linha central no gráfico $\overline{X}$.

Para construir os limites de controle, é necessária uma estimativa do desvio padrão $\sigma$. É possível estimar $\sigma$ através do desvio padrão ou das amplitudes.

Seja $X_1X_2, \ ... \ , X_n$ uma amostra aleatória de um processo que está sob investigação. Então, temos que a amplitude $R$ é definida como:

$$R = X_{\text{máximo}} - X_{\text{mínimo}}$$

Sejam $R_1, R_2, \ ... \ , R_m$ as amplitudes das $m$ amostras. A amplitude média é

$$\overline{R} = \frac{\sum_{i=1}^{m} R_i}{m} = \frac{R_1 + R_2 + \cdots + R_m}{m}$$

**Estimador de $\sigma$ a partir do Gráfico $R$:** $\hat{\sigma} = \dfrac{\overline{R}}{d_2}$, onde $d_2$ é a média da amplitude relativa da população.

Com base na normalidade, calcula-se os limites de controle três sigmas para o gráfico de controle de $\overline{X}$ .

$$LSC = \overline{\overline{X}} + \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\overline{R} \qquad \text{e} \qquad LIC = \overline{\overline{X}} - \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\overline{R}$$

Definindo $A_2 = \dfrac{3}{d_2\sqrt{n}}$, obtemos que a linha central e os limites inferior e superior de controle para o gráfico de controle de $\overline{X}$ são:

$LSC = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R}$ linha superior de controle;

$LC = \overline{\overline{X}}$ linha central;

$LIC = \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R}$ linha inferior de controle.

Onde:

$\overline{\overline{X}}$: é a média das $m$ amostras;

$\overline{R}$: é a amplitude média das $m$ amostras;

$A_2$: é constante tabelada em função do tamanho da amostra $n$.

#### 6.2.1.2 Gráfico de Controle de $R$

Podemos estimar $\sigma_R$ como $\hat{\sigma}_R = d_3\hat{\sigma} = d_3\dfrac{\overline{R}}{d_2}$, onde $d_2$ e $d_3$ são, respectivamente, a média e o desvio padrão da amplitude relativa da população.

Com base na normalidade, calcula-se os limites de controle três sigmas para o gráfico de controle de $R$.

$$LSC = \overline{R} + \frac{d_3}{d_2}\overline{R} = \left(1 + \frac{d_3}{d_2}\right)\overline{R} \qquad \text{e} \qquad LIC = \overline{R} - \frac{d_3}{d_2}\overline{R} = \left(1 - \frac{d_3}{d_2}\right)\overline{R}$$

Definindo $D_3 = 1 - \frac{d_3}{d_2}$ e $D_4 = 1 + \frac{d_3}{d_2}$, obtemos que a linha central e os limites inferior e superior de controle para o gráfico de controle de $R$ são:

$LSC = D_4\overline{R}$ linha superior de controle;

$LC = \overline{R}$ linha central;

$LIC = D_3\overline{R}$ linha inferior de controle.

onde:

$\overline{R}$: é a amplitude média das $m$ amostras;

$D_3$ e $D_4$: são constantes tabeladas em função do tamanho da amostra $n$.

**Exemplo (Abertura de um Rotor):** Uma parte componente de um motor de avião a jato é fabricada por um processo de moldagem. A abertura do rotor nessa moldagem é um importante parâmetro funcional da peça. A Tabela 16 apresenta 20 amostras de cinco peças cada. Os valores fornecidos na tabela foram codificados usando os últimos três dígitos da dimensão; isto é, 31,6 deve ser 0,50316 polegadas. Faça os gráficos de controle $\overline{X}$ e $R$ para verificar a estabilidade estatística deste processo.

TABELA 16 – Medidas de Abertura de um Rotor

| Número da Amostra | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $\overline{X}$ | $R$ | $S$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 33 | 29 | 31 | 32 | 33 | 31,6 | 4 | 1,67332 |
| 2 | 33 | 31 | 35 | 37 | 31 | 33,4 | 6 | 2,60768 |
| 3 | 35 | 37 | 33 | 34 | 36 | 35,0 | 4 | 1,58114 |
| 4 | 30 | 31 | 33 | 34 | 33 | 32,2 | 4 | 1,64317 |
| 5 | 33 | 34 | 35 | 33 | 34 | 33,8 | 2 | 0,83666 |
| 6 | 38 | 37 | 39 | 40 | 38 | 38,4 | 3 | 1,14018 |
| 7 | 30 | 31 | 32 | 34 | 31 | 31,6 | 4 | 1,51658 |
| 8 | 29 | 39 | 38 | 39 | 39 | 36,8 | 10 | 4,38178 |
| 9 | 28 | 33 | 35 | 36 | 43 | 35,0 | 15 | 5,43139 |
| 10 | 38 | 33 | 32 | 35 | 32 | 34,0 | 6 | 2,54951 |
| 11 | 28 | 30 | 28 | 32 | 31 | 29,8 | 4 | 1,78885 |
| 12 | 31 | 35 | 35 | 35 | 34 | 34,0 | 4 | 1,73205 |
| 13 | 27 | 32 | 34 | 35 | 37 | 33,0 | 10 | 3,80789 |
| 14 | 33 | 33 | 35 | 37 | 36 | 34,8 | 4 | 1,78885 |
| 15 | 35 | 37 | 32 | 35 | 39 | 35,6 | 7 | 2,60768 |
| 16 | 33 | 33 | 27 | 31 | 30 | 30,8 | 6 | 2,48998 |
| 17 | 35 | 34 | 34 | 30 | 32 | 33,0 | 5 | 2,00000 |
| 18 | 32 | 33 | 30 | 30 | 33 | 31,6 | 3 | 1,51658 |
| 19 | 25 | 27 | 34 | 27 | 28 | 28,2 | 9 | 3,42053 |
| 20 | 35 | 35 | 36 | 33 | 30 | 33,8 | 6 | 2,38747 |
| | | | | | | $\overline{\overline{X}} = 33,32$ | $\overline{R} = 5,8$ | $\overline{S} = 2,345$ |

FONTE: Montgomery (2003).

FIGURA 6 – GRÁFICO DE CONTROLE DE MÉDIAS PARA A ABERTURA DE UM ROTOR

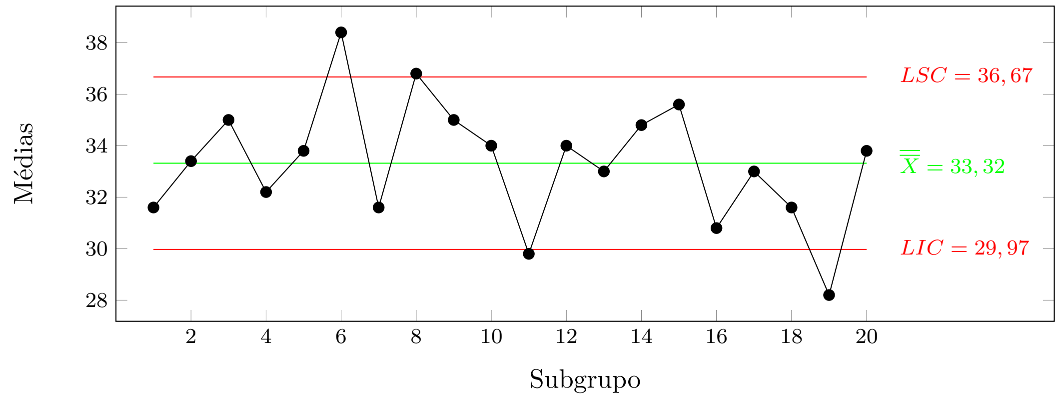
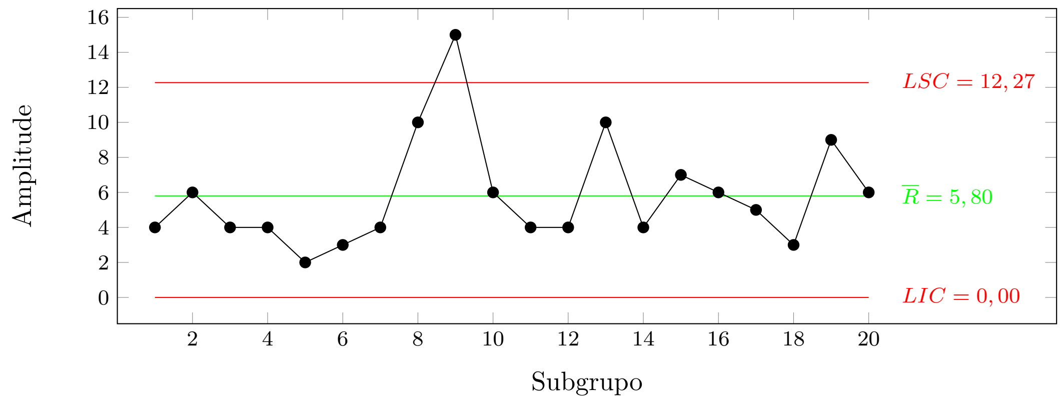



FIGURA 7 – GRÁFICO DE CONTROLE DE AMPLITUDE PARA A ABERTURA DE UM ROTOR



#### 6.2.1.3 Gráfico de Controle de $\overline{X}$ (a partir de $\overline{S}$)

**Estimador de $\sigma$ a partir do Gráfico $S$:** $\hat{\sigma} = \dfrac{\overline{S}}{c_4}$, onde $c_4$ é um valor tabelado.

Com base na normalidade, calcula-se os limites de controle três sigmas para o gráfico de controle de $\overline{X}$ .

$$LSC = \overline{\overline{X}} + \frac{3}{c_4\sqrt{n}}\overline{S} \qquad \text{e} \qquad LIC = \overline{\overline{X}} - \frac{3}{c_4\sqrt{n}}\overline{S}$$

Definindo $A_3 = \dfrac{3}{c_4\sqrt{n}}$, obtemos que a linha central e os limites inferior e superior de controle para o gráfico de controle de $\overline{X}$ são:

$LSC = \overline{\overline{X}} + A_3\overline{S}$ linha superior de controle;

$LC = \overline{\overline{X}}$ linha central;

$LIC = \overline{\overline{X}} - A_3\overline{S}$ linha inferior de controle.

Onde:

$\overline{\overline{X}}$: é a média das $m$ amostras;

$\overline{S}$: é o desvio padrão médio das $m$ amostras;

$A_3$: é constante tabelada em função do tamanho da amostra $n$.

#### 6.2.1.4 Gráfico de Controle de $S$

Podemos estimar $\sigma_S$ como $\hat{\sigma}_S = \sigma\sqrt{1 - c_4^2}$.

Com base na normalidade, calcula-se os limites de controle três sigmas para o gráfico de controle de $R$.

$$LSC = \overline{S} + 3\frac{\overline{S}\sqrt{1-c_4^2}}{c_4} = \left(1 + \frac{3}{c_4}\sqrt{1-c_4^2}\right)\overline{S}$$

e

$$LIC = \overline{S} - 3\frac{\overline{S}\sqrt{1-c_4^2}}{c_4} = \left(1 - \frac{3}{c_4}\sqrt{1-c_4^2}\right)\overline{S}$$

Definindo $B_3 = 1 - \frac{3}{c_4}\sqrt{1-c_4^2}$ e $B_4 = 1 + \frac{3}{c_4}\sqrt{1-c_4^2}$, obtemos que a linha central e os limites inferior e superior de controle para o gráfico de controle de $R$ são:

$LSC = B_4\overline{S}$ linha superior de controle;

$LC = \overline{S}$ linha central;

$LIC = B_3\overline{S}$ linha inferior de controle.

onde:

$\overline{S}$: é o desvio padrão médio das $m$ amostras;

$B_3$ e $B_4$: são constantes tabeladas em função do tamanho da amostra $n$.

**Exemplo:** Para o exemplo da Abertura de um Rotor, faça os gráficos de controle $\overline{X}$ e $S$ para verificar a estabilidade estatística deste processo.

FIGURA 8 – GRÁFICO DE CONTROLE DE MÉDIAS PARA A ABERTURA DE UM ROTOR

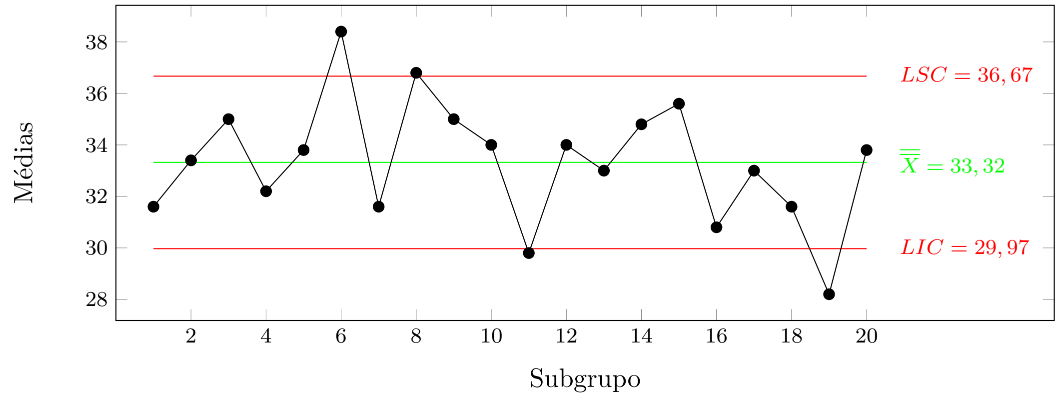
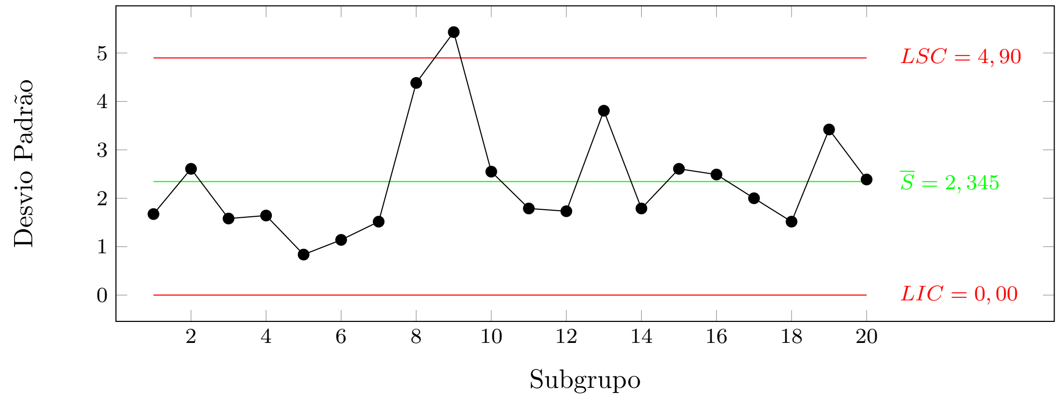



FIGURA 9 – GRÁFICO DE CONTROLE DE DESVIO PADRÃO PARA A ABERTURA DE UM ROTOR




### 6.2.2 Gráfico de Controle para Atributos

#### 6.2.2.1 Gráfico de Controle para Proporções (Gráfico $P$)

Neste caso, considera-se como medida de qualidade a fração de defeituosos produzidos pelo processo. Entende-se por fração de produtos defeituosos como a razão entre o número de itens defeituosos e o total de itens.

Os princípios subjacentes ao gráfico de controle para a fração de não conformes baseiam-se na distribuição binomial.

Quando a fração de não conformes do processo, $p$, não é conhecida, deve, então, ser estimada a partir de dados observados. O procedimento usual é a seleção de m amostras preliminares, cada uma de tamanho n. Como regra geral, $m$ deve ser 20 ou 25.

Então, se há $D_i$ unidades não conformes na amostra $i$, calcula-se a fração de não conformes na i-ésima amostra através de:

$$P_i = \frac{D_i}{n} \quad , \qquad i = 1, \ \dots, m$$

A média $\overline{P}$ dessas frações de não conformes das amostras individuais é:

$$\overline{P} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} P_i = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m} D_i$$

Os limites de controle e a linha central do gráfico de controle serão definidos através de:

$$LSC = \overline{P} + 3\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}} \qquad \text{linha superior de controle;}$$
$$LC = \overline{P} \qquad \text{linha central;}$$
$$LIC = \overline{P} - 3\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}} \qquad \text{linha inferior de controle.}$$

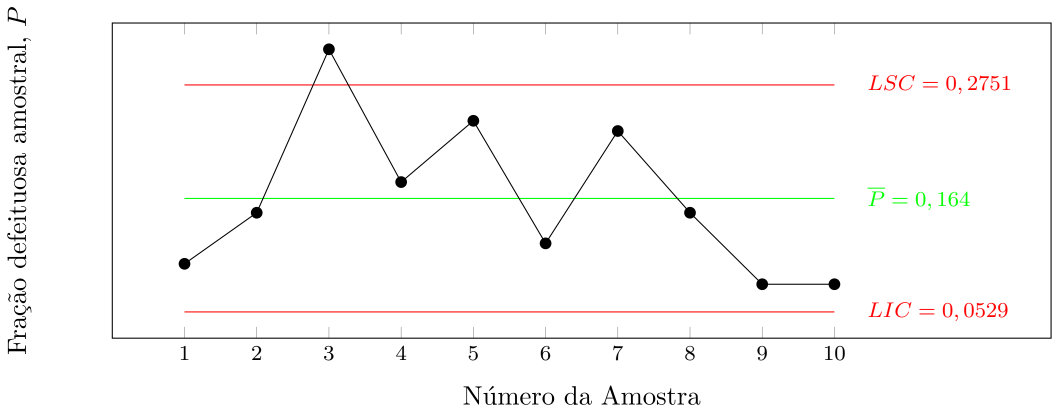
onde $\overline{P}$ é o valor observado da fração média defeituosa.

**Exemplo:** Usa-se um gráfico de controle para a fração de não conformes de uma parte plástica fabricada em um processo de moldagem por injeção. Dez subgrupos fornecem os seguintes dados:

| Amostra | Nº de Defeitos |
|---|---|
| 1 | 10 |
| 2 | 15 |
| 3 | 31 |
| 4 | 18 |
| 5 | 24 |
| 6 | 12 |
| 7 | 23 |
| 8 | 15 |
| 9 | 8 |
| 10 | 8 |

Estabeleça um gráfico de controle para a fração de não conformes em amostra de n=100.

FIGURA 10 – GRÁFICO P PARA UMA PARTE PLÁSTICA DE UMA MOLDAGEM POR INJEÇÃO



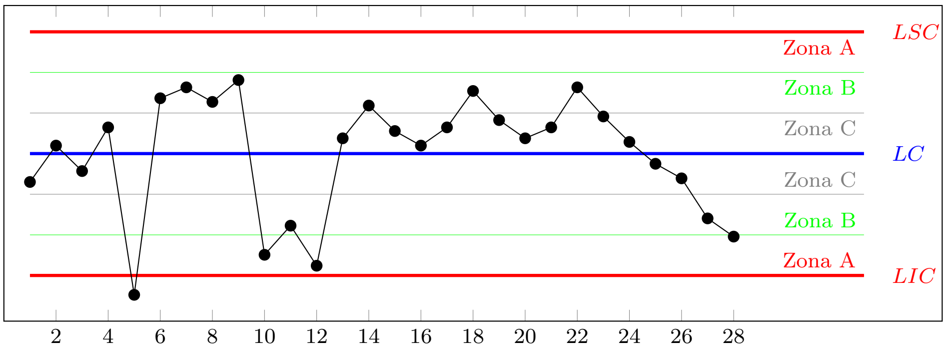
### 6.2.3 Interpretação dos gráficos de Controle

Em muitos casos, o padrão dos pontos plotados fornecerá informações diagnósticas úteis sobre o processo, e essas informações podem ser usadas para fazer modificações no processo que reduzem a variabilidade (o objetivo do controle estatístico do processo). Desta forma, a eliminação destes padrões é frequentemente crucial para colocar o processo em controle.

Algumas regras para detectar padrões não aleatórios de comportamento nos gráficos de controle são enunciadas abaixo. Portanto, podemos concluir que o processo está fora de controle se:

1. Um ponto cair fora dos limites de controle (fora dos limites 3-sigma);
2. Quatro de cinco pontos consecutivos caírem na Zona B (além do limite 1-sigma);
3. Dois de três pontos consecutivos caírem na Zona A (além do limite 2-sigma);
4. Oito pontos consecutivos caírem em um lado da linha central;
5. Uma tendência de seis ou mais pontos consecutivos subindo ou descendo (***run***).

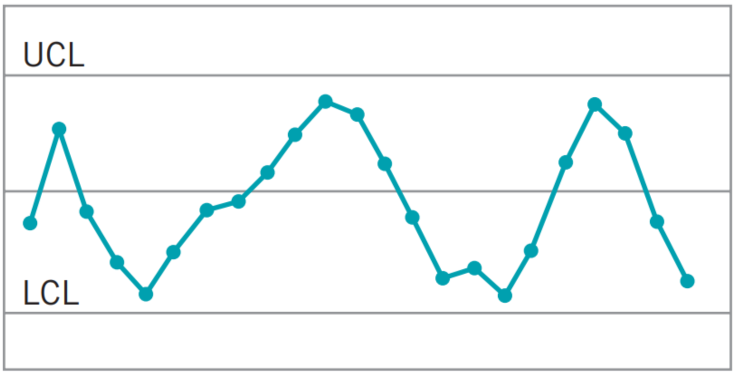
Observe o Gráfico abaixo e identifique quais os pontos em que o processo está fora de controle, identificando qual regra foi violada.




Ao interpretar padrões no gráfico $\overline{X}$, devemos primeiro determinar se o gráfico $R$ está ou não no controle. Algumas causas atribuíveis aparecem nos gráficos $\overline{X}$ e $R$. Se ambos os gráficos $\overline{X}$ e $R$ exibem um padrão não aleatório, a melhor estratégia é eliminar as causas atribuíveis do gráfico $R$ primeiro. Em muitos casos, isso eliminará automaticamente o padrão não aleatório no gráfico $\overline{X}$. Nunca tente interpretar o gráfico quando o gráfico $R$ indicar uma condição fora de controle.

**Padrões cíclicos** ocasionalmente aparecem no gráfico de controle. Um exemplo típico é mostrado na Fig. 11. Tal padrão no gráfico pode resultar de mudanças ambientais sistemáticas como temperatura, fadiga do operador, rotação regular de operadores e / ou máquinas, ou flutuação na tensão ou pressão ou alguma outra variável no equipamento de produção. Os gráficos R, às vezes, revelam ciclos por causa dos cronogramas de manutenção, fadiga do operador ou desgaste da ferramenta, resultando em variabilidade excessiva. Em um estudo no qual Montgomery esteve envolvido, a variabilidade sistemática no volume de enchimento de um recipiente de metal foi causada pelo ciclo on-off de um compressor na máquina de enchimento.

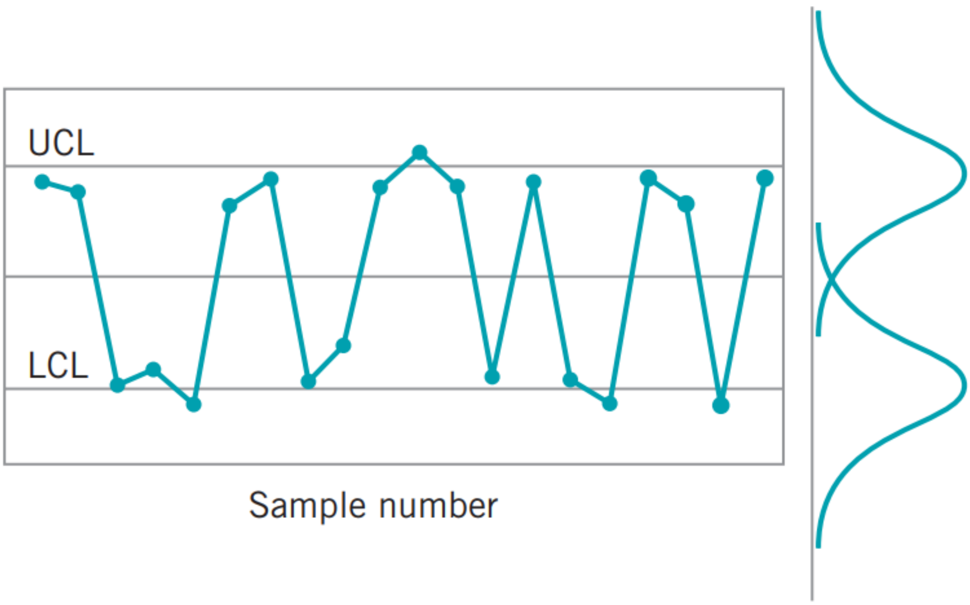
FIGURA 11 – Ciclos no gráfico de controle




FONTE: MONTGOMERY, 2009.

Uma **mistura** é indicada quando os pontos plotados tendem a cair perto ou ligeiramente fora dos limites de controle, com relativamente poucos pontos próximos da linha central, como mostrado na Fig. 6.9. Um padrão de mistura é gerado por duas (ou mais) distribuições sobrepostas gerando a saída do processo. As distribuições de probabilidade que poderiam ser associadas ao padrão de mistura na Fig. 12 são mostradas no lado direito daquela figura. A severidade do padrão de mistura depende da extensão em que as distribuições se sobrepõem. Às vezes, as misturas resultam do "supercontrole", em que os operadores fazem ajustes de processo com muita frequência, respondendo a variações aleatórias na produção, em vez de causas sistemáticas. Um padrão de mistura também pode ocorrer quando o produto de saída de várias fontes (como máquinas paralelas) é alimentado em um fluxo comum que é então amostrado para fins de monitoramento de processo.

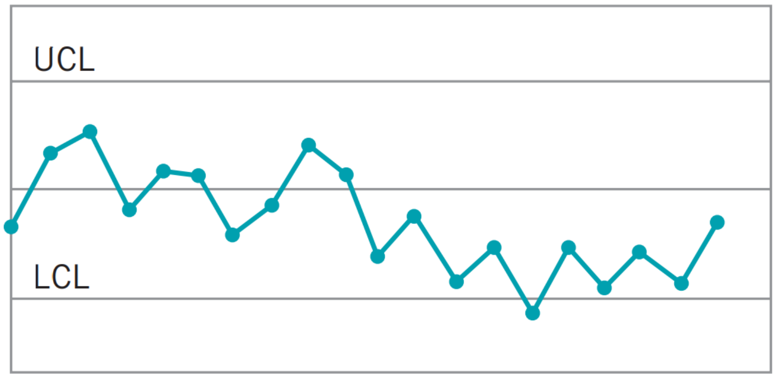
FIGURA 12 – Um Padrão de Mistura




FONTE: MONTGOMERY, 2009.

Uma **mudança no nível do processo** é ilustrada na Fig. 13. Essas mudanças podem resultar da introdução de novos trabalhadores; mudanças nos métodos, matérias-primas ou máquinas; uma mudança no método ou padrões de inspeção; ou uma mudança na habilidade, atenção ou motivação dos operadores. Às vezes, observa-se uma melhora no desempenho do processo após a introdução de um programa gráfico de controle, simplesmente devido a fatores motivacionais que influenciam os trabalhadores.

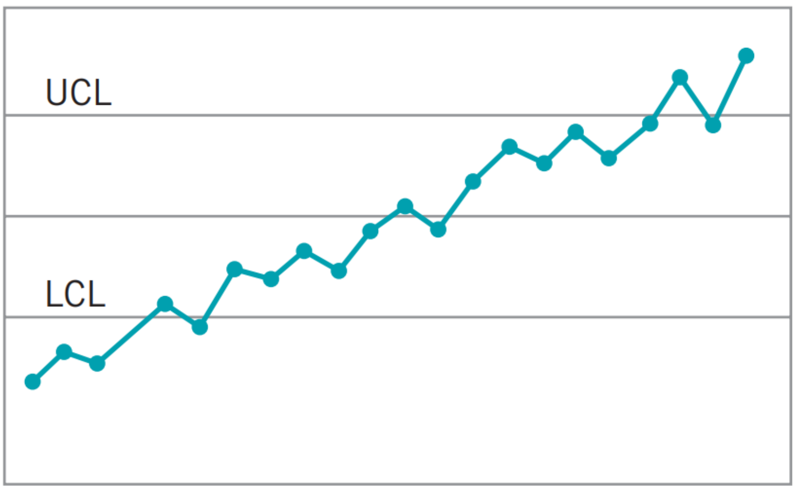
FIGURA 13 – Uma mudança no nível do processo




FONTE: MONTGOMERY, 2009.

Uma **tendência**, ou movimento contínuo em uma direção, é mostrada na tabela de controle na Fig. 14. As tendências são geralmente devido a um desgaste gradual ou deterioração de uma ferramenta ou de algum outro componente crítico do processo. Nos processos químicos, eles geralmente ocorrem por causa da sedimentação ou separação dos componentes de uma mistura. Eles também podem resultar de causas humanas, como a fadiga do operador ou a presença de supervisão. Finalmente, as tendências podem resultar de influências sazonais, como a temperatura. Quando as tendências se devem ao desgaste da ferramenta ou a outras causas sistemáticas de deterioração, isso pode ser incorporado diretamente no modelo do gráfico de controle.

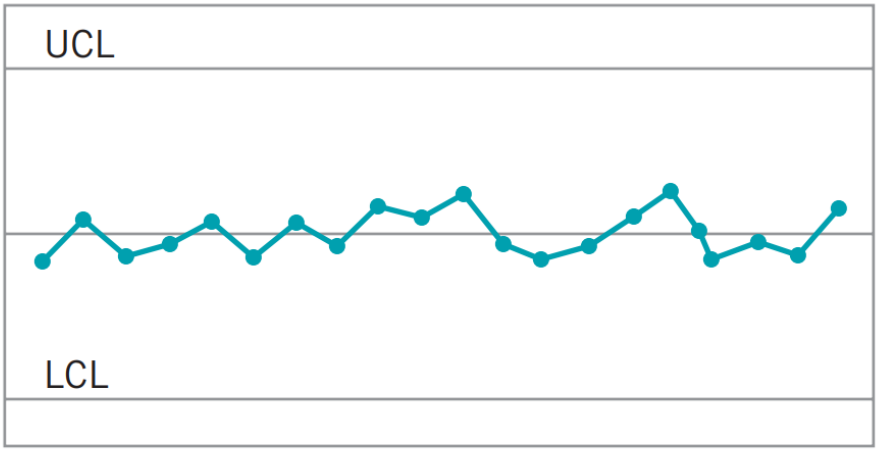
FIGURA 14 – Uma tendência no nível do processo.




FONTE: MONTGOMERY, 2009.

**Estratificação**, ou uma tendência para os pontos se agruparem artificialmente ao redor da linha central, é ilustrada na Fig. 15. Notamos que há uma acentuada falta de variabilidade natural no padrão observado. Uma causa potencial de estratificação é o cálculo incorreto dos limites de controle. Esse padrão também pode resultar quando o processo de amostragem coleta uma ou mais unidades de várias distribuições subjacentes diferentes dentro de cada subgrupo. Por exemplo, suponha que uma amostra de tamanho 5 seja obtida tomando-se uma observação de cada um dos cinco processos paralelos. Se as unidades maior e menor em cada amostra estiverem relativamente distantes, pois elas são provenientes de duas distribuições diferentes, então R será incorretamente inflado, fazendo com que os limites no gráfico sejam muito grandes. Neste caso, o R mede incorretamente a variabilidade entre as diferentes distribuições subjacentes, além da variação da causa do acaso que se pretende medir.

FIGURA 15 – Um Padrão de Estratificação




FONTE: MONTGOMERY, 2009.

## 6.3 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1. Gráficos de controle $\overline{X}$ e $R$ devem ser estabelecidos para uma importante característica da qualidade. O tamanho da amostra é $n = 5$. Sendo $\overline{X}$ e $R$ calculado para cada uma das 35 amostras preliminares. Os dados resumidos são

$$\sum_{i=1}^{35} \overline{X}_i = 7805 \qquad \sum_{i=1}^{35} R_i = 1200$$

   a) Encontre os limites de controle para os gráficos $\overline{X}$ e $R$.

   b) Considerando que o processo esteja sobre controle, estime a média e o desvio padrão do processo.

2. Vinte e cinco amostras de tamanho 5 são retiradas de um processo , em intervalos de hora, sendo obtidos os seguintes dados

$$\sum_{i=1}^{25} \overline{X}_i = 362,75 \qquad \sum_{i=1}^{25} R_i = 8,60 \qquad \sum_{i=1}^{25} S_i = 3,64$$

   a) Encontre os limites de controle para os gráficos $\overline{X}$ e $R$.

   b) Encontre os limites de controle para os gráficos $\overline{X}$ e $S$.

3. Um molde para extrusão é usado para produzir bastões de alumínio. O diâmetro dos bastões é uma característica crítica da qualidade. A seguinte tabela mostra os valores de $\overline{X}$ e $R$ para 20 amostras de cinco bastões cada. Especificações sobre os bastões são $0,5035 \pm 0,0010$ polegada. Os valores dados são os três últimos dígitos da medida, ou seja, 34,2 é lido como 0,50342.

| Amostra | $\overline{X}$ | $R$ | Amostra | $\overline{X}$ | $R$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 34,2 | 3 | 11 | 35,4 | 8 |
| 2 | 31,6 | 4 | 12 | 34,0 | 6 |
| 3 | 31,8 | 4 | 13 | 36,0 | 4 |
| 4 | 33,4 | 5 | 14 | 37,2 | 7 |
| 5 | 35,0 | 4 | 15 | 35,2 | 3 |
| 6 | 32,1 | 2 | 16 | 33,4 | 10 |
| 7 | 32,6 | 7 | 17 | 35,0 | 4 |
| 8 | 33,8 | 9 | 18 | 34,4 | 7 |
| 9 | 34,8 | 10 | 19 | 33,9 | 8 |
| 10 | 38,6 | 4 | 20 | 34,0 | 4 |

   a) Usando todos os dados, encontre os limites de controle para os gráficos $\overline{X}$ e $R$, construa o gráfico e plote os dados.

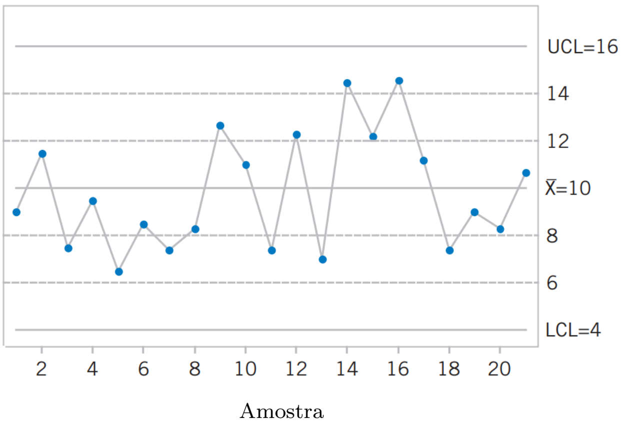
b) Use os limites de controle para identificar pontos fora de controle. Se necessário, reveja seus limites de controle, considerando que qualquer amostra fora dos limites de controle poderá ser eliminada. Estime $\sigma$.

4. Os dados que seguem apresentam os resultados da inspeção de todas as unidades de computadores produzidos durante os últimos 10 dias. O processo parece estar sob controle?

| DIA | UNIDADES INSPECIONADAS ($n_i$) | UNIDADES NÃO CONFORMES |
|---|---|---|
| 1 | 80 | 4 |
| 2 | 110 | 7 |
| 3 | 90 | 5 |
| 4 | 75 | 8 |
| 5 | 130 | 6 |
| 6 | 120 | 6 |
| 7 | 70 | 4 |
| 8 | 125 | 5 |
| 9 | 105 | 8 |
| 10 | 95 | 7 |

5. Aplique as regras de identificação de não-controle ao seguinte gráfico de controle $\overline{X}$. Os limites de advertência são mostrados como linhas tracejadas. Descreva qualquer uma das violações das regras.

FIGURA 16 – Carta de controle de $\overline{X}$




FONTE: MONTGOMERY, 2003.

6. A espessura de uma placa de circuito impresso é um parâmetro importante da qualidade. Foram obtidas as espessuras (em polegadas, in) de 25 amostras, sendo três placas cada amostra.

| AMOSTRA | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | AMOSTRA | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,0629 | 0,0636 | 0,0640 | 14 | 0,0645 | 0,0640 | 0,0631 |
| 2 | 0,0630 | 0,0631 | 0,0622 | 15 | 0,0619 | 0,0644 | 0,0632 |
| 3 | 0,0628 | 0,0631 | 0,0633 | 16 | 0,0631 | 0,0627 | 0,0630 |
| 4 | 0,0634 | 0,0630 | 0,0631 | 17 | 0,0616 | 0,0623 | 0,0631 |
| 5 | 0,0619 | 0,0628 | 0,0630 | 18 | 0,0630 | 0,0630 | 0,0626 |
| 6 | 0,0613 | 0,0629 | 0,0634 | 19 | 0,0636 | 0,0631 | 0,0629 |
| 7 | 0,0630 | 0,0639 | 0,0625 | 20 | 0,0640 | 0,0635 | 0,0629 |
| 8 | 0,0628 | 0,0627 | 0,0622 | 21 | 0,0628 | 0,0625 | 0,0616 |
| 9 | 0,0623 | 0,0626 | 0,0633 | 22 | 0,0615 | 0,0625 | 0,0619 |
| 10 | 0,0631 | 0,0631 | 0,0633 | 23 | 0,0630 | 0,0632 | 0,0630 |
| 11 | 0,0635 | 0,0630 | 0,0638 | 24 | 0,0635 | 0,0629 | 0,0635 |
| 12 | 0,0623 | 0,0630 | 0,0630 | 25 | 0,0623 | 0,0629 | 0,0630 |
| 13 | 0,0635 | 0,0631 | 0,0630 | | | | |

Construir os gráficos de controle $\overline{X}$ e $R$ para esse processo. O processo está sob controle?

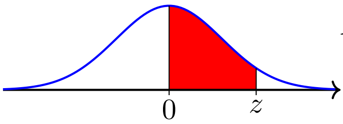
7. Os dados apresentados a seguir são a média e a amplitude de 24 amostras de tamanho 5 tomadas de um processo de produção de eixos. Calcular os limites de controle para o gráfico da média e para o gráfico da amplitude.

| AMOSTRA | $X_i$ | $R$ | AMOSTRA | $X_i$ | $R$ | AMOSTRA | $X_i$ | $R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 34,95 | 0,22 | 9 | 35,08 | 0,37 | 17 | 35,00 | 0,28 |
| 2 | 35,05 | 0,33 | 10 | 35,02 | 0,09 | 18 | 35,04 | 0,29 |
| 3 | 35,01 | 0,27 | 11 | 34,98 | 0,33 | 19 | 35,0 | 0,27 |
| 4 | 34,97 | 0,16 | 12 | 34,98 | 0,23 | 20 | 34,81 | 0,27 |
| 5 | 35,02 | 0,39 | 13 | 35,03 | 0,15 | 21 | 34,96 | 0,29 |
| 6 | 34,95 | 0,19 | 14 | 35,05 | 0,29 | 22 | 35,05 | 0,18 |
| 7 | 34,96 | 0,21 | 15 | 35,00 | 0,31 | 23 | 35,02 | 0,29 |
| 8 | 34,97 | 0,27 | 16 | 34,92 | 0,18 | 24 | 35,03 | 0,29 |

8. A tabela abaixo apresenta as medidas dos diâmetros internos (mm) de anéis de pistão de motores de automóveis.

| AMOSTRA | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 74,030 | 74,002 | 74,019 | 73,992 | 74,008 |
| 2 | 73,995 | 73,992 | 74,001 | 74,011 | 74,004 |
| 3 | 73,988 | 74,024 | 74,021 | 74,005 | 74,002 |
| 4 | 74,002 | 73,996 | 73,993 | 74,015 | 74,009 |
| 5 | 73,992 | 74,007 | 74,015 | 73,989 | 74,014 |
| 6 | 74,009 | 73,994 | 73,997 | 73,985 | 73,993 |
| 7 | 73,995 | 74,006 | 73,994 | 74,000 | 74,005 |
| 8 | 73,985 | 74,003 | 73,993 | 74,015 | 73,988 |
| 9 | 74,008 | 73,995 | 74,009 | 74,005 | 74,004 |
| 10 | 73,998 | 74,000 | 73,990 | 74,007 | 73,995 |
| 11 | 73,994 | 73,998 | 73,994 | 73,995 | 73,990 |
| 12 | 74,004 | 74,000 | 74,007 | 74,000 | 73,996 |
| 13 | 73,983 | 74,002 | 73,998 | 73,997 | 74,012 |
| 14 | 74,006 | 73,967 | 73,994 | 74,000 | 73,984 |
| 15 | 74,012 | 74,014 | 73,998 | 73,999 | 74,007 |
| 16 | 74,000 | 73,984 | 74,005 | 73,998 | 73,996 |
| 17 | 73,994 | 74,012 | 73,986 | 74,005 | 74,007 |
| 18 | 74,006 | 74,010 | 74,018 | 74,003 | 74,000 |
| 19 | 73,984 | 74,002 | 74,003 | 74,005 | 73,997 |
| 20 | 74,000 | 74,010 | 74,013 | 74,020 | 74,003 |
| 21 | 73,982 | 74,001 | 74,015 | 74,005 | 73,996 |
| 22 | 74,004 | 73,999 | 73,990 | 74,006 | 74,009 |
| 23 | 74,010 | 73,989 | 73,990 | 74,009 | 74,014 |
| 24 | 74,015 | 74,008 | 73,993 | 74,000 | 74,010 |
| 25 | 73,982 | 73,984 | 73,995 | 74,017 | 74,013 |

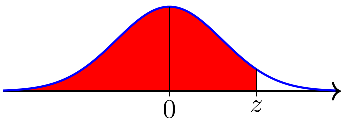
Construir os gráficos de controle $\overline{X}$ e $R$ para esse processo. O processo está sob controle?




ÁREAS SOB A CURVA NORMAL PADRONIZADA

$P(0 < Z < z) =$ Área sob a curva normal

| z | 0 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,0** | 0,00000 | 0,00399 | 0,00798 | 0,01197 | 0,01595 | 0,01994 | 0,02392 | 0,02790 | 0,03188 | 0,03586 |
| **0,1** | 0,03983 | 0,04380 | 0,04776 | 0,05172 | 0,05567 | 0,05962 | 0,06356 | 0,06749 | 0,07142 | 0,07535 |
| **0,2** | 0,07926 | 0,08317 | 0,08706 | 0,09095 | 0,09483 | 0,09871 | 0,10257 | 0,10642 | 0,11026 | 0,11409 |
| **0,3** | 0,11791 | 0,12172 | 0,12552 | 0,12930 | 0,13307 | 0,13683 | 0,14058 | 0,14431 | 0,14803 | 0,15173 |
| **0,4** | 0,15542 | 0,15910 | 0,16276 | 0,16640 | 0,17003 | 0,17364 | 0,17724 | 0,18082 | 0,18439 | 0,18793 |
| **0,5** | 0,19146 | 0,19497 | 0,19847 | 0,20194 | 0,20540 | 0,20884 | 0,21226 | 0,21566 | 0,21904 | 0,22240 |
| **0,6** | 0,22575 | 0,22907 | 0,23237 | 0,23565 | 0,23891 | 0,24215 | 0,24537 | 0,24857 | 0,25175 | 0,25490 |
| **0,7** | 0,25804 | 0,26115 | 0,26424 | 0,26730 | 0,27035 | 0,27337 | 0,27637 | 0,27935 | 0,28230 | 0,28524 |
| **0,8** | 0,28814 | 0,29103 | 0,29389 | 0,29673 | 0,29955 | 0,30234 | 0,30511 | 0,30785 | 0,31057 | 0,31327 |
| **0,9** | 0,31594 | 0,31859 | 0,32121 | 0,32381 | 0,32639 | 0,32894 | 0,33147 | 0,33398 | 0,33646 | 0,33891 |
| **1,0** | 0,34134 | 0,34375 | 0,34614 | 0,34849 | 0,35083 | 0,35314 | 0,35543 | 0,35769 | 0,35993 | 0,36214 |
| **1,1** | 0,36433 | 0,36650 | 0,36864 | 0,37076 | 0,37286 | 0,37493 | 0,37698 | 0,37900 | 0,38100 | 0,38298 |
| **1,2** | 0,38493 | 0,38686 | 0,38877 | 0,39065 | 0,39251 | 0,39435 | 0,39617 | 0,39796 | 0,39973 | 0,40147 |
| **1,3** | 0,40320 | 0,40490 | 0,40658 | 0,40824 | 0,40988 | 0,41149 | 0,41309 | 0,41466 | 0,41621 | 0,41774 |
| **1,4** | 0,41924 | 0,42073 | 0,42220 | 0,42364 | 0,42507 | 0,42647 | 0,42785 | 0,42922 | 0,43056 | 0,43189 |
| **1,5** | 0,43319 | 0,43448 | 0,43574 | 0,43699 | 0,43822 | 0,43943 | 0,44062 | 0,44179 | 0,44295 | 0,44408 |
| **1,6** | 0,44520 | 0,44630 | 0,44738 | 0,44845 | 0,44950 | 0,45053 | 0,45154 | 0,45254 | 0,45352 | 0,45449 |
| **1,7** | 0,45543 | 0,45637 | 0,45728 | 0,45818 | 0,45907 | 0,45994 | 0,46080 | 0,46164 | 0,46246 | 0,46327 |
| **1,8** | 0,46407 | 0,46485 | 0,46562 | 0,46638 | 0,46712 | 0,46784 | 0,46856 | 0,46926 | 0,46995 | 0,47062 |
| **1,9** | 0,47128 | 0,47193 | 0,47257 | 0,47320 | 0,47381 | 0,47441 | 0,47500 | 0,47558 | 0,47615 | 0,47670 |
| **2,0** | 0,47725 | 0,47778 | 0,47831 | 0,47882 | 0,47932 | 0,47982 | 0,48030 | 0,48077 | 0,48124 | 0,48169 |
| **2,1** | 0,48214 | 0,48257 | 0,48300 | 0,48341 | 0,48382 | 0,48422 | 0,48461 | 0,48500 | 0,48537 | 0,48574 |
| **2,2** | 0,48610 | 0,48645 | 0,48679 | 0,48713 | 0,48745 | 0,48778 | 0,48809 | 0,48840 | 0,48870 | 0,48899 |
| **2,3** | 0,48928 | 0,48956 | 0,48983 | 0,49010 | 0,49036 | 0,49061 | 0,49086 | 0,49111 | 0,49134 | 0,49158 |
| **2,4** | 0,49180 | 0,49202 | 0,49224 | 0,49245 | 0,49266 | 0,49286 | 0,49305 | 0,49324 | 0,49343 | 0,49361 |
| **2,5** | 0,49379 | 0,49396 | 0,49413 | 0,49430 | 0,49446 | 0,49461 | 0,49477 | 0,49492 | 0,49506 | 0,49520 |
| **2,6** | 0,49534 | 0,49547 | 0,49560 | 0,49573 | 0,49585 | 0,49598 | 0,49609 | 0,49621 | 0,49632 | 0,49643 |
| **2,7** | 0,49653 | 0,49664 | 0,49674 | 0,49683 | 0,49693 | 0,49702 | 0,49711 | 0,49720 | 0,49728 | 0,49736 |
| **2,8** | 0,49744 | 0,49752 | 0,49760 | 0,49767 | 0,49774 | 0,49781 | 0,49788 | 0,49795 | 0,49801 | 0,49807 |
| **2,9** | 0,49813 | 0,49819 | 0,49825 | 0,49831 | 0,49836 | 0,49841 | 0,49846 | 0,49851 | 0,49856 | 0,49861 |
| **3,0** | 0,49865 | 0,49869 | 0,49874 | 0,49878 | 0,49882 | 0,49886 | 0,49889 | 0,49893 | 0,49896 | 0,49900 |
| **3,1** | 0,49903 | 0,49906 | 0,49910 | 0,49913 | 0,49916 | 0,49918 | 0,49921 | 0,49924 | 0,49926 | 0,49929 |
| **3,2** | 0,49931 | 0,49934 | 0,49936 | 0,49938 | 0,49940 | 0,49942 | 0,49944 | 0,49946 | 0,49948 | 0,49950 |
| **3,3** | 0,49952 | 0,49953 | 0,49955 | 0,49957 | 0,49958 | 0,49960 | 0,49961 | 0,49962 | 0,49964 | 0,49965 |
| **3,4** | 0,49966 | 0,49968 | 0,49969 | 0,49970 | 0,49971 | 0,49972 | 0,49973 | 0,49974 | 0,49975 | 0,49976 |
| **3,5** | 0,49977 | 0,49978 | 0,49978 | 0,49979 | 0,49980 | 0,49981 | 0,49981 | 0,49982 | 0,49983 | 0,49983 |
| **3,6** | 0,49984 | 0,49985 | 0,49985 | 0,49986 | 0,49986 | 0,49987 | 0,49987 | 0,49988 | 0,49988 | 0,49989 |
| **3,7** | 0,49989 | 0,49990 | 0,49990 | 0,49990 | 0,49991 | 0,49991 | 0,49992 | 0,49992 | 0,49992 | 0,49992 |
| **3,8** | 0,49993 | 0,49993 | 0,49993 | 0,49994 | 0,49994 | 0,49994 | 0,49994 | 0,49995 | 0,49995 | 0,49995 |
| **3,9** | 0,49995 | 0,49995 | 0,49996 | 0,49996 | 0,49996 | 0,49996 | 0,49996 | 0,49996 | 0,49997 | 0,49997 |




ÁREAS SOB A CURVA NORMAL PADRONIZADA

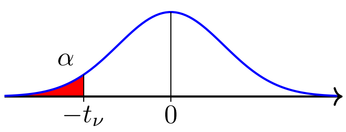
$P(Z < z) =$ Área sob a curva normal

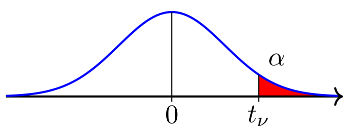
| **z** | **0** | **0,01** | **0,02** | **0,03** | **0,04** | **0,05** | **0,06** | **0,07** | **0,08** | **0,09** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,0** | 0,50000 | 0,50399 | 0,50798 | 0,51197 | 0,51595 | 0,51994 | 0,52392 | 0,52790 | 0,53188 | 0,53586 |
| **0,1** | 0,53983 | 0,54380 | 0,54776 | 0,55172 | 0,55567 | 0,55962 | 0,56356 | 0,56749 | 0,57142 | 0,57535 |
| **0,2** | 0,57926 | 0,58317 | 0,58706 | 0,59095 | 0,59483 | 0,59871 | 0,60257 | 0,60642 | 0,61026 | 0,61409 |
| **0,3** | 0,61791 | 0,62172 | 0,62552 | 0,62930 | 0,63307 | 0,63683 | 0,64058 | 0,64431 | 0,64803 | 0,65173 |
| **0,4** | 0,65542 | 0,65910 | 0,66276 | 0,66640 | 0,67003 | 0,67364 | 0,67724 | 0,68082 | 0,68439 | 0,68793 |
| **0,5** | 0,69146 | 0,69497 | 0,69847 | 0,70194 | 0,70540 | 0,70884 | 0,71226 | 0,71566 | 0,71904 | 0,72240 |
| **0,6** | 0,72575 | 0,72907 | 0,73237 | 0,73565 | 0,73891 | 0,74215 | 0,74537 | 0,74857 | 0,75175 | 0,75490 |
| **0,7** | 0,75804 | 0,76115 | 0,76424 | 0,76730 | 0,77035 | 0,77337 | 0,77637 | 0,77935 | 0,78230 | 0,78524 |
| **0,8** | 0,78814 | 0,79103 | 0,79389 | 0,79673 | 0,79955 | 0,80234 | 0,80511 | 0,80785 | 0,81057 | 0,81327 |
| **0,9** | 0,81594 | 0,81859 | 0,82121 | 0,82381 | 0,82639 | 0,82894 | 0,83147 | 0,83398 | 0,83646 | 0,83891 |
| **1,0** | 0,84134 | 0,84375 | 0,84614 | 0,84849 | 0,85083 | 0,85314 | 0,85543 | 0,85769 | 0,85993 | 0,86214 |
| **1,1** | 0,86433 | 0,86650 | 0,86864 | 0,87076 | 0,87286 | 0,87493 | 0,87698 | 0,87900 | 0,88100 | 0,88298 |
| **1,2** | 0,88493 | 0,88686 | 0,88877 | 0,89065 | 0,89251 | 0,89435 | 0,89617 | 0,89796 | 0,89973 | 0,90147 |
| **1,3** | 0,90320 | 0,90490 | 0,90658 | 0,90824 | 0,90988 | 0,91149 | 0,91309 | 0,91466 | 0,91621 | 0,91774 |
| **1,4** | 0,91924 | 0,92073 | 0,92220 | 0,92364 | 0,92507 | 0,92647 | 0,92785 | 0,92922 | 0,93056 | 0,93189 |
| **1,5** | 0,93319 | 0,93448 | 0,93574 | 0,93699 | 0,93822 | 0,93943 | 0,94062 | 0,94179 | 0,94295 | 0,94408 |
| **1,6** | 0,94520 | 0,94630 | 0,94738 | 0,94845 | 0,94950 | 0,95053 | 0,95154 | 0,95254 | 0,95352 | 0,95449 |
| **1,7** | 0,95543 | 0,95637 | 0,95728 | 0,95818 | 0,95907 | 0,95994 | 0,96080 | 0,96164 | 0,96246 | 0,96327 |
| **1,8** | 0,96407 | 0,96485 | 0,96562 | 0,96638 | 0,96712 | 0,96784 | 0,96856 | 0,96926 | 0,96995 | 0,97062 |
| **1,9** | 0,97128 | 0,97193 | 0,97257 | 0,97320 | 0,97381 | 0,97441 | 0,97500 | 0,97558 | 0,97615 | 0,97670 |
| **2,0** | 0,97725 | 0,97778 | 0,97831 | 0,97882 | 0,97932 | 0,97982 | 0,98030 | 0,98077 | 0,98124 | 0,98169 |
| **2,1** | 0,98214 | 0,98257 | 0,98300 | 0,98341 | 0,98382 | 0,98422 | 0,98461 | 0,98500 | 0,98537 | 0,98574 |
| **2,2** | 0,98610 | 0,98645 | 0,98679 | 0,98713 | 0,98745 | 0,98778 | 0,98809 | 0,98840 | 0,98870 | 0,98899 |
| **2,3** | 0,98928 | 0,98956 | 0,98983 | 0,99010 | 0,99036 | 0,99061 | 0,99086 | 0,99111 | 0,99134 | 0,99158 |
| **2,4** | 0,99180 | 0,99202 | 0,99224 | 0,99245 | 0,99266 | 0,99286 | 0,99305 | 0,99324 | 0,99343 | 0,99361 |
| **2,5** | 0,99379 | 0,99396 | 0,99413 | 0,99430 | 0,99446 | 0,99461 | 0,99477 | 0,99492 | 0,99506 | 0,99520 |
| **2,6** | 0,99534 | 0,99547 | 0,99560 | 0,99573 | 0,99585 | 0,99598 | 0,99609 | 0,99621 | 0,99632 | 0,99643 |
| **2,7** | 0,99653 | 0,99664 | 0,99674 | 0,99683 | 0,99693 | 0,99702 | 0,99711 | 0,99720 | 0,99728 | 0,99736 |
| **2,8** | 0,99744 | 0,99752 | 0,99760 | 0,99767 | 0,99774 | 0,99781 | 0,99788 | 0,99795 | 0,99801 | 0,99807 |
| **2,9** | 0,99813 | 0,99819 | 0,99825 | 0,99831 | 0,99836 | 0,99841 | 0,99846 | 0,99851 | 0,99856 | 0,99861 |
| **3,0** | 0,99865 | 0,99869 | 0,99874 | 0,99878 | 0,99882 | 0,99886 | 0,99889 | 0,99893 | 0,99896 | 0,99900 |
| **3,1** | 0,99903 | 0,99906 | 0,99910 | 0,99913 | 0,99916 | 0,99918 | 0,99921 | 0,99924 | 0,99926 | 0,99929 |
| **3,2** | 0,99931 | 0,99934 | 0,99936 | 0,99938 | 0,99940 | 0,99942 | 0,99944 | 0,99946 | 0,99948 | 0,99950 |
| **3,3** | 0,99952 | 0,99953 | 0,99955 | 0,99957 | 0,99958 | 0,99960 | 0,99961 | 0,99962 | 0,99964 | 0,99965 |
| **3,4** | 0,99966 | 0,99968 | 0,99969 | 0,99970 | 0,99971 | 0,99972 | 0,99973 | 0,99974 | 0,99975 | 0,99976 |
| **3,5** | 0,99977 | 0,99978 | 0,99978 | 0,99979 | 0,99980 | 0,99981 | 0,99981 | 0,99982 | 0,99983 | 0,99983 |
| **3,6** | 0,99984 | 0,99985 | 0,99985 | 0,99986 | 0,99986 | 0,99987 | 0,99987 | 0,99988 | 0,99988 | 0,99989 |
| **3,7** | 0,99989 | 0,99990 | 0,99990 | 0,99990 | 0,99991 | 0,99991 | 0,99992 | 0,99992 | 0,99992 | 0,99992 |
| **3,8** | 0,99993 | 0,99993 | 0,99993 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99995 | 0,99995 | 0,99995 |
| **3,9** | 0,99995 | 0,99995 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99997 | 0,99997 |

TABELA DISTRIBUIÇÃO $t$ DE STUDENT

Valores de $t_\nu$ com $\nu$ graus de liberdade, tais que:

$P(t \leq -t_\nu) = \alpha$ ou $P(t \geq t_\nu) = \alpha$

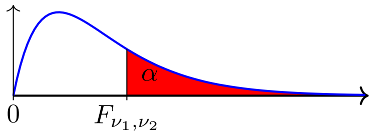



| $\nu$ \ $\alpha$ | **0,005** | **0,01** | **0,025** | **0,05** | **0,10** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 63,66 | 31,82 | 12,71 | 6,31 | 3,08 |
| **2** | 9,92 | 6,96 | 4,30 | 2,92 | 1,89 |
| **3** | 5,84 | 4,54 | 3,18 | 2,35 | 1,64 |
| **4** | 4,60 | 3,75 | 2,78 | 2,13 | 1,53 |
| **5** | 4,03 | 3,36 | 2,57 | 2,02 | 1,48 |
| **6** | 3,71 | 3,14 | 2,45 | 1,94 | 1,44 |
| **7** | 3,50 | 3,00 | 2,36 | 1,89 | 1,41 |
| **8** | 3,36 | 2,90 | 2,31 | 1,86 | 1,40 |
| **9** | 3,25 | 2,82 | 2,26 | 1,83 | 1,38 |
| **10** | 3,17 | 2,76 | 2,23 | 1,81 | 1,37 |
| **11** | 3,11 | 2,72 | 2,20 | 1,80 | 1,36 |
| **12** | 3,05 | 2,68 | 2,18 | 1,78 | 1,36 |
| **13** | 3,01 | 2,65 | 2,16 | 1,77 | 1,35 |
| **14** | 2,98 | 2,62 | 2,14 | 1,76 | 1,35 |
| **15** | 2,95 | 2,60 | 2,13 | 1,75 | 1,34 |
| **16** | 2,92 | 2,58 | 2,12 | 1,75 | 1,34 |
| **17** | 2,90 | 2,57 | 2,11 | 1,74 | 1,33 |
| **18** | 2,88 | 2,55 | 2,10 | 1,73 | 1,33 |
| **19** | 2,86 | 2,54 | 2,09 | 1,73 | 1,33 |
| **20** | 2,85 | 2,53 | 2,09 | 1,72 | 1,33 |
| **21** | 2,83 | 2,52 | 2,08 | 1,72 | 1,32 |
| **22** | 2,82 | 2,51 | 2,07 | 1,72 | 1,32 |
| **23** | 2,81 | 2,50 | 2,07 | 1,71 | 1,32 |
| **24** | 2,80 | 2,49 | 2,06 | 1,71 | 1,32 |
| **25** | 2,79 | 2,49 | 2,06 | 1,71 | 1,32 |
| **26** | 2,78 | 2,48 | 2,06 | 1,71 | 1,31 |
| **27** | 2,77 | 2,47 | 2,05 | 1,70 | 1,31 |
| **28** | 2,76 | 2,47 | 2,05 | 1,70 | 1,31 |
| **29** | 2,76 | 2,46 | 2,05 | 1,70 | 1,31 |
| **30** | 2,75 | 2,46 | 2,04 | 1,70 | 1,31 |

TABELA DISTRIBUIÇÃO F DE SNEDECOR

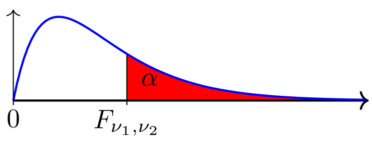
$$\alpha = P(F \geq F_{\nu_1,\nu_2}) = 0,01$$




| $\nu_2$ \ $\nu_1$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **2** | 98,50 | 99,00 | 99,17 | 99,25 | 99,30 | 99,33 | 99,36 | 99,37 | 99,39 | 99,40 |
| **3** | 34,12 | 30,82 | 29,46 | 28,71 | 28,24 | 27,91 | 27,67 | 27,49 | 27,35 | 27,23 |
| **4** | 21,20 | 18,00 | 16,69 | 15,98 | 15,52 | 15,21 | 14,98 | 14,80 | 14,66 | 14,55 |
| **5** | 16,26 | 13,27 | 12,06 | 11,39 | 10,97 | 10,67 | 10,46 | 10,29 | 10,16 | 10,05 |
| **6** | 13,75 | 10,92 | 9,78 | 9,15 | 8,75 | 8,47 | 8,26 | 8,10 | 7,98 | 7,87 |
| **7** | 12,25 | 9,55 | 8,45 | 7,85 | 7,46 | 7,19 | 6,99 | 6,84 | 6,72 | 6,62 |
| **8** | 11,26 | 8,65 | 7,59 | 7,01 | 6,63 | 6,37 | 6,18 | 6,03 | 5,91 | 5,81 |
| **9** | 10,56 | 8,02 | 6,99 | 6,42 | 6,06 | 5,80 | 5,61 | 5,47 | 5,35 | 5,26 |
| **10** | 10,04 | 7,56 | 6,55 | 5,99 | 5,64 | 5,39 | 5,20 | 5,06 | 4,94 | 4,85 |
| **11** | 9,65 | 7,21 | 6,22 | 5,67 | 5,32 | 5,07 | 4,89 | 4,74 | 4,63 | 4,54 |
| **12** | 9,33 | 6,93 | 5,95 | 5,41 | 5,06 | 4,82 | 4,64 | 4,50 | 4,39 | 4,30 |
| **13** | 9,07 | 6,70 | 5,74 | 5,21 | 4,86 | 4,62 | 4,44 | 4,30 | 4,19 | 4,10 |
| **14** | 8,86 | 6,51 | 5,56 | 5,04 | 4,69 | 4,46 | 4,28 | 4,14 | 4,03 | 3,94 |
| **15** | 8,68 | 6,36 | 5,42 | 4,89 | 4,56 | 4,32 | 4,14 | 4,00 | 3,89 | 3,80 |
| **16** | 8,53 | 6,23 | 5,29 | 4,77 | 4,44 | 4,20 | 4,03 | 3,89 | 3,78 | 3,69 |
| **17** | 8,40 | 6,11 | 5,18 | 4,67 | 4,34 | 4,10 | 3,93 | 3,79 | 3,68 | 3,59 |
| **18** | 8,29 | 6,01 | 5,09 | 4,58 | 4,25 | 4,01 | 3,84 | 3,71 | 3,60 | 3,51 |
| **19** | 8,18 | 5,93 | 5,01 | 4,50 | 4,17 | 3,94 | 3,77 | 3,63 | 3,52 | 3,43 |
| **20** | 8,10 | 5,85 | 4,94 | 4,43 | 4,10 | 3,87 | 3,70 | 3,56 | 3,46 | 3,37 |
| **21** | 8,02 | 5,78 | 4,87 | 4,37 | 4,04 | 3,81 | 3,64 | 3,51 | 3,40 | 3,31 |
| **22** | 7,95 | 5,72 | 4,82 | 4,31 | 3,99 | 3,76 | 3,59 | 3,45 | 3,35 | 3,26 |
| **23** | 7,88 | 5,66 | 4,76 | 4,26 | 3,94 | 3,71 | 3,54 | 3,41 | 3,30 | 3,21 |
| **24** | 7,82 | 5,61 | 4,72 | 4,22 | 3,90 | 3,67 | 3,50 | 3,36 | 3,26 | 3,17 |
| **25** | 7,77 | 5,57 | 4,68 | 4,18 | 3,85 | 3,63 | 3,46 | 3,32 | 3,22 | 3,13 |
| **26** | 7,72 | 5,53 | 4,64 | 4,14 | 3,82 | 3,59 | 3,42 | 3,29 | 3,18 | 3,09 |
| **27** | 7,68 | 5,49 | 4,60 | 4,11 | 3,78 | 3,56 | 3,39 | 3,26 | 3,15 | 3,06 |
| **28** | 7,64 | 5,45 | 4,57 | 4,07 | 3,75 | 3,53 | 3,36 | 3,23 | 3,12 | 3,03 |
| **29** | 7,60 | 5,42 | 4,54 | 4,04 | 3,73 | 3,50 | 3,33 | 3,20 | 3,09 | 3,00 |
| **30** | 7,56 | 5,39 | 4,51 | 4,02 | 3,70 | 3,47 | 3,30 | 3,17 | 3,07 | 2,98 |
| **31** | 7,53 | 5,36 | 4,48 | 3,99 | 3,67 | 3,45 | 3,28 | 3,15 | 3,04 | 2,96 |
| **32** | 7,50 | 5,34 | 4,46 | 3,97 | 3,65 | 3,43 | 3,26 | 3,13 | 3,02 | 2,93 |
| **33** | 7,47 | 5,31 | 4,44 | 3,95 | 3,63 | 3,41 | 3,24 | 3,11 | 3,00 | 2,91 |
| **34** | 7,44 | 5,29 | 4,42 | 3,93 | 3,61 | 3,39 | 3,22 | 3,09 | 2,98 | 2,89 |
| **35** | 7,42 | 5,27 | 4,40 | 3,91 | 3,59 | 3,37 | 3,20 | 3,07 | 2,96 | 2,88 |

TABELA DISTRIBUIÇÃO F DE SNEDECOR

$$\alpha = P(F \geq F_{\nu_1,\nu_2}) = 0,05$$




| $\nu_2$ \ $\nu_1$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **2** | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,30 | 19,33 | 19,35 | 19,37 | 19,38 | 19,40 |
| **3** | 10,13 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 9,01 | 8,94 | 8,89 | 8,85 | 8,81 | 8,79 |
| **4** | 7,71 | 6,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 | 6,09 | 6,04 | 6,00 | 5,96 |
| **5** | 6,61 | 5,79 | 5,41 | 5,19 | 5,05 | 4,95 | 4,88 | 4,82 | 4,77 | 4,74 |
| **6** | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,39 | 4,28 | 4,21 | 4,15 | 4,10 | 4,06 |
| **7** | 5,59 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,97 | 3,87 | 3,79 | 3,73 | 3,68 | 3,64 |
| **8** | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,69 | 3,58 | 3,50 | 3,44 | 3,39 | 3,35 |
| **9** | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,48 | 3,37 | 3,29 | 3,23 | 3,18 | 3,14 |
| **10** | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,48 | 3,33 | 3,22 | 3,14 | 3,07 | 3,02 | 2,98 |
| **11** | 4,84 | 3,98 | 3,59 | 3,36 | 3,20 | 3,09 | 3,01 | 2,95 | 2,90 | 2,85 |
| **12** | 4,75 | 3,89 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,91 | 2,85 | 2,80 | 2,75 |
| **13** | 4,67 | 3,81 | 3,41 | 3,18 | 3,03 | 2,92 | 2,83 | 2,77 | 2,71 | 2,67 |
| **14** | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,96 | 2,85 | 2,76 | 2,70 | 2,65 | 2,60 |
| **15** | 4,54 | 3,68 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,79 | 2,71 | 2,64 | 2,59 | 2,54 |
| **16** | 4,49 | 3,63 | 3,24 | 3,01 | 2,85 | 2,74 | 2,66 | 2,59 | 2,54 | 2,49 |
| **17** | 4,45 | 3,59 | 3,20 | 2,96 | 2,81 | 2,70 | 2,61 | 2,55 | 2,49 | 2,45 |
| **18** | 4,41 | 3,55 | 3,16 | 2,93 | 2,77 | 2,66 | 2,58 | 2,51 | 2,46 | 2,41 |
| **19** | 4,38 | 3,52 | 3,13 | 2,90 | 2,74 | 2,63 | 2,54 | 2,48 | 2,42 | 2,38 |
| **20** | 4,35 | 3,49 | 3,10 | 2,87 | 2,71 | 2,60 | 2,51 | 2,45 | 2,39 | 2,35 |
| **21** | 4,32 | 3,47 | 3,07 | 2,84 | 2,68 | 2,57 | 2,49 | 2,42 | 2,37 | 2,32 |
| **22** | 4,30 | 3,44 | 3,05 | 2,82 | 2,66 | 2,55 | 2,46 | 2,40 | 2,34 | 2,30 |
| **23** | 4,28 | 3,42 | 3,03 | 2,80 | 2,64 | 2,53 | 2,44 | 2,37 | 2,32 | 2,27 |
| **24** | 4,26 | 3,40 | 3,01 | 2,78 | 2,62 | 2,51 | 2,42 | 2,36 | 2,30 | 2,25 |
| **25** | 4,24 | 3,39 | 2,99 | 2,76 | 2,60 | 2,49 | 2,40 | 2,34 | 2,28 | 2,24 |
| **26** | 4,23 | 3,37 | 2,98 | 2,74 | 2,59 | 2,47 | 2,39 | 2,32 | 2,27 | 2,22 |
| **27** | 4,21 | 3,35 | 2,96 | 2,73 | 2,57 | 2,46 | 2,37 | 2,31 | 2,25 | 2,20 |
| **28** | 4,20 | 3,34 | 2,95 | 2,71 | 2,56 | 2,45 | 2,36 | 2,29 | 2,24 | 2,19 |
| **29** | 4,18 | 3,33 | 2,93 | 2,70 | 2,55 | 2,43 | 2,35 | 2,28 | 2,22 | 2,18 |
| **30** | 4,17 | 3,32 | 2,92 | 2,69 | 2,53 | 2,42 | 2,33 | 2,27 | 2,21 | 2,16 |
| **31** | 4,16 | 3,30 | 2,91 | 2,68 | 2,52 | 2,41 | 2,32 | 2,25 | 2,20 | 2,15 |
| **32** | 4,15 | 3,29 | 2,90 | 2,67 | 2,51 | 2,40 | 2,31 | 2,24 | 2,19 | 2,14 |
| **33** | 4,14 | 3,28 | 2,89 | 2,66 | 2,50 | 2,39 | 2,30 | 2,23 | 2,18 | 2,13 |
| **34** | 4,13 | 3,28 | 2,88 | 2,65 | 2,49 | 2,38 | 2,29 | 2,23 | 2,17 | 2,12 |
| **35** | 4,12 | 3,27 | 2,87 | 2,64 | 2,49 | 2,37 | 2,29 | 2,22 | 2,16 | 2,11 |

TABELA DE NÚMEROS ALEATÓRIOS

| **Coluna** | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| 1500 | 5981 | 6044 | 7247 | 4928 | 0143 | 1468 | 4047 | 6941 | 0089 |
| 2840 | 3692 | 1191 | 0928 | 9735 | 6590 | 2846 | 0740 | 5252 | 1504 |
| 9691 | 3869 | 5791 | 4421 | 0344 | 3709 | 7188 | 2282 | 1854 | 4233 |
| 8425 | 6861 | 2911 | 4489 | 3170 | 8501 | 2893 | 3092 | 7639 | 2186 |
| 4695 | 7130 | 6437 | 0228 | 8730 | 7842 | 4536 | 6482 | 3026 | 7180 |
| 0127 | 2423 | 5094 | 9749 | 9405 | 3095 | 4323 | 3117 | 2922 | 4614 |
| 7351 | 1970 | 5758 | 5394 | 2734 | 8908 | 8630 | 3814 | 3765 | 3480 |
| 6972 | 1831 | 4265 | 8865 | 2758 | 9724 | 7974 | 5696 | 9085 | 2495 |
| 5666 | 4464 | 6534 | 4701 | 2609 | 0835 | 9463 | 3367 | 9876 | 4408 |
| 2849 | 1838 | 9620 | 9089 | 3888 | 4374 | 2483 | 6800 | 9974 | 7056 |
| 5674 | 2328 | 4952 | 8519 | 1235 | 4408 | 1060 | 4496 | 9670 | 1337 |
| 3860 | 2975 | 4182 | 9330 | 9735 | 0932 | 5223 | 0571 | 4396 | 2989 |
| 5974 | 3948 | 0543 | 7889 | 4850 | 5529 | 5748 | 3972 | 1531 | 7811 |
| 8406 | 1270 | 0335 | 9565 | 1266 | 4080 | 4438 | 2262 | 7020 | 5120 |
| 6858 | 6447 | 6903 | 1119 | 1736 | 5251 | 9856 | 1728 | 9480 | 3487 |
| 2527 | 1222 | 4150 | 7275 | 9465 | 2415 | 8462 | 4320 | 5948 | 0604 |
| 2836 | 6735 | 5188 | 0019 | 7579 | 1717 | 2567 | 7057 | 6791 | 1013 |
| 6474 | 1632 | 9533 | 8596 | 2260 | 7231 | 7270 | 0138 | 9614 | 6496 |
| 4617 | 5398 | 4756 | 2143 | 6609 | 3248 | 6704 | 5317 | 8870 | 9018 |
| 2250 | 1310 | 9272 | 1620 | 7714 | 3692 | 3996 | 6482 | 8760 | 6696 |
| 8655 | 7619 | 0175 | 0435 | 7161 | 2527 | 6796 | 2203 | 6449 | 7706 |
| 0346 | 1401 | 8479 | 3143 | 4390 | 3631 | 5149 | 1072 | 6086 | 5363 |
| 3540 | 4020 | 1825 | 3827 | 6741 | 5507 | 6825 | 8016 | 1327 | 1767 |
| 1179 | 6390 | 5384 | 3271 | 0861 | 0562 | 6560 | 9326 | 3819 | 0617 |
| 9826 | 0840 | 6721 | 2057 | 6877 | 6562 | 6724 | 2362 | 4310 | 4401 |
| 7675 | 7571 | 5639 | 3827 | 6390 | 2900 | 4898 | 5704 | 9320 | 4716 |
| 0971 | 0815 | 1578 | 8845 | 0631 | 3669 | 2600 | 1387 | 9811 | 6373 |
| 2933 | 4849 | 3112 | 8145 | 1034 | 7967 | 9042 | 7984 | 0413 | 7914 |
| 7718 | 5798 | 4906 | 8547 | 8604 | 1273 | 7705 | 4024 | 2493 | 2361 |
| 5962 | 0895 | 7633 | 6987 | 5351 | 4079 | 5932 | 8296 | 1867 | 0403 |
| 1470 | 0849 | 8367 | 5750 | 5671 | 0681 | 5435 | 0265 | 3725 | 5617 |
| 1275 | 4389 | 4101 | 5255 | 6202 | 8364 | 5996 | 0679 | 9550 | 4237 |
| 7876 | 6024 | 3797 | 1458 | 5053 | 0722 | 4917 | 9556 | 6685 | 4969 |
| 6984 | 4099 | 6097 | 8116 | 8676 | 9035 | 5302 | 5519 | 8517 | 2077 |
| 1752 | 1818 | 0491 | 6147 | 8285 | 5596 | 9812 | 3153 | 4823 | 0236 |

## Fatores para Construção de Gráficos de Controle para Variáveis

| Observações na amostra, $n$ | Gráficopara Médias | | | Gráficos para Amplitudes | | Gráficos para Desvios Padrão | | | | | | Gráficos para Amplitudes | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Fatores para Limites de Controle | | | Fatores para Linha Central | | Fatores para Limites de Controle | | | | Fatores para Linha Central | | Fatores para Limites de Controle | | | | |
| | $A$ | $A_2$ | $A_3$ | $c_4$ | $1/c_4$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ | $d_2$ | $1/d_2$ | $d_3$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ |
| 2 | 2,121 | 1,880 | 2,659 | 0,798 | 1,253 | 0,000 | 3,267 | 0,000 | 2,606 | 1,128 | 0,887 | 0,853 | 0,000 | 3,686 | 0,000 | 3,267 |
| 3 | 1,732 | 1,023 | 1,954 | 0,886 | 1,128 | 0,000 | 2,568 | 0,000 | 2,276 | 1,693 | 0,591 | 0,888 | 0,000 | 4,358 | 0,000 | 2,574 |
| 4 | 1,500 | 0,729 | 1,628 | 0,921 | 1,085 | 0,000 | 2,266 | 0,000 | 2,088 | 2,059 | 0,486 | 0,880 | 0,000 | 4,698 | 0,000 | 2,282 |
| 5 | 1,342 | 0,577 | 1,427 | 0,940 | 1,064 | 0,000 | 2,089 | 0,000 | 1,964 | 2,326 | 0,430 | 0,864 | 0,000 | 4,918 | 0,000 | 2,114 |
| 6 | 1,225 | 0,483 | 1,287 | 0,952 | 1,051 | 0,030 | 1,970 | 0,029 | 1,874 | 2,534 | 0,395 | 0,848 | 0,000 | 5,078 | 0,000 | 2,004 |
| 7 | 1,134 | 0,419 | 1,182 | 0,959 | 1,042 | 0,118 | 1,882 | 0,113 | 1,806 | 2,704 | 0,370 | 0,833 | 0,204 | 5,204 | 0,076 | 1,924 |
| 8 | 1,061 | 0,373 | 1,099 | 0,965 | 1,036 | 0,185 | 1,815 | 0,179 | 1,751 | 2,847 | 0,351 | 0,820 | 0,388 | 5,306 | 0,136 | 1,864 |
| 9 | 1,000 | 0,337 | 1,032 | 0,969 | 1,032 | 0,239 | 1,761 | 0,232 | 1,707 | 2,970 | 0,337 | 0,808 | 0,547 | 5,393 | 0,184 | 1,816 |
| 10 | 0,949 | 0,308 | 0,975 | 0,973 | 1,028 | 0,284 | 1,716 | 0,276 | 1,669 | 3,078 | 0,325 | 0,797 | 0,687 | 5,469 | 0,223 | 1,777 |
| 11 | 0,905 | 0,285 | 0,927 | 0,975 | 1,025 | 0,321 | 1,679 | 0,313 | 1,637 | 3,173 | 0,315 | 0,787 | 0,811 | 5,535 | 0,256 | 1,744 |
| 12 | 0,866 | 0,266 | 0,886 | 0,978 | 1,023 | 0,354 | 1,646 | 0,346 | 1,610 | 3,258 | 0,307 | 0,778 | 0,922 | 5,594 | 0,283 | 1,717 |
| 13 | 0,832 | 0,249 | 0,850 | 0,979 | 1,021 | 0,382 | 1,618 | 0,374 | 1,585 | 3,336 | 0,300 | 0,770 | 1,025 | 5,647 | 0,307 | 1,693 |
| 14 | 0,802 | 0,235 | 0,817 | 0,981 | 1,019 | 0,406 | 1,594 | 0,399 | 1,563 | 3,407 | 0,294 | 0,763 | 1,118 | 5,696 | 0,328 | 1,672 |
| 15 | 0,775 | 0,223 | 0,789 | 0,982 | 1,018 | 0,428 | 1,572 | 0,421 | 1,544 | 3,472 | 0,288 | 0,756 | 1,203 | 5,741 | 0,347 | 1,653 |
| 16 | 0,750 | 0,212 | 0,763 | 0,984 | 1,017 | 0,448 | 1,552 | 0,440 | 1,526 | 3,532 | 0,283 | 0,750 | 1,282 | 5,782 | 0,363 | 1,637 |
| 17 | 0,728 | 0,203 | 0,739 | 0,985 | 1,016 | 0,466 | 1,534 | 0,458 | 1,511 | 3,588 | 0,279 | 0,744 | 1,356 | 5,820 | 0,378 | 1,622 |
| 18 | 0,707 | 0,194 | 0,718 | 0,985 | 1,015 | 0,482 | 1,518 | 0,475 | 1,496 | 3,640 | 0,275 | 0,739 | 1,424 | 5,856 | 0,391 | 1,608 |
| 19 | 0,688 | 0,187 | 0,698 | 0,986 | 1,014 | 0,497 | 1,503 | 0,490 | 1,483 | 3,689 | 0,271 | 0,734 | 1,487 | 5,891 | 0,403 | 1,597 |
| 20 | 0,671 | 0,180 | 0,680 | 0,987 | 1,013 | 0,510 | 1,490 | 0,504 | 1,470 | 3,735 | 0,268 | 0,729 | 1,549 | 5,921 | 0,415 | 1,585 |
| 21 | 0,655 | 0,173 | 0,663 | 0,988 | 1,013 | 0,523 | 1,477 | 0,516 | 1,459 | 3,778 | 0,265 | 0,724 | 1,605 | 5,951 | 0,425 | 1,575 |
| 22 | 0,640 | 0,167 | 0,647 | 0,988 | 1,012 | 0,534 | 1,466 | 0,528 | 1,448 | 3,819 | 0,262 | 0,720 | 1,659 | 5,979 | 0,434 | 1,566 |
| 23 | 0,626 | 0,162 | 0,633 | 0,989 | 1,011 | 0,545 | 1,455 | 0,539 | 1,438 | 3,858 | 0,259 | 0,716 | 1,710 | 6,006 | 0,443 | 1,557 |
| 24 | 0,612 | 0,157 | 0,619 | 0,989 | 1,011 | 0,555 | 1,445 | 0,549 | 1,429 | 3,895 | 0,257 | 0,712 | 1,759 | 6,031 | 0,451 | 1,548 |
| 25 | 0,600 | 0,153 | 0,606 | 0,990 | 1,011 | 0,565 | 1,435 | 0,559 | 1,420 | 3,931 | 0,254 | 0,708 | 1,806 | 6,056 | 0,459 | 1,541 |

FONTE: MONTGOMERY, D. C. **Introduction to Statistical Quality Control**, Sixth Edition, New York:John Wiley & Sons, 2009.

Para $n > 25$

$$A = \frac{3}{\sqrt{n}} \quad ; \quad A_3 = \frac{3}{c_4\sqrt{n}} \quad ; \quad c_4 = \left(\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{(n-1)}{2}\right)} \cong \frac{4(n-1)}{4n-3}$$

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_4\sqrt{2(n-1)}} \quad ; \quad B_4 = 1 + \frac{3}{c_4\sqrt{2(n-1)}}$$

$$B_5 = c_4 - \frac{3}{c_4\sqrt{2(n-1)}} \quad ; \quad B_6 = c_4 + \frac{3}{c_4\sqrt{2(n-1)}}$$