В презентации использованы копии со страниц учебника «Е.С.Вентцель, Л.А. Овчаров. Задачи и упражнения по теории вероятности» и иллюстрации из «Л. Клейнрок. Теория массового обслуживания» , а также копии из «И.В. Солнышкина. Теория систем массового обслуживания» и

«Н.В.Кошуняева,Н.Н.Патронова.Теория массового обслуживания» .

При подготовке также использован материал учебника «Е.С.Вентцель. Исследование операций: задачи, принципы, методология».

Простейшая СМО с отказами (задача Эрланга). На n-канальную СМО с отказами поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ, время обслуживания — показательное с параметром $\mu = 1 / \bar{t}_{\text{обсл}}$. Состояния СМО нумеруются по числу заявок, находящихся в СМО (в силу отсутствия очереди, оно совпадает с числом занятых каналов):

s_0 — СМО свободна;

s_1 — занят один канал, остальные свободны; …;

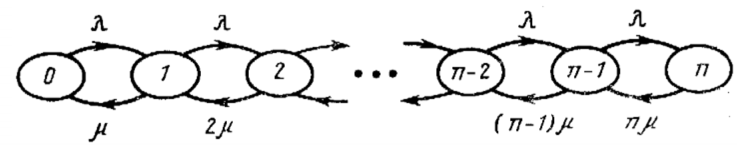
s_k — занято k каналов, остальные свободны ($1 \le k \le n$); …;

s_n — заняты все n каналов.

Финальные вероятности состояний выражаются формулами Эрланга:

$$p = \left\{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n\,!}\right\}^{-1}; \quad p_k = \frac{\rho^k}{k\,!}\, p_0 \;\; (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\rho = \lambda / \mu$.



Характеристики эффективности:

$$A = \lambda\,(1 - p_n); \quad Q = 1 - p_n; \quad P_{\text{отк}} = p_n; \quad \bar{k} = \rho\,(1 - p_n).$$

- Финальная вероятность последнего состояния выражается соответственно т.н. формулой потерь Эрланга:

$$p_n = \frac{(\lambda/\mu)^n / n\,!}{\sum_{k=0}^{n} (\lambda/\mu)^k / k\,!}$$

В обозначениях Кендалла эта задача запишется как

M / M / n / 0. Её частным случаем является простейшая одноканальная СМО с отказами (M / M / 1 / 0)

Задача 1.

Станция наведения истребителей имеет 3 канала. Каждый канал может одновременно наводить один истребитель на одну цель. Среднее время наведения истребителей на цель равно 2 мин. Поток целей простейший с плотностью *75* самолета *в час* . Найдите среднюю долю целей, проходящих через зону действия не обстрелянными, если цель, по которой наведение не началось в момент, когда она вошла в зону действия истребителей, вообще остается неактивной. Сделайте вывод о работе станции.

Решение: В задаче дано количество каналов обслуживания $n = 3$;

$\lambda = 75$ супост $/ч$; $t_{обсл} = 2$ *мин* $\Rightarrow \mu = \frac{1}{2} = 0{,}5$ супост $/мин$ *или* $60 * 0{,}5 =$

$= 30$ супост $/ч$; $\rho = \frac{75}{30} = 2{,}5$.

Находим вероятность того, что обслуживанием не занят ни один канал: $P_0 = (\sum_{n=0}^{n} \frac{\rho^n}{n!})^{-1} = (1 + 2{,}5 + \frac{2{,}5^2}{1*2} + \frac{2{,}5^3}{1*2*3})^{-1} = 0{,}11 \approx 11\ \%$;

$$P_{отк} = P_n = \frac{\rho^n}{n!} * P_0 = \frac{2{,}5^3}{3!} * 0{,}11 = 0{,}282 \approx 28\ \%;$$

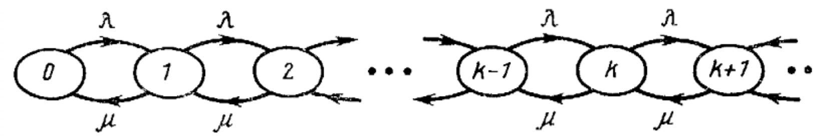
$$Q = P_{обсл} = 1 - P_{отк} = 1 - 0{,}282 = 0{,}718;$$

$$\overline{k} = \rho * P_{обсл} = \frac{A}{\mu} = 2{,}5 * 0{,}718 = 1{,}795 \approx 2 \text{ канала}.$$

Вывод: нужно добавить ещё один канал наведения.

Система M | M | 1 | ∞

Простейшая одноканальная СМО с неограниченной очередью. На одноканальную СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Время обслуживания — показательное с параметром $\mu = 1 / \bar{t}_{обсл}$. Длина очереди не ограничена. Финальные вероятности существуют только при $\rho = \lambda / \mu < 1$ (при $\rho \geq 1$ очередь растет неограниченно). Состояния СМО нумеруются по числу заявок в СМО, находящихся в очереди или обслуживамых:



s_0 — СМО свободна;

s_1 — канал занят, очереди нет;

s_2 — канал занят, заявка стоит в очереди; …;

s_k — канал занят, $k - 1$ заявок стоят в очереди; … .

Финальные вероятности состояний выражаются формулами:

$$\rho_0 = 1 - \rho, \quad \rho_k = \rho^k\,(1 - \rho) \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

где $\rho = \lambda / \mu < 1$.

Характеристики эффективности СМО:

$$A = \lambda;\ Q = 1;\ P_{отк} = 0;\quad \bar{z} = \frac{\mu}{1-\rho};\ \bar{r} = \frac{\rho^2}{1-\rho};\ \bar{t}_{сист} = \frac{\rho}{\lambda\,(1-\rho)};\ \bar{t}_{оч} = \frac{\rho^2}{\lambda\,(1-\rho)};$$

среднее число занятых каналов (или вероятность того, что канал занят)

$$\bar{k} = \lambda / \mu = \rho.$$

- Заметим, что бесконечная сумма $1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots = \lim_{k\to\infty} \frac{1-\rho^k}{1-\rho} = \frac{1}{1-\rho}$
- Средняя длина очереди легко получается из выражения

$$\bar{L}_{оч.} \equiv \bar{r} = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)\, p_k = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)\, \rho^k (1-\rho) = \rho^2 (1-\rho)\,(1 + 2\rho + 3\rho^2 + \ldots)$$

- если внимательно посмотреть на эти строки:

- $1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots$
- $\rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots = \rho\,(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots)$
- $\rho^2 + \rho^3 + \ldots$
- ……….
- (подробнее см. конспект практического занятия)

А среднее число заявок в СМО $\bar{z} = \sum_{k=1}^{\infty} k\, p_k = \rho\,(1-\rho)\,(1 + 2\rho + 3\rho^2 + \ldots)$

В этой СМО в предельном стационарном режиме среднее время пребывания заявки в системе $\bar{t}_{сист}$ выражается через среднее число заявок в системе с помощью *формулы Литтла*:

$\bar{t}_{сист} = \bar{z} / \lambda$, где λ — интенсивность потока заявок. И $\bar{t}_{оч} = \bar{r} / \lambda$.

- Найдём выражение для среднего числа занятых каналов $\bar{k}$
- $\bar{k}$ = P(что канал занят) · n =

= n ($t^{обслуж.}$/ [длина интервала м\у заявками на канале]) = n · $\lambda^{обслуживания\ на\ канале}$ · $t^{обслуж.}$ =

= A $t^{обслуж.}$ = A / μ

ТЕОРЕМА (формула Литтла)

В открытой СМО среднее время нахождения заявки в системе и среднее время нахождения заявки в очереди (т.е. среднее время ожидания обслуживания) связаны со средним количеством заявок в СМО и со средней длиной очереди соответственно через интенсивность потока обслуживания (т.е. через абсолютную пропускную способность СМО, а в случае неограниченной очереди – таким же образом и через интенсивность входящего потока) следующими выражениями:

$\overline{t_{оч.}} = \overline{r} / \lambda$; $\overline{t_{сист.}} = \overline{z} / \lambda$ (неогр. очередь)

$\overline{t_{оч.}} = \overline{r} / A$; $\overline{t_{сист.}} = \overline{z} / A$ (огр. очередь)

Д-ВО

Пусть: X(t) число заявок, прибывших в СМО до момента t,

Y(t) число заявок, покинувших СМО до момента t.

И та, и другая функции являются случайными и меняются скачком (увеличиваются на единицу) в моменты приходов заявок и уходов заявок Вид функций показан на рисунке: обе линии — ступенчатые, верхняя — X(t), нижняя — Y(t). Очевидно, что для любого момента t разность Z(t) = X(t)-Y(t) есть не что иное, как число заявок, находящихся в СМО. Когда линии сливаются, в системе нет заявок.

- Рассмотрим очень большой промежуток времени T и вычислим для него среднее число заявок, находящихся в СМО. Оно будет равно:

$$\overline{z} = \frac{1}{T} \int_0^T Z(t)\, dt$$

- Но этот интеграл - не что иное, как площадь фигуры, заштрихованной на рисунке. Фигура состоит из прямоугольников с высотой, равной единице, и основанием, равным времени пребывания в системе соответствующей заявки (первой, второй и т. д.). Обозначим эти времена t_1 , t_2 , … . Тогда

$$\overline{z} = \frac{1}{T} \Sigma t_i \quad \rightarrow \quad \overline{z} = \frac{1}{AT} \Sigma t_i A$$

Но AT - это средн. число обслужен. за время T заявок, поэтому:

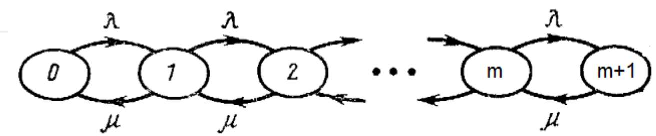
$\overline{z} = \overline{t_{сист}}\ A$ (а при неогр. очереди $A = \lambda$)

Простейшая одноканальная СМО с ограничением по длине очереди. На одноканальную СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ; время обслуживания — показательное с параметром $\mu = 1 / \bar{t}_{обсл}$. В очереди m мест. Если заявка приходит в момент, когда все эти места заняты, она получает отказ и покидает СМО. Состояния СМО:

s_0 — СМО свободна; s_1 — канал занят, очереди нет;
s_2 — канал занят, одна заявка стоит в очереди; …;
s_k — канал занят, $k - 1$ заявок стоят в очереди; …;
s_{m+1} — канал занят, m заявок стоят в очереди.

Финальные вероятности состояний существуют при любом $\rho = \lambda / \mu$

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}; \quad p_k = \rho^k p_0 \ (k = 1, \ldots, m+1).$$



Характеристики эффективности СМО:

$$A = \lambda\,(1 - p_{m+1}); \quad Q = 1 - p_{m+1}; \quad P_{отк} = p_{m+1}.$$

Среднее число занятых каналов (вероятность того, что канал занят)

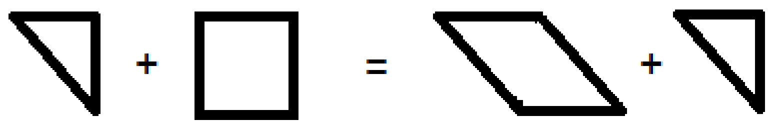
$\bar{k} = 1 - p_0.$ Среднее число заявок в очереди

$$\bar{r} = \frac{\rho^2\,[1 - \rho^m\,(m + 1 - m\rho)]}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)}.$$

Среднее число заявок в СМО $\bar{z} = \bar{r} + \bar{k}.$

По формуле Литтла $\bar{t}_{сист} = \bar{z} / A; \quad \bar{t}_{оч} = \bar{r} / A.$

- В этой задаче средняя длина очереди найдена из следующего выражения:
- $$L_{оч.} \equiv r = \sum_{k=1}^{m+1} (k-1)\, p_k = \sum_{k=1}^{m+1} (k-1)\, \rho^k \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} = \rho^2 \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} (1 + 2\rho + 3\rho^2 + \dots + m\rho^{m-1}) \qquad (*)\ ,$$
  - которое не трудно упростить в смысле практического удобства, увидев, что сумма элементов в зелёном параллелограмме из таблицы внизу равна $(1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{m-1})^2$, сумма в правом красном треугольнике в ρ^m больше, чем в левом, а сумма в квадратной части этой таблицы, остающаяся при отбрасывании левого треугольника, равна $m\rho^{m-1} (1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{m-1})$. Тогда, сопоставив, что



  - можно найти сумму в левом треугольнике, которая отличается от суммы в последней скобке выражения (*) лишь пределом суммирования.

1	ρ	ρ^2 …	ρ^{m-2}	ρ^{m-1}	ρ^m	ρ^{m+1}	…	ρ^{2m-2}
	ρ	ρ^2 …	ρ^{m-2}	ρ^{m-1}	ρ^m	ρ^{m+1}	…	ρ^{2m-2}
		ρ^2 …	ρ^{m-2}	ρ^{m-1}	ρ^m	ρ^{m+1}	…	ρ^{2m-2}
		…	…	…		…		
				ρ^{m-1}	ρ^m	ρ^{m+1}	…	ρ^{2m-2}