R1.07

Outils Mathématiques Fondamentaux

1ère année B.U.T. Informatique

2022 - 2023 Patricia GAITAN

patricia.gaitan@univ-amu.fr

Contents

Partie I

Quelques rappels fondamentaux

Chapitre 1

Fractions, développements, factorisation, puissances

1.1 Fractions

Rappels

- Pour sommer deux fractions, il faut les mettre au même dénominateur :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

- Pour faire le produit de fractions, on fait le produit des numérateurs et des dénominateurs :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

- Diviser par une fraction est équivalent à multiplier par son inverse :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}.$$

En effet,

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}\times\frac{d}{d}=\frac{\frac{ad}{b}}{\frac{cd}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}.$$

Exercice 1. 1. *Simplifier les fractions suivantes*

$$\frac{8}{32}, \qquad \frac{2+3\times 4}{2}, \qquad \frac{2\times 3\times 4\times 5}{6\times 10}.$$

2. *Simplifier les fractions suivantes*

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}, \qquad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}.$$

3. *Écrire sous la forme d'une seule fraction*

$$A=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x+2} \qquad B=\frac{2x}{x+3}-2 \qquad C=\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{2x-1}$$

$$D=2+\frac{\frac{1}{2}x}{1+\frac{x}{2}} \qquad E=3-\frac{5}{x+2}$$

4. *Simplifier les fractions suivantes*

$$\frac{\frac{1}{2x}-2x}{x+1}, \qquad \frac{x-\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}+x}.$$

5. *Montrer que*

$$\frac{x-\frac{1}{x}}{\frac{(x+1)(x-1)}{x}}=1.$$

1.2 Développements et factorisation

Rappels

- Développer une expression algébrique consiste à la transformer en retirant les parenthèses
- Propriété fondamentale (distributuvité)
  - $k(a+b) = ka + kb$
  - $k(a-b) = ka - kb$
- Identités remarquables : Il y a trois développements particuliers que l'on retrouve sans arrêt, appelés identités remarquables :
  - $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  - $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
  - $(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
- Factoriser une expression algébrique consiste à la transformer (lorsque c'est possible) pour qu'elle soit sous la forme d'un produit de facteurs le plus simple possible.
- Méthode
  - On recherche d'abord si l'expression a un facteur commun (évident ou pas.
  - S'il n'y a pas de facteur commun,on essaye de voir si l'on peut appliquer une identité remarquable.
  - Il peut y avoir les deux cas combinés.
  - Dans des cas rares, il faut d'abord développer, simplifier, puis factoriser le résultat.

Exercice 2. *1. Développer les expressions suivantes*

$$A = (x+1)(x+3) \qquad B = (x+3)^2 \qquad C = (2x-1)^2 \qquad D = (2x+\frac{1}{2})^2$$

2. Factoriser les expressions suivantes
$A = (x+2)(2x+3) - (x+2)(x+1)$
$B = (2x+1) - (2-x)(2x+1)$
$C = (x+3)(-x+1) - (x+3)^2$

3. Démonter l'identité remarquable

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

4. Développer

$$(a+b)^3, \quad (2x+3)\times(x-1), \quad (3x-2)\times(-x-1)\times(x+3)$$

5. Factoriser (c'est-à-dire mettre sous la forme d'un produit) les expressions suivantes

$$4x^2+2x, \quad x^8-9, \quad x^2+2x+1, \quad x^2-3x+2, \quad \left(x^2+2x+1\right)+(3x+3)\,.$$

$$9x^2+42x+49, \quad 100x^2-121, \quad (2x+9)^2-(3x-13)^2$$

6. Simplifier (en utilisant des factorisations) les expressions suivantes

$$\frac{x^2+x}{2x}, \quad \frac{x^2-2x-3}{x+1}.$$

1.3 Puissances

Rappels

- L'opération "puissance" sert à multiplier un élément par lui-même plusieurs fois de suite ($7^3 = 7 \times 7 \times 7$).
- Pour multiplier des puissances d'un même nombre, on doit additionner les exposants ($a^4 \times a^5 = a^9$).
- Pour diviser des puissances d'un même nombre, on doit soustraire les exposants ($a^6/a^2 = a^4$).
- Pour calculer la puissance d'une puissance, on doit multiplier les exposants ($(a^3)^2 = a^6$)

Exercice 3. *1. Simplifier l'écriture des nombres suivants :*

$$A = 10^4 \times 10^5, \quad B = \frac{10^4}{10^3}, \quad C = (10^4)^3, \quad D = 5^2 \times 5^3 \times 5^{-2}$$

2. Écrire les nombres suivants sous la forme d'une seule puissance :

$$A = 3^2 \times 3^5 \times 9^2, \quad B = 5^2 \times 25^2 \times \frac{1}{5^3}, \quad C = \frac{0,001 \times 10^2 \times 0,1}{10^{-5} \times 10^2}$$

$$D = \frac{2^5 \times 4^4 \times 16^5}{32^{-5} \times 2^{-2}}, \quad E = 7^4 \times 3^2 \times 7^2 \times 3^{-5} \times 7^{-9}$$

3. Simplifier les expressions suivantes :

$$x^7x^5x^3, \quad ((x^7)^5)^3, \quad (4a^2b)^3, \quad \frac{a^{11}}{a^5}, \quad \frac{a^5}{a^{11}}$$

$$\frac{(2x^4)(5x^6)}{(10x^2)^4}, \quad (9y^6)^4(3y^5)^{-3}, \quad \frac{\frac{2a^4b^4(c^{-1})^3}{a^{-2}b^3c^4}}{\frac{3(a^{-1}b^{-2}c)^2}{ac^2}}$$

Chapitre 2

Equations du 1^{er} et 2^{nd} degré, systèmes d'équations et d'inéquations

2.1 Equations du 1^{er} et 2^{nd} degré

Rappels

- Pour résoudre une équation du premier degré, on passe à une équation équivalente (ayant la même solution). Pour ce faire, on peut ajouter ou soustraire le même nombre aux deux membres de l'égalité, multiplier ou diviser par le même nombre les deux membres de l'égalité.

$$\begin{aligned} x = -\frac{3}{4}x + 2 \quad &\overset{+\frac{3}{4}x}{\iff} \quad x + \frac{3}{4}x = 2 \\ &\iff \quad \frac{7}{4}x = 2 \\ &\overset{\times\frac{4}{7}}{\iff} \quad x = 2 \times \frac{4}{7} = \frac{8}{7}. \end{aligned}$$

- Pour résoudre une équation du second degré ($ax^2 + bx + c = 0$), on calcule le discriminant ($\Delta = b^2 - 4ac$). Si $\Delta \geq 0$, les solutions sont $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Pour résoudre une inéquation, le principe est le même. La multiplication (ou division) par un nombre négatif change le sens des inégalités. Plus généralement, l'application de toute fonction décroissante (par exemple prendre l'inverse) change le sens des inégalités.

Exercice 4. 1. *Résoudre les équations du premier degré suivantes*

- $x+2=3x-4$,
- $4x=2x+\sqrt{2}$,
- $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}=\dfrac{x+1}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}}$.

2. *Résoudre les équations du second degré suivantes*

- $x^2+x+1=2\left(x^2-x+\dfrac{1}{2}\right)$,
- $3x^2-1=6x-4$,

3. *Résoudre les inéquations suivantes*

- $x+2\geq 3x-4$,
- $4x<2x+\sqrt{2}$,
- $x^2+x+1\leq 2\left(x^2-x+\dfrac{1}{2}\right)$,
- $3x^2-1<6x-4$,
- $x+\dfrac{2x^2-2}{x+1}\geq 6-x$.

2.2 Systèmes d'équations et d'inéquations

Rappels

- Un système d'équation peut admettre une solution unique, un infinité de solutions ou aucune solution.
- Résolution par la méthode de substitution : on isole une inconnue dans une équation et on remplace dans les autres équations.
- Résolution par la méthode de combinaisons : on multiplie une (ou des) ligne(s) pour obtenir un terme égal ou opposé et on retranche ou on ajoute pour faire disparaitre ce terme.

Exercice 5. *1. Résoudre les systèmes d'équations suivants*

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-4y=-6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y=y \\ \dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{3}y=\dfrac{13}{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+3y+z=-2 \\ 2x-3y+z=4 \end{cases}$$

2. Résoudre graphiquement les systèmes d'inéquations suivants

$$\begin{cases} 2x+y\leq -1 \\ x-2y\leq 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y+2\geq 0 \\ 2x+3y-6\geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-1\leq 0 \\ 2x+2y+3\geq 0 \\ -2\leq x\leq 2 \end{cases}$$

Chapitre 3

Etude de fonctions

Rappels

- Domaine de définition
- Signe de la dérivée
- Tableau de variations
- Valeurs particulières
- Limites
- Tracé de la courbe représentative

Exercice 6. *Étudier les fonctions suivantes (domaines de définition, tableau de variations, limites, asymptotes)*

1. $f : x \mapsto \cos x$
2. $f : x \mapsto \sin x$
3. $f : x \mapsto \exp x$
4. $f : x \mapsto \ln x$
5. $f : x \mapsto x^2 + 6x + 5$
6. $f : x \mapsto 3x - 4x^3$

7. $f : x \mapsto \dfrac{-4x-4}{x^2+2x+5}$

8. $f : x \mapsto \dfrac{-5x^2+4x-8}{x^2+x-2}$

9. $f : x \mapsto \dfrac{\exp 2x}{\cos x \sin x}$

10. $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Partie II

Quelques notions d'Algèbre Linéaire

Historique :

Algèbre : nom féminin (latin médiéval algebra, de l'arabe al-djabr : réduction)

L'histoire de l'algèbre linéaire commence avec René Descartes qui le premier pose des problèmes de géométrie, comme l'intersection de deux droites, sous forme d'équations linéaires. Il établit alors un pont entre deux branches mathématiques jusqu'à présent séparées : l'algèbre et la géométrie. S'il ne définit pas la notion de base de l'algèbre linéaire qui est l'espace vectoriel, il l'utilise déjà avec succès. Après cette découverte les progrès en algèbre linéaire vont se limiter à des études ponctuelles comme la définition et l'analyse des premières propriétés des déterminants par Jean d'Alembert.
Ce n'est qu'au XIXe siècle que l'algèbre linéaire devient une branche des mathématiques à part entière. Carl Friedrich Gauss trouve une méthode générique pour la résolution des systèmes d'équations linéaires, Marie Ennemond Camille Jordan résout définitivement le problème de la réduction d'endomorphisme.
Le début du XXe siècle voit la naissance de la formalisation moderne des mathématiques. Les espaces vectoriels deviennent alors une structure générale omni-présente dans presque tous les domaines mathématiques.
Sous leur forme la plus simple les espaces vectoriels représentent intuitivement les déplacements dans les espaces géométriques élémentaires comme la droite, le plan ou notre espace physique. Les bases de cette théorie remplacent maintenant la représentation construite par Euclide au IIIe siècle av. J.-C.. La construction moderne permet de généraliser la notion d'espace à des dimensions quelconques.
L'algèbre linéaire permet de résoudre tout un ensemble d'équations dites linéaires utilisées non seulement en mathématiques ou en mécanique, mais dans de nombreuses autres branches comme les sciences naturelles ou les sciences sociales.
Les espaces vectoriels forment aussi un outil fondamental pour les sciences de l'ingénieur et servent de base à de nombreux domaines dans la recherche opérationnelle.
Cette branche fournit aussi un support théorique important en informatique, que ce soit matériel avec des calculateurs ou des processeurs vectoriels ou logiciel. Un langage informatique sorti dès 1969 adoptait des notations généralisées de l'algèbre linéaire : le langage APL (Array-Processing Language).
Enfin, c'est un outil utilisé en mathématiques pour résoudre des problèmes aussi divers que la théorie des groupes, des anneaux ou des corps, l'analyse fonctionnelle, la géométrie différentielle ou la théorie des nombres.

Extrait de l'Encyclopédie des Mathématiques

Chapitre 4

Systèmes Linéaires

4.1 Définitions et Notations

On étudie une méthode générale de résolution pour les systèmes linéaires.

Définition 4.1.1. *On appelle équation linéaire à n inconnues, à coefficients dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$), une expression de la forme*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b \qquad (e)$$

$a_1, a_2, ..., a_n$ *sont des éléments de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$,*
$x_1, x_2, ..., x_n$ *sont les inconnues.*

Définition 4.1.2. *On appelle système linéaire de p équations à n inconnues, la donnée simultanée de p équations $(e_1), (e_2), ..., (e_p)$. Une solution de ce système est une solution commune de toutes ces équations.*

En pratique un système linéaire s'écrira :

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n = b_1 & (e_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n = b_2 & (e_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + ... + a_{p,n}x_n = b_p & (e_p) \end{array}\right. \tag{4.1}$$

Cette écriture s'abrège sous la forme :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = b_i, \qquad i = 1, ..., p. \tag{4.2}$$

On peut aussi écrire la matrice du système comme étant le tableau à p lignes et n colonnes suivant :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix},$$

ainsi que le vecteur colonne des seconds membres :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}.$$

On écrit alors le système (4.1) sous la forme :

$$AX = B \quad \text{où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{est le vecteur inconnu.}$$

4.2 Solutions d'un Système Linéaire

Résoudre un système linéaire, c'est décrire l'ensemble des solutions.
Parfois cet ensemble est vide, parfois il y a une solution unique, parfois il y a une infinité de solutions.

Systèmes incompatibles

Définition 4.2.1. *Un système est dit* **incompatible** *lorsqu'il n'a aucune solution.*

Exemple :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Ce système est incompatible car s'il avait une solution cela entrainerait $0 = 1$.

Systèmes équivalents

Définition 4.2.2. *Deux systèmes linéaires ayant le même nombre d'inconnues sont dits* **équivalents** *lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.*

Exemple :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 3x_2 = 4 \end{array}\right.$$

car ils ont tous deux une solution unique $x_1 = x_2 = 1$.

Pour résoudre un système linéaire, le principe consiste à remplacer le système donné par un système équivalent plus simple, c'est à dire plus facile à résoudre.
Dans ce but, nous allons décrire des systèmes particuliers dits en escaliers, les **systèmes triangulaires**.

4.3 Systèmes Triangulaires

Définition 4.3.1. *On dit qu'un système linéaire de p équations à n inconnues*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i, \qquad i = 1, ..., p$$

est **triangulaire** *si et seulement si :*

1. $p \leq n$
2. $\forall\ j < i, \quad a_{i,j} = 0$
3. $a_{i,i} \neq 0, \quad \forall\ i \in \{1, 2, ..., n\}$

Méthode de résolution

Nous allons expliquer la méthode de résolution au travers d'un exemple.
Exemple
Il s'agit de résoudre le système triangulaire de 3 équations à 3 inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 & (e_1) \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 7 & (e_2) \\ -\frac{41}{7}x_3 = -3 & (e_3) \end{array}\right.$$

Nous allons résoudre ce système en partant de la dernière équation :

$$(e_3) \Longrightarrow x_3 = \frac{21}{41}.$$

On substitue cette valeur de x_3 dans (e_2) :

$$\frac{7}{2}x_2 = \frac{795}{82} \Longrightarrow x_2 = \frac{85}{41}.$$

On reporte les valeurs de x_3 et x_2 dans (e_1) :

$$x_1 = \frac{50}{41}.$$

Ce système a donc une unique solution $(\frac{50}{41}, \frac{85}{41}, \frac{21}{41})$.

Solutions fondamentales d'un système triangulaire homogène Représentation paramétrique des solutions

Lorsque l'on a plus d'inconnues que d'équations, on dit que le système est sous-déterminé. On a alors une infinité de solutions qui s'expriment en fonction des **solutions fondamentales**.

Exemple

Soit le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{array} \right.$$

On a un système de 3 équations à 5 inconnues. Pour résoudre, il faut considérer 2 des inconnues comme des paramètres et exprimer les autres en fonction de ces paramètres. Dans ce cas, le plus simple est de prendre x_4 et x_5 comme paramètres, on se ramène ainsi au système triangulaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -6x_4 + x_5 \\ x_2 - 4x_3 = -2x_4 \\ x_3 = x_4 - 2x_5 \end{array} \right.$$

On résout ce système en remontant dans les équations, les solutions sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_4 - \frac{21}{2}x_5 \\ 2x_4 - 8x_5 \\ x_4 - 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -\frac{21}{2} \\ -8 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_4 V_1 + x_5 V_2,$$

c'est à dire, elles sont une combinaison linéaire des 2 **solutions fondamentales** V_1 et V_2.

Solutions fondamentales d'un système triangulaire non homogène

Proposition 4.3.1. *La solution générale d'un système triangulaire de p équations à n inconnues (avec n=p+k) est de la forme :*

$$V = V^* + t_1 V_1 + t_2 V_2 + ... + t_k V_k$$

où V^* est une solution particulière du système et V_1, V_2, ..., V_k sont les solutions fondamentales du système homogène associé.

Exemple : On cherche toutes les solutions du système :

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_3 - x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

c'est à dire, on cherche tous les 5-uplets $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ de nombres réels qui satisfont simultanément à ces 3 équations.

On considère x_4 et x_5 comme des paramètres et on calcule x_1, x_2, x_3 en fonction de ces paramètres :

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -6x_4 + x_5 \\ x_2 - 4x_3 = -2x_4 + 4 \\ x_3 = x_4 - 2x_5 + 1 \end{cases}$$

Si l'on résout ce système triangulaire, on obtient :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{2} - \frac{1}{2}x_4 - \frac{21}{2}x_5 \\ 8 + 2x_4 - 8x_5 \\ 1 + x_4 - 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{2} \\ 8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -\frac{21}{2} \\ -8 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = V^* + x_4 V_1 + x_5 V_2$$

Théorème 4.3.1. *Un système triangulaire de n équations à n inconnues admet toujours une* **unique solution**.

Preuve :
La démonstration se fait par récurrence sur le nombre d'inconnues.

- Cette propriété est vraie pour 1 équation à 1 inconnue (évident).
- Supposons la propriété vraie pour un système triangulaire de n équations à n inconnues. Il existe donc une solution unique $(x_1, x_2, ..., x_n)$.
- Considérons maintenant un système triangulaire de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues formé du système précédent auquel on a rajouté une équation avec $n+1$ inconnues. D'après l'hypothèse précédente, le sous système formé des n équations à n inconnues admet une solution unique $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Si l'on reporte ces valeurs de $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dans la $(n+1)^{\text{ième}}$ équation, on obtiendra une valeur unique pour x_{n+1}. La propriété est donc démontrée.

Combinaisons d'équations

Théorème 4.3.2. *Tout système linéaire est équivalent au système obtenu en remplaçant l'une des équations (e_i) par une combinaison linéaire $(e_i) + \lambda(e_k)$ avec $k \neq i$.*

Théorème 4.3.3. *(Théorème de réduction)*
Tout système linéaire est équivalent à un système triangulaire ayant même nombre d'équations que le système initial.

Preuve :
La démonstration se fait par récurrence sur le nombre d'équations du système.

En utilisant la démonstration de ce théorème, nous allons pouvoir décrire un algorithme qui permet, étant donné un système linéaire quelconque d'écrire un système triangulaire équivalent. C'est **l'algorithme du pivot de Gauss**.

4.4 Pivot de Gauss

Il faut éliminer une inconnue donnée entre une équation donnée où cette inconnue figure explicitement et les autre équations du système. Cette inconnue s'appelle **l'inconnue pivot** et l'équation utilisée pour éliminer cette inconnue des autres équations du système est **l'équation pivot**.

Première étape :
On choisit **l'inconnue pivot** et **l'équation pivot** (en général la première équation, si on veut en choisir une autre, on commence par permuter les équations). On appelle **pivot**, le coefficient de l'inconnue pivot dans l'équation pivot.

Deuxième étape :
On élimine l'inconnue pivot dans toutes les équations autre que l'équation pivot en faisant des combinaisons linéaires de chaque équation avec l'équation pivot.

Le résultat de ces deux étapes est d'obtenir, en plus de l'équation pivot, un système linéaire où ne figure plus l'inconnue pivot, avec un nombre d'équations diminué de 1 par rapport à celui du système initial. C'est le **premier pas** de l'algorithme du pivot de Gauss.

On recommence la procédure dans ce nouveau système et ainsi de suite jusqu'à obtention d'un système triangulaire.

Exemple 1 :
Soit le système :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 & (e_1) \\ -x_1 + 3x_2 = 5 & (e_2) \\ x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 8 & (e_3) \end{cases}$$

Premier pas :

- Choix du pivot
  On prend comme équation pivot (e_1) et comme inconnue pivot x_1. Le pivot est donc égal à 2.

- Élimination de l'inconnue pivot x_1 dans les autres équations
  On remplace

$$(e_2) \quad \text{par} \quad (e_2') = (e_2) + \frac{1}{2}(e_1),$$

$$(e_3) \quad \text{par} \quad (e_3') = (e_3) - \frac{1}{2}(e_1).$$

On obtient le système équivalent

$$\left\{\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \quad (e_1) \\ \tfrac{7}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= 7 \quad (e'_2) \\ \tfrac{9}{2}x_2 - \tfrac{13}{2}x_3 &= 6 \quad (e'_3) \end{aligned}\right.$$

Deuxième pas :
On recommence avec le sous-système aux inconnues x_2 et x_3 constitué des équations (e'_2) et (e'_3), l'équation (e_1) restant inchangée.

- Choix du pivot
  On prend comme équation pivot (e'_2) et comme inconnue pivot x_2. Le pivot est donc égal à $\frac{7}{2}$.

- Élimination de l'inconnue pivot x_2 dans la dernière équation
  On remplace
  $$(e'_3) \quad \text{par} \quad (e"_3) = (e'_3) - \frac{9}{7}(e'_2).$$

On obtient le système équivalent

$$\left\{\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \quad (e_1) \\ \tfrac{7}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= 7 \quad (e'_2) \\ -\tfrac{41}{7}x_3 &= -3 \quad (e"_3) \end{aligned}\right.$$

On obtient ainsi un système triangulaire que l'on sait résoudre en commençant par la dernière équation et en reportant les valeurs calculées dans les équations précédentes. La solution est

$$(\frac{50}{41}, \frac{85}{41}, \frac{21}{41}).$$

Exemple 2 :
Soit le système :

$$\left\{\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \quad (e_1) \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 8 \quad (e_2) \\ x_1 + 5x_2 - 7x_3 &= 8 \quad (e_3) \end{aligned}\right.$$

Premier pas :

- Choix du pivot
  On prend comme équation pivot (e_1) et comme inconnue pivot x_1. Le pivot est donc égal à 2.

- Élimination de l'inconnue pivot x_1 dans les autres équations
  On remplace
$$(e_2) \quad \text{par} \quad (e'_2) = (e_2) - 2(e_1),$$
$$(e_3) \quad \text{par} \quad (e'_3) = (e_3) - \frac{1}{2}(e_1).$$

On obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 & (e_1) \\ 0 = 0 & (e'_2) \\ \frac{9}{2}x_2 - \frac{13}{2}x_3 = 6 & (e'_3) \end{cases}$$

On obtient un système de 2 équations à 3 inconnues, il faut donc prendre l'une des inconnues comme paramètre, par exemple x_3, et donner toutes les solutions en fonction de x_3. On obtient le système triangulaire suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = x_3 + 4 & (e_1) \\ \frac{9}{2}x_2 = \frac{13}{2}x_3 + 6 & (e'_3) \end{cases}$$

qui admet une infinité de solutions :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - \frac{2}{9}x_3 \\ \frac{4}{3} + \frac{13}{9}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} \\ \frac{13}{9} \\ 1 \end{pmatrix} = V^* + x_3 V_1$$

où V^* est une solution particulière du système initial et V_1 est la solution fondamentale du système homogène associé.

Exemple 3 :
Soit le système :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 & (e_1) \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 & (e_2) \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 8 & (e_3) \end{cases}$$

Premier pas :

- Choix du pivot
  On prend comme équation pivot (e_1) et comme inconnue pivot x_1. Le pivot est donc égal à 2.

- Élimination de l'inconnue pivot x_1 dans les autres équations
  On remplace
$$(e_2) \quad \text{par} \quad (e'_2) = (e_2) - 2(e_1),$$
$$(e_3) \quad \text{par} \quad (e'_3) = (e_3) - \frac{1}{2}(e_1).$$

On obtient le système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 & (e_1) \\ 0 = -8 & (e'_2) \\ \frac{9}{2}x_2 - \frac{13}{2}x_3 = 6 & (e'_3) \end{array}\right.$$

L'équation (e'_2) est impossible. Ce système n'a donc pas de solution.

4.5 Exercices

Exercice 1

Trouver les solutions du système triangulaire :

$$\left\{\begin{array}{r} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_3 + x_4 = -4 \\ 3x_4 = 6 \end{array}\right.$$

Exercice 2

Trouver l'ensemble de toutes les solutions des systèmes suivants. Donner les solutions sous forme paramétrique en précisant la solution particulière et les solutions fondamentales.

$$a) \left\{\begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ 2x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 = 0 \end{array}\right.$$

$$b) \left\{\begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 5x_5 = 1 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 - 2x_4 + 4x_5 = -2 \end{array}\right.$$

Exercice 3

En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss, résoudre les systèmes suivants :

$$a) \left\{\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 5 \\ x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 8 \end{array}\right.$$

$$b) \left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \end{array}\right.$$

$$c)\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 40 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 13x_4 = 15 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 50 \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 + 2x_5 = 44 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = -1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 13x_4 + x_5 = 17 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 5x_5 = 40 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15 \end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = -2 \end{cases}$$

$$f)\ \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$g)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 22 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 22 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 44 \end{cases}$$

Chapitre 5

Systèmes Linéaires et Sous-Espaces Vectoriels de $\mathbb{R}^n$

5.1 Sous-Espaces Vectoriels

Définition 5.1.1. *Un sous ensemble non vide $U \subset \mathbb{R}^n$ qui est stable par combinaison linéaire s'appelle un* **sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$**

Exemple :
Soit U le sous-espace de $\mathbb{R}^5$ défini par :

$$U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5; \quad x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 - x_5 = 0\}.$$

- U est **non vide** puisque $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$.
- U est **stable par combinaison linéaire**.
  En effet soit $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in U$, $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \in U$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Puisque v et w

appartiennent à U, on a :

$$\lambda(x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 - x_5) = 0,$$

$$\mu(y_1 + 2y_2 - 4y_3 + y_4 - y_5) = 0.$$

En ajoutant ces deux équations, on obtient

$$(\lambda x_1 + \mu y_1) + 2(\lambda x_2 + \mu y_2) - 4(\lambda x_3 + \mu y_3) + (\lambda x_4 + \mu y_4) - (\lambda x_5 + \mu y_5) = 0,$$

ce qui montre que

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \lambda v + \mu w \in U.$$

Généralisation :
Soit U le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n; \quad a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0 \}.$$

Alors U est non vide et stable par combinaison linéaire.

Méthodes de construction d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$:

(1) Soit le système linéaire homogène :

$$(L) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,n}x_n = 0 \end{cases}$$

Soit $U(L) \subset \mathbb{R}^n$ l'ensemble des solutions de (L). Alors $U(L)$ n'est pas vide puisque $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U(L)$ et $U(L)$ est stable par combinaison linéaire.

(2) Soit $U = \mathbb{R}u_1 + \mathbb{R}u_2 + ... + \mathbb{R}u_p$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'un système $\{u_1, u_2, ..., u_p\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
L'ensemble U est non vide (puisque $\{u_1, u_2, ..., u_p\} \in U$) et stable par combinaison linéaire, en effet : si $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_p u_p \in U$, $w = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + ... + \beta_p u_p \in U$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors

$$\lambda v + \mu w = (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1)u_1 + (\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2)u_2 + ... + (\lambda\alpha_p + \mu\beta_p)u_p \in U.$$

En fait U est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ contenant $\{u_1, u_2, ..., u_p\}$, c'est le **sous-espace vectoriel engendré** par $u_1, u_2, ..., u_p$.

5.2 Systèmes Générateurs et Bases

Définition 5.2.1. *Soit U un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et soit $\{u_1, u_2, ..., u_p\} \subset U$.*
On dit que $\{u_1, u_2, ..., u_p\}$ est un **système générateur** *pour U*
$\iff$ *chaque vecteur $u \in U$ est une combinaison linéaire de $u_1, u_2, ..., u_p$*
$\iff$ $U = \mathbb{R}u_1 + \mathbb{R}u_2 + ... + \mathbb{R}u_p$

Exemples :

(1) Les vecteurs unités de $\mathbb{R}^n$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ sont un système générateur de $\mathbb{R}^n$. En effet

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n.$$

(2) Soit $U = U(L)$ l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène (L).
Soit V_1, V_2, ..., V_{n-k} les solutions fondamentales de (L).
Alors $\{V_1, V_2, ..., V_{n-k}\}$ est un système générateur de $U(L)$.

Définition 5.2.2. *Soit U un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $\{V_1, V_2, ..., V_p\}$ un système générateur de U.*
On dit que $\{V_1, V_2, ..., V_p\}$ est une **base** *de U*
$\Longleftrightarrow \{V_1, V_2, ..., V_p\}$ *est un* **système générateur minimal** *(aucun générateur n'est une combinaison linéaire des autres)*
$\Longleftrightarrow \quad \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + ... + \alpha_p V_p = 0 \quad \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p = 0$
$\Longleftrightarrow \quad \{V_1, V_2, ..., V_p\}$ *est un* **système libre**.

<u>**Exemple 1**</u> :
Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base d'un espace vectoriel U, tout vecteur $v \in U$ peut s'écrire **de manière unique** comme une combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, ..., e_n$:

$$\forall\ v \in U,\ \exists!\ (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n\ ;\ v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n.$$

Les coefficients $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont appelés **coordonnées** du vecteur v dans la base $\mathcal{B}$, on note $v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Remarque : Il est important de préciser la base de référence en indice.

<u>**Exemple 2**</u> :

Soit $\mathcal{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ la base suivante : $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Soit le vecteur $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Il s'agit de déterminer les coordonnées des vecteurs w, i et e_2 dans la base $\mathcal{B}'$.

Notons $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \quad \Longleftrightarrow \quad w = xe_1 + ye_2 + ze_3$. On remplace e_1, e_2 et e_3 par leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$:

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}},$$

$$\iff \begin{cases} y+z=1 \\ x-4y-3z=0 \\ -x+7y+5z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} y=1-z \\ x=4-z \\ z=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases}$$

Donc $w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$.

De même, on obtient $i = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$.

Faits fondamentaux sur les bases :

1. Toutes les bases de $\mathbb{R}^n$ ont la même longueur n (le même nombre de vecteurs).
2. Chaque sous-espace vectoriel non vide U de $\mathbb{R}^n$ admet des bases. Une base $\{V_1, V_2, ..., V_p\}$ de U est nécessairement un segment initial d'une base $\{V_1, V_2, ..., V_p, ..., V_n\}$ de $\mathbb{R}^n$.
3. Toutes les bases d'un sous-espace vectoriel non vide U de $\mathbb{R}^n$ ont la même longueur $p \leq n$. On définit la **dimension** d'un sous espace vectoriel U :
$\dim U =$ longueur commune de toutes les bases de U.
4. Si $U_1 \subset U_2$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ et si $\dim U_1 = \dim U_2$ alors $U_1 = U_2$.

5.3 Base d'un Sous-Espace Vectoriel

Soit $U = \mathbb{R}u_1 + \mathbb{R}u_2 + ... + \mathbb{R}u_k$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$.

Problème : Comment trouver une base $\{V_1, V_2, ..., V_p\}$ de U ?

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in U \iff \exists!\ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbb{R} \ \text{ tels que } \ v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_k u_k.$$

On obtient ainsi un système linéaire de n équations. Il s'agit de déterminer les conditions que doivent satisfaire $x_1, x_2, ..., x_n$ pour que ce système admette une solution unique. On triangule ce système avec l'algorithme du pivot de Gauss et on va obtenir les conditions d'appartenance à U.

Exemple :

Soit $U = \mathbb{R}u_1 + \mathbb{R}u_2 + \mathbb{R}u_3 \subset \mathbb{R}^5$ avec $u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in U \iff \exists!\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \text{ tels que } v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3.$$

$$\iff \begin{cases} 4\alpha_1 - 4\alpha_2 + 4\alpha_3 = x_1 \\ -5\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = x_2 \\ -3\alpha_1 - \alpha_3 = x_3 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = x_4 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = x_5 \end{cases}$$

Quelles conditions doivent satisfaire x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 pour que ce système admette une solution unique?
On triangule ce système avec l'algorithme du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{4} & -4 & 4 & x_1 \\ \hline -5 & -1 & -1 & x_2 \\ -3 & 0 & -1 & x_3 \\ 3 & 3 & -1 & x_4 \\ 1 & 2 & -1 & x_5 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -4 & 4 & x_1 \\ 0 & \mathbf{-24} & 16 & 5x_1 + 4x_2 \\ \hline 0 & -12 & 8 & 3x_1 + 4x_3 \\ 0 & -24 & 16 & 3x_1 - 4x_4 \\ 0 & -12 & 8 & x_1 - 4x_5 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -4 & 4 & x_1 \\ 0 & -24 & 16 & 5x_1 + 4x_2 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 + 4x_2 - 8x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_1 + 4x_2 + 4x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 3x_1 + 4x_2 + 8x_5 \end{array}\right)$$

On obtient donc le système triangulaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4\alpha_1 - 4\alpha_2 + 4\alpha_3 & = & x_1 \\ -24\alpha_2 + 16\alpha_3 & = & 5x_1 + 4x_2 \\ 0 & = & -x_1 + 4x_2 - 8x_3 \\ 0 & = & 2x_1 + 4x_2 + 4x_4 \\ 0 & = & 3x_1 + 4x_2 + 8x_5 \end{array} \right.$$

Les trois dernières équations donnent les conditions d'appartenance à U. Si l'on prend x_1 et x_2 comme paramètres, les solutions s'écrivent :

$$\begin{cases} x_3 = -\dfrac{1}{8}x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 \\ x_4 = -\dfrac{1}{2}x_1 - x_2 \\ x_5 = -\dfrac{3}{8}x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

Soit encore

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -\frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ -\frac{1}{2}x_1 - x_2 \\ -\frac{3}{8}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = x_1 V_1 + x_2 V_2.$$

Les solutions fondamentales sont donc

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$U = \mathbb{R}u_1 + \mathbb{R}u_2 + \mathbb{R}u_3 = \mathbb{R}V_1 + \mathbb{R}V_2.$$

On a ainsi trouvé une base $\{V_1, V_2\}$ de U à partir du système générateur $\{u_1, u_2, u_3\}$.

5.4 Exercices

Exercice 1

Soit $\mathcal{B} = (i, j, k,)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ la base suivante :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Soit le vecteur $w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Déterminer les coordonnées du vecteur w dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 2

Soit $\mathcal{B} = (i, j, k, l)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$,

$$i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base suivante :

$$e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 3-2 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Soit le vecteur $w = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Déterminer les coordonnées du vecteur w dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 3

Soit $U = \mathbb{R}u_1 + \mathbb{R}u_2 + \mathbb{R}u_3 + \mathbb{R}u_4$, avec $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 11 \\ 24 \end{pmatrix}$.

Construire une base de U.

Les vecteurs $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont-ils dans U ?

Exercice 4

Soit

$$U_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$U_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Construire une base pour U_1 et U_2.

Exercice 5

Soit $U_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

1- Montrer que (U_1, U_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

2- Si $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont les coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ dans la base (U_1, U_2), quelles sont les coordonnées de ce vecteur dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

3- Déterminer les coordonnées de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et dans la base (U_1, U_2).

4- Exprimer à l'aide de x, y les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ dans la base (U_1, U_2).

Exercice 6

On considère les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1) \ \left\{ \ x - y + z + t = 0 \right.$$

$$(S_2) \ \left\{ \ x + 2y - 2z + 4t = 0 \right.$$

$$(S_3) \ \left\{ \begin{array}{l} x - y + z + t = 0 \\ x + 2y - 2z + 4t = 0 \end{array} \right.$$

1- Pourquoi les ensembles des solutions de ces systèmes sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$?

2- Donner une base de ces trois sous-espaces vectoriels.

Chapitre 6

Matrices

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

6.1 Définitions et Propriétés

6.1.1 Généralités

Définition 6.1.1. *Soit n et p deux entiers positifs. Une* **matrice** *A de type (n,p) est une application de $\{1,...,n\}\times\{1,...,p\}$ dans $\mathbb{K}$. On note a_{ij} l'image du couple (i,j) par l'application A. Les a_{ij} sont appelés les* **coefficients** *de la matrice A. On écrit $A=(a_{ij})_{1\leq i\leq n,\, 1\leq j\leq p}$.*

Notations
- On note $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Un élément A de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est un tableau à n lignes et p colonnes, le coefficient a_{ij} venant se placer à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne.
- Finalement c'est le tableau lui-même que l'on appelle matrice. On dit qu'un élément M de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est une matrice à n lignes et p colonnes.

6.1.2 Matrices particulières

- **Matrice nulle**
  La matrice nulle $A=(a_{ij})$ de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est définie par : $\forall\ (i,j),\ a_{ij}=0$.

- **Matrice ligne**
  Si $n=1$, $A\in\mathcal{M}_{1p}(\mathbb{K})$ est une matrice ligne.

- **Matrice colonne**
  Si $p = 1$, $A \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ est une matrice colonne. On identifie parfois une matrice colonne avec un élément de $\mathbb{K}^n$.

- **Matrices carrées**
  Si $n = p$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée d'ordre n. Certaines matrices carrées sont particulières :

  - **Matrices diagonales**
    Une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonale si pour tout $i \neq j$, $a_{ij} = 0$. Les seuls éléments évetuellement non nuls sont les éléments diagonaux de A.
  - **Matrice identité**
    La matrice identité d'ordre n est la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux valent 1. Cette matrice est notée I_n.
  - **Matrice triangulaire**
    Une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **triangulaire supérieure** si pour tout i et j tels que $i > j$, $a_{ij} = 0$, c'est à dire tous les coefficients au-dessous de la diagonale sont nuls.
    Une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **triangulaire inférieure** si pour tout i et j tels que $i < j$, $a_{ij} = 0$, c'est à dire tous les coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls.

6.2 Opérations sur les Matrices

6.2.1 Somme de deux matrices

Définition 6.2.1. *Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices à n lignes et p colonnes. La somme des matrices A et B est la matrice $C = (c_{ij})$ de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ telle que*

$$\forall (i, j) \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

On écrit $C = A + B$.

Remarque : La somme de deux matrices n'est définie que si elles ont même nombre de lignes et même nombre de colonnes.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, alors

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 10 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

6.2.2 Produit d'une matrice par un nombre réel

Définition 6.2.2. *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice à n lignes et p colonnes et k un réel donné. Le produit de la matrice A par le réel k est la matrice B définie par*

$$B = kA = (b_{ij}) \quad \textit{avec} \quad b_{ij} = ka_{ij} \quad \textit{pour} \quad i = 1, ..., n \quad \textit{et} \quad \jmath = 1, ..., p.$$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $k = \frac{1}{2}$, alors

$$B = \frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

6.2.3 Multiplication de deux matrices

Définition 6.2.3. *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$ une matrice à n lignes et q colonnes et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{rp}(\mathbb{K})$ une matrice à r lignes et p colonnes. Le produit $C = AB$ n'est défini que si $q = r$ par*

$$C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \quad \textit{et} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}.$$

Remarques :

- On obtient une matrice ayant autant de lignes que A et autant de colonnes que B. On peut écrire
(matrice de type (n, r)) $\times$ (matrice de type (r, p)) $\Longrightarrow$ (matrice de type (n, p)).
- Les produits AB et BA ne sont simultanément possibles que si A est de type (n, p) et B de type (p, n). Alors AB est une matrice carrée d'ordre n et BA une matrice carrée d'ordre p.
- Le terme de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de $C = AB$ est obtenu en sommant les produits des termes de même rang dans la i-ième ligne de A et la j-ième colonne

de B de la façon suivante (sont représentés en gras les coefficients de A et B utiles au calcul du coefficient c_{ij}

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & \mathbf{b_{1j}} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \dots & \mathbf{b_{2j}} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \dots & \mathbf{b_{kj}} & \dots & b_{kp} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \dots & \mathbf{b_{rj}} & \dots & b_{rp} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & b_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{ik}} & \dots & \mathbf{a_{ir}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_{nk} & \dots & a_{nr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & \mathbf{c_{ij}} & \dots & c_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{np} \end{pmatrix} = C$$

Propriétés du produit :
Soit A, B et C trois matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$:

- Si les produits AB et AC sont possibles, on a : $A(B+C) = AB + AC$.
- Si les produits AC et BC sont possibles, on a : $(A+B)C = AC + BC$.
- Si les produits AB et BC sont possibles, on a : $A(BC) = (AB)C$.

6.2.4 Transposition de matrices

Définition 6.2.4. *Soit $A = (a_{ij}$ une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On appelle* **transposée** *de A la matrice notée ${}^tA$ définie par :*

$${}^tA \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K}), \quad et \quad {}^tA = (a_{ji}).$$

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

Propriétés

- Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et λ et μ deux éléments de $\mathbb{K}$, on a

$${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB \quad \text{et} \quad {}^{tt}A = A.$$

- Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$, alors ${}^t(AB) =^t B\,{}^tA$ (attention à l'ordre!).
- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout entier naturel k, on a ${}^t(A^k) = ({}^tA)^k$. Si A est inversible cette égalité est vraie pour tout entier relatif k.

6.3 Inversion des Matrices

Définition 6.3.1. *Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note A^{-1} la matrice inverse de A.*

Remarque :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. La matrice A est donc inversible si pour tout Y le système linéaire $AX = Y$ admet une solution unique. On aura alors $X = A^{-1}Y$ et la détermination de la solution X nous donnera la matrice A^{-1}.

Exemples :

1- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, déterminer la matrice inverse A^{-1}. On va utiliser l'algorithme du pivot de Gauss pour résoudre le système $AX = Y$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. On triangule donc le système suivant :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 5 & -1 & y_1 \\ \hline 0 & -2 & 1 & y_2 \\ 0 & 2 & 2 & y_3 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & y_1 \\ 0 & -2 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 3 & y_2 + y_3 \end{array}\right).$$

On obtient ainsi un système triangulaire que l'on résout, la solution est :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 - \dfrac{1}{2}y_3 \\ x_2 = -\dfrac{1}{3}y_2 + \dfrac{1}{6}y_3 \\ x_3 = \dfrac{1}{3}y_2 + \dfrac{1}{3}y_3 \end{cases}.$$

Cette solution peut s'écrire sous forme matricielle :

$$X = A^{-1}Y \quad \text{avec} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

2- Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, déterminer la matrice inverse B^{-1}. On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}$ et l'on résout le système $BX = Y$ avec l'algorithme du pivot de Gauss, ce qui donne :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & -1 & y_1 \\ \hline 0 & 1 & -2 & 3 & -3 & y_2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & y_3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & y_4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & y_5 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & y_1 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 3 & -3 & y_2 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & y_3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & y_4 - y_1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 3 & y_5 - y_1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & y_1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 & y_2 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 2 & -2 & y_3 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & y_4 - y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & y_5 - y_1 + y_2 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & y_1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 & y_2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_4 - y_1 + y_2 - y_3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & y_5 - y_1 + y_2 - y_3 \end{array}\right).$$

En permutant les deux dernières lignes, on obtient un système triangulaire :

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 + x_4 - x_5 = y_1 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = y_2 \\ -x_3 + 2x_4 - 2x_5 = y_3 \\ -x_4 + 2x_5 = y_5 - y_1 + y_2 - y_3 \\ x_5 = y_4 - y_1 + y_2 - y_3 \end{array}\right. ,$$

que l'on résout, ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = y_1 - y_4 + y_5 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 + y_4 - y_5 \\ x_3 = -y_3 + 2y_4 - 2y_5 \\ x_4 = -y_1 + y_2 - y_3 + 2y_4 - y_5 \\ x_5 = -y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \end{array}\right. \Longleftrightarrow X = B^{-1}Y \text{ avec } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.4 Matrice d'une Application Linéaire

Définition 6.4.1. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire, avec E et F de dimensions finies n et p, munis de bases $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}_F = (e'_1, \ldots, e'_p)$, on appelle matrice de f dans ces bases la matrice que l'on note $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ à p lignes et n colonnes dont l'élément $a_{i,j}$, $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne, est tel que $f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j}\, e'_i$.*

On a en colonnes, les coordonnées des images des vecteurs de la base de E écrits dans la base de F.

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \ldots & a_{pj} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

Exemple : Supposons qu'une base de E soit $\mathcal{B}_E = \{e_1, e_2, e_3\}$ et qu'une base de F soit $\mathcal{B}_F = \{e'_1, e'_2\}$. Soit f l'application linéaire de E dans F définie par

$$\begin{cases} f(e_1) = e'_1 + 2e'_2 \\ f(e_2) = 3e'_1 + 5e'_2 \\ f(e_3) = 7e'_1 \end{cases}$$

Alors la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ est :

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarques

- Une application linéaire est déterminée par sa matrice dans un couple de bases donné.
- Soit f une application linéaire de E dans F. Quand on change de base dans E ou dans F, la matrice de f est en général modifiée.
- Cas particulier : la matrice de l'application nulle de E dans F est la matrice nulle et ce quel que soit le couple de bases.

Propriétés

- **Matrice de $\lambda f + \mu g$**
  Soit f et g deux applications linéaires de E dans F, λ et μ deux éléments de $\mathbb{K}$. On note $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Alors on a le résultat suivant :

$$\mathcal{M}(\lambda f + \mu g, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \lambda \mathcal{M}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) + \mu \mathcal{M}(g, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F).$$

- **Matrice de** $g \circ f$
  Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie. On note $\mathcal{B}_E$ une base de E, $\mathcal{B}_F$ une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de G. Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. Alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G dont la matrice est définie par :
  $$\mathcal{M}(g \circ f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G) = \mathcal{M}(g, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G) \times \mathcal{M}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F).$$

- **Matrice de** f^{-1}
  Soit f une application linéaire de E dans F. On suppose que $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ est inversible. Alors
  $$\mathcal{M}(f^{-1}, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E) = \left(\mathcal{M}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)\right)^{-1}.$$

- **Matrice de** f^n
  Soit f une application linéaire de E dans E. Alors, pour tout entier naturel n, on a
  $$\mathcal{M}(f^n, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E) = \left(\mathcal{M}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E)\right)^{n}.$$

Remarque : La matrice d'une application linéaire est donc différente suivant la base choisie. Supposons qu'il soit possible de choisir une base $\mathcal{B}_E$ telle que la matrice de l'application linéaire f dans cette base soit diagonale, les calculs relatifs à ce genre de matrice seront plus simples, ce qui justifie la recherche de telle matrices.

6.5 Exercices

Exercice 1
On donne les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C == \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$D == \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a- Calculer AB, $D+E$, $D-E$, DE, ED, $-6D$.
b- Effectuer, si possible, les opérations
$3C - D$, $3ED$, $4BC + 2B$, $D + E^2$, ${}^tD\,{}^tE - {}^t(ED)$.

Exercice 2

On donne les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer JK, KJ, J^2, K^2. En déduire J^{-1}, K^{-1}, J^3, K^3 puis J^n et K^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3

Soit la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer P^2 puis donner P^{-1}.

Exercice 4

Inverser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 7

Diagonalisation des Matrices

Objectif :
Déterminer une base telle que la matrice d'une application linéaire soit diagonale dans cette base.

7.1 Déterminants

- A chaque matrice carrée d'ordre n, $A = (a_{ij})$, on associe un nombre spécifique appelé **déterminant de** A et noté :

$$det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- Attention le tableau de nombres placé entre deux traits verticaux, appelé déterminant d'ordre n, n'est pas une matrice mais représente le nombre que la fonction déterminant affecte à la matrice.

Les déterminants d'ordre 1, 2 et 3 sont définis ainsi :

$$det\ A = |a_{11}| = a_{11}$$

$$det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{aligned} det\ A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Plus généralement, si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,n}$:

$$det\ A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad \text{pour } j \text{ fixé,}$$

(développement par rapport à la colonne j)

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad \text{pour } i \text{ fixé,}$$

(développement par rapport à la ligne i)

M_{ij} est le déterminant mineur obtenu à partir de $det\ A$ en supprimant la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne.

Théorèmes fondamentaux pour le développement des déterminants

Théorème 7.1.1. *Si l'on multiplie par un même facteur tous les éléments d'une même ligne ou d'une même colonne du déterminant, alors le déterminant est multiplié par ce facteur.*

Cette propriété découle immédiatement du procédé de développement.
Exemple

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{4} \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{3} & 0 \\ 1 & \mathbf{3} & 2 \\ -1 & \mathbf{0} & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & \mathbf{2} \\ -1 & 0 & \mathbf{2} \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 3 \times 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12 \end{aligned}$$

Théorème 7.1.2.

- *Si l'on permute deux lignes ou deux colonnes, le déterminant change de signe.*
- $det\ {}^{t}A = det\ A$.

Théorème 7.1.3. *Tout déterminant ayant deux lignes (ou colonnes) identiques (ou proportionnelles) est nul.*

Exemple

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \\ -6 & -12 & 8 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -4 \end{vmatrix} \\
&= -2 \left(-1 \times \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Théorème 7.1.4. *On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant aux éléments d'une même ligne (ou colonne) des quantités proportionnelles aux éléments correspondants des autres lignes (ou colonnes).*

Démonstration :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
D' &= \begin{vmatrix} a_1 + \lambda b_1 + \mu c_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \lambda b_2 + \mu c_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + \lambda b_3 + \mu c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

donc $D = D'$.

Considérons le système suivant de n équations à n inconnues :

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,n}x_n = b_n \end{array} \right.$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{est appelé le déterminant du système.}$$

Proposition 7.1.1. • *Si le déterminant du système* (S) *est différent de zéro, alors le système a une solution unique.*

- *Un système homogène* ($b_i = 0 \ \ \forall i$) *de* n *équations à* n *inconnues dont le* **déterminant est non nul** *admet pour seule solution la solution nulle* $(0, 0, ..., 0)$.

- *Un système homogène de* n *équations à* n *inconnues possède une solution autre que la solution nulle si et seulement si son* **déterminant est nul**.

Théorème 7.1.5 (Critère d'indépendance)**.** *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* n. *Soit* v_1, v_2,..., v_n, n *vecteurs de* E. *On dit que* v_1, v_2,..., v_n *sont linéairement indépendants si et seulement si det* (v_1, v_2,..., v_n) *n'est pas nul.*

Calcul de déterminants d'ordre élevé
On utilise l'algorithme du **pivot de Gauss** (propriétés d'invariance du déterminant en ajoutant une combinaison d'une ligne à une autre ligne)
Exemple 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1 \times 3 \times 4 = -12$$

Exemple 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8$$

Si l'on calcule directement ce déterminant, on trouve la même valeur, mais c'est un peu plus long...

7.2 Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice

Définition 7.2.1. *Soit* A *une matrice carrée d'ordre* n. *Le vecteur*

$$V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

est appelé **vecteur propre** *de la matrice A pour la* **valeur propre** λ *si et seulement si $AV = \lambda V$ et $V \neq 0$.*

Si $A = (a_{ij})$, la relation $AV = \lambda V$ s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n = \lambda x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,n}x_n = \lambda x_n \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (a_{1,1} - \lambda)x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + (a_{2,2} - \lambda)x_2 + ... + a_{2,n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + (a_{n,n} - \lambda)x_n = 0 \end{array}\right.$$

Soit $(A - \lambda)V = 0$.

Or, un tel système possède une solution autre que la solution nulle si son **déterminant est nul**.

Définition 7.2.2. *On appelle* **polynôme caractéristique** *associé à la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, le polynôme de degré n suivant :*

$$p_A(\lambda) = det(A - \lambda I),$$

où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_{n,n}$.

Pour déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice :

- On détermine le polynôme caractéristique $p_A(\lambda)$. Les **valeurs propres** sont les racines de ce polynôme.
- Pour chaque valeur propre λ, on résout le système $AV = \lambda V$. On obtient ainsi le **vecteur propre** V associé à la valeur propre λ.

Exemple 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

- Calcul des valeurs propres

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -2 \\ 4 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (5 - \lambda)(-1 - \lambda) + 8 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3). \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de la matrice A sont

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 3.$$

- Calcul du vecteur propre V_1 associé à $\lambda_1 = 1$.

$$AV_1 = V_1 \iff \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \iff V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Calcul du vecteur propre V_2 associé à $\lambda_1 = 3$.

$$AV_2 = 3V_2 \iff \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \iff V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2

Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

- Calcul des valeurs propres

$$\begin{aligned} det(B - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} \\ = (-2-\lambda)(\lambda(\lambda-1) - 12) &- 2(-\lambda - 6) - (-12 + 3(1-\lambda)) \\ &= (\lambda+3)^2(\lambda - 5). \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de la matrice A sont

$$\lambda_1 = 5 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -3.$$

5 est valeur propre d'ordre 1,
-3 est valeur propre d'ordre 2.

- Calcul du vecteur propre V_1 associé à $\lambda_1 = 5$.

$$BV_1 = 5V_1 \iff \begin{cases} -7x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 7x_1 = 2x_2 - 3x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$$

Donc
$$V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Calcul des vecteurs propres V_2 et V_3 associés à $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$.
$$BV = -3V \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \quad x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \quad \iff \quad x_1 = -2x_2 + 3x_3$$
Donc
$$V = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3.$$
$$V_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 5$ est de dimension 1, puisqu'il est engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Le sous-espace propre associé aux valeurs propres $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$ est de dimension 2, puisqu'il est engendré par
$$V_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
qui sont linéairement indépendants.

- Les trois vecteurs V_1, V_2 et V_3 sont linéairement indépendants et donc forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 7.2.1. *Une matrice carrée d'ordre n ayant des valeurs propres multiples,* **peut** *posséder n vecteurs propres linéairement indépendants.*

Attention, ce n'est pas toujours le cas comme le montre l'exemple suivant.

Exemple : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Calcul des valeurs propres
  $det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2.$
  Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ est valeur propre d'ordre 2.

- Calcul des vecteurs propres associés à $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$$AV = 2V \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \iff x_2 = 0$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il est donc impossible de trouver une base de vecteurs propres. La matrice A n'est pas diagonalisable.

7.3 Matrices carrées diagonalisables

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}$

- Supposons que $p_A(\lambda) = det(A-\lambda I)$ admet n racines (pas nécessairement distinctes) λ_1, λ_2,..., λ_n.
- Soit V_1, V_2,..., V_n les n vecteurs propres linéairement indépendants associés à ces valeurs propres.
- (V_1, V_2,..., V_n) constitue une base de vecteurs propres de $\mathbb{R}^n$.
- Soit P la matrice de passage de la base initiale à la base de vecteurs propres (cette matrice est formée des vecteurs propres disposés en colonnes).

Comme $(A-\lambda_i I)V_i = 0$ pour tout $i = 1, ..., n$, on a

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Il en résulte, puisque P^{-1} existe que

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Théorème 7.3.1. *Toute matrice carrée A d'ordre n, ayant n vecteurs propres linéairement indépendants, est semblable à une matrice diagonale D formée des valeurs propres correspondantes.*
On dit qu'on a **diagonalisé** *la matrice A par le changement de base défini par la matrice P.*

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Exemple Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

- Les valeurs propres de B sont $\lambda_1 = 5$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$.
- Les vecteurs propres associés sont

$$V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Posons $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculons P^{-1} et vérifions que $D = P^{-1}DP$. On va utiliser l'algorithme du pivot de Gauss pour résoudre le système $PX = Y$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. On triangule donc le système suivant :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{-1} & -2 & 3 & y_1 \\ \hline -2 & 1 & 0 & y_2 \\ 1 & 0 & 1 & y_3 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 3 & y_1 \\ 0 & \mathbf{5} & -6 & y_2 - 2y_1 \\ \hline 0 & -2 & 4 & y_1 + y_3 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 3 & y_1 \\ 0 & 5 & -6 & y_2 - 2y_1 \\ 0 & 0 & 8 & y_1 + 2y_2 + 5y_3 \end{array}\right).$$

On obtient ainsi un système triangulaire que l'on résout, la solution est :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{8}(-y_1 - 2y_2 + 3y_3) \\ x_2 = \frac{1}{8}(-2y_1 + 4y_2 + 6y_3) \\ x_3 = \frac{1}{8}(y_1 + 2y_2 + 5y_3) \end{cases}$$

Cette solution peut s'écrire sous forme matricielle :

$$X = P^{-1}Y \quad \text{avec} \quad P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Si l'on calcule les produits BP et $P^{-1}BP$, on obtient:

$$BP = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -9 \\ -10 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$D = P^{-1}BP.$$

Proposition 7.3.1. *Une matrice carrée d'ordre n est diagonalisable si l'ordre de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre engendré par cette valeur propre.*

Exemple :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Valeurs propres : $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ est valeur propre d'ordre 2.
- Vecteurs propres associés à $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$: $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc le sous-espace propre est de dimension 1 alors que la valeur propre est d'ordre 2. Cette matrice n'est pas diagonalisable.

7.4 Exercices

Exercice 1

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Considérons f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1- Vérifier que $f \circ g = g \circ f$ et déterminer les valeurs propres de M et N.
2- Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle les matrices de f et g sont diagonales.