



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

---

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E GEOSCIENZE

Corso di Studi in Matematica

Tesi di Laurea Triennale

ALCUNI RISULTATI SUI GRUPPI DI OMOTOPIA

Laureando:  
Angelo El Saliby

Relatore:  
prof. Mattia Mecchia

---

ANNO ACCADEMICO 2021–2022

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>1 Prerequisiti</b>	<b>4</b>
1.1 Omotopie e gruppo fondamentale . . . . .	5
1.2 Proprietà di estensione di omotopie . . . . .	7
1.3 Rivestimenti . . . . .	9
<b>2 CW complessi e Teorema di Van Kampen</b>	<b>11</b>
2.1 Presentazione di gruppi . . . . .	11
2.1.1 Prodotto libero . . . . .	13
2.2 CW complessi . . . . .	14
2.2.1 Costruzioni con spazi topologici . . . . .	17
2.3 Teorema di Van Kampen . . . . .	25
2.3.1 Gruppo fondamentale dei CW complessi . . . . .	29
<b>3 Gruppi di omotopia di ordine superiore</b>	<b>32</b>
3.1 Costruzione e proprietà elementari . . . . .	32
3.2 Teorema di Whitehead . . . . .	42
3.2.1 n-connessione . . . . .	43
3.3 Teorema di sospensione di Freudenthal . . . . .	45
3.3.1 Computazione di $\pi_n(S^n)$ . . . . .	47

# Introduzione

Un problema centrale della topologia è determinare se due spazi siano omeomorfi o meno. Dimostrare che sono omeomorfi si riduce generalmente a costruire un omeomorfismo tra gli spazi, ma il procedimento inverso, ovvero dimostrare che un omeomorfismo *non può* esistere è spesso più complicato. Questo porta alla ricerca di proprietà intrinseche, dette *invarianti topologiche*, che vengono preservate tramite omeomorfismi.

Alcuni esempi di queste proprietà provengono dalla topologia generale, come ad esempio le proprietà di connessione o compattezza, ma queste non sono sufficienti. Le sfere  $S^n, n \geq 1$  sono tutte connesse e compatte con la topologia del sottospazio di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Già con l'ausilio del gruppo fondamentale è possibile dimostrare che  $S^n \not\simeq S^m, n = 1, m > 1$  dal momento che  $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$  mentre  $\pi_1(S^m) \simeq 0, m > 1$ . Anche questo però fallisce per  $n > 1$ . Una strategia è quella di provare a generalizzare il gruppo fondamentale a dimensioni superiori. In questa tesi definiremo  $\pi_i(S^n)$  e ne analizzeremo alcune proprietà. Riusciremo a dimostrare che  $\pi_i(S^n) \simeq 0, 0 \leq i < n$  e questo ci permetterà di risolvere il problema dell'omeomorfismo per  $S^n, S^m, m \neq n$ .

Va notato però che i gruppi di omotopia, pur avendo proprietà interessanti, presuppongono uno sviluppo teorico di difficile comprensione e ricco di tecnicismi. Si segnala, a riprova di questa complessità computativa, che non è ancora stata trovata una descrizione completa di  $\pi_i(S^n)$  per  $i > n$  e che il comportamento dei gruppi di omotopia appare a prima vista caotico.

		$\pi_i(S^n)$											
		$i \rightarrow$											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$n$	1	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\downarrow$	2	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
	3	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
	4	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$
	5	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{30}$
	6	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$
	7	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0
	8	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0

Figura 1: Gruppi di omotopia della sfera (pag. 339 in [6])

Alcune regolarità si possono dedurre anche dai risultati di questa tesi, come la presenza degli 0 nella parte triangolare inferiore stretta e sulla prima riga, o di  $\mathbb{Z}$  sulla diagonale.

Nel Capitolo 1 presenteremo alcuni risultati preliminari necessari alla comprensione del testo. Per la sua natura introduttiva ometteremo buona parte delle dimostrazioni del capitolo, riportando solo quelle che richiamano strategie utili al resto della trattazione.

Nel Capitolo 2 introdurremo una particolare classe di spazi topologici, i *CW complessi*. Questi spazi si possono definire in maniera intuitiva come incollamento di spazi estremamente regolari di dimensione via via più grande. Oltre a risultare più facili da maneggiare, racchiudono in sé diversi spazi comunemente studiati e i risultati che forniscono sono un buon compromesso tra generalità di applicazione e rilevanza dei risultati. Dopo un'introduzione alla presentazione dei gruppi e lo studio di alcune proprietà fondamentali, procederemo a dimostrare il teorema di Van Kampen. La dimostrazione, per quanto nasca da un'intuizione evidente dal punto di vista geometrico, richiede diversi accorgimenti per essere resa rigorosa. Questa discrepanza si presenta numerose volte sia nell'ambito della topologia algebrica che nel corso di questa tesi: intuizioni che da una rappresentazione grafica sembrano evidenti, richiedono un gran numero di tecnicismi e dettagli per essere formalizzate. Vedremo alcune applicazioni del teorema principalmente ai CW complessi ed evidenzieremo uno dei limiti del gruppo fondamentale, che non è in grado di distinguere tra spazi di dimensione alta, dimostrando che il gruppo fondamentale di un CW complesso è determinato dal suo 2-scheletro.

Nel Capitolo 3 ci occuperemo di definire i gruppi di omotopia di ordine superiore, generalizzando in maniera molto naturale il concetto di cammino chiuso. Introdurremo la struttura di gruppo, dimostrandone l'abelianità per  $n > 1$  e generalizzeremo, quando possibile, i risultati validi per il gruppo fondamentale. Vedremo che, come nel caso del gruppo fondamentale, i gruppi di omotopia rappresentano un'invariante topologica. Introdurremo quindi i gruppi di omotopia relativa, con i quali ricaveremo una successione esatta che risulterà essenziale per le computazioni successive. La trattazione si concluderà con l'approfondimento di alcuni strumenti di calcolo elementari, il teorema di Whitehead e il teorema di sospensione di Freudenthal. Quest'ultimo risultato, assieme all'introduzione del concetto di *fibrazione*, ci permetterà di computare  $\pi_n(S^n)$ .

# Capitolo 1

## Prerequisiti

Nel seguito, diremo *tipo* di una funzione  $f : A \rightarrow B$  la coppia formata dal suo dominio e codominio  $(A, B)$  che indicheremo spesso con  $A \rightarrow B$ . In generale se  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n$  e  $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots \supseteq B_n$  sono insiemi inscatolati, scriveremo  $f : (A_1, \dots, A_n) \rightarrow (B_1, \dots, B_n)$  per indicare che  $f(A_i) \subseteq B_i, \forall i = 1, \dots, n$ . Un punto  $\{a\} \times \{b\} \in A \times B$  in un prodotto cartesiano verrà indicato con  $a \times b$ , omettendo le parentesi graffe. Quando non ambiguo, la mappa identità  $x \mapsto x$  di  $X$  verrà indicata con  $Id_X$ , mentre se  $A \subset X$  indicheremo con  $A \hookrightarrow X$  la mappa inclusione (la restrizione di  $Id_X$  ad  $A$ ). Data una funzione  $f : X \rightarrow Y$  e  $A \subseteq X$ , indicheremo con  $f|_A$  la restrizione di  $f$  ad  $A$ .

$\partial A, \text{Int } A, \overline{A}$ , se non diversamente esplicitato, si riferiranno rispettivamente alla *frontiera*, all'*interno* e alla *chiusura* di  $A$ . Definizioni e proprietà elementari di questi oggetti possono essere trovate in [7]. Risulterà fondamentale anche il seguente risultato di topologia generale:

**Teorema** (Pasting lemma). *Siano  $A, B \subset X$  chiusi tali che  $X = A \cup B$ . Se  $f : A \rightarrow Y$  e  $g : B \rightarrow Y$  sono funzioni continue che coincidono su  $A \cap B$  ( $f(x) = g(x), \forall x \in A \cap B$ ), allora la funzione*

$$\begin{aligned} h : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ g(x) & \text{se } x \in B \end{cases} \end{aligned}$$

*è continua.*

In generale, data una relazione di equivalenza  $\sim$  su  $X$ , indicheremo con  $[x]_\sim$  o  $[x]$  la classe di  $x$  rispetto a  $\sim$ ,  $[x]_\sim \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X \text{ t.c. } x \sim y\}$ . Infine, per indicare che due spazi topologici  $X, Y$  sono omeomorfi scriveremo  $X \cong Y$ .

## 1.1 Omotopie e gruppo fondamentale

**Definizione 1.1.1.** Siano  $X, Y$  spazi topologici. Un'omotopia da  $X$  in  $Y$  è una collezione di funzioni continue  $f_t : X \rightarrow Y, t \in I \stackrel{def}{=} [0, 1]$  tali che la funzione

$$F : X \times I \rightarrow Y$$

definita da

$$F(x, t) = f_t(x), \forall (x, t) \in X \times I$$

è continua.  $F$  si dirà essere un'omotopia da  $f_0$  a  $f_1$ . Due funzioni continue  $f, g : X \rightarrow Y$  che ammettano omotopia che le connette ( $F$  t.c.  $F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x), \forall x \in X$ ) si dicono ancora omotope. Tale relazione si indica con  $f \simeq_F g$  (o  $f \simeq g$ ).

**Definizione 1.1.2.** Sia  $A \subseteq X$ . Un'omotopia  $f_t : X \rightarrow Y$  tale che  $f_t|_A$  sia indipendente da  $t$  si dice *omotopia relativa ad  $A$*  (o più brevemente *rel  $A$* ).

**Definizione 1.1.3.** Sia  $A \subseteq X$  e  $Id_A : A \rightarrow A$  la mappa identità. Una *retrazione* da  $X$  in  $A$  è una funzione continua  $f : X \rightarrow A$  tale che  $f|_A \equiv Id_A$ . Se esiste una retrazione da  $X$  in  $A \subset X$ ,  $A$  si dirà *retrato* di  $X$ . Una *retrazione per deformazione* da  $X$  in  $A$  è una funzione continua  $F : X \times I \rightarrow X$  tale che  $F(x, 0) = Id_X(x), F(x, 1) \in A, \forall x \in X$  e  $F(a, t) = a, \forall a \in A, t \in I$ .

**Osservazione 1.1.4.** Una retrazione per deformazione è un'omotopia rel  $A$  dalla mappa identità di  $X$  ad una mappa di retrazione da  $X$  in  $A$ .

**Definizione 1.1.5.** Un *cammino*  $\gamma : I \rightarrow X$  è una qualsiasi funzione continua da  $I$  in  $X$ . Si indicherà con  $\bar{\gamma}$  il cammino  $\gamma$  percorso in senso inverso ( $\bar{\gamma}(t) \stackrel{def}{=} \gamma(1 - t)$ ).

Un'omotopia di cammini è un omotopia che mantiene costanti gli estremi dei cammini, quindi una funzione continua  $F : I \times I \rightarrow X$  tale che  $f_t(0) = x_0, f_t(1) = x_1, \forall t \in [0, 1]$ . Posti  $\gamma = f_0, \eta = f_1$  anche i cammini si diranno omotopi e tale relazione si indicherà ancora con  $\gamma \simeq_F \eta$ .

**Esempio 1.1.6.** Se  $X$  è uno spazio topologico convesso, allora due cammini  $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow X$  con gli stessi estremi  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x_0, \gamma_1(1) = \gamma_2(1) = x_1$  sono omotopi tramite l'applicazione continua

$$\begin{aligned} F : I \times I &\longrightarrow X \\ (x, t) &\longmapsto \gamma_1(x) + t(\gamma_2(x) - \gamma_1(x)) \end{aligned}$$

**Definizione 1.1.7.** Uno spazio  $X$  si dice *connesso per archi* se per ogni  $x_0, x_1 \in X$ , esiste un cammino  $\gamma$  t.c.  $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$ .  $X$  si dirà *localmente connesso per archi* se per ogni  $x \in X$  e per ogni intorno  $U$  di  $x$ , esiste un aperto  $x \in V \subseteq U$  connesso per archi.

**Definizione 1.1.8.** Siano  $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow X$  due cammini tali che  $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ . Si dice *prodotto* dei due cammini la loro giustapposizione. Formalmente è l'applicazione  $\gamma_1 \cdot \gamma_2 : I \rightarrow X$  definita da

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2(x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

**Proposizione 1.1.9.** Siano  $x_0, x_1 \in X$ . La relazione  $\sim$  di omotopia di cammini sull'insieme  $\Gamma_{x_0}^{x_1} \stackrel{def}{=} \{\gamma : I \rightarrow X \text{ t.c. } \gamma \text{ è continua e } \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1\}$  è una relazione di equivalenza.

**Osservazione 1.1.10.** L'omotopia di cammini è compatibile con la definizione di prodotto precedentemente data: se  $\gamma, \gamma' \in \Gamma_{x_0}^{x_1}, \eta, \eta' \in \Gamma_{x_1}^{x_2}$  e  $\gamma \simeq_F \gamma', \eta \simeq_G \eta'$ , allora anche  $\gamma \cdot \eta \simeq \gamma' \cdot \eta'$  tramite l'omotopia di cammini  $H(x, t) = (f_t \cdot g_t)(x)$ .

**Definizione 1.1.11.** Sia  $x_0 \in X$  e  $\gamma \in \Gamma_{x_0}^{x_0}$ ,  $\gamma$  è detto *cammino chiuso* e  $x_0$  è il suo *punto base*.

**Definizione 1.1.12.** Sia  $x_0 \in X$ . L'insieme delle classi di equivalenza rispetto all'omotopia di cammini di  $\Gamma_{x_0}^{x_0}$  si indica con  $\pi_1(X, x_0) \stackrel{def}{=} \{[\gamma] \text{ t.c. } \gamma \in \Gamma_{x_0}^{x_0}\}$  e si chiama *gruppo fondamentale* di  $X$  con punto base  $x_0$ .

**Proposizione 1.1.13.** Definita l'operazione

$$\begin{aligned} \cdot & : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0) \\ & ([\gamma], [\eta]) & \longmapsto & [\gamma \cdot \eta] \end{aligned}$$

$(\pi_1(X, x_0), \cdot)$  è un gruppo.

E' naturale chiedersi quale impatto abbia la scelta del punto base sul gruppo fondamentale. La proposizione seguente ci permette di affermare che se  $X$  è connesso per archi, allora per ogni  $x_1, x_2 \in X$ ,  $\pi_1(X, x_1)$  e  $\pi_1(X, x_2)$  sono isomorfi.

**Proposizione 1.1.14.** Siano  $x_1, x_2 \in X$  e  $\alpha : I \rightarrow X$  un cammino da  $x_1$  a  $x_2$ , allora la funzione

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} & : \pi_1(X, x_1) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_2) \\ & [\gamma] & \longmapsto & [\bar{\alpha} \cdot \gamma \cdot \alpha] \end{aligned}$$

è un isomorfismo di gruppi.

Se uno spazio è connesso per archi, il suo gruppo fondamentale si indicherà spesso omettendo il punto base. Inoltre vale il seguente:

**Teorema 1.1.15.** Il gruppo fondamentale di  $S^1$  è isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .

**Proposizione 1.1.16.** Sia  $x_0 \in X$  e  $\{U_\alpha\}$  una famiglia di aperti connessi per archi di  $X$  tali che

1.  $U_\alpha \cap U_{\alpha'}$  è connesso per archi per ogni  $\alpha, \alpha'$

2.  $x_0 \in U_\alpha$ , per ogni  $\alpha$

3.  $\cup_\alpha U_\alpha = X$

Allora ogni cammino chiuso  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  basato in  $x_0$  è equivalente per omotopie di cammini ad un prodotto di cammini chiusi  $\gamma_{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \gamma_{\alpha_n}$  tali che  $\gamma_{\alpha_i}([0, 1]) \subseteq U_{\alpha_i}, \forall i = 1, \dots, n$ .

*Dimostrazione.* Per prima cosa dimostriamo che esiste una partizione  $\{0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1\}$  di  $[0, 1]$  tale che  $\gamma([s_i, s_{i+1}]) \subseteq U_{\alpha_i}, \forall i = 0, \dots, n-1$ . Sia  $t \in I$ , allora  $\gamma(t) \in U_\alpha$  per qualche  $\alpha$  e per continuità esiste  $V_t$  intorno di  $t$  tale che  $\gamma(V_t) \subset U_\alpha$ . Possiamo supporre che  $V_t$  sia un intervallo. Inoltre è noto che ogni intervallo aperto in  $\mathbb{R}$  contiene un intervallo chiuso, di conseguenza senza perdita di generalità possiamo supporre che  $\gamma(\overline{V_t}) \subset U_\alpha$ . L'insieme dei  $V_t$  così costruiti ricoprono il compatto  $I$  e quindi esiste un sottoricoprimento finito  $V_1, \dots, V_n$ . La suddivisione cercata si può ottenere considerando l'insieme degli estremi di questi intervalli. Chiamiamo  $U_i$  l'aperto  $U_\alpha$  che contiene l'immagine di  $[s_i, s_{i+1}]$  tramite  $\gamma$ . Poniamo  $\gamma_i \stackrel{def}{=} \gamma|_{[s_i, s_{i+1}]}$ , si ha che  $\gamma = \gamma_0 \cdot \dots \cdot \gamma_{n-1}$  (interpretiamo i cammini con dominio in  $I$ ). Dal momento che per ipotesi le intersezioni  $U_\alpha \cap U_\beta$  sono connesse per archi e contengono il punto base  $x_0$ , esistono cammini  $\eta_i$  da  $x_0$  a  $\gamma(s_i)$  contenuti in  $U_i \cap U_{i+1}$ . Il cammino

$$(\gamma_0 \cdot \overline{\eta_1}) \cdot (\eta_1 \cdot \gamma_1 \overline{\eta_2}) \cdot \dots \cdot (\eta_{n-2} \cdot \gamma_{n-2} \cdot \overline{\eta_{n-1}}) \cdot (\eta_{n-1} \cdot \gamma_{n-1})$$

è omotopo a  $\gamma$  ed è la suddivisione cercata. ■

**Omomorfismo indotto** Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $x_0 \in X, y_0 \in Y$ . Una mappa continua  $\phi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  induce una funzione  $\phi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ , definita da  $\phi_*([\gamma]) = [\phi \circ \gamma]$ . Questa funzione è ben definita (se  $\gamma \simeq_H \gamma_1$  allora  $\phi \circ \gamma \simeq_{\phi \circ H} \phi \circ \gamma_1$ ) ed è un omomorfismo di gruppi.  $\phi_*$  è detto *omomorfismo indotto* da  $\phi$  e possiede le seguenti proprietà *functoriali*:

1. Se  $\phi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0), \chi : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$  sono due funzioni continue, allora

$$(\chi \circ \phi)_* = \chi_* \circ \phi_*$$

2. Poste  $Id_X : X \rightarrow X$  e  $Id_\pi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  le rispettive applicazioni identità,

$$(Id_X)_* = Id_\pi$$

## 1.2 Proprietà di estensione di omotopie

**Definizione 1.2.1.** Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $f : X \rightarrow Y$  continua.  $f$  è detta *equivalenza di omotopie* se esiste una funzione  $g : Y \rightarrow X$  tale che



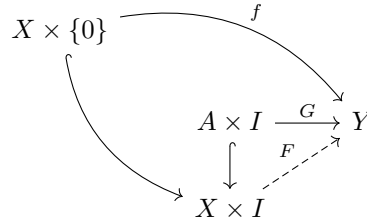
$g \circ f \simeq Id_X$  e  $f \circ g \simeq Id_Y$ . In tal caso,  $X$  e  $Y$  si dicono *omotopicamente equivalenti*. Una tale funzione  $g$  si chiamerà anche *inversa omotopica* di  $f$ , e viceversa.

**Osservazione 1.2.2.** Se  $F$  è una retrazione per deformazione da  $X$  in  $A \subset X$ , definita

$$\begin{aligned} f &: X \longrightarrow A \\ x &\longmapsto F(x, 1) \end{aligned}$$

e  $i : A \hookrightarrow X$  la mappa inclusione, si ha che  $f$  è una equivalenza di omotopie ( $f \circ i = Id_A$  e  $i \circ f \simeq_{\overline{F}} Id_X$ , con  $\overline{F}(x, t) \stackrel{def}{=} F(x, 1 - t)$ ).

**Definizione 1.2.3.** Sia  $(X, A)$ ,  $A \subseteq X$  una coppia e  $Y$  uno spazio topologico. Se per ogni funzione  $f : X \rightarrow Y$  e per ogni omotopia  $g_t : A \rightarrow Y$  da  $f|_A$ , quindi tale che  $g_0 \equiv f|_A$ , esiste un'omotopia  $f_t : X \rightarrow Y$  da  $f$  che estende  $g_t$  e  $f$  ( $f_0 \equiv f$ ,  $f_t|_A \equiv g_t$ ), allora  $(X, A)$  si dice avere la *proprietà di estensione delle omotopie* relativamente a  $Y$  (*rel*  $Y$ ). Se tale proprietà vale relativamente ad ogni spazio topologico,  $(X, A)$  gode della *proprietà di estensione delle omotopie*, che abbrevieremo con *HEP* (dall'inglese “homotopy extension property”).



**Osservazione 1.2.4.** La proprietà di estensione delle omotopie *rel*  $Y$  equivale a richiedere che ogni coppia di funzioni  $f : X \times \{0\} \rightarrow Y$ ,  $G : A \times I \rightarrow Y$  che coincidono su  $A \times \{0\}$  si possa estendere ad una funzione su tutto  $X \times I$ .

**Lemma 1.2.5.** Sia  $X$  di Hausdorff e  $f : X \rightarrow X$  continua. L'insieme  $I_f \stackrel{def}{=} \{x \in X \text{ t.c. } f(x) = x\}$  è chiuso in  $X$ .

*Dimostrazione.* Uno spazio è di Hausdorff se e solo se in  $X \times X$  l'insieme  $\Delta \stackrel{def}{=} \{(x, x) \text{ t.c. } x \in X\}$  è chiuso<sup>1</sup>. D'altra parte, posta

$$\begin{aligned} g &: X \longrightarrow X \times X \\ x &\longmapsto (x, f(x)) \end{aligned}$$

$g$  è continua e  $I_f = g^{-1}(\Delta)$ . Dal momento che  $\Delta$  è chiuso, segue che anche  $I_f$  è chiuso. ■

**Proposizione 1.2.6.** Sia  $X$  di Hausdorff. La coppia  $(X, A)$  gode di HEP se e solo se  $X \times \{0\} \cup A \times I$  è un retratto di  $X \times I$ .

<sup>1</sup>Si veda [7]

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $(X, A)$  abbia la proprietà di estensione delle omotopie. Sia  $Id : X \times 0 \cup A \times I \rightarrow X \times 0 \cup A \times I$  la mappa identità. Per l'Osservazione 1.2.4 possiamo estendere  $Id$  ad una mappa  $X \times I \rightarrow X \times 0 \cup A \times I$  che è la retrazione cercata

Viceversa, supponiamo che  $r : X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$  sia una retrazione.  $A$  è un insieme chiuso, infatti  $X \times \{0\} \cup A \times I = r(X \times I) = I_\gamma$ , dove  $I_\gamma = \{p \in X \times I \text{ t.c. } r(p) = p\}$  è l'insieme definito nel Lemma 1.2.5, da cui segue che  $X \times \{0\} \cup A \times I$  è chiuso. Dal momento che  $A \times \{1\} \subseteq X \times \{0\} \cup A \times I$  e  $X \times \{0\} \cup A \times I$  e  $\overline{A} \times 1$  sono chiusi, anche  $\overline{A} \times 1 \subseteq A \times 1$  da cui  $\overline{A} \times 1 = A \times 1$  e  $A$  è chiuso. Ora se due funzioni continue  $f : X \times \{0\} \rightarrow Y$  e  $F_A : A \times I \rightarrow Y$  coincidono su  $A \times \{0\}$ , per il pasting lemma la funzione  $\tilde{H} : X \times \{0\} \cup A \times I \rightarrow Y$  definita da

$$\tilde{H}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X \times \{0\} \\ F_A(x) & \text{se } x \in A \times I \end{cases}$$

è continua.  $H \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{H} \circ r : X \times I \rightarrow Y$  è ancora una funzione continua e, dal momento che  $r|_{X \times \{0\} \cup A \times I}$  è l'identità,  $H$  estende  $F_A$  e  $H_0 = f$ . ■

### 1.3 Rivestimenti

**Definizione 1.3.1.** Sia  $X$  uno spazio topologico. Un *rivestimento* di  $X$  è uno spazio  $Y$  con una mappa continua  $p : Y \rightarrow X$  tale che

1. per ogni  $x \in X$ , esiste un intorno aperto  $x \in U \subseteq X$  di  $x$  tale che  $p^{-1}(U)$  è unione di aperti disgiunti di  $Y$
2. se  $V \subseteq p^{-1}(U)$  è uno degli aperti disgiunti,  $p|_V : V \rightarrow U$  è un omeomorfismo

Sotto queste ipotesi,  $U$  è detto *uniformemente rivestito*.

**Definizione 1.3.2.** Data una mappa continua  $f : Z \rightarrow X$ , il *sollevamento* di  $f$  tramite  $p$  è una mappa  $\tilde{f} : Z \rightarrow Y$  tale che  $p \circ \tilde{f} = f$ .

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ & \downarrow p & \\ Z & \xrightarrow{\tilde{f}} & X \end{array}$$

**Proposizione 1.3.3.** Sia  $f_t : Z \rightarrow X$  un'omotopia,  $\tilde{f}_0 : Z \rightarrow Y$  un sollevato di  $f_0$  tramite il rivestimento  $p : Y \rightarrow X$ . Allora esiste ed è unica l'omotopia  $\tilde{f}_t : Z \rightarrow Y$  tale che coincida con  $\tilde{f}_0$  per  $t = 0$  e tale che sia un sollevamento di  $f_t$ . Equivalentemente, è unica la funzione  $\tilde{F}$  che rende il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} Z \times 0 & \xrightarrow{\tilde{f}_0} & Y \\ \downarrow & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\ Z \times I & \xrightarrow{F} & X \end{array}$$

dove  $\tilde{f}_0$  è vista come funzione da  $Z \times 0$ .

**Proposizione 1.3.4** (Criterio di sollevamento). *Sia  $p : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  un rivestimento e  $f : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$  una mappa continua con  $Z$  spazio topologico connesso per archi e localmente connesso per archi. Allora un sollevamento di  $f$ ,  $\tilde{f} : (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$  esiste se e solo se  $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(Y, y_0))$ .*

**Proposizione 1.3.5.**  $S^1$  ammette un rivestimento contraibile.

*Dimostrazione.* La proiezione

$$\begin{aligned} p &: \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \\ x &\longmapsto (\cos x, \sin x) \end{aligned}$$

è un rivestimento e  $\mathbb{R}$  è contraibile. ■

## Capitolo 2

# CW complessi e Teorema di Van Kampen

### 2.1 Presentazione di gruppi

Illustriamo adesso un modo di descrivere un gruppo tramite i suoi *generatori* e alcune relazioni che identificano determinate parole con l'elemento neutro.

Diremo *generatore* una lettera  $a_i$  a cui assoceremo l'inverso simbolico  $a_i^{-1}$ . Una *parola*  $w$  generata dagli  $a_i$  sarà una concatenazione finita dei generatori e degli inversi simbolici

$$w = a_{i_1}^{\epsilon_1} \dots a_{i_n}^{\epsilon_n}, \epsilon_k \in \{-1, 1\}$$

(con  $a_i^1 = a_i$ ). L'operazione tra parole è la concatenazione, che è banalmente associativa. Inoltre useremo la notazione

$$\underbrace{a_i \dots a_i}_{n \text{ volte}} \stackrel{def}{=} (a_i)^n$$

per abbreviare la concatenazione dello stesso generatore  $a_i$  un numero  $n \in \mathbb{N}$  di volte. Infine, indicheremo con  $1$  la parola vuota, che verifica quindi

$$w \cdot 1 = 1 \cdot w = w$$

per ogni parola  $w$ .

Una *relazione* è una scrittura formale

$$r = 1$$

dove  $r = a_{i_1}^{\epsilon_1} \dots a_{i_n}^{\epsilon_n}$  è una parola generata dagli  $a_i$ .

**Definizione 2.1.1.** Consideriamo un insieme di lettere  $a_1, a_2, \dots$  ed un insieme di relazioni su tali lettere  $r_1 = 1, r_2 = 1, \dots$ . Consideriamo le seguenti azioni su una generica parola  $w = a_{i_1}^{\epsilon_1} \dots a_{i_n}^{\epsilon_n}$ :

1. Rimozione o inserimento di una concatenazione  $r_i$  associata ad una relazione  $r_i = 1$  in qualsiasi posizione. Ovvero il passaggio da  $w_1 w_2$  a  $w_1 r_i w_2$  (e viceversa), con  $w_1 w_2 = w$ .
2. Rimozione o inserimento, come sopra, di una concatenazione  $a_i a_i^{-1}$  o  $a_i^{-1} a_i$ .

Diremo che due parole  $w, w'$  sono equivalenti rispetto alle relazioni se esiste una successione finita di azioni 1 e 2 appena descritte che trasformi  $w$  in  $w'$  (e viceversa eseguendo le stesse operazioni in ordine inverso).

La regola 2 impone una serie di relazioni implicite che diremo *banali*. Fissate le relazioni  $r_1 = 1, r_2 = 1, \dots$ , la relazione di equivalenza appena definita ci permette di considerare la classe di  $w$

$$[w] \stackrel{def}{=} \{w' \text{ parola su } a_1, a_2, \dots \text{ t.c. } w' \text{ è equivalente a } w\}$$

formata da tutte le parole equivalenti a  $w$  e di estendere l'operazione sulle parole a tali classi

$$[w_1] \cdot [w_2] \stackrel{def}{=} [w_1 \cdot w_2]$$

L'operazione risulta ben definita dal momento che presi due rappresentanti  $a, b \in [w_1]$ , la successione di azioni che manda  $a$  in  $b$  è indipendente dalla presenza della parola concatenata  $c \in [w_2]$  e quindi  $[a \cdot c] = [b \cdot c]$  e analogamente per il rappresentante di  $[w_2]$ .

Indicheremo la struttura indotta dalle classi di equivalenza sull'insieme delle parole generate dalle lettere  $a_1, a_2, \dots$  e dalle relazioni  $r_1 = 1, r_2 = 1, \dots$  con

$$\langle a_1, a_2, \dots; r_1, r_2, \dots \rangle$$

**Proposizione 2.1.2.**  $G \stackrel{def}{=} \langle a_1, a_2, \dots; r_1, r_2, \dots \rangle$  con l'operazione  $\cdot$  precedentemente definita ha struttura di gruppo. La scrittura  $\langle a_1, a_2, \dots; r_1, r_2, \dots \rangle$  si dirà *presentazione di  $G$* .

*Dimostrazione.* Verifichiamo i tre assiomi di gruppo

1. L'elemento neutro è  $[1]$ . Abbiamo già visto che  $w \cdot 1 = 1 \cdot w = w$  da cui  $[w] \cdot [1] = [w \cdot 1] = [w] = [1 \cdot w] = [1] \cdot [w]$
2. Se  $w = a_{i_1}^{\epsilon_1} \dots a_{i_n}^{\epsilon_n}$  e posto  $w^{-1} \stackrel{def}{=} a_{i_n}^{-\epsilon_n} \dots a_{i_1}^{-\epsilon_1}$  si ha che  $w \cdot w^{-1}$  e  $w^{-1} \cdot w$  sono equivalenti all'elemento neutro 1 tramite una sequenza finita di azioni del tipo 2, e quindi posto  $[w]^{-1} \stackrel{def}{=} [w^{-1}]$  si ha  $[w] \cdot [w]^{-1} = [1] = [w]^{-1} \cdot [w]$
3. L'operazione è associativa perché lo è la concatenazione:  $[w_1] \cdot ([w_2] \cdot [w_3]) = [w_1] \cdot [w_2 \cdot w_3] = [w_1 \cdot (w_2 \cdot w_3)] = [(w_1 \cdot w_2) \cdot w_3] = [w_1 \cdot w_2] \cdot [w_3] = ([w_1] \cdot [w_2]) \cdot [w_3]$

■

**Definizione 2.1.3.** Il gruppo  $\langle a_1, a_2, \dots; - \rangle$ , generato da  $a_1, a_2, \dots$  in assenza di relazioni, è detto *gruppo libero*.

**Esempio 2.1.4.** Il gruppo libero generato da un generatore  $\langle a_1; - \rangle$  è isomorfo a  $\mathbb{Z}$

**Osservazione 2.1.5.** Ogni gruppo finito  $(G, \cdot)$  ammette una presentazione finita (con un numero finito di generatori e relazioni), dal momento che è univocamente descritto dalla relativa tabella di Cayley. Una presentazione finita si ottiene ponendo come generatori gli elementi non banali del gruppo, e come relazioni i risultati dei prodotti tra i vari elementi, quindi se  $a_1, a_2, a_3 \in G$  e  $a_1 \cdot a_2 = a_3$ , si avrà la relazione  $r = a_3^{-1} a_1 \cdot a_2 = 1$

### 2.1.1 Prodotto libero

Sia  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$  una collezione di gruppi e supponiamo che ogni  $G_\alpha$  ammetta presentazione  $\langle A_\alpha; R_\alpha \rangle$ . Consideriamo il gruppo

$$G = \langle \sqcup_{\alpha \in I} A_\alpha, \sqcup_{\alpha \in I} R_\alpha \rangle$$

rappresentato dall'unione disgiunta dei generatori e delle relazioni dei  $G_\alpha$ .  $G$  è detto il *prodotto libero* dei  $G_\alpha$ , e si indica con  $\star_{\alpha \in I} G_\alpha$ . La seguente proprietà risulterà essenziale nella dimostrazione del teorema di Van Kampen:

**Teorema 2.1.6.** Sia  $G_\alpha, \alpha \in I$  una collezione di gruppi e  $H$  un gruppo. Una famiglia  $\phi_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$  di omomorfismi di gruppo estende univocamente ad un omomorfismo  $\phi : \star_{\alpha \in I} G_\alpha \rightarrow H$

*Dimostrazione.* Possiamo sempre vedere una parola in  $G$  come concatenazione di elementi in  $G_\alpha$ ,  $g_1 \dots g_n, g_i \in G_{\alpha_i}$ , dal momento che ogni generatore  $a \in A_\alpha$  è esso stesso un elemento di qualche  $G_\alpha$  (e viceversa, ogni elemento  $g_i \in G_{\alpha_i}$  è concatenazione di generatori in  $A_{\alpha_i}$ ). Se  $g = g_1 \dots g_n \in \star_{\alpha \in I} G_\alpha$ , è un elemento nel prodotto libero un'estensione naturale della famiglia di omomorfismi è  $\chi : \star_{\alpha \in I} G_\alpha \rightarrow H$  definita da

$$\chi(g_1 \dots g_n) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_{\alpha_1}(g_1) \dots \phi_{\alpha_n}(g_n)$$

Questa applicazione è ben definita. Infatti, se consideriamo  $g_1 \dots g_k r g_{k+1} \dots g_n$ , con  $r = 1$  una relazione del gruppo libero,  $r$  deve appartenere a qualche  $R_\alpha$ , e quindi

$$\chi(g_1 \dots g_k r g_{k+1} g_n) = \phi_{\alpha_1}(g_1) \dots \phi_{\alpha_k}(g_k) \phi_\alpha(r) \phi_{\alpha_{k+1}}(g_{k+1}) \dots \phi_{\alpha_n}(g_n)$$

e per definizione di omomorfismo si ha  $\phi_\alpha(r) = \phi_\alpha(1_{G_\alpha}) = 1$ . Un ragionamento del tutto analogo si può fare per le altre azioni della 2.1.1. Di conseguenza due parole equivalenti avranno la stessa immagine tramite  $\chi$ .

$\chi$  è un omomorfismo di gruppo per come l'abbiamo definito, ed è unico: se  $\phi$  è un altro omomorfismo con le stesse proprietà, e  $g_1 \dots g_n$  è una parola tale che  $g_1 \in G_{\alpha_1}, \dots, g_n \in G_{\alpha_n}$ , allora dal momento che deve estendere i  $\phi_\alpha$

$$\phi(g_1 \dots g_n) = \phi(g_1) \dots \phi(g_n) = \phi_{\alpha_1}(g_1) \dots \phi_{\alpha_n}(g_n) = \chi(g_1 \dots g_n)$$

■

Per la definizione che ne abbiamo dato il prodotto libero, a meno di isomorfismi, è commutativo,  $G \star H \cong H \star G$ , e associativo,  $G \star (H \star K) \cong (G \star H) \star K$ . Di conseguenza la scrittura  $\star_\alpha G_\alpha$  non è ambigua.

**Proposizione 2.1.7.** *Siano  $N \stackrel{def}{=} \star_{1 \leq i \leq n} \mathbb{Z}$ ,  $M \stackrel{def}{=} \star_{1 \leq i \leq m} \mathbb{Z}$  il prodotto libero di  $\mathbb{Z}$  con se stesso  $n$  e  $m$  volte rispettivamente.  $M$  e  $N$  sono isomorfi se e solo se  $m = n$ .*

*Dimostrazione.* E' facile vedere che, dati un insieme  $X$  e un gruppo  $G$ , una funzione  $f : X \rightarrow G$  estende univocamente ad un omomorfismo  $\phi : \langle X; - \rangle \rightarrow G$  dal gruppo libero generato da  $X$  (ad esempio notando che  $\langle X; - \rangle \simeq \star_{x \in X} \langle x; - \rangle$  ed applicando il teorema precedente). Posti  $n = \{1, \dots, n\}$ ,  $m = \{1, \dots, m\}$ , ogni mappa

$$f : n \rightarrow \mathbb{Z}_2 = (\{0, 1\}, +)$$

può essere estesa in maniera univoca ad un omomorfismo da  $N$  in  $\mathbb{Z}_2$ . Inoltre, ogni omomorfismo  $N \rightarrow \mathbb{Z}_2$  è univocamente determinato dalla sua restrizione ai generatori. Di conseguenza, esistono  $2^{|n|} = 2^n$  omomorfismi distinti di questo tipo. Analogamente, esistono  $2^{|m|}$  omomorfismi da  $M$  in  $\mathbb{Z}_2$ , e possiamo concludere che  $m = n$ . ■

## 2.2 CW complessi

Diremo nel resto della sezione una *cella di dimensione  $n$*  uno spazio che sia omeomorfo alla palla unitaria chiusa  $B^n \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } \|x\| \leq 1\}$ , mentre si dirà *cella aperta* di dimensione  $n$  uno spazio omeomorfo all'interno di  $B^n$ , che indicheremo con  $\text{Int } B^n$  o  $e^n$ . Con  $e^0$  indicheremo l'insieme formato da un solo punto. Per convenzione  $\partial e^0 = \emptyset$ .

**Definizione 2.2.1.** Un *CW complesso* è uno spazio  $X$  formato dall'unione disgiunta di una collezione di celle aperte  $e_\alpha$  con le seguenti proprietà:

1.  $X$  è uno spazio di Hausdorff
2. Per ogni cella  $e_\alpha$  di dimensione  $m$ , esiste una mappa continua  $f_\alpha : B^m \rightarrow X$ , detta *mappa caratteristica*, tale che  $f_\alpha|_{\text{Int } B^m} : \text{Int } B^m \rightarrow X$  è un omeomorfismo e il bordo  $\partial B^m$  ha immagine in un numero finito di celle di dimensione strettamente inferiore a  $m$

3.  $A \subseteq X$  è chiuso in  $X$  se è chiuso  $A \cap \bar{e}_\alpha$  in  $\bar{e}_\alpha$  per ogni cella  $e_\alpha$

La mappa caratteristica ristretta al bordo della cella è detta *di incollamento*.

Notiamo subito che se  $e_\alpha$  è una cella di dimensione  $n$ , dal momento che  $f_\alpha$  è continua vale  $f(B^m) \subseteq \overline{f(\text{Int } B^m)}$ , ovvero  $f(B^m) \subseteq \bar{e}_\alpha$ . Dalla richiesta che  $X$  sia Hausdorff ed essendo  $f_\alpha(B^m)$  compatto è anche chiuso. Da  $f_\alpha(B^m) \supseteq e_\alpha$  segue che  $\bar{e}_\alpha \subseteq f_\alpha(B^m)$ , ovvero  $f_\alpha(B^m) = \bar{e}_\alpha$ . Infine, poiché  $f_\alpha$  ristretta all'interno di  $B^m$  definisce un omeomorfismo, e quindi una mappa biettiva su  $e_\alpha$ , necessariamente  $f_\alpha(\partial B^m) = \partial e_\alpha$ .

Si definisce *sottocomplesso* un sottoinsieme chiuso  $A \subseteq X$  che sia un'unione di celle di  $X$ . Segue dalla definizione che la chiusura di ogni cella  $e_\alpha \subseteq A$  in  $A$  è ancora in  $A$ , che quindi eredita struttura di  $CW$  complesso: per ogni cella  $e_\alpha^n \subseteq A$ , se  $\phi_\alpha^n : B^n \rightarrow X$  è la corrispondente mappa caratteristica in  $X$ , la mappa caratteristica in  $A$  sarà  $\phi_\alpha^n : B^n \rightarrow A$  (che è ben definita perché  $\phi_\alpha^n(B^n) = \bar{e}_\alpha^n \subseteq A$  per quanto discusso). Un  $CW$  complesso formato da un numero finito di celle si dirà *finito*. In generale scriveremo  $(X, A)$  per intendere che  $A \subseteq X$ , e diremo che  $(X, A)$  è una  $CW$  coppia se  $A$  è un sottocomplesso di  $X$ .

Possiamo anche dare una definizione iterativa. Partiamo da un insieme di punti distinti  $X^0$ , dotato della topologia discreta, che chiamiamo 0-scheletro. Passiamo dall' $(n-1)$ -scheletro  $X^{n-1}$  all' $n$ -scheletro  $X^n$  *incollando*<sup>1</sup> delle  $n$ -celle  $e_\alpha^n$  a  $X^{n-1}$  tramite della mappe  $f_\alpha : \partial e_\alpha^n \rightarrow X^{n-1}$ .  $X^n$  sarà il quoziente di  $X^{n-1} \sqcup_\alpha B_\alpha^n$  sulla relazione  $x \sim f_\alpha(x), \forall x \in \partial e_\alpha^n$ . Nel caso in cui questo procedimento si iteri un numero finito di volte basterà porre  $X = X^n$ , altrimenti si avrà  $X = \cup_n X_n$  e si dovrà imporre esplicitamente la condizione

- 3a. Un sottoinsieme  $A \subseteq X$  è chiuso in  $X$  se e solo se  $A \cap X^n$  è chiuso per ogni  $n \in \mathbb{N}$

dotando  $X$  di quella che si chiama *topologia debole* (*weak topology* in inglese, da cui anche la  $W$  nel nome di questi oggetti). Se  $X = X^n$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X$  si dirà di *dimensione finita*.

**Lemma 2.2.2.** *Ogni sottoinsieme compatto di un  $CW$  complesso è contenuto nell'unione di in un numero finito di celle chiuse.*

*Dimostrazione.* Sia  $A$  un sottoinsieme compatto di  $X$ . Supponiamo per assurdo che  $s_i, i \in \mathbb{N}$  sia una successione di punti distinti contenuti in celle distinte che intersecano  $A$ . L'insieme  $S = \{s_i \text{ t.c. } i \in \mathbb{N}\}$  è dotato della topologia discreta dal momento che ogni suo sottoinsieme è chiuso. Infatti, sia  $B \subseteq S$ ,  $B \cap X^0$  è chiuso perché per ipotesi  $X^0$  è munito della topologia discreta. Per induzione se  $B \cap X^{n-1}$  è chiuso in  $X^{n-1}$  e  $e_\alpha^n$  è una generica cella,  $B \cap \partial e_\alpha^n \subseteq X^{n-1}$  è

<sup>1</sup>Si veda 2.2.11.



chiuso e per costruzione  $B \cap (X^{n-1} \cup \overline{e_\alpha})$  contiene al più un ulteriore punto, e ne segue che  $B \cap X^n$  è ancora chiuso (perché la controimmagine tramite tutte le mappe caratteristiche è chiusa in  $B^n$  e la tesi segue dalla definizione di topologia quoziente). Tuttavia,  $S \subseteq A$  è compatto perché sottoinsieme chiuso in un compatto, ed avendo la topologia discreta deve necessariamente essere finito, assurdo. ■

**Proposizione 2.2.3.** *Ogni sottoinsieme compatto di un CW complesso è contenuto in un sottocomplesso finito.*

*Dimostrazione.* Dal momento che l'unione finita di sottocomplessi finiti è ancora un sottocomplesso finito, ci basterà dimostrare che ogni cella  $e_\alpha^n$  è contenuta in un sottocomplesso finito e la tesi seguirà dal lemma precedente. Se  $n = 0$  questo è immediato. Supponiamo per induzione che le celle di dimensione  $n - 1$  siano contenute in sottocomplessi finiti, allora dal momento che  $\phi_\alpha(\partial B^n) \subseteq X^{n-1}$ ,  $\phi_\alpha(\partial B^n)$  è contenuto in un sottocomplesso  $S$ , e  $e_\alpha^n$  è contenuto nel sottocomplesso  $S \cup e_\alpha^n$ , che è ancora finito. ■

Ritroviamo quindi la condizione di finitezza del punto 2) della Definizione 2.2.1, dal momento che la chiusura di una cella, essendo immagine tramite funzione continua di un compatto, è compatta. Maggiori dettagli sull'equivalenza delle due definizioni di CW complesso considerate possono essere trovati nell'appendice di [6].

La seguente proposizione è utile per costruire funzioni continue su CW complessi e deriva essenzialmente dalla definizione come quoziente:

**Proposizione 2.2.4.** *Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  con  $X$  CW complesso e  $Y$  spazio topologico è continua se e solo se sono continue tutte le restrizioni  $f|_{\overline{e_\alpha}}$ . Analogamente,  $f : X \times I \rightarrow Y$ ,  $I = [0, 1]$  è continua se e solo se lo sono tutte le restrizioni  $F|_{\overline{e_\alpha} \times I}$*

**Esempio 2.2.5.** Possiamo costruire la sfera  $n$ -dimensionale considerando una 0-cella  $e_0$  e una  $n$ -cella  $e_n$ , identificando il bordo della  $n$ -cella con il punto.

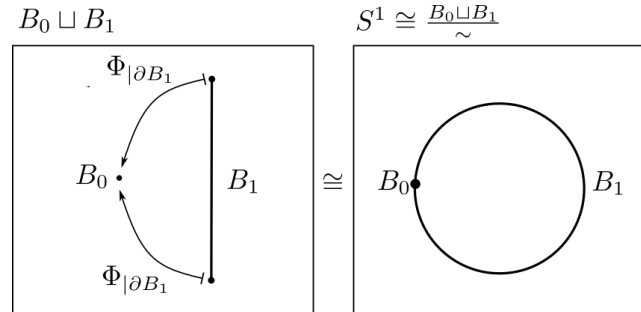


Figura 2.1:  $S^1$  come CW complesso

**Definizione 2.2.6.** Uno spazio topologico  $X$  si dice *normale* se dati due sottoinsiemi chiusi disgiunti  $A, B \subseteq X$ ,  $A \cap B = \emptyset$ , esistono degli aperti disgiunti  $U, V \subseteq X$ ,  $U \cap V = \emptyset$  tali che  $A \subseteq U, B \subseteq V$ .

**Lemma 2.2.7.** *Un  $CW$  complesso è uno spazio normale.*

La dimostrazione del lemma può essere trovata nell'appendice di [6].

### 2.2.1 Costruzioni con spazi topologici

**Definizione 2.2.8.** Siano  $X, Y$  due  $CW$  complessi con un'infinità numerabile di celle (o  $X$  con un numero finito di celle e  $Y$  arbitrario).  $X \times Y$  è ancora un  $CW$  complesso con celle  $e_\alpha^n \times e_\beta^m$ ,  $e_\alpha^n \subseteq X, e_\beta^m \subseteq Y$ .

Quando nessuno dei due  $CW$  complessi ha un numero finito di celle e uno dei due  $CW$  complessi ha un'infinità non numerabile di celle, la topologia prodotto e la topologia indotta dalla costruzione appena vista potrebbero differire. Non ci occuperemo di questa discrepanza e nel resto della trattazione il prodotto sarà sempre inteso nelle ipotesi della precedente definizione. Per le dimostrazioni necessarie a rendere rigorosa la definizione precedente e per ulteriori dettagli sul caso generale si veda [6].

**Definizione 2.2.9.** Data una coppia  $(X, A)$ , il suo *quoziente*  $X/A$  è lo spazio che si ottiene da  $X/\sim_A$ , dove  $\sim_A$  è la relazione riflessiva tale che  $a \sim b, \forall a, b \in A$ . Quindi  $X/A$  è lo spazio in cui si sono identificati tutti i punti di  $A$  in un unico punto di  $A$ .  $p : X \rightarrow X/A$  definita da  $p(x) = [x]_\sim$  è la *mappa quoziente* e  $U \subseteq X/A$  è aperto, per definizione, se e solo se  $p^{-1}(U)$  è aperto in  $X$ .

**Osservazione 2.2.10.** Se  $(X, A)$  è una  $CW$  coppia il quoziente eredita una struttura di  $CW$  complesso, con una 0-cella, chiamiamola  $e_A^0$ , corrispondente ad  $A$  nel quoziente, ed una cella corrispondente ad ogni cella di  $X \setminus A$ , la cui funzione caratteristica si ottiene componendo quella iniziale con la proiezione  $X \rightarrow X/A$ . Le ultime due proprietà della definizione di  $CW$  complesso seguono immediatamente dalla costruzione, mentre il fatto che  $X/A$  è Hausdorff segue dal Lemma 2.2.7.

**Definizione 2.2.11.** Dati due spazi  $X, Y$  ed una funzione  $f : A \rightarrow Y, A \subseteq X$ , possiamo definire un terzo spazio  $X \sqcup_f Y$  *incollando*  $X$  su  $Y$  *lungo*  $A$ . L'unione disgiunta  $X \sqcup Y$  è spazio topologico con  $U \subseteq X \sqcup Y$  aperto  $\iff U \cap X$  e  $U \cap Y$  sono aperti. Definiamo  $X \sqcup_f Y \stackrel{def}{=} X \sqcup Y / \sim$ , dove  $\sim$  è la relazione riflessiva tale che  $a \sim f(a), \forall a \in A$ .

**Esempio 2.2.12.** Lo scheletro  $n$ -esimo di un  $CW$  complesso si ottiene da  $X^{n-1}$  attaccando celle  $B^n$  lungo  $\partial B^n$ .

**Definizione 2.2.13.** Sia  $(X_\alpha, x_0^\alpha)$  una collezione di spazi con  $x_0^\alpha \in X_\alpha$  e consideriamo un punto  $x_0$ . L'incollamento degli spazi  $X_\alpha$  lungo  $x_0^\alpha$  tramite le mappe  $x_0^\alpha \mapsto x_0$  è detto *bouquet* e si indica con  $\bigvee_\alpha X_\alpha$ .

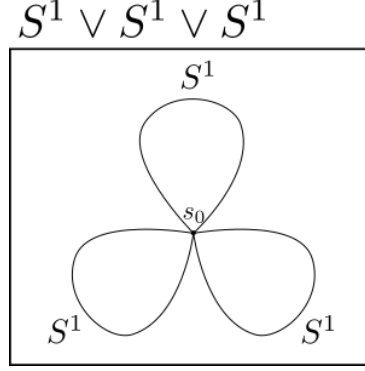


Figura 2.2: Bouquet di tre circonferenze (Trifoglio)

Ci limiteremo a considerare i bouquet di sfere. In tal caso la costruzione non dipende dalla scelta dei punti di incollamento e la notazione adottata non è ambigua.

**Definizione 2.2.14.** Sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione continua tra spazi topologici. Il *cilindro di mappatura* associato ad  $f$ ,  $M_f$ , è lo spazio quoziente di  $X \times I \sqcup Y$  rispetto alla relazione  $X \times I \ni x \times 1 \sim f(x), \forall x \in X$ .

**Osservazione 2.2.15.** Il cilindro di mappatura è un caso particolare di incollamento. Se  $f : X \rightarrow Y$  è continua,  $M_f$  è uguale a  $X \times I \sqcup_f Y$ , dove  $f$  è intesa da  $X \times 1$  in  $Y$ .

**Osservazione 2.2.16.** Sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione continua. Consideriamo la mappa  $r : X \times I \sqcup Y \rightarrow Y$  definita da  $r(x \times t) = f(x)$  se  $x \times t \in X \times I$  e  $r(y) = y$  per  $y \in Y$ . Chiamiamo  $p : X \times I \sqcup Y \rightarrow X \times I \sqcup_f Y$  la proiezione indotta dal quoziente e definiamo  $pr : M_f \rightarrow p(Y)$  come  $pr([z]) = [r(z)]$ :

$$\begin{array}{ccc} X \times I \sqcup Y & \xrightarrow{r} & Y \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ M_f & \xrightarrow{pr} & p(Y) \end{array}$$

$pr$  è ben definita dal momento che le uniche classi del cilindro di mappatura che ammettono più di un rappresentante sono della forma  $[z] = \{(x_\alpha \times 1), f(x_\alpha)\}$  e per costruzione  $r(x_\alpha \times 1) = r(f(x_\alpha)) = f(x_\alpha)$ . Inoltre  $pr \simeq_H Id_{M_f}$  tramite l'omotopia  $h_t : M_f \rightarrow M_f$  definita da

$$h_t([z]) \stackrel{def}{=} \begin{cases} [(x, s + (1-s)t)] & \text{se } z = x \times s \in X \times I \\ [z] & \text{se } z \in Y \end{cases}$$

Anche in questo caso  $h_t$  non dipende dalla scelta del rappresentante dal momento che  $h_t([x \times 1]) = [x \times 1] = [f(x)] = h_t([f(x)])$ . Inoltre  $h_0 \equiv Id_{M_f}$ ,  $h_1 \equiv pr$  e  $h_t([x \times 1]) = [x \times 1]$ ,  $h_t([y]) = [y]$ ,  $\forall t \in I, x \times 1 \in X \times I, y \in Y$ . Quindi  $H$  è un'omotopia rel  $pr(M_f) \simeq Y$  da  $Id_{M_f}$  in  $pr$  e possiamo concludere che  $Y$  è un retratto per deformazione di  $M_f$ .

**Proposizione 2.2.17.** *Sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione continua. La coppia  $(M_f, X)$  gode di HEP.*

*Dimostrazione.* Tratteremo  $X$  come sottospazio di  $M_f$  intendendo più propriamente  $X \cong X \times \{0\} \subseteq M_f$ . Poniamo  $N \stackrel{def}{=} X \times [0, \frac{1}{2}]$  e  $B \stackrel{def}{=} X \times \frac{1}{2}$ . Sia  $g : X \rightarrow X \times \frac{1}{2}$  definita da  $g(x) \stackrel{def}{=} x \times \frac{1}{2}$  e  $M_g$  il rispettivo cilindro di mappatura che dal momento che  $g$  è essenzialmente l'identità risulterà omeomorfo al cilindro  $X \times [0, 1]$ .  $N$  e  $M_g$  sono omeomorfi tramite

$$\begin{aligned} h : M_g &\longrightarrow N \\ [x \times t] &\longmapsto [x \times \frac{t}{2}] \end{aligned}$$

per cui vale  $h(X \times 0 \cup X \times 1) = X \cup B$ . Inoltre  $(M_g, X \times 0 \cup X \times 1)$  gode di HEP dal momento che  $M_g \times I$  si ritrae su  $M_g \times 0 \cup [(X \times 0 \cup X \times 1) \times I]$  tramite la retrazione indotta sul cilindro da  $r : I \times I \rightarrow I \times 0 \cup \partial I \times I$  con una costruzione analoga a quella dell'Osservazione 2.2.16. Di conseguenza anche la coppia omeomorfa  $(N, X \cup B)$  gode di HEP.

Ora data una funzione  $\eta : M_f \rightarrow Y$  e un'omotopia  $K : X \times I \rightarrow Y$  da  $\eta|_X$  possiamo considerare  $\bar{K} : (X \cup B) \times I \rightarrow Y$  definita da  $\bar{K}|_{X \times I} \equiv K$  e tale che  $\bar{K}|_{B \times I}$  sia l'omotopia costante. Per il paragrafo precedente  $(N, X \cup B)$  gode di HEP e possiamo estendere  $\bar{K}$  a tutto  $N$  ottenendo  $\tilde{K} : N \times I \rightarrow Y$  tale che  $\tilde{K}|_{(X \times 0 \cup X \times \frac{1}{2}) \times I} \equiv \bar{K}$ . Infine, per il pasting lemma, ponendo  $\tilde{K}$  l'omotopia identità su  $(M_f \setminus N) \times I$  otteniamo ancora una funzione continua che è l'estensione cercata. ■

**Lemma 2.2.18.** *Sia  $X = \cup_{i \geq 1} X^i$  uno spazio dotato della topologia debole<sup>2</sup> tale che  $X^i \subseteq X^{i+1}$ . Se  $\{f_i : X^i \rightarrow Y\}_{i \geq 1}$  è una successione di funzioni continue tali che  $f_{i+1}|_{X^i} \equiv f_i$ , allora esiste ed è unica la funzione continua  $f : X \rightarrow Y$  tale che estenda la famiglia. Equivalentemente,  $f$  è l'unica funzione continua che rende il diagramma commutativo per ogni  $i$ :*

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xhookrightarrow{\quad} & X \\ & \searrow f_i & \swarrow f \\ & Y & \end{array}$$

*Dimostrazione.* Per ogni  $x \in X$ , sia  $A \stackrel{def}{=} \{n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } x \in X^n\}$ .  $A$  è non vuoto per definizione di  $X$  e ammette minimo  $n_x$ , inoltre, per ogni  $n \geq n_x$ ,

<sup>2</sup>Si veda *weak topology* nella Sezione 2.2

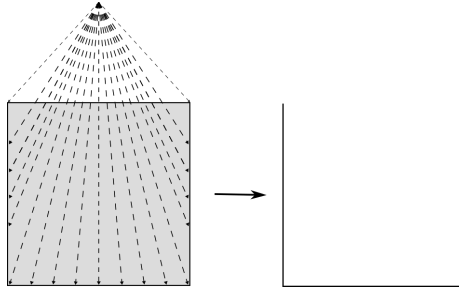


Figura 2.3: Retrazione per deformazione da  $I \times I$  a  $I \times 0 \cup \partial I \times I$

$f^n(x) = f^{n_x}(x)$  (per induzione dall'ipotesi che  $f^{i+1}|_{X^i} \equiv f^i$ ). Definiamo

$$\begin{aligned} f &: X \longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f^{n_x}(x) \end{aligned}$$

Chiaramente  $f$  estende  $\{f^i\}_{i \geq 1}$ , dimostriamo che è continua. Sia  $U \subseteq Y$  aperto e  $V \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(U)$ . Per ogni  $n \geq 1$ ,  $V \cap X^n = \{x \in X^n \text{ t.c. } f(x) \in U\} = (f^n)^{-1}(U)$  è aperto per ipotesi, e per definizione della topologia debole segue che  $V$  è aperto. ■

**Proposizione 2.2.19.** *Sia  $(X, A)$  una CW coppia. Allora  $X \times \{0\} \cup A \times I$  è un retratto per deformazione di  $X \times I$ .*

*Dimostrazione.* Fissiamo  $n \in \mathbb{N}$ . A ogni cella  $e_\alpha^n$  in  $X \setminus A$  con mappa caratteristica  $f_\alpha : (B^n, \partial B^n) \rightarrow (X^{n-1} \cup e_\alpha^n, X^{n-1})$  corrisponde una cella  $e_\alpha^n \times I$  in  $X \times I$  con mappa caratteristica

$$\begin{aligned} f_\alpha \times Id_I &: B^n \times I \longrightarrow X^n \times I \\ x \times t &\longmapsto f_\alpha(x) \times t \end{aligned}$$

Consideriamo la retrazione per deformazione  $R : B^n \times I \times I \rightarrow B^n \times I$  da  $B^n \times I$  in  $B^n \times 0 \cup \partial B^n \times I$ , che si può ottenere ad esempio notando che  $B^n \times I$  è omeomorfo a  $I^n \times I$  e  $I^n \times I$  ritrae per deformazione su  $I^n \times 0 \cup \partial I^n \times I$  tramite la proiezione radiale da un punto che si trovi *sopra*  $I^{n+1}$  (Figura 2.3). La composizione  $(f_\alpha \times Id_I) \circ R : B^n \times I \times I \rightarrow X^n \times I$  è tale che

$$B^n \times I \xrightarrow{(R)_1} B^n \times 0 \cup \partial B^n \times I \xrightarrow{f_\alpha \times Id_I} X^n \times 0 \cup (X^{n-1} \times I)$$

dal momento che per definizione  $f_\alpha(\partial B^n) \subseteq X^{n-1}$ . Poniamo  $Y^k \stackrel{\text{def}}{=} X \times 0 \cup (X^k \cup A) \times I$ . Vogliamo definire delle retrazioni per deformazione da  $Y^k$  in  $Y^{k-1}$ , con  $Y^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} X \times 0 \cup A \times I$ , che poi concatenate opportunamente daranno la retrazione cercata (notare che se  $X = X^m$  è un CW complesso di dimensione finita,  $Y^m = X \times I$ ). Definiamo

$$H_n : Y^n \times I \rightarrow Y^n$$

in modo che  $H^n|_{A \times I \times I}$  sia l'omotopia identità ( $H(a \times t \times s) = a \times t$ ) e per ogni cella  $e_\alpha^n \subseteq X^n \setminus A$

$$H_n|_{\bar{e}_\alpha \times I \times I} \equiv (f_\alpha \times Id_I) \circ R$$

$H_n$  è ben definita dal momento che se  $x \in \bar{e}_\alpha^n \cap \bar{e}_\beta^n$  allora  $x \times I \subseteq X^{n-1} \times I$ , dove  $R$  è l'omotopia identità. Poste  $\rho_k \stackrel{def}{=} (H_k)_1 : Y^k \rightarrow Y^{k-1}$  le retrazioni indotte dalle  $H_k$  e

$$i_k : Y^k \hookrightarrow X \times I$$

le rispettive mappe inclusione ( $i_m \equiv Id_{X \times I}$  nel caso  $X^m = X$ ) possiamo definire le funzioni

$$\tilde{H}_k^m \stackrel{def}{=} i_k \circ H_k \circ (\rho_{k+1} \times Id_I) \circ (\rho_{k+2} \times Id_I) \circ \cdots \circ (\rho_m \times Id_I)$$

(con  $\tilde{H}_n^n \stackrel{def}{=} i_n \circ H_n$ ). Si vede che

$$\begin{aligned} (\tilde{H}_k^m)_0 &= i_k \circ (H_k)_0 \circ \rho_{k+1} \circ \cdots \circ \rho_m \\ &= i_k \circ \rho_{k+1} \circ \cdots \circ \rho_n \end{aligned}$$

dal momento che  $(H_k)_0$  è l'omotopia identità e

$$\begin{aligned} (\tilde{H}_k^m)_1 &= i_k \circ (H_k)_1 \circ \rho_{k+1} \circ \cdots \circ \rho_m \\ &= i_k \circ \rho_k \circ \cdots \circ \rho_m \end{aligned}$$

Inoltre,  $\tilde{H}_k^m$  è l'omotopia identità su  $Y^{k-1}$  perché lo sono tutte le funzioni coinvolte nella definizione.

Se  $X = X^m$ , definiamo

$$\bar{H} \stackrel{def}{=} \begin{cases} \tilde{H}_m^m & \text{su } X^m \times I \times \left[0, \frac{1}{m+1}\right] \\ \tilde{H}_{m-1}^m & \text{su } X^m \times I \times \left[\frac{1}{m+1}, \frac{2}{m+1}\right] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{H}_0^m & \text{su } X^m \times I \times \left[\frac{m}{m+1}, 1\right] \end{cases}$$

dove le  $\tilde{H}_k^m$  sono riparametrizzate in modo che si svolgano interamente nel rispettivo intervallo. Anche  $\bar{H}$  è costante su  $X \times 0 \cup A \times I$  e  $(\bar{H})_1 = \rho_0 \circ \cdots \circ \rho_n$  è una retrazione da  $X \times I$  in  $X \times 0 \cup A \times I$ . (Figura 2.4).

Se  $X$  non è finito, consideriamo le  $\tilde{H}_k^m$  del passo precedente ( $0 \leq k \leq m$ ), e definiamo le funzioni

$$K^m \stackrel{def}{=} \begin{cases} \text{omotopia identità} & \text{su } X^m \times I \times \left[0, \frac{1}{2^{m+1}}\right] \\ \tilde{H}_m^m & \text{su } X^m \times I \times \left[\frac{1}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^m}\right] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{H}_0^m & \text{su } X^m \times I \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

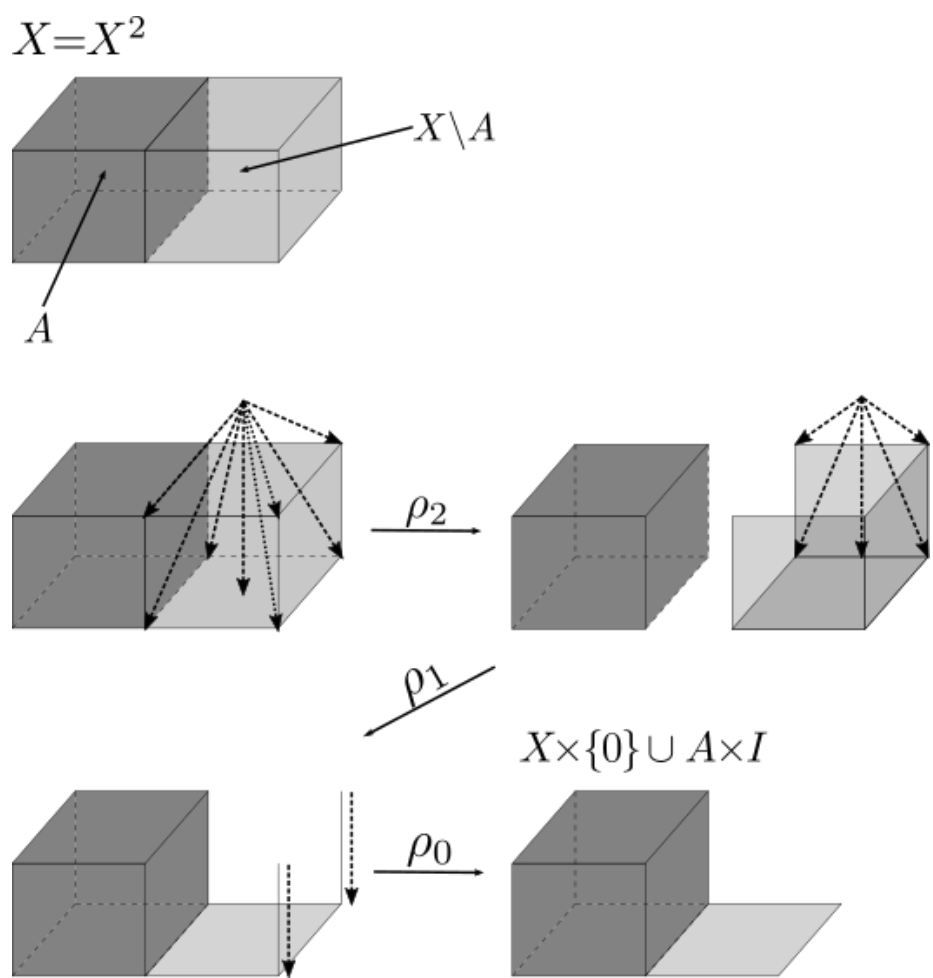


Figura 2.4

dove abbiamo ancora riparametrizzato le  $\tilde{H}_k^m$  in modo che si svolgano interamente nei rispettivi intervalli  $[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}]$ , e le abbiamo ristrette a  $X^m \times I \times I$ . Ora vogliamo dimostrare che  $K^{m+1}|_{X^m \times I \times I} \equiv K^m$  per poter applicare il lemma precedente e trovare l'unica funzione continua  $K : X \times I \times I \rightarrow X \times I$  che estende la famiglia appena definita. Per definizione, si ha che  $\tilde{H}_i^{m+1} = \tilde{H}_i^m \circ (\rho_{m+1} \times Id_I)$ . Di conseguenza, quando restringiamo  $K^{m+1}$  a  $X^m \times I \times I$ , essendo  $\rho_{m+1} \times Id_I$  l'identità su  $X^m \times I \times I$ , otteniamo proprio  $K^m$ . Dal momento che  $K$  estende le  $K^m$  sarà ancora costante su  $X \times 0 \cup A \times I$  e da  $(K^m)_1 \equiv (\tilde{H}_0^m)_1, \forall m$  segue necessariamente  $(K)_1(x \times t) = x \times t, \forall x \times t \in X \times 0 \cup A \times I$  (se  $x \times t \in X \times 0 \cup A \times I$ ,  $x \times t \in X^n \times 0 \cup A^n \times I$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$  e  $(K)_1(x \times t) \equiv (K^n)_1(x \times t) = x \times t$ ) e  $K$  è la retrazione per deformazione cercata. ■

**Corollario 2.2.20.** *Una CW coppia  $(X, A)$  gode della proprietà di estensione di omotopie.*

*Dimostrazione.* Segue dalla proposizione precedente e dalla Proposizione 1.2.6. ■

**Proposizione 2.2.21.** *Sia  $(X, A)$  una CW coppia e  $f, g : A \rightarrow Y$  due funzioni omotope. Allora  $X \sqcup_f Y \simeq X \sqcup_g Y$  rel  $Y$ . (L'equivalenza per omotopie  $B \simeq C$  rel  $D$ ,  $D \subseteq B, C$  indica che esistono funzioni  $\phi : B \rightarrow C$ ,  $\psi : C \rightarrow B$  tali che  $\phi \circ \psi \simeq Id_B$  e  $\psi \circ \phi \simeq Id_C$  tramite omotopie costanti su  $D$ )*

*Dimostrazione.* Sia  $H : A \times I \rightarrow Y$  un'omotopia da  $f$  in  $g$  e consideriamo lo spazio

$$Z \stackrel{def}{=} X \times I \sqcup_H Y$$

$Z$  contiene copie omeomorfe di  $X \sqcup_f Y$  e  $X \sqcup_g Y$  (le proiezioni di  $X \times \{0\} \sqcup Y$  e  $X \times \{1\} \sqcup Y$ ). Per la Proposizione 2.2.19 esiste una retrazione per deformazione  $K$  da  $X \times I$  su  $X \times \{0\} \cup A \times I$ . Posta  $p : X \times I \sqcup Y \rightarrow X \times I \sqcup_H Y$  la proiezione possiamo definire la funzione  $pk_t$

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{k_t} & X \times I \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ X \times I \sqcup_H Y & \xrightarrow{pk_t} & X \times I \sqcup_H Y \end{array}$$

come  $pk_t([z]) = [k_t(z)]$ .  $pk_t$  è ben definita ed è una retrazione per deformazione da  $X \times I \sqcup_H Y$  su  $X \times \{0\} \cup A \times I \sqcup_H Y \cong X \sqcup_f Y$  (dal momento che  $A \times I$  viene identificato completamente con  $Y$ , e  $H|_{X \times \{0\}} \equiv f$ ). Analogamente, tramite la retrazione per deformazione  $X \times I \rightarrow X \times \{1\} \cup A \times I$  troviamo una retrazione per deformazione da  $Z$  su  $X \sqcup_g Y$ . In entrambi i casi le retrazioni per deformazione sono costanti su  $Y$  e per l'Osservazione 1.2.2 si ha la tesi. ■

**Proposizione 2.2.22.** *Siano  $(X, A), (Y, A)$  coppie che soddisfano la proprietà di estensione delle omotopie e  $f : X \rightarrow Y$  un'equivalenza di omotopie tale*



che  $f|_A \equiv Id_A$ . Allora  $f$  è un'equivalenza di omotopie rel  $A$  (nel senso della Proposizione 2.2.21).

La dimostrazione di questo fatto per applicazioni successive della proprietà di estensione di omotopie può essere trovata in [6].

**Proposizione 2.2.23.** *Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è un'equivalenza di omotopie se e solo se  $X$  è un retratto per deformazione di  $M_f$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $p : X \times I \sqcup Y \rightarrow M_f$  la proiezione. Poniamo  $i : X \rightarrow p(X \times 0) \subseteq M_f$  e  $j : Y \rightarrow M_f$  le rispettive mappe inclusione, e chiamiamo  $h_t : M_f \rightarrow M_f$  la retrazione per deformazione da  $M_f$  in  $Y$  costruita nell'Osservazione 2.2.16.  $r \stackrel{def}{=} h_1$  è una retrazione, inoltre  $r \circ i = f$  e  $j \circ f \simeq i$  (tramite l'omotopia  $h_t$  percorsa al contrario,  $\bar{h}_t \stackrel{def}{=} h_{1-t}$ ). E' noto che la composizione di equivalenze di omotopie e le mappe omotope a equivalenze di omotopie sono ancora equivalenze di omotopie. Ne deduciamo che  $f$  è un'equivalenza di omotopie se e solo se lo è  $i$ . La coppia  $(M_f, X)$  gode della proprietà di estensione delle omotopie per la Proposizione 2.2.17. Se  $f$ , e quindi  $i$ , sono equivalenze di omotopia, applicando la proposizione precedente a  $(M_f, X)$  e  $i$  otteniamo che esiste un'omotopia da  $r \circ i$  in  $Id_{M_f}$  rel  $M_f \times \{0\} \cup X \times I$  che percorsa in senso inverso è la retrazione per deformazione cercata. Viceversa, se tale retrazione per deformazione  $K$  esiste,  $k_1$  è un'equivalenza di omotopie che per l'Osservazione 1.2.2 ammette proprio  $i$  come inversa omotopica, da cui la tesi. ■

**Corollario 2.2.24.** *Due spazi sono omotopicamente equivalenti se e solo se esiste un terzo spazio che li contiene come retratti per deformazione.*

**Definizione 2.2.25.** La *sospensione* di uno spazio topologico  $X$ ,  $SX$ , è lo spazio quoziente che si ottiene da  $X \times I$  identificando  $X \times 0$  con un punto e  $X \times 1$  con un altro punto.

**Osservazione 2.2.26.** Potevamo definire il *cono* di uno spazio come  $X \times I / X \times \{1\}$  e la sospensione di uno spazio come l'incollamento di due coni lungo  $X \times \{0\}$  tramite la mappa identità.

**Osservazione 2.2.27.** Se  $X$  è un  $CW$  complesso, anche  $SX$  lo è ereditando la struttura da  $X \times I$  tramite il quoziente.

**Definizione 2.2.28.** Se  $f : X \rightarrow Y$  è una funzione continua tra  $CW$  complessi, si può definire la mappa di sospensione  $Sf : SX \rightarrow SY$ . Poste  $q : X \times I \rightarrow SX$  e  $p : Y \times I \rightarrow SY$ ,  $Sf$  è definita come  $Sf(q(x \times t)) \stackrel{def}{=} p((f \times Id_I)(x \times t))$ .

**Esempio 2.2.29.** Consideriamo  $X = S^1$ , in questo caso collassando  $X \times 0 \ni s_0$  e  $X \times \{1\} \ni s_1$  nei punti  $s_0, s_1$  rispettivamente, da  $X \times I$  otteniamo  $S^2$ . In generale, se  $X = S^n$  otteniamo  $SX = S^{n+1}$ .

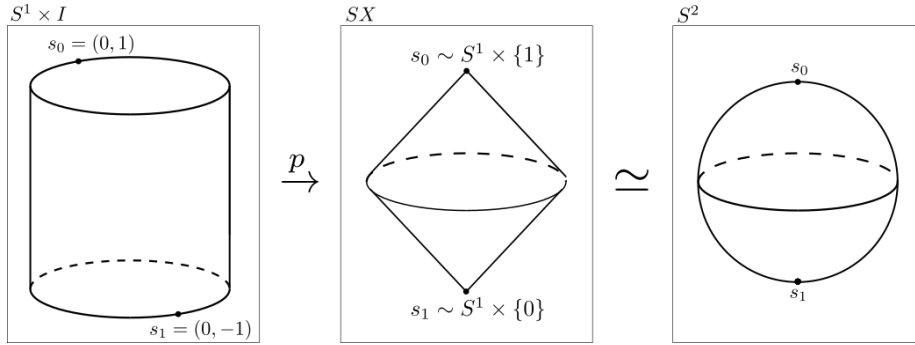


Figura 2.5: Sospensione di  $S^1$

**Esempio 2.2.30.** Sia  $f : I^n \rightarrow S^n$  una funzione continua. La mappa di sospensione associata ad  $f$  è  $Sf : I^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ .

## 2.3 Teorema di Van Kampen

Poniamoci di nuovo nelle ipotesi della Proposizione 1.1.16, quindi consideriamo  $x_0 \in X$  spazio topologico e  $U_\alpha, \alpha \in I$  famiglia di aperti di  $X$  connessi per archi, contenenti  $x_0$ , e tali che  $\cup_\alpha U_\alpha = X$  e  $U_\alpha \cap U_{\alpha'}$  sia connesso per archi per ogni  $\alpha, \alpha'$ . Le mappe di inclusione  $i_\alpha : U_\alpha \rightarrow X$  inducono degli omomorfismi  $(i_\alpha)_* : \pi_1(U_\alpha) \rightarrow \pi_1(X)$  che per il Teorema 2.1.6 è possibile estendere ad un omomorfismo  $\phi : \star_\alpha \pi_1(U_\alpha, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ . Se questo omomorfismo fosse suriettivo conoscendo il suo nucleo sarebbe possibile ottenere una descrizione completa del gruppo fondamentale di  $X$  in funzione dei gruppi fondamentali di spazi potenzialmente più semplici da studiare. Il teorema di Van Kampen, con un'ipotesi aggiuntiva, ci permette di realizzare questo risultato.

**Teorema 2.3.1** (di Van Kampen). *Nelle ipotesi di sopra, l'omomorfismo  $\phi : \star_\alpha \pi_1(U_\alpha) \rightarrow \pi_1(X)$  è suriettivo. Inoltre, se  $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\theta$  è connesso per archi per ogni  $\alpha, \beta, \theta$  e poste  $i_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow U_\alpha$  le rispettive mappe inclusione, il nucleo di  $\phi$  è il sottogruppo normale  $N$  generato dagli elementi della forma  $(i_{\alpha\beta})_*(w)(i_{\beta\alpha})_*(w)^{-1}$ ,  $w \in \pi_1(U_\alpha \cap U_\beta)$ . Di conseguenza,  $\pi_1(X) \simeq (\star_\alpha \pi_1(U_\alpha))/N$ .*

*Dimostrazione.* Dalla Proposizione 1.1.16 si ha facilmente la suriettività di  $\phi$ . Infatti se  $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ , allora esistono  $[\gamma_1] \in \pi_1(U_{\alpha_1}, x_0), \dots, [\gamma_n] \in \pi_1(U_{\alpha_n}, x_0)$  tali che  $[\gamma] = [\gamma_1 \cdots \gamma_n] = [\gamma_1] \cdots [\gamma_n] = \phi([\gamma_1] \cdots [\gamma_n])$  per quanto visto nel Teorema 2.1.6. Ora dimostriamo che  $N$  è proprio il nucleo di  $\phi$ . E' immediato che  $N \subseteq \ker \phi$ , per dimostrare l'inclusione inversa chiamiamo *fattorizzazione* di un cammino chiuso  $\gamma$  una sua scomposizione

$$[\gamma_1] \in \pi_1(U_{\alpha_1}, x_0) \cdots [\gamma_n] \in \pi_1(U_{\alpha_n}, x_0)$$

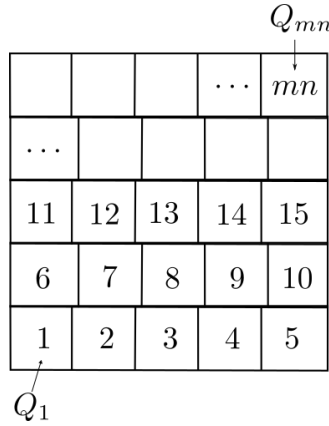


Figura 2.6

in cammini chiusi basati in  $x_0$  e contenuti in un unico aperto  $\gamma_i([0, 1]) \subseteq U_{\alpha_i}$  tali che

$$[\gamma] = [\gamma_1 \cdots \gamma_n]$$

in  $\pi_1(X, x_0)$ . Diremo inoltre che due fattorizzazioni sono *equivalenti* se si possono ottenere tramite una sequenza finita di una delle due seguenti azioni:

1. Unire due elementi della fattorizzazione consecutivi che appartengano allo stesso aperto, ovvero sostituire  $[\gamma_i][\gamma_{i+1}]$  con  $[\gamma_i \cdot \gamma_{i+1}]$  se  $[\gamma_i], [\gamma_{i+1}] \in \pi_1(U_\alpha)$
2. Considerare un cammino chiuso della fattorizzazione  $[\gamma_\alpha] \in \pi_1(U_\alpha, x_0)$  contenuto nell'intersezione di due aperti  $\gamma_\alpha([0, 1]) \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$  come elemento di  $\pi_1(U_\beta, x_0)$

Per come abbiamo definito il prodotto libero la prima azione non cambia l'immagine tramite  $\phi$  della fattorizzazione, inoltre per la definizione di  $N$  data due fattorizzazioni che differiscono per un'azione del secondo tipo appartengono alla stessa classe del quoziente  $\frac{\star_\alpha \pi_1(U_\alpha, x_0)}{N}$  dal momento che in quest'ultimo  $(i_{\alpha\beta})_*([\gamma_\alpha])$  e  $(i_{\beta\alpha})_*([\gamma_\alpha])$  appartengono alla stessa classe per definizione di  $N$ .

Ora dimostriamo che due fattorizzazioni di  $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$  sono sempre equivalenti, da cui seguirà la tesi. Siano  $[h_1], \dots, [h_k]$  e  $[g_1], \dots, [g_l]$  due fattorizzazioni di un elemento di  $[\gamma] \in \pi_1(X)$ . Dal momento che  $h_1 \cdots h_k$  e  $g_1 \cdots g_l$  rappresentano la stessa classe in  $\pi_1(X)$ , esiste un'omotopia  $H$  che li collega. Con un argomento simile a quanto visto nella dimostrazione del Lemma 1.1.16 possiamo trovare due suddivisioni di  $I$ ,  $0 = a_1 < \dots < a_n = 1$  e  $0 = b_1 < \dots < b_m$ , tali che  $H([a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}])$  sia contenuto in un singolo aperto  $U_\alpha$ , chiamiamolo  $U_{ij}$ . Numeriamo i rettangoli della suddivisione, riga per riga da sinistra a destra, ottenendo  $Q_1, \dots, Q_{nm}$  (Figura 2.6). Possiamo evitare il caso in cui un vertice  $a_i \times b_j$  della suddivisione corrisponda a più

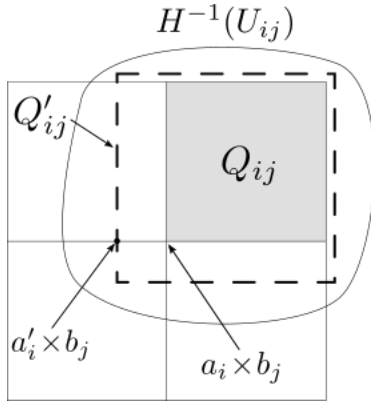


Figura 2.7

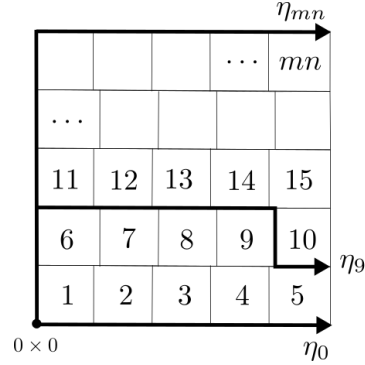


Figura 2.8

di tre rettangoli. Infatti, dal momento che  $V \stackrel{\text{def}}{=} H^{-1}(U_{ij})$  è aperto e contiene il compatto  $Q_{ij}$  in  $I^2$ , esiste un rettangolo  $Q'_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} [a'_i, a'] \times [b'_j, b']$  tale che  $Q_{ij} \subset \text{Int } Q'_{ij} \subset V$ . Tale rettangolo può essere scelto in modo che  $a'_i \in [a_{i-1}, a_i]$  e nella suddivisione si può sostituire  $a_i \times b_j$  con  $a'_i \times b_j$ <sup>3</sup> (Figura 2.7). Ogni cammino  $\eta$  da un punto in  $0 \times I$  ad un punto in  $1 \times I$  definisce un cammino chiuso  $H|_{\eta}$  in  $X$ . In particolare, consideriamo i cammini  $\eta_i$  che partono da  $0 \times 0$  e *separano*, percorrendo i bordi dei quadrati della suddivisione di  $I \times I$ , i rettangoli  $Q_1, \dots, Q_i$  dai restanti arrivando ad un punto su  $\{1\} \times I$  (Figura 2.8). Se  $a_i \times b_j$  è tale che  $H(a_i, b_j) \neq x_0$ , dal momento che è contenuto in al più tre rettangoli, l'immagine è contenuta in al più tre aperti e per ipotesi la loro intersezione è connessa per archi e contiene  $x_0$ , quindi esiste un cammino  $\nu_{ij}$  da  $H(a_i, b_j)$  in  $x_0$ , e il cammino  $\nu_{ij}\bar{\nu}_{ij}$  è contenuto in un singolo aperto. Possiamo ottenere una fattorizzazione  $[\alpha_1^i] \cdots [\alpha_{r_i}^i]$  dei cammini  $H|_{\eta_i}$  considerandone la restrizione sui segmenti tra due vertici consecutivi, inserendo opportunamente i cammini  $\nu_{ij}$  in modo che la fattorizzazione sia in cammini chiusi.

Passando da  $\eta_i$  a  $\eta_{i+1}$  otteniamo due fattorizzazioni equivalenti. Per dimostrarlo, chiamiamo  $\beta_i$  e  $\beta_{i+1}$  i tratti, di  $\eta_i$  e  $\eta_{i+1}$  rispettivamente, su cui i cammini non coincidono, che per come li abbiamo definiti saranno formati ognuno da uno, due o tre segmenti del bordo di  $Q_{i+1}$ .  $H|_{\beta_i}$  e  $H|_{\beta_{i+1}}$  fanno parte delle fattorizzazioni dei cammini  $H|_{\eta_i}, H|_{\eta_{i+1}}$ , e per l'azione 2 possiamo considerarli nell'aperto contenente  $H(Q_{i+1})$ . Se  $\beta_i, \beta_{i+1}$  sono entrambi formati da due segmenti esiste un'omotopia  $F$  in  $Q_{i+1}$  che manda  $\beta_i$  in  $\beta_{i+1}$ , fissando gli estremi dei cammini, e  $H \circ F$  è quindi un'omotopia in  $H(Q_{i+1})$  da  $H|_{\beta_i}$  in  $H|_{\beta_{i+1}}$  che preserva ancora gli estremi (Figura 2.9). Dal momento che  $H(Q_{i+1})$  è contenuto in un singolo aperto, in quest'ultimo  $[H|_{\beta_i}] = [H|_{\beta_{i+1}}]$  (in verità

<sup>3</sup>Continueremo, con un leggero abuso di notazione, ad indicare questo vertice con  $a_i \times b_j$ , nonostante la griglia sia sfasata. Questo non è un problema dal momento che i vertici sostituiti sono in corrispondenza biunivoca con i vertici iniziali.

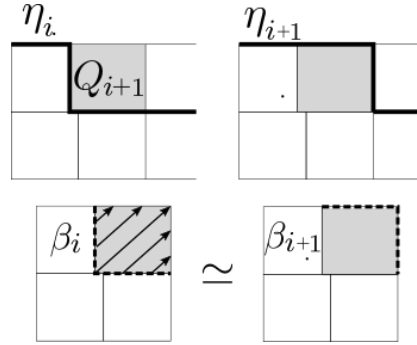


Figura 2.9

bisogna ancora inserire i cammini  $\nu_{ij}, \overline{\nu_{ij}}$  per renderli chiusi) da cui l'equivalenza delle due fattorizzazioni. Se  $\beta_i$  o  $\beta_{i+1}$  sono formati da 3 segmenti, allora uno dei segmenti coincide con il bordo dove  $H \equiv x_0$  e ci si può facilmente ricondurre al caso precedente.

Per ipotesi  $H|_{I \times 0} = h_1 \cdots h_k$  e  $H|_{I \times 1} = g_1 \cdots g_l$  e possiamo supporre, a meno di ulteriori suddivisioni, che  $\{\frac{i}{k} \times 0, i = 0, \dots, k-1\} \subseteq \{a_i \times 0, i = 1, \dots, m\}$  e  $\{\frac{i}{l} \times 1, i = 0, \dots, l-1\} \subseteq \{a_i \times 1, i = 1, \dots, m\}$ . La fattorizzazione associata a  $\eta_0$  è equivalente alla fattorizzazione  $[h_1] \cdots [h_k]$ . Per dimostrarlo fissiamo  $i = 1, \dots, k-1$  e chiamiamo  $\{\frac{i}{k} = c_0 < c_1 < \dots < c_p = \frac{i+1}{k}\} \stackrel{def}{=} \{a_i \times 0\}_i \cap [\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}] \times 0$  i vertici della suddivisione corrispondenti al dominio di  $h_i$ . Poniamo inoltre  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  i cammini della fattorizzazione di  $\eta_0$  corrispondenti ai segmenti  $[c_0, c_1], \dots, [c_{p-1}, c_p]$  rispettivamente. Dal momento che l'immagine di ogni vertice  $c_j \times 0$  è contenuta in al più due aperti, potevamo scegliere il cammino  $\nu_{j0}$  che congiunge  $H(c_j \times 0)$  e  $x_0$  in modo che fosse contenuto anche in  $U_{\alpha_i} \supseteq h_i([0, 1])$ . Così facendo, visto che  $h_i([0, 1]) = H([\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}] \times 0) \subset U_{\alpha_i}$ , i cammini  $\alpha_1, \dots, \alpha_p, h_i$  sono in  $U_{\alpha_i}$  e  $[\alpha_1 \cdots \alpha_p] = [h_i]$ . Per l'azione 1 quindi, applicando il ragionamento per ogni  $i = 1, \dots, k$ , si ha la tesi. Analogamente, anche la fattorizzazione associata a  $\eta_{mn}$  è equivalente a  $g_1 \cdots g_l$ . Per il paragrafo precedente, visto che le fattorizzazioni associate a due cammini consecutivi  $\eta_i, \eta_{i+1}$  sono equivalenti, anche le due fattorizzazioni iniziali sono equivalenti.

Chiamiamo  $\pi$  la proiezione da  $\star_\alpha \pi_1(U_\alpha)$  su  $\star_\alpha \pi_1(U_\alpha)/N$  e definiamo

$$\begin{aligned} \psi &: \star_\alpha \pi_1(U_\alpha)/N \longrightarrow \pi_1(X) \\ [\gamma \in \star_\alpha \pi_1(U_\alpha)] &\longmapsto \phi(\gamma) \end{aligned}$$

l'omomorfismo indotto da  $\phi$  sul quoziente. Abbiamo dimostrato che  $\psi$  è iniettivo dal momento che se  $\psi([f]) = \psi([g])$  allora  $\phi(f) = \phi(g)$  e quindi  $f, g$  sono fattorizzazioni di  $\phi(f)$  e sono equivalenti, ovvero corrispondono allo stesso elemento nel quoziente. Infine, dal momento che  $\phi = \psi \circ \pi$ ,  $\psi$  è anche suriettivo ed è l'isomorfismo cercato. ■

**Osservazione 2.3.2.** Nella pratica è utile esplicitare il quoziente su  $N$  come aggiunta di relazioni. Sia  $R = \{r_1, \dots, r_m\} \subseteq G \stackrel{\text{def}}{=} \langle a_1, \dots, a_n; - \rangle$  e poniamo  $N(R)$  il *sottogruppo normale generato da  $R$*  (l'intersezione di tutti i sottogruppi normali che lo contengono). Il quoziente  $G/N(R)$  è isomorfo a  $\langle a_1, \dots, a_n; r_1, \dots, r_m \rangle$ . Infatti se consideriamo la proiezione

$$p: G \rightarrow \langle a_1, \dots, a_n; r_1, \dots, r_m \rangle$$

sicuramente  $\ker p$  contiene  $R$ , e quindi  $N(R)$ . D'altra parte, se  $g \in \ker p$  allora  $g$  è equivalente tramite le relazioni  $r_1, \dots, r_m$  all'elemento neutro e può essere ottenuto in  $G$  da  $1_G$  inserendo parole della forma  $a_i r_j a_i^{-1}, a_i^{-1} r_j a_i$  e di conseguenza appartiene a  $N(R)$ . Per il primo teorema di omomorfismo quindi  $\langle a_1, \dots, a_n; r_1, \dots, r_m \rangle = p(G) \simeq G/\ker p \simeq G/N(R)$ .

**Corollario 2.3.3.** Se  $X = A \cup B$ ,  $A, B$  aperti contenenti  $x_0 \in X$ , con  $\pi_1(A \cap B, x_0)$  banale, allora  $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(A, x_0) \star \pi_1(B, x_0)$

**Esempio 2.3.4.** L'ipotesi sulla doppia intersezione connessa per archi è essenziale. Come controesempio si consideri una circonferenza scomposta in due segmenti aperti  $A, B \subseteq S^1$ . Dal momento che  $\pi_1(A, x_0)$  e  $\pi_1(B, x_0)$  sono banali, gli omomorfismi  $\phi_A$  e  $\phi_B$  indotti dalle rispettive mappe inclusione sono anch'esse banali, ma  $\phi \equiv 1_{\pi_1(S^1, x_0)}$  non può essere suriettiva dal momento che  $\pi_1(S^1, x_0) \simeq \mathbb{Z} \neq \{1\}$ .

**Esempio 2.3.5.** L'ipotesi sulla tripla intersezione connessa per archi è vacua nel caso particolare in cui il ricoprimento sia formato da 2 aperti, tuttavia nel caso generale non si può trascurare. Come controesempio consideriamo l'insieme  $X = \{p_1, p_2, p_3\}$  formato da tre punti distinti e la sospensione  $SX = X \times [-1, 1]/(X \times -1 \cup X \times 1)$ .  $SX$  è chiaramente omotopo a  $S^1 \vee S^1$ , il cui gruppo fondamentale è  $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$  per il teorema di Van Kampen. Tuttavia, considerando gli aperti  $U_1 \stackrel{\text{def}}{=} SX \setminus \{p_1 \times 0\}, U_2 = SX \setminus \{p_2 \times 0\}, U_3 = SX \setminus \{p_3 \times 0\}$ , gli insiemi hanno intersezioni a due a due connesse per archi, mentre  $U_1 \cap U_2 \cap U_3$  ha due componenti connesse. Usando questo ricoprimento, si avrebbe  $\pi_1(X) \simeq \star_i \pi_1(U_i) = \mathbb{Z} \star \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$ . La Proposizione 2.1.7 ci permette di concludere che la richiesta sulle triple intersezioni è essenziale.

### 2.3.1 Gruppo fondamentale dei CW complessi

L'obiettivo di questa sezione è di dimostrare che per ogni gruppo finitamente presentato esiste un  $CW$  complesso con gruppo fondamentale isomorfo al gruppo dato. Inoltre, proveremo che il gruppo fondamentale di un  $CW$  complesso connesso per archi e finito è univocamente determinato dal suo 2-scheletro.

**Teorema 2.3.6.** Sia  $G = \langle a_1, \dots, a_n; r_1, \dots, r_m \rangle$  un gruppo finitamente presentato. Allora esiste un  $CW$  complesso  $X$  di dimensione 2 con una singola 0-cella tale che  $\pi_1(X) \simeq G$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo il bouquet  $Y$  formato da  $n$  circonferenze con punto base la 0-cella  $s_0$ . Associamo ad ogni cammino  $\gamma_i$  lungo una delle  $n$  circonferenze  $S^1$  del bouquet il generatore  $x_i$  e attacchiamo  $m$  2-celle a  $Y$  tramite le mappe di incollamento definite dalle relazioni nel seguente modo. Se  $r_j = x_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \dots x_{j_k}^{\epsilon_{j_k}}$  definiamo la mappa di incollamento

$$\phi_j : S^1 \rightarrow Y$$

suddividendo  $S^1$  in  $k$  archi  $A_1, \dots, A_k \cong I$  e ponendo  $\phi_j|_{A_i} \equiv \gamma_{j_i}$  se  $\epsilon_{j_i} = 1$  o  $\phi_j|_{A_i} \equiv \bar{\gamma}_{j_i}$  se  $\epsilon_{j_i} = -1$ .

Verifichiamo per induzione sul numero di relazioni che lo spazio così ottenuto ha proprio il gruppo fondamentale desiderato. Sia  $X_{k-1}$  lo spazio ottenuto aggiungendo le prime  $k-1$  relazioni ( $X_0$  è semplicemente il bouquet) e aggiungiamo una singola 2-cella  $e^2$  a  $X_{k-1}$  rappresentante la relazione  $r_k = 1$ , ottenendo così  $X_k$ . Consideriamo un punto nel suo interno  $p \in e^2$ . Definiamo i due aperti  $A \stackrel{def}{=} e^2$  e  $Z \stackrel{def}{=} X_k \setminus \{p\}$ .  $Z$  è omotopicamente equivalente a  $X_{k-1}$ , dal momento che  $e^2$  meno un punto si può retrarre per deformazione sul bordo, e  $A$  è contraibile. Inoltre,  $A \cap Z$  è connesso per archi ed è omotopicamente equivalente a  $S^1$ . Possiamo quindi applicare il teorema di Van Kampen:  $\pi_1(X_k) \simeq \pi_1(A) \star \pi_1(X_{k-1})/N = \pi_1(X_{k-1})/N$ . Poste  $i_A : \pi_1(A \cap Z) \hookrightarrow \pi_1(A)$  e  $i_Z : \pi_1(A \cap Z) \hookrightarrow \pi_1(Z)$  le rispettive mappe inclusione, gli elementi di  $N$  sono normalmente generati dagli elementi  $i_Z(w)i_A(w)^{-1}$ ,  $w \in \pi_1(A \cap Z)$  ed essendo  $i_A(w)^{-1} \equiv 1$ , sono gli elementi normalmente generati da  $i_Z(w)$ . Sia  $[w] = 1 \in \mathbb{Z} \simeq \pi_1(Z \cap A)$ ,  $w$  compie un giro attorno a  $p$  e  $i_Z(w)$  è omotopo ad un cammino sul bordo di  $e^2$ . Per come abbiamo incollato  $e^2$ ,  $i_Z(w)$  è quindi omotopo al cammino  $\phi_k$  relativo alla relazione  $r_k$  tramite la costruzione del paragrafo precedente, e il quoziente  $\pi_1(X_{k-1}) / \langle N([\phi_k]) \rangle$  è equivalente ad aggiungere la relazione  $r_k = Id_{\pi_1(X_{k-1})}$  alla rappresentazione del gruppo fondamentale di  $X_{k-1}$ . Dal momento che

$$\pi_1(X_0) \simeq \langle a_1, \dots, a_n; - \rangle$$

per induzione possiamo concludere che

$$\pi_1(X_n = X) \simeq \langle a_1, \dots, a_n; r_1, \dots, r_m \rangle$$

■

**Teorema 2.3.7.** *Il gruppo fondamentale di un CW complesso finito e connesso per archi è determinato, a meno di isomorfismi, dal suo 2-scheletro.*

*Dimostrazione.* Vogliamo dimostrare che  $\pi_1(X) \simeq \pi_1(X^2)$ . Per farlo usiamo il ragionamento della dimostrazione del teorema precedente, dimostrando che aggiungere celle  $e_\alpha^k$ ,  $k > 2$  non cambia il gruppo fondamentale di  $X$ .

Sia  $Z$  lo spazio ottenuto da  $X$  incollando una tale cella e consideriamo il ricoprimento aperto formato da  $A \stackrel{def}{=} e^k$  e da  $B \stackrel{def}{=} Z \setminus \{p\}, p \in e^k$ . Dal momento che  $B^k \setminus \{p\}$  retrae per deformazione su  $\partial B^k$ , come nella dimostrazione precedente  $Z \setminus \{p\}$  è omotopicamente equivalente a  $X$  e i gruppi fondamentali coincidono. Inoltre  $A \cap B = e^k \setminus \{p\}$  è connesso per archi e contraibile, quindi  $\pi_1(A \cap B) = 0$  e per il corollario 2.3.3

$$\pi_1(Z) \simeq \pi_1(X) \star \pi_1(A) = \pi_1(X)$$

■



## Capitolo 3

# Gruppi di omotopia di ordine superiore

### 3.1 Costruzione e proprietà elementari

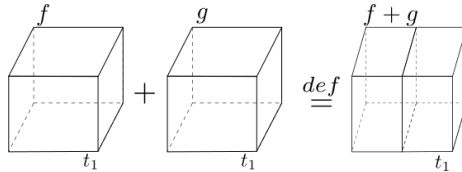
**Definizione 3.1.1.** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $x_0 \in X$ . Consideriamo il cubo  $n$ -dimensionale  $I^n$  e il rispettivo bordo  $\partial I^n$ . Definiamo *gruppo di omotopia di ordine  $n$* ,  $\pi_n(X, x_0)$  l'insieme delle classi di equivalenza delle funzioni  $f : I^n \rightarrow X$  tali che  $f(\partial I^n) = \{x_0\}$  rispetto a omotopie  $f_t$  che preservino il bordo  $f_t(\partial I^n) = \{x_0\}$ . Per convenzione, poniamo  $I^0 = \{0\}$ ,  $\partial I^0 = \emptyset$  in maniera tale che  $\pi_0(X, x_0)$  sia formato dalle componenti connesse per archi di  $X$ .

**Osservazione 3.1.2.** Dal momento che  $I^n/\partial I^n \cong S^n$  si possono considerare per definire i gruppi di omotopia le funzioni  $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ .

**Proposizione 3.1.3.** Sia  $n \geq 2$ ,  $f, g \in \pi_n(X, x_0)$ . Definita l'operazione

$$(f + g)(t_1, \dots, t_n) \stackrel{def}{=} \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

$(\pi_n(X, x_0), +)$  è un gruppo abeliano.



*Dimostrazione.* Si possono costruire delle omotopie di  $I^n$  compatibili con la struttura di  $(\pi_n(X, x_0), +)$  per verificare i tre assiomi di gruppo. Un'omotopia

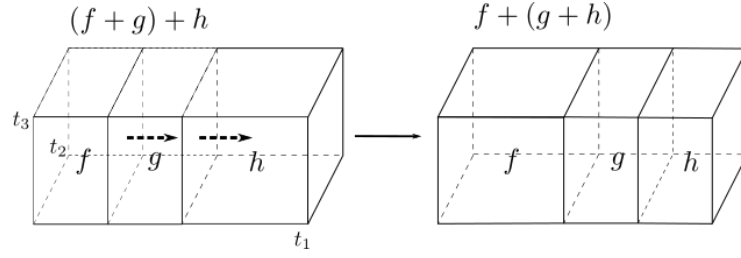


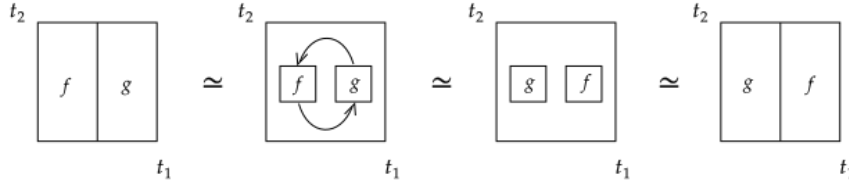
Figura 3.1:  $[(f + g) + h] = [f + (g + h)]$  in  $\pi_n(X, x_0)$

da  $f + x_0$  in  $f$  è ad esempio

$$h_s : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$$

$$(t_1, \dots, t_n) \longmapsto \begin{cases} f((2-s)t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } t_1 \in [0, \frac{1}{2-s}] \\ x_0 & \text{se } t_1 \in [\frac{1}{2-s}, 1] \end{cases}$$

che è continua per il pasting lemma e verifica  $h_0 \equiv f + x_0$  e  $h_1 \equiv f$ . Una rappresentazione dell'omotopia che dimostra l'associatività è proposta in Figura 3.1. Per dimostrare che l'operazione è abeliana, immaginiamo prima di tutto di restringere i domini di  $f, g$  a due sottocubi disgiunti di  $I^n$  sufficientemente piccoli, ponendo la funzione costante  $x_0$  all'esterno dei sottocubi, quindi di ruotarli di  $180^\circ$ , e di gonfiarli di nuovo fino a riottenere  $I^n$ , come illustrato in figura.



■

Come per il caso  $n = 1$ , se  $X$  è connesso per archi, allora il cambio del punto base produce gruppi isomorfi:

**Proposizione 3.1.4.** *Sia  $X$  connesso per archi,  $n \in \mathbb{N}$ , allora per ogni  $x_0, x_1 \in X$ ,  $\pi_n(X, x_0) \simeq \pi_n(X, x_1)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\gamma : I \rightarrow X$  un cammino da  $x_1$  a  $x_0$ . Ad ogni  $[f] \in \pi_n(X, x_1)$  possiamo associare una mappa  $\gamma f : I^n \rightarrow X$  tale che  $\gamma f(\partial I^n) = \{x_0\}$  restringendo il dominio di  $f$  ad un cubo  $n$ -dimensionale più piccolo e aggiungendo radialmente, tra il primo e il secondo cubo, il cammino  $\gamma$  (Figura 3.2). Con la stessa costruzione, un'omotopia di  $\gamma$  che fissi  $\partial I$  o di  $f$  che fissi  $\partial I^n$  induce un'omotopia su  $\gamma f$ . Inoltre, se  $[f], [g] \in \pi_n(X, x_1)$  e  $\gamma, \eta$  sono due cammini tali che  $\eta(0) = \gamma(1)$ , valgono le seguenti proprietà

1.  $(\gamma\eta)f \simeq \gamma(\eta f)$

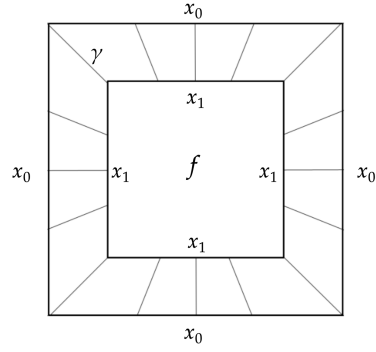


Figura 3.2

2.  $x_1 f \simeq f$ , dove  $x_1$  indica il cammino costante in  $x_1$

3.  $\gamma(f + g) \simeq \gamma f + \gamma g$

le prime due proprietà seguono immediatamente dalla costruzione. Per dimostrare la terza consideriamo i cammini  $\gamma(g + x_1)$  e  $\gamma(x_1 + f)$ . Si vede che  $\gamma(g + x_1) + \gamma(x_1 + f) \simeq \gamma(g + f)$  e  $\gamma(g + x_1) \simeq \gamma g$  tramite le omotopie rappresentate in Figura 3.3 e 3.4 rispettivamente, da cui segue la tesi.

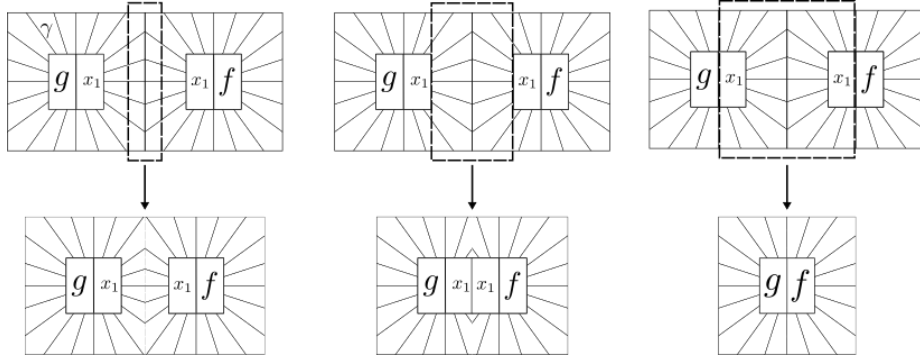


Figura 3.3:  $\gamma(g + x_1) + \gamma(x_1 + f) \simeq \gamma(g + f)$

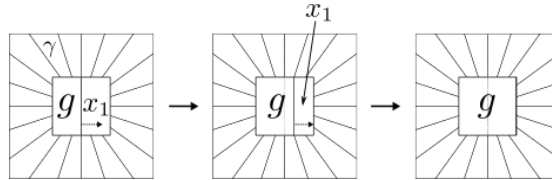


Figura 3.4:  $\gamma(g + x_1) \simeq \gamma g$

Con questa nuova notazione, la mappa

$$\begin{array}{ccc} \alpha_\gamma & : & \pi_n(X, x_1) \longrightarrow \pi_n(X, x_0) \\ & & f \longmapsto \gamma f \end{array}$$

è un omomorfismo di gruppi per la proprietà 3 e per le proprietà 1 e 2 si ha che  $\alpha_{\bar{\gamma}}$  è l'omomorfismo inverso, ovvero  $\alpha_\gamma$  è l'isomorfismo di gruppi cercato. ■

Anche in questo caso, come per il gruppo fondamentale, una funzione continua  $\phi : Y \rightarrow X$  tale che  $\phi(x_0) = y_0$  induce delle mappe

$$\phi_*^n : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$$

sui gruppi di omotopia, definite da  $\phi_*^n([\eta]) \stackrel{\text{def}}{=} [\phi \circ \eta]$ .

**Proposizione 3.1.5.** *Le mappe  $\phi_*^n$  sono omomorfismi di gruppo.*

*Dimostrazione.* La tesi segue dalla Proposizione 3.1.16 e dall'Osservazione 3.1.14, discusse più avanti. ■

**Proposizione 3.1.6.** *Una mappa di rivestimento  $p : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  induce degli isomorfismi*

$$p_* : \pi_n(Y, y_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$$

per ogni  $n \geq 2$ .

*Dimostrazione.* Per  $n \geq 2$ ,  $S^n$  è semplicemente connesso e  $\pi_1(S^n, s_0) = 0$ , di conseguenza ogni mappa  $f : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$  può essere sollevata a  $\tilde{f} : (S^n, s_0) \rightarrow (Y, y_0)$  per la Proposizione 1.3.4, dal momento che  $f_* : \pi_1(S^n, s_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  è l'omomorfismo banale e  $S^n$  è connesso per archi e localmente connesso per archi.

$$\begin{array}{ccc} & & (Y, y_0) \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ (S^n, s_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \end{array}$$

Se  $f \in \pi_n(X, x_0)$ , allora  $\tilde{f} \in \pi_n(Y, y_0)$  e  $p \circ \tilde{f} = f$ , da cui la suriettività di  $p_*$ . Ora dimostriamo che il nucleo di  $p_*$  è banale, da cui seguirà l'iniettività. Un elemento del nucleo di  $p_*$  è la classe di una mappa  $\tilde{f}_0 : (S^n, s_0) \rightarrow (Y, y_0)$  tale che  $f \stackrel{\text{def}}{=} p \circ \tilde{f}_0 : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$  ammetta un'omotopia  $f_t : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$  con  $f_1$  mappa costante in  $x_0$ . Per la Proposizione 1.3.3 l'omotopia ammette un unico sollevamento  $\tilde{F}$  che coincida con  $\tilde{f}_0$ .

$$\begin{array}{ccc} S^n \times 0 & \xrightarrow{\tilde{f}_0} & Y \\ \downarrow & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\ S^n \times I & \xrightarrow{F} & X \end{array}$$

D'altra parte il sollevamento della mappa costante  $f_1$  deve essere la mappa costante  $y_0$ , da cui  $[\tilde{f}_0] = [y_0]$ , che è proprio l'elemento neutro di  $\pi_1(Y, y_0)$ . ■

**Corollario 3.1.7.** *Se  $X$  ammette un rivestimento contraibile, allora  $\pi_n(X, x_0) = 0, \forall n \geq 2$ .*

**Corollario 3.1.8.**  $\pi_n(S^1) = 0, \forall n \geq 2$ .

*Dimostrazione.* Segue dal corollario precedente e dalla Proposizione 1.3.5. ■

### Sucessioni esatte

**Definizione 3.1.9.** Una *sucessione esatta* in  $i$  è una successione di gruppi e omomorfismi

$$\dots \rightarrow G_{i-1} \xrightarrow{\phi_{i-1}} G_i \xrightarrow{\phi_i} G_{i+1} \rightarrow \dots$$

tale che  $\phi_{i-1}(G_{i-1}) = \ker \phi_i$ . Se la sequenza è esatta per ogni indice si dirà *esatta*.

Una definizione analoga si può dare anche se i  $G_j$  non hanno struttura di gruppo, considerando  $\phi_j^{-1}(0)$  piuttosto che il nucleo. Diremo in questo caso che la successione è esatta da un punto di vista insiemistico, o semplicemente che è esatta, quando questo non crei ambiguità.

**Esempio 3.1.10.** Se  $H$  è un sottogruppo normale di  $G$  la sequenza

$$0 \rightarrow H \hookrightarrow G \rightarrow G/H \rightarrow 0$$

è esatta.

**Proposizione 3.1.11** (Proprietà). 1. La sequenza  $0 \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$  è esatta se e solo se  $f$  è iniettiva

2. La sequenza  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} 0$  è esatta se e solo se  $f$  è suriettiva

3. La sequenza  $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \rightarrow 0$  è esatta se e solo se  $f$  è un isomorfismo

*Dimostrazione.* 1. Deve valere  $\ker f = 0$  perché necessariamente  $g(Y) = 0$ , e quindi  $f$  è iniettiva

2. Deve valere  $\text{Im } f = Y$  perché  $g$  è l'omomorfismo banale e  $g^{-1}(0) = Y$

3. Segue dai due punti precedenti

■

**Gruppi di omotopia relativa** Per distinguere i due casi, chiameremo i gruppi di omotopia precedentemente introdotti *assoluti*.

**Definizione 3.1.12.** sia  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ . Sia  $X$  uno spazio topologico e  $x_0 \in A \subseteq X$ , identificata l' $n$ -esima faccia di  $I^n$  con  $I^{n-1} = \{t = (t_1, \dots, t_n) \in I^n \text{ t.c. } t_n = 0\}$  e posto  $J^{n-1} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\partial I^n \setminus I^{n-1}}$ , si definisce *gruppo di omotopia relativo* della coppia  $(X, A)$  con punto base  $x_0$ , e si indica con  $\pi_n(X, A, x_0)$ , l'insieme delle classi di omotopia delle funzioni del tipo  $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$  tramite omotopie dello stesso tipo.

**Proposizione 3.1.13.**  $\pi_n(X, A, x_0)$  con l'operazione definita per i gruppi di omotopia è un gruppo per  $n \geq 2$  ed è un gruppo abeliano per  $n \geq 3$ .

*Dimostrazione.*  $J^0$  è formato da un singolo punto 0, e  $I^0 = 1$ , di conseguenza il prodotto tra due cammini  $f, g : (I, \{0, 1\}, 0) \rightarrow (X, A, x_0)$  non è sempre definito perché non necessariamente  $f(1) = x_0 = g(0)$ . Quando  $n \geq 2$  invece  $f, g$  coincidono sempre a  $x_0$  sulle facce  $\{(t_1, \dots, t_n) \in I^n \text{ t.c. } t_1 = 1\}, \{(t_1, \dots, t_n) \in I^n \text{ t.c. } t_1 = 0\} \subseteq J^{n-1}$  e quindi l'operazione, che *incolla* le due funzioni su tali facce, è ben definita. La richiesta che  $n \geq 3$  è necessaria per poter riproporre la costruzione della 3.1.3, con l'accortezza di mantenere l'omotopia compatibile con la struttura del gruppo relativo, come illustrato in Figura 3.5. ■

**Osservazione 3.1.14.** I gruppi di omotopia assoluti sono un caso particolare dei gruppi di omotopia relativi, dal momento che  $\pi_n(X, x_0) = \pi_n(X, x_0, x_0)$

Come nel caso assoluto, dal momento che identificando  $J^{n-1}$  con un punto si passa da  $(I^n, \partial I^n, J^{n-1})$  a  $(B^n, S^{n-1}, s_0)$ ,  $\pi_n(X, A, x_0)$  si può interpretare come l'insieme delle classi di omotopia delle funzioni del tipo  $(B^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  con omotopie dello stesso tipo. Con questa interpretazione si ha il seguente:

**Lemma 3.1.15** (Criterio di compressione). *Sia  $n \geq 2$ .  $f : (B^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  è nella classe di  $[0] \in \pi_n(X, A, x_0)$  se e solo se  $f$  è omotopa rel  $S^{n-1}$  ad una mappa con immagine contenuta in  $A$ .*

*Dimostrazione.* Se  $f$  è omotopa rel  $S^{n-1}$  ad una mappa  $g : (B^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (A, A, x_0)$ , dal momento che l'omotopia relativa ad  $S^{n-1}$  è compatibile con la struttura di  $\pi_n(X, A, x_0)$ , si ha che  $[f] = [g]$ . Inoltre, considerata una retrazione per deformazione da  $B^n$  in  $s_0$ ,  $[g] = 0$  tramite l'omotopia che si ottiene componendo  $g$  con la retrazione (tale omotopia è ancora compatibile perché abbiamo supposto  $g(B^n) \subseteq A$ ). Viceversa, se  $[f] = [0]$  tramite  $F : (B^n \times I, S^{n-1} \times I, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ , allora considerata la famiglia di insiemi

$$D_t \stackrel{\text{def}}{=} B^n \times \{t\} \cup S^{n-1} \times [0, t]$$

omeomorfi a  $B^n$  con bordo  $S^{n-1} \times \{0\}$  (Figura 3.6), si ha che

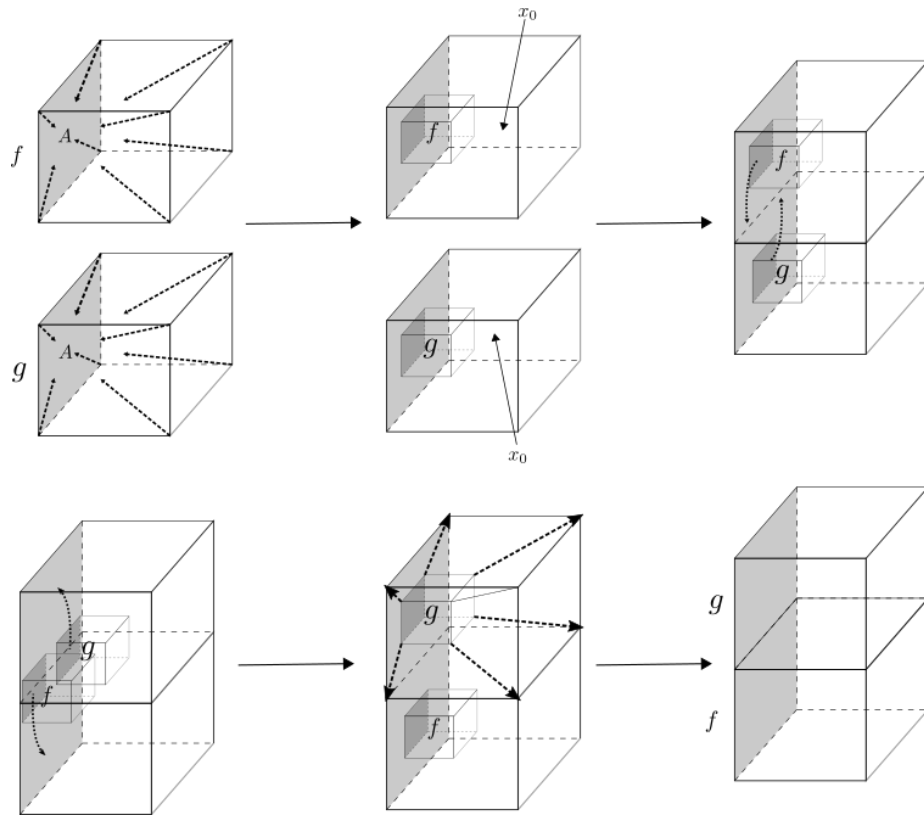


Figura 3.5:  $[f + g] = [g + f]$  in  $\pi_n(X, A, x_0)$

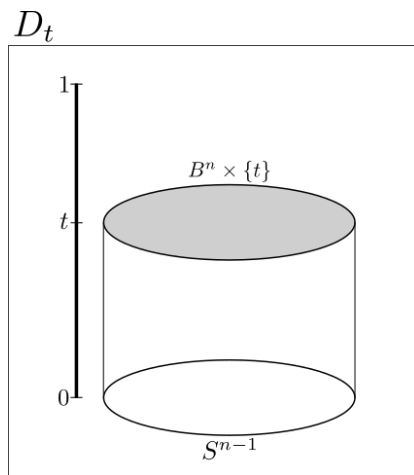


Figura 3.6

$$\tilde{f}_t \stackrel{\text{def}}{=} F|_{D_t}$$

è un'omotopia da  $f$  in  $F|_{D_1}$ . Inoltre  $F|_{D_1}(D_1 \cong B^n) \subseteq A$  e  $\tilde{f}_t(S^{n-1}) \equiv F|_{S^{n-1} \times \{0\}}$ , quindi questa è l'omotopia rel  $S^{n-1}$  cercata. ■

**Proposizione 3.1.16.** *Consideriamo le coppie  $(X, A), x_0 \in A \subseteq X, (Y, B), y_0 \in B \subseteq Y$ . Una mappa  $\phi : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  induce degli omomorfismi*

$$\begin{aligned} \phi_*^n : \pi_n(X, A, x_0) &\longrightarrow \pi_n(Y, B, y_0) \\ [\eta] &\longmapsto [\phi \circ \eta] \end{aligned}$$

tra i gruppi di omotopia relativa per  $n \geq 2$ . Inoltre, gli omomorfismi indotti godono delle proprietà funtoriali

1.  $(\phi \circ \psi)_* = \phi_* \circ \psi_*$
2.  $(Id_X)_* = Id_{\pi_n(X, A, x_0)}$

*Dimostrazione.* Fissiamo  $n \geq 2$  e poniamo  $\phi_* \stackrel{\text{def}}{=} \phi_*^n$ .  $\phi_*$  è ben definita, infatti se  $[\gamma] = [\eta] \in \pi_n(X, A, x_0)$  allora esiste un'omotopia  $h_t : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$  tale che  $h_0 = \gamma, h_1 = \eta$  e chiaramente  $\phi \circ \gamma \simeq_{\phi \circ H} \phi \circ \eta$ . D'altra parte  $\phi \circ h_t$  è del tipo  $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (Y, B, y_0)$

$$(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \xrightarrow{h_t} (X, A, x_0) \xrightarrow{\phi} (Y, B, y_0)$$

e possiamo concludere che  $\phi_*([\gamma]) = \phi_*([\eta])$ . Ora se  $[\eta], [\gamma] \in \pi_n(X, A, x_0)$ ,  $\phi_*([\eta] + [\gamma]) = \phi_*([\eta + \gamma]) = [\phi \circ (\eta + \gamma)] = [\phi \circ \eta + \phi \circ \gamma] = \phi_*(\eta) + \phi_*(\gamma)$  dal momento che  $\phi \circ (\eta + \gamma) = \phi \circ \eta + \phi \circ \gamma$  dalla definizione di somma.

La prima proprietà funtoriale segue dall'associatività della composizione di funzioni, e la seconda è immediata dalla definizione. ■

**Lemma 3.1.17.** *La mappa  $\partial_* : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{n-1}(A, x_0)$  indotta da  $\partial f = f|_{I^{n-1}}$  è un omomorfismo per  $n \geq 2$  (dove  $I^{n-1}$  è la faccia di  $I^n$  non contenuta in  $J^{n-1}$ ).*

*Dimostrazione.* Definiamo  $\partial_*([f]) \stackrel{\text{def}}{=} [\partial f]$ . Notiamo che

$$f|_{I^{n-1}} : (I^{n-1}, \partial I^{n-1} \subset J^{n-1}) \rightarrow (A, x_0)$$

definisce una classe in  $\pi_{n-1}(A, x_0)$ . Inoltre,  $\partial$  applicata ad una omotopia  $h_t : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$  induce un'omotopia

$$\partial h_t : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (A, x_0)$$

compatibile con la struttura di  $\pi_{n-1}(A, x_0)$ . Di conseguenza,  $[\partial f]$  non dipende dalla scelta del rappresentante  $f$  e  $\partial_*$  è ben definita. Inoltre, dal momento che

$$\partial_*([f + g]) = [(f + g)|_{I^{n-1}}] = [f|_{I^{n-1}}] + [g|_{I^{n-1}}] = \partial_*([f]) + \partial_*([g])$$

si ha la tesi. ■



**Proposizione 3.1.18.** *Sia  $(X, A)$  una coppia e  $x_0 \in A \subseteq X$ . Allora la successione*

$$\dots \rightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(A, x_0) \rightarrow \dots$$

*è esatta. (Con  $i : (A, x_0) \rightarrow (X, x_0)$  e  $j : (X, x_0, x_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  le rispettive inclusioni e  $\partial_*$  la funzione del lemma precedente).*

*Dimostrazione.*

$\pi_n(X, x_0) :$  La mappa  $j_* \circ i_*$  è costantemente nulla per il Lemma 3.1.15, da cui  $\text{Im } i_* \subseteq \ker j_*$ . Se  $[f] \in \ker j_*$ , allora  $f : (B^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  e per il criterio di compressione è omotopa ad una funzione  $\tilde{f}$  tale che  $\tilde{f}(X) \subseteq A$ , quindi  $[f] = [\tilde{f}] \in \text{Im } i_*$ , da cui l'esattezza della successione in  $\pi_n(X, x_0)$ .

$\pi_n(X, A, x_0) :$   $\partial_* \circ j_*$  è costantemente nulla, dal momento che se  $[f] \in \pi_n(X, x_0) = \pi_n(X, x_0, x_0)$  allora  $f(\partial I^n) = \{x_0\}$  e di conseguenza  $f|_{I^{n-1} \subseteq \partial I^n} \equiv x_0 \in [0]$ . Per dimostrare che  $\ker \partial_* \subseteq \text{Im } j_*$ , notiamo dapprima che la coppia  $(I^n, \partial I^n)$  gode della proprietà di estensione di omotopie per quanto visto nel Corollario 2.2.20. Se  $\partial_*([f]) = 0 \in \pi_{n-1}(A, x_0)$ , esiste un'omotopia

$$h_t : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (A, x_0)$$

da  $f|_{I^{n-1}}$  al cammino costante in  $x_0$ . Possiamo estendere  $h_t$  a  $\partial I^n$  ponendo

$$\begin{aligned} g_t &: (\partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (A, x_0) \\ x &\longmapsto \begin{cases} h_t & \text{se } x \in I^{n-1} \\ x_0 & \text{se } x \in J^{n-1} \end{cases} \end{aligned}$$

Chiaramente  $g_0 \equiv f|_{\partial I^n}$ .  $g_t$  si può estendere ad un'omotopia

$$\tilde{g}_t : I^n \rightarrow X$$

su tutto  $I^n$  con  $\tilde{g}_0 \equiv f$  e per come è definita  $\tilde{g}_1(\partial I^n) \equiv x_0$ , quindi  $[\tilde{g}_1] \in \pi_n(X, x_0)$ . D'altra

$$j_*([\tilde{g}_1]) = [\tilde{g}_0 = f]$$

dove l'uguaglianza tra le classi segue dal fatto che  $\tilde{g}_t$  è compatibile con la struttura di  $\pi_n(X, A, x_0)$ , come volevamo.

$\pi_n(A, x_0) :$   $i_* \circ \partial_*$  è l'applicazione costantemente nulla perché se  $f : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \rightarrow (X, A, x_0)$ , la sua restrizione a  $I^n$  è omotopa al cammino costante in  $x_0$  tramite  $f$  stessa, dal momento che si può interpretare come  $f : I^n \times I \rightarrow X$  e per ipotesi  $f(I^n, 1) \subseteq f(J^n) = \{x_0\}$ . Se  $[f] \in \ker i_*$  allora  $[f] = [0]$  tramite un'omotopia  $F : I^n \times I \rightarrow A$  che interpretata come  $F : I^{n+1} \rightarrow A$  definisce una classe di  $\pi_{n+1}(X, A, x_0)$ . Per costruzione  $\partial_*([F]) = [F|_{I^n \times \{0\}}] = [f] \implies f \in \text{Im } \partial_*$ .

Sulla coda

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial_*} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0)$$

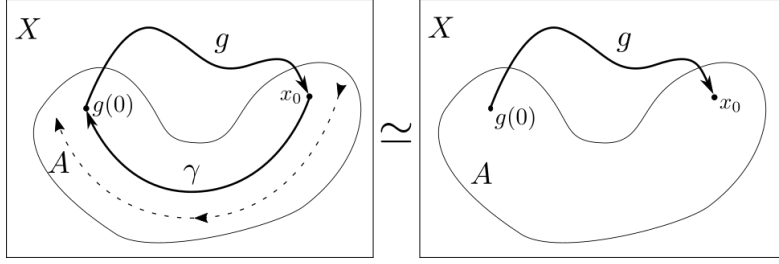


Figura 3.7

l'esattezza è da intendersi dal punto di vista insiemistico (con  $0 \stackrel{def}{=} [x_0] \in \pi_1(X, A, x_0)$  e  $\pi_0(A, x_0)$ ), dal momento che non abbiamo dotato  $\pi_1(X, A, x_0)$  e  $\pi_0(A, x_0)$  di struttura di gruppo. Chiaramente se  $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ ,  $\partial_* \circ i_*([f]) = [f(0) = x_0] \in \pi_0(A, x_0)$ , inoltre se  $[g] \in \pi_1(X, A, x_0)$  e  $\partial_*([g]) = [g(0)] = [x_0] \in \pi_0(A, x_0)$ ,  $g(0)$  si trova nella stessa componente connessa per archi di  $x_0$  in  $A$ , quindi esiste un cammino  $\gamma : I \rightarrow A$  tale che  $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = g(0)$ . Il cammino  $\gamma \cdot g$  è chiuso e rappresenta una classe in  $\pi_1(X, x_0)$ . In  $\pi_1(X, A, x_0)$ ,  $\gamma \cdot g$  è omotopo a  $g$ , dal momento che possiamo spostare l'estremo  $(\gamma \cdot g)(0)$  lungo  $\gamma$ , fino a  $g(0)$  (Figura 3.7).

In  $\pi_0(A, x_0)$ , se  $[g] \in \pi_1(X, A, x_0)$ ,  $\partial_*([g]) = g(0) \in A$  e  $g(0)$  è nella stessa componente connessa di  $x_0$  in  $X$ , quindi  $j_*([g(0)]) = 0$ , viceversa se  $[a_0] \in \pi_0(A, x_0)$  è tale che  $j_*([a_0]) = 0 \in \pi_0(X, x_0)$ , allora esiste un cammino  $\gamma : I \rightarrow X$  tale che  $\gamma(0) = a_0, \gamma(1) = x_0$  e  $\partial_*([\gamma]) = [a_0]$ , che rappresenta un elemento di  $\pi_1(X, A, x_0)$ . ■

**Proposizione 3.1.19.** *Se esiste un cammino  $\gamma : I \rightarrow A$  con  $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1 \in A$ , allora  $\pi_n(X, A, x_0) \simeq \pi_n(X, A, x_1)$ . Di conseguenza, se  $A$  è connesso per archi  $\pi_n(X, A, x_0)$  non dipende dalla scelta di  $x_0 \in A$ .*

*Dimostrazione.* Cominciamo con il definire  $\gamma f$  come in Figura 3.8, inserendo lungo i segmenti radiali il cammino  $\gamma$ , e

$$\begin{aligned} \beta_\gamma : \pi_n(X, A, x_0) &\longrightarrow \pi_n(X, A, x_1) \\ [f] &\longmapsto [\gamma f] \end{aligned}$$

La dimostrazione ricalca quella del caso assoluto, tranne per la definizione di  $\gamma f, f \in \pi_n(X, A, x_0)$  che deve tenere conto del fatto che  $f(\partial I^n \setminus J^{n-1})$  non è necessariamente contenuto in  $\{x_0\}$  (Figura 3.8). Anche in questo caso valgono le tre proprietà

1.  $\gamma(f + g) \simeq \gamma f + \gamma g$
2.  $(\gamma \eta)f \simeq \gamma(\eta f)$
3.  $x_0 f \simeq f$

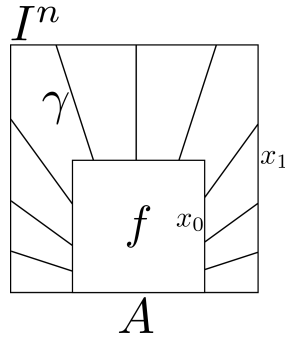


Figura 3.8:  $\gamma f$  nel caso relativo

da cui segue che  $\beta_\gamma$  è un isomorfismo di gruppi. ■

Diciamo che due coppie  $(X, A), (Y, B)$  di spazi sono omotopicamente equivalenti se esistono mappe  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B), g : (Y, B) \rightarrow (X, A)$  tali che  $f \circ g \simeq Id_Y$  e  $g \circ f \simeq Id_X$  tramite omotopie dello stesso tipo. È noto che due spazi equivalenti per omotopie hanno gruppi fondamentali isomorfi. Questo continua a valere per i gruppi di omotopia relativi di ordine superiore, e quindi anche per quelli assoluti:

**Proposizione 3.1.20.** *Mappe  $f, g : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  omotope tramite omotopie dello stesso tipo inducono lo stesso omomorfismo sui gruppi di omotopia relativi.*

*Dimostrazione.* Sia  $[\gamma] \in \pi_n(X, A, x_0)$ . Dimostriamo che  $f \circ \gamma$  e  $g \circ \gamma$  sono omotope compatibilmente con la struttura di  $\pi_n(Y, B, y_0)$ . Sia  $H : X \times I \rightarrow Y, H(A \times I) \subseteq B, H(x_0 \times I) = \{y_0\}$  un'omotopia da  $f$  a  $g$ . La famiglia di funzioni

$$\begin{aligned} \tilde{h}_t & : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (Y, B, y_0) \\ x & \longmapsto h_t(\gamma(x)) \end{aligned}$$

è l'omotopia cercata e per come abbiamo definito l'omomorfismo indotto si ha la tesi. ■

**Corollario 3.1.21.** *Due coppie di spazi omotopicamente equivalenti hanno gruppi di omotopia isomorfi.*

*Dimostrazione.* Segue dalle proprietà funtoriali degli omomorfismi indotti e dalla proposizione precedente. ■

## 3.2 Teorema di Whitehead

**Definizione 3.2.1.** Siano  $X, Y$  CW complessi. Una mappa  $f : X \rightarrow Y$  è detta *cellulare* se  $f(X^k) \subseteq Y^k, \forall k \in \mathbb{N}$ , ovvero se manda  $k$  celle in celle di dimensioni uguale o inferiore.

**Teorema 3.2.2** (di approssimazione cellulare). *Siano  $X, Y$  CW complessi. Ogni mappa  $f : X \rightarrow Y$  è omotopa ad una mappa cellulare. Inoltre, se  $f$  è già cellulare su un sottocomplesso  $A \subseteq X$ , allora l'omotopia può essere presa costante su  $A$ .*

La dimostrazione di questo risultato può essere trovata in [6].

### 3.2.1 n-connessione

**Definizione 3.2.3.** Sia  $x_0 \in X$ .  $X$  è detto  $n$ -connesso se  $\pi_i(X, x_0) = 0, \forall 0 \leq i \leq n$

**Osservazione 3.2.4.** Uno spazio 0-connesso è connesso per archi in virtù della Definizione 3.1.1, mentre uno spazio 1-connesso è semplicemente connesso per definizione. Inoltre, se  $n > 0$ , per la Proposizione 3.1 uno spazio è  $n$ -connesso o meno indipendentemente dalla scelta del punto base.

**Definizione 3.2.5.** Sia  $n \in \mathbb{N}$ . Una coppia  $(X, A), A \subseteq X$  si dice  $n$ -connessa se vale una delle seguenti proprietà per  $i \geq 0$ :

1. Ogni funzione del tipo  $(B^i, \partial B^i) \rightarrow (X, A)$  è omotopa rel  $A$  ad una mappa da  $B^i$  in  $A$
2. Ogni funzione del tipo  $(B^i, \partial B^i) \rightarrow (X, A)$  è omotopa tramite mappe dello stesso tipo ad una funzione da  $B^i$  in  $A$
3. Ogni funzione del tipo  $(B^i, \partial B^i) \rightarrow (X, A)$  è omotopa tramite mappe dello stesso tipo ad una funzione costante da  $B^i$  in  $A$

e se per  $n \geq i > 0$  vale:

$$4 \quad \pi_i(X, A, x_0) = 0, \forall x_0 \in A$$

**Osservazione 3.2.6.** Le quattro condizioni della definizione precedente sono equivalenti se  $i > 0$ , per applicazione del criterio di compressione.

**Osservazione 3.2.7.** Dall'Osservazione 3.1.14 segue che  $X$  è  $n$ -connesso se e solo se  $(X, \{x_0\})$  è  $n$ -connesso per qualche  $x_0 \in X$  (e quindi per tutti gli  $x_0 \in X$  se  $n \geq 1$  per l'osservazione precedente).

**Lemma 3.2.8** (Lemma di compressione). *Sia  $(X, A)$  una CW coppia e  $(Y, B)$  una qualsiasi coppia con  $\emptyset \neq B \subseteq Y$ . Se per ogni  $n$  tale che  $X \setminus A$  ha una cella di dimensione  $n$  vale  $\pi_n(Y, B, y_0) = 0$  per ogni  $y_0 \in B$ , allora ogni mappa  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  è omotopa rel  $A$  ad una mappa da  $X$  in  $B$ . (Per  $n = 0$ , la condizione  $\pi_n(Y, B, y_0) = 0$  va sostituita con la condizione che  $(Y, B)$  sia 0-connesso.)*

*Dimostrazione.* Sia  $k \geq 0$  tale che valga l'ipotesi sui gruppi di omotopia relativa. Dimostriamo il risultato per induzione. Se  $k = 0$ , per definizione di 0-connessione ogni mappa  $\gamma : \{s_0\} \xrightarrow{def} B^0 \rightarrow Y$  è omotopa ad una funzione  $\tilde{\gamma} : \{s_0\} \rightarrow b_0 \in B$ . Se  $e^0$  è una 0-cella di  $X \setminus A$  e  $\phi$  è la rispettiva mappa caratteristica,  $f \circ \phi : B^0 \rightarrow Y$  è omotopa ad una mappa  $(f \circ \phi)_1 : B^0 \rightarrow B$  che definisce anche un'omotopia su  $X^0 \cup A$ , costante su  $A$  e uguale a  $(f \circ \phi)_t(\phi^{-1}(e_0))$  sulle singole 0-celle di  $X \setminus A$ . Essendo  $X^0 \cup A$  un sottocomplesso, è possibile estendere tale omotopia ad un'omotopia  $f_t$  definita su tutto  $X$ , che per costruzione è rel  $A$  e tale che  $f_1(X^0 \cup A) \subset B$ . Sia ora  $k > 0$  e supponiamo che  $f$ , eventualmente tramite omotopia, mandi lo scheletro  $X^{k-1}$  di  $X$  in  $B$ . Ogni  $k$ -cella  $e^k$  di  $X \setminus A$  ammette una mappa caratteristica  $\phi : (B^k, \partial B^k) \rightarrow (X^k, X^{k-1})$ . La mappa  $f \circ \phi$  è allora del tipo  $(B^k, \partial B^k) \rightarrow (Y, B)$  ed in virtù dell'ipotesi sui gruppi di omotopia relativa banali e del Lemma 3.1.15  $f \circ \phi$  è omotopa rel  $\partial B^k$  ad una mappa  $B^k \rightarrow B$ , tramite una funzione  $F$ .  $F$  induce un'omotopia anche su  $X^{k-1} \cup B^k$  inteso come spazio quoziente di  $X^{k-1} \sqcup B^k$  tramite la relazione  $x \sim \phi(x), \forall x \in \partial B^k$  (che definisce la struttura di  $CW$  complesso). Inoltre dal momento che  $\phi(Int B^k) = Int e^k$  l'omotopia è rel  $X^{k-1}$ . In analogia al ragionamento fatto nella dimostrazione della Proposizione 2.2.19, applicando contemporaneamente le omotopie trovate sulle singole  $k$ -celle e l'omotopia costante su  $A$  otteniamo un'omotopia da  $f|_{X^k \cup A}$  ad una mappa con immagine in  $B$ . Per il Corollario 2.2.20 questa si può estendere ad un'omotopia definita su tutto  $X$ , sempre rel  $A$ , che per costruzione manda  $f|_{X^k}$  in  $B$  completando il passo induttivo. Se  $X \setminus A$  è di dimensione finita, l'applicazione dell'omotopia del passo induttivo un numero finito di volte restituisce la mappa cercata, altrimenti una costruzione analoga a quella effettuata sempre nella dimostrazione della Proposizione 2.2.19 permette di concludere. ■

**Osservazione 3.2.9.** Se  $f : X \rightarrow Y$  è una mappa cellulare,  $(M_f, X)$  è una  $CW$  coppia.

**Teorema 3.2.10** (di Whitehead). *Se  $X, Y$  sono  $CW$  complessi connessi per archi e  $f : X \rightarrow Y$  è una mappa che induce isomorfismi  $f_*^n : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , allora  $f$  è un'equivalenza di omotopie. Se in particolare  $(Y, X)$  è una  $CW$  coppia e  $f$  è la mappa inclusione, allora  $X$  è un retratto per deformazione di  $Y$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo il cilindro di mappatura  $M_f$  definito nella 2.2.14.  $M_f$  contiene una copia omeomorfa a  $X$  e  $f$  si può vedere come la composizione dell'inclusione  $X \hookrightarrow M_f$  e la retrazione per deformazione da  $M_f$  in  $Y$  vista nell'Osservazione 2.2.16. Per la Proposizione 2.2.23 per dimostrare che  $f$  è una equivalenza di omotopie basterà provare che  $X$  è un retratto per deformazione di  $M_f$ . A tal proposito notiamo che per il teorema di approssimazione cellulare  $f$  è omotopa ad una funzione cellulare  $\tilde{f}$ , ed in tal caso  $(M_{\tilde{f}}, X)$  è una  $CW$

coppia. Per la Proposizione 2.2.21 possiamo assumere senza perdita di generalità che  $f$  sia già cellulare. Dimostrato il caso particolare, il caso generale seguirà considerando l'inclusione  $X \hookrightarrow M_f$ , perchè, chiamata  $r$  la retrazione da  $M_f$  a  $Y$ , il diagramma commuta e  $i_*$  risulta un isomorfismo tra tutti i gruppi di omotopia.

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X) & \xrightarrow[\simeq]{f_*} & \pi_n(Y) \\ \downarrow i_* & & \uparrow r_* \\ \pi_n(M_f) & \xlongequal{\quad} & \pi_n(M_f) \end{array}$$

Dimostriamo ora che se  $(Y, X)$  è una  $CW$  coppia e  $f : X \rightarrow Y$  è la mappa inclusione, allora  $X$  è un retratto per deformazione. Dalla Proposizione 3.1.18 sappiamo che la successione

$$\dots \rightarrow \pi_n(X) \xrightarrow{i_*} \pi_n(Y) \xrightarrow{j_*} \pi_n(Y, X) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(X) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$$

è esatta. La coda è  $\pi_1(X) \xrightarrow{i_*} \pi_1(Y) \xrightarrow{j_*} \pi_1(Y, X) \xrightarrow{\partial_*} 0$  dal momento che per ipotesi  $X$  è connesso per archi (e quindi  $\pi_0(X) = 0$ ).  $i_*$  è un isomorfismo per ipotesi e per definizione di esattezza deve essere  $\pi_1(Y) = \text{Im } i_* = \ker j_*$  da cui deduciamo che  $j_*$  è l'omomorfismo banale  $j_* \equiv 0$ . D'altra parte, per la Proposizione 3.1.11, dall'esattezza in  $\pi_1(Y, X)$  si ha necessariamente che  $j_*$  è suriettiva e possiamo concludere che  $\pi_1(Y, X) = j_*(\pi_1(Y)) = 0$ . Con un procedimento analogo, possiamo dimostrare che tutti i gruppi di omotopia relativa  $\pi_n(Y, X)$  sono banali. Per il lemma di compressione infine esiste un'omotopia rel  $X$  dall'identità  $(Y, X) \rightarrow (Y, X)$  in una mappa con immagine contenuta in  $X$ , e questa è proprio la retrazione per deformazione cercata. ■

### 3.3 Teorema di sospensione di Freudenthal

**Teorema 3.3.1** (di eccisione per gruppi di omotopia). *Sia  $X$  un  $CW$  complesso,  $A, B \subset X$  sottocomplessi tali che  $A \cup B = X$ ,  $C \stackrel{\text{def}}{=} A \cap B \neq \emptyset$  con  $C$  connesso. Se  $(A, C)$  è  $n$ -connesso e  $(B, C)$  è  $m$ -connesso,  $m, n \in \mathbb{N}$ , la mappa inclusione  $i : (A, C) \rightarrow (X, B)$  induce isomorfismi sui gruppi di omotopia  $\pi_k(A, C) \simeq \pi_k(X, B)$  per  $0 \leq k < m + n$  e omomorfismi suriettivi per  $k = m + n$ .*

**Proposizione 3.3.2.**  $S^n$  è  $(n - 1)$ -connesso.

*Dimostrazione.* Sia  $k < n$ . Consideriamo la struttura di  $CW$  complesso formata da una 0-cella e da una  $n$ -cella su  $S^n$  e la struttura analoga su  $S^k$ , e consideriamo come punti base di ogni spazio le rispettive 0-celle ( $s_0^k$  per  $S^k$  e  $s_0^n$  per  $S^n$ ). Per il teorema di approssimazione cellulare ogni mappa  $f : (S^k, s_0^k) \rightarrow (S^n, s_0^n)$  è omotopa, rel  $s_0^k$  dove è già cellulare, ad una mappa cellulare  $f_1$  che è quindi necessariamente costante. Per l'Osservazione 3.1.2 possiamo concludere che  $\pi_k(S^n) = 0, \forall k < n$ . ■

**Lemma 3.3.3.** *Se  $(X, A)$  è una coppia che gode di HEP e  $A$  è contraibile, la proiezione  $p : X \rightarrow X/A$  è un'equivalenza di omotopie.*

*Dimostrazione.* Per definizione esiste un'omotopia da  $Id_A$  in una mappa costante  $a_0(A) = \{a_0 \in A\}$ , che per HEP può essere estesa ad un'omotopia  $F : X \times I \rightarrow X$  su tutto  $X$ . Dal momento che  $F(A \times I) = \{a_0\}$ , possiamo trovare  $\bar{F} : X/A \rightarrow X/A$  tale che  $p \circ f_t = \bar{f}_t \circ p$ . D'altra parte,  $f_1(A) = \{a_0\}$  e anche in questo caso esiste  $g : X/A \rightarrow X$  tale che  $f_1 = g \circ p$ . Si vede che  $p \circ g = \bar{f}_1$ , perchè  $(p \circ g)([x]) = (p \circ g \circ p)(x) = (p \circ f_1)(x) = \bar{f}_1([x])$  (indichiamo con  $[x]$  un elemento di  $X/A$ ).  $g$  è proprio l'inversa omotopica di  $p$  cercata, dal momento che  $g \circ p = f_1 \simeq f_0 = Id_X$  tramite  $F(\cdot, 1-t)$  e  $p \circ g = \bar{f}_1 \simeq \bar{f}_0 = Id_{X/A}$  tramite  $\bar{F}$  percorsa ancora in senso opposto. ■

**Definizione 3.3.4.** Sia  $(X, x_0)$  un CW complesso. La *mappa di sospensione*  $s : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_{n+1}(SX, s_0)$  è quella che si ottiene associando ad ogni funzione  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  la relativa sospensione  $Sf : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}) \rightarrow (SX, s_0)$ . Così come è presentata,  $s$  non è ben definita dal momento che  $Sf(\partial I^{n+1})$  non corrisponde ad un singolo punto di  $SX$ , ma appartiene al segmento  $[x_0 \times I]$ . Tuttavia, è possibile considerare la *sospensione ridotta*  $\Sigma X$  dove oltre a collassare  $X \times 0$  e  $X \times 1$  in un punto, identifichiamo anche  $x_0 \times I$  con un punto, così che tutti e tre i sottoinsiemi corrispondono allo stesso punto, chiamiamolo  $s_0$ . In questo modo  $Sf(\partial I^{n+1}) = s_0$  in  $\Sigma X$ . Per il lemma precedente,  $\Sigma X$  e  $SX$  sono omotopicamente equivalenti dal momento che  $x_0 \times I$  è contraibile. Di conseguenza, i gruppi di omotopia sono isomorfi e la mappa di sospensione è da intendersi come la mappa di sospensione ridotta composta con questo isomorfismo. Nel caso di nostro interesse,  $X = S^n$  e si può verificare che  $\Sigma X$  è ancora omeomorfo a  $S^{n+1}$ .

**Teorema 3.3.5** (di sospensione di Freudenthal). *Sia  $X$  un CW complesso  $(n-1)$ -connesso. Esiste una mappa  $h : \pi_k(X) \rightarrow \pi_{k+1}(SX)$  che è un isomorfismo per  $k < 2n-1$  ed un omomorfismo suriettivo per  $k = 2n-1$ . In particolare, il risultato vale per  $h : \pi_k(S^n) \rightarrow \pi_{k+1}(S^{n+1})$ ,  $k < 2n-1$ .*

*Dimostrazione.*  $SX$  si può scomporre nell'unione di due coni  $C_1X, C_2X$  che si intersecano in una copia di  $X$ . D'altra parte,  $C_iX = X \times I / X \times \{1\}$  è retraibile (si può considerare la composizione dell'omotopia che manda  $X \times I$  in  $X \times \{1\}$  con la mappa quoziente  $X \times I \rightarrow C_iX$ ,  $i = 1, 2$ ) e quindi  $\pi_k(C_iX) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$ . Guardando le successioni esatte associate alle coppie  $(C_1X, X)$  e  $(SX, C_2X)$ , con un ragionamento analogo a quanto visto nella dimostrazione del teorema di Whitehead, possiamo concludere che  $\pi_{k+1}(C_1X, X) \simeq \pi_k(X)$  e  $\pi_{k+1}(SX) \simeq \pi_k(SX, C_2X)$ . L'inclusione  $i : (C_1X, X) \hookrightarrow (SX, C_2X)$  induce un omomorfismo  $\pi_{k+1}(C_1X, X) \rightarrow \pi_{k+1}(SX, C_2X)$ . Sempre dalle successioni esatte, associate alle coppie  $(C_iX, X)$ , notiamo che  $(C_iX, X)$  è  $n$ -connesso quando  $X$  è  $(n-1)$ -connesso e per il Teorema 3.3.1, con  $\tilde{X} \stackrel{def}{=} SX, \tilde{A} \stackrel{def}{=} C_1X, \tilde{B} \stackrel{def}{=} C_2X$  e  $\tilde{C} =$

$C_1X \cap C_2X \cong X$ , segue che  $i_*$  è un isomorfismo per  $k+1 < 2n$  ed è suriettivo per  $k+1 = 2n$ .

$$\pi_k(X) \simeq \pi_{k+1}(C_1X, X) \xrightarrow{i_*} \pi_{k+1}(SX, C_2X) \simeq \pi_{k+1}(SX) \quad (3.1)$$

Definito  $h$  come la composizione delle mappe che compaiono in 3.1, si ha la tesi.

Per la Proposizione 3.3.2 infine, essendo  $S^n$   $(n-1)$ -connesso, si ha la tesi anche nel caso particolare. ■

**Osservazione 3.3.6.** Si può dimostrare (vedi [3]) che anche la mappa di sospensione (ridotta) è un isomorfismo sotto le ipotesi del teorema.

### 3.3.1 Computazione di $\pi_n(S^n)$

#### Fibrati

**Definizione 3.3.7.** Sia  $g_0 : X \rightarrow B$  una mappa continua e  $p : E \rightarrow B$ .  $p$  ha la *proprietà di sollevamento di omotopie* di  $X$  se per ogni omotopia  $g_t$  da  $g_0$  e per ogni sollevamento di  $g_0$ ,  $\tilde{g}_0 : X \rightarrow E$ , esiste un'omotopia  $\tilde{g}_t$  che sollevi  $g_t$ , ovvero tale che  $g_t = p \circ \tilde{g}_t$ .

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{g}_0} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{G} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

Se  $p$  ha tale proprietà per ogni spazio  $X$ ,  $p$  è una *fibrazione*. Si può definire anche la proprietà di sollevamento di omotopie *relativa* alla coppia  $(X, A)$  richiedendo che date un'omotopia  $f_t : X \rightarrow B$ , un sollevamento  $\tilde{g}_t : A \rightarrow E$  di  $f_t|_A$  ed una mappa  $\tilde{h}_0 : X \rightarrow E$ , sollevato di  $f$ , che estenda  $\tilde{g}_0$ , esiste un sollevamento  $\tilde{f}_t : X \rightarrow E$  di  $f_t$  che estende  $\tilde{g}_t$ .

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{h}_0} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\ A \times I & \xrightarrow{\tilde{G}} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

**Lemma 3.3.8.** Sia  $p : E \rightarrow B$  continua. Le seguenti sono equivalenti:

1.  $p$  ha la proprietà di sollevamento di omotopie rispetto a tutti i CW complessi (in tal caso  $p$  si dice *fibrazione di Serre*)
2.  $p$  ha la proprietà rispetto a tutte le palle chiuse  $B^n$
3.  $p$  ha la proprietà relativa rispetto a tutte le coppie  $(B^n, S^{n-1})$



4.  $p$  ha la proprietà relativa rispetto a tutte le  $CW$  coppie  $(X, A)$

*Dimostrazione.* 1)  $\implies$  2) è immediato dal momento che  $B^n$  può essere dotato di struttura di  $CW$  complesso. 2)  $\implies$  3) segue dal fatto che la coppia  $(B^n \times I, B^n \times \{0\} \cup \partial B^n \times I)$  è omeomorfa a  $(B^n \times I, B^n \times \{0\})$ .

$$\begin{array}{ccc} B^n \times 0 \cup \partial B^n \times I & \xleftarrow{\cong} & B^n \times 0 \xrightarrow{\tilde{g}_t} E \\ & \downarrow & \uparrow \tilde{G} \\ & B^n \times I \xrightarrow{G} B & \downarrow p \end{array}$$

Per dimostrare 3)  $\implies$  4) costruiamo il sollevamento cercato per induzione. Sia  $f_t : X \rightarrow B$  un'omotopia,  $\tilde{g}_t : A \rightarrow E$  un sollevamento di  $f_t|_A$  e  $\tilde{h}_0 : X \rightarrow E$  tale che estenda  $\tilde{g}_0$ . Supponiamo di aver già esteso  $\tilde{G}$  su  $X^{n-1} \times I \cup A \times I$ . Ogni cella  $e^n \times I$  di  $(X^n \setminus A^n) \times I$  ammette una mappa caratteristica  $\phi : (B^n \times I, \partial B^n \times I) \rightarrow (X^n \times I, X^{n-1} \times I)$ .  $\tilde{G} \circ \phi|_{\partial B^n \times I} : \partial B^n \times I \rightarrow E$  risulta essere un sollevamento di  $F \circ \phi : B^n \times I \rightarrow B$  su  $\partial B^n \times I$ , mentre il sollevamento di  $f_0 \circ \phi$  è semplicemente  $\tilde{h}_0 \circ \phi$ . Per la proprietà di sollevamento rispetto alla coppia  $(B^n, \partial B^n)$ , possiamo estendere  $\tilde{G} \circ \phi|_{\partial B^n \times I}$  e  $\tilde{h}_0 \circ \phi$  a tutto  $B^n \times I$ . Tale omotopia definisce un'omotopia di  $\tilde{e}^n$  che estende  $\tilde{G}$  su  $\partial e^n \times I \subseteq X^{n-1} \times I$  e  $\tilde{h}_0$  su  $\tilde{e}^n \times \{0\}$ . Possiamo ottenere un'omotopia su  $X^n$  ponendone la restrizione alle singole celle di  $X^n$  uguale a quella appena descritta. Se  $X$  non è finito, una costruzione analoga a quella della dimostrazione della Proposizione 2.2.19 permette di ottenere un'omotopia su  $X$ .

4)  $\implies$  1) si ha usando la coppia  $(X, \emptyset)$  ■

**Osservazione 3.3.9.** La proprietà di estensione delle omotopie delle  $CW$  coppie, dimostrata nel Corollario 2.2.20 segue da questo risultato, considerando  $B$  formato da un singolo punto (così che la parte triangolare inferiore del diagramma commuti banalmente).

**Teorema 3.3.10.** Sia  $p : E \rightarrow B$  una funzione continua con la proprietà di sollevamento delle omotopie per ogni palla chiusa  $B^n, n \in \mathbb{N}$  e siano  $b_0 \in B, e_0 \in p^{-1}(b_0) \stackrel{\text{def}}{=} F$ . Allora la funzione

$$p_* : \pi_n(E, F, e_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$$

è un isomorfismo di gruppi per  $n > 1$  ed è biettiva per  $n = 1$ . Inoltre, se  $B$  è connesso per archi, la sequenza

$$\dots \rightarrow \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\tilde{\partial}} \pi_{n-1}(F, e_0) \rightarrow \dots$$

è esatta. ( $\tilde{\partial}$  è la mappa che si ottiene componendo  $\partial_*$  della sequenza esatta per gruppi di omotopia relativi con l'isomorfismo inverso del primo punto.)

*Dimostrazione.* Per il lemma precedente  $p$  gode della proprietà di sollevamento relativa alle  $CW$  coppie. Sia  $[f] \in \pi_n(B, b_0)$  e dimostriamo che esiste  $[g] \in \pi_n(E, F, e_0)$  tale che  $p_*([g]) = [f]$ . Per la proprietà di sollevamento di omotopie, applicata alla  $CW$  coppia  $(I^n, J^{n-1})$ , esiste  $g : I^n \rightarrow E$  tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} J^{n-1} & \xrightarrow{e_0} & E \\ \downarrow & \nearrow g & \downarrow p \\ I^n & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

commuti (con  $e_0$  la mappa costante  $e_0(x) \equiv e_0$ ). Per costruzione  $g(J^{n-1}) = \{e_0\}$  e dal momento che  $(p \circ g)(I^{n-1}) = f(I^{n-1}) = \{b_0\}$ , si ha  $g(I^{n-1}) \subseteq p^{-1}(b_0) = F$ , quindi  $[g] \in \pi_n(E, F, e_0)$  e per come l'abbiamo definita  $p_*([g]) = [p \circ g] = [f]$ . Quindi  $p_*$  è suriettiva.

Per dimostrare l'iniettività di  $p_*$ , consideriamo  $[h_0], [h_1] \in \pi_n(E, F, e_0)$  tali che  $p_*([h_0]) = p_*([h_1])$ . Esiste quindi un'omotopia  $h_t : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$  da  $p \circ h_0$  a  $p \circ h_1$ . Poniamo  $A \stackrel{def}{=} I^n \times \{0\} \cup I^n \times \{1\} \cup J^{n-1} \times I$  e  $f : A \rightarrow E$  tale che  $f|_{I^n \times \{0\}} \equiv h_0$ ,  $f|_{I^n \times \{1\}} \equiv h_1$  e  $f|_{J^{n-1} \times I} \equiv e_0$ . Per la proprietà di sollevamento della  $CW$  coppia  $(I^n \times I, A)$ , esiste  $\tilde{H}$  tale che renda il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ I^{n+1} & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

e  $[h_0] = [h_1] \in \pi_n(E, F, e_0)$  tramite  $\tilde{H}$  (notare che  $p \circ \tilde{H}(I^{n-1} \times I) = H(I^{n-1} \times I) = b_0$  e quindi  $\tilde{H}$  è compatibile con la struttura di  $\pi_n(E, F, e_0)$ ).

Abbiamo dimostrato che  $\pi_n(B, b_0) \simeq \pi_n(E, F, e_0)$ . Nella sequenza esatta associata a  $(E, F)$  quindi possiamo sostituire questo termine ottenendo la successione desiderata, che finisce con 0 se si suppone che  $B$  sia connesso per archi (e quindi  $\pi_0(B) = 0$ ). Sempre per la connessione per archi di  $B$ , la successione è esatta anche nell'ultimo termine della coda

$$\pi_0(F, e_0) \rightarrow \pi_0(E, e_0) \rightarrow 0$$

dal momento che se  $[y] \in \pi_0(E, x_0)$ , un cammino  $\tilde{\gamma}$  da  $y$  in  $x \in F$  si può trovare sollevando un cammino  $\gamma : I \rightarrow B$  da  $p(y)$  in  $b_0$ .

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{y} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{\gamma} & \downarrow p \\ I & \xrightarrow{\gamma} & F \end{array}$$

■

**Definizione 3.3.11.** Siano  $E, F$  spazi topologici e  $p_1 : E \times F \rightarrow E$  la proiezione sulla prima componente. Uno *spazio fibrato* su  $E$ , con *fibre*  $F$  è una mappa suriettiva  $p : E \rightarrow B$  con le seguenti proprietà

1. Per ogni  $x \in B$ , esiste un intorno aperto  $x \in U_x$ , che diremo *cartesiano*, ed un omeomorfismo  $h : p^{-1}(U_x) \rightarrow U_x \times F$
2.  $p_1 \circ h \equiv p|_{p^{-1}(U_x)}$

$$\begin{array}{ccc}
 p^{-1}(U_x) & \xleftarrow{h} & U_x \times F \\
 & \searrow p & \swarrow p_1 \\
 & U_x &
 \end{array}$$

**Osservazione 3.3.12.** Dal momento che  $p_1^{-1}(b) = b \times F$  si ha che  $p^{-1}(b) \cong b \times F$ , in altre parole, le fibre  $p^{-1}(b), b \in B$  sono tutte omeomorfe a  $F$ .

**Teorema 3.3.13.** *Uno spazio fibrato  $p : E \rightarrow B$  ha la proprietà di sollevamento di omotopia relativa per ogni  $CW$  coppia  $(X, A)$*

*Dimostrazione.* La proprietà relativa per i  $CW$  complessi è equivalente alla proprietà per tutte le coppie  $(I^k, \partial I^k)$  per il Lemma 3.3.8.

Sia  $H : I^n \times I \rightarrow B$  un'omotopia e  $\tilde{h}_0 : I^n \rightarrow E$  un sollevamento di  $h_0$ .

$$\begin{array}{ccc}
 I^n \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{h}_0} & E \\
 \downarrow & & \downarrow p \\
 I^n \times I & \xrightarrow{H} & B
 \end{array}$$

Consideriamo un ricoprimento di aperti *cartesiani* di  $B$ ,  $\{U_\alpha\}$ . Con un ragionamento analogo a quanto visto nella Proposizione 1.1.16, dal momento che  $I^n \times I$  è compatto, possiamo suddividere  $I^n$  in un numero finito di sottocubi  $C_k$  e  $I$  in sottointervalli  $[t_j, t_{j+1}]$  tali che  $H(C_k \times [t_j, t_{j+1}])$  sia contenuto in un singolo aperto  $U_\alpha$  per ogni scelta degli indici. Procediamo ora per induzione su  $n$ , quindi supponiamo che la proprietà di sollevamento valga per  $(I^{n-1}, \partial I^{n-1})$ . Dalla dimostrazione del Lemma 3.3.8 è evidente che possiamo supporre che la proprietà di sollevamento valga per tutti i  $CW$  complessi di dimensione al più  $n-1$ . Quindi possiamo supporre di aver già esteso  $h_t$  a  $\tilde{h}_t^{n-1}$  definita su  $\partial C_k, \forall k$ , dal momento che possiamo vedere l'unione di questi bordi come l' $(n-1)$ -scheletro di  $I^n$ . Possiamo estendere  $\tilde{h}_t$  separatamente sui singoli  $C_k \times [t_j, t_{j+1}] \cong I^n \times I$  e quindi supporre senza perdita di generalità che  $H(I^n \times I) \subseteq U_\alpha$  per qualche  $\alpha$ , e che  $\tilde{h}_t^{n-1}$  sia definita su  $I^n \times 0 \cup \partial I^n \times I$  (partendo dai cubi con una faccia su  $I^n \times 0$ , e procedendo strato per strato). Dal momento che  $p^{-1}(U_\alpha)$  è omeomorfo a  $U_\alpha \times F$  tramite una mappa  $\alpha$ , possiamo definire  $\tilde{H}$  sul prodotto cartesiano, per poi comporre con  $\alpha^{-1}$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 I^n \times 0 \cup \partial I^n \times I & \xrightarrow{\alpha \circ \tilde{H}^{n-1}} & U_\alpha \times F & \xleftarrow[\alpha]{\cong} & p^{-1}(U_\alpha) \\
 \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p_1 & & \downarrow p \\
 I^n \times I & \xrightarrow{H} & U_\alpha & \xlongequal{\quad} & U_\alpha
 \end{array}$$

Visto che  $Im h_t \subseteq U_\alpha$ , possiamo porre la prima componente del sollevamento  $\tilde{h}_t$  uguale all'omotopia data. Per la seconda componente è sufficiente estendere la seconda componente di  $\alpha(\tilde{H}^{n-1})$  in maniera che sia continua. Chiamata  $p_2 : U_\alpha \times F \rightarrow F$  la proiezione sulla seconda componente,  $p_2 \circ \alpha \circ \tilde{H}^{n-1} : I^n \times 0 \cup \partial I^n \times I \rightarrow F$ .  $(I^n, I^n \times 0 \cup \partial I^n \times I)$  può essere visto come  $CW$  coppia (si può anche considerare la retrazione illustrata nella dimostrazione della Proposizione 2.2.19) e quindi gode di HEP, chiamiamo  $\tilde{H}_2$  l'estensione ottenuta. Abbiamo costruito una funzione  $\tilde{H} \stackrel{def}{=} (H, \tilde{H}_2)$  tale che  $p_1(\tilde{H}) \equiv H$ . D'altra parte per definizione di spazio fibrato  $p_1|_{U_\alpha \times F} \equiv p|_{p^{-1}(U_\alpha)} \circ \alpha^{-1}$  e quindi  $\alpha^{-1} \circ \tilde{H}$  è tale che  $p \circ \alpha^{-1} \circ \tilde{H}$  sia un sollevato di  $H$ , che per costruzione estende le mappe date. ■

**Definizione 3.3.14.** Possiamo costruire uno spazio fibrato su  $S^3$ , detto *fibrazione di Hopf*. Poniamo  $E = S^3$  come sottospazio di  $\mathbb{C}^2$  definito da  $(x, y) \in \mathbb{C}^2$  t.c.  $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1$ , e  $B = S^2 \cong PC$ , spazio proiettivo complesso.  $PC$  si può ottenere quozientando  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  sulla relazione d'equivalenza  $(x, y) \sim \lambda(x, y), \forall \lambda \in \mathbb{C}$ , tramite la mappa  $q : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow PC$ . La fibrazione di Hopf è definita dalla mappa

$$\begin{aligned} p : S^3 &\longrightarrow S^2 \\ (x, y) &\longmapsto q(x, y) \end{aligned}$$

le cui fibre sono tutte omeomorfe a  $S^1$

**Proposizione 3.3.15.** *La fibrazione di Hopf è uno spazio fibrato.*

*Dimostrazione.* Indichiamo con  $[(x, y)]$  la classe di equivalenza di  $(x, y) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  tramite  $\sim$  e definiamo i due aperti  $U_0 \stackrel{def}{=} \{[(x, y)] \text{ t.c. } x \neq 0\}$  e  $U_1 \stackrel{def}{=} \{[(x, y)] \text{ t.c. } y \neq 0\}$ . Chiaramente  $PC = U_0 \cup U_1$ . Possiamo costruire direttamente un omeomorfismo  $p^{-1}(U_0) \rightarrow U_0 \times S^1$  tramite la mappa

$$(x, y) \mapsto \left( [(x, y)], \frac{x}{\|x\|} \right)$$

che ammette inversa

$$[(x', y')] \times \lambda \mapsto \lambda \|x'\| (x')^{-1} (x', y')$$

L'omeomorfismo su  $p^{-1}(U_1)$  si ottiene scambiando il ruolo di  $x$  e  $y$ . ■

**Proposizione 3.3.16.**  $\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$

*Dimostrazione.* Per la proposizione precedente la fibrazione di Hopf gode della proprietà di sollevamento di omotopia e per il Teorema 3.3.10 la successione

$$\dots \rightarrow \pi_n(S^1) \xrightarrow{i_*} \pi_n(S^3) \xrightarrow{p_*} \pi_n(S^2) \xrightarrow{\tilde{\partial}} \pi_{n-1}(S^1) \rightarrow \dots$$

è esatta. La coda di questa successione è

$$0 \rightarrow \pi_2(S^2) \rightarrow \pi_1(S^1) \rightarrow 0$$

dal momento che  $\pi_1(S^3)$  e  $\pi_2(S^3)$  sono i gruppi banali per la Proposizione 3.3.2. Per la Proposizione 3.1.11  $\pi_2(S^2) \simeq \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ . Infine, per il teorema di Freudenthal vale  $\forall n > 2, \pi_{n-1}(S^{n-1}) \simeq \pi_n(S^n)$  ed essendo  $\pi_2(S^2) \simeq \mathbb{Z}$ , per induzione abbiamo la tesi. ■

# Bibliografia

- (1) J. Stillwell, *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag, 1980.
- (2) J. Munkres, *Elements Of Algebraic Topology*, Basic Books, 1984.
- (3) A. Cavicchioli, F. Hegenbarth et al., *Lezioni di Topologia Algebrica e differenziale*, Pitagora Editrice, 1997.
- (4) A. S. Mitchell, *Notes on Serre fibrations*, 2001, <https://sites.math.washington.edu/~mitchell/Atopc/serre.pdf> (visitato il 15/09/2022).
- (5) M. Aguilar, S. Sontz, S. Gitler e C. Prieto, *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*, Springer, 2002.
- (6) A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2002.
- (7) J. Munkres, *Topology*, Pearson, 2013.