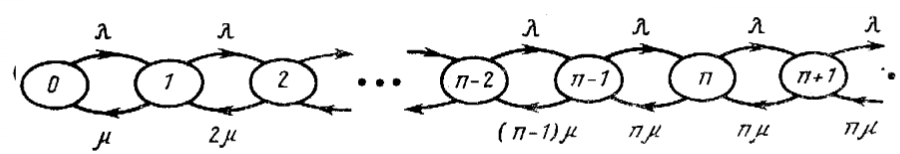
В презентации использованы копии со страниц учебников «Е.С.Вентцель, Л.А. Овчаров. Задачи и упражнения по теории вероятности» и «Л. Клейнрок. Теория массового обслуживания» , а также копии из учебного пособия «Южаков А.А. Прикладная теория систем массового обслуживания».

Простейшая многоканальная СМО с неограниченной очередью. На n-канальную СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ; время обслуживания одной заявки — показательное с параметром $\mu = 1 / \bar{t}_{обсл}$. Финальные вероятности существуют только при $\rho / n = \chi < 1$, где $\rho = \lambda / \mu$. Состояния СМО нумеруются по числу заявок в СМО:

$$\left.\begin{aligned} &s_0 — \text{СМО свободна;} \\ &s_1 — \text{занят один канал; …;} \\ &s_k — \text{занято } k \text{ каналов } (1 \le k \le n); \text{ …;} \\ &s_n — \text{заняты все } n \text{ каналов;} \end{aligned}\right\} \text{очереди нет;}$$

s_{n+1} — заняты все n каналов, одна заявка стоит в очереди; …;
s_{n+r} — заняты все n каналов, r заявок стоят в очереди; … .
Финальные вероятности состояний выражаются формулами:

$$p_0 = \left\{1 + \frac{\rho}{1!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \frac{1}{1-\chi}\right\}^{-1}$$



$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0 \ (1 \le k \le n); \quad p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0 = \chi^r p_n \ (r = 1, 2, \ldots).$$

Характеристики эффективности СМО:

$$\bar{r} = \rho^{n+1} p_0 / [n \cdot n! (1-\chi)^2] = \chi p_n / (1-\chi)^2; \qquad \bar{k} = \rho$$

$$\bar{z} = \bar{r} + \bar{k} = \bar{r} + \rho; \qquad \bar{t}_{сист} = \bar{z} / \lambda; \quad \bar{t}_{оч} = \bar{r} / \lambda.$$

Простейшая многоканальная СМО с ограничением по длине очереди. Условия и нумерация состояний те же, что и с неогр.оч с той разницей, что число m мест в очереди ограничено. Финальные вероятности состояний существуют при любых λ и μ и выражаются формулами:

$$p_0 = \left\{1 + \frac{\rho}{1!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!}\frac{1-\chi^m}{1-\chi}\right\}^{-1}$$

когда $\chi = 1$

вместо $\frac{1-\chi^m}{1-\chi}$ будет $(1 + \chi + \chi^2 + \ldots + \chi^{m-1})$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!}p_0 \quad (1 \le k \le n); \qquad p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!}p_0 = \chi^r p_n \quad (1 \le r \le m),$$

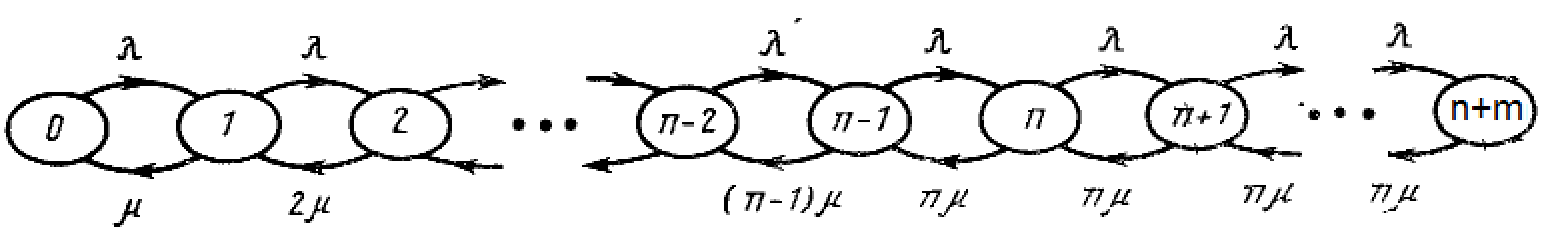
где $\chi = \rho / n = \lambda / (n\mu)$.

Характеристики эффективности СМО:

$$A = \lambda\,(1 - p_{n+m}); \quad Q = 1 - p_{n+m}; \quad P_{\text{отк}} = p_{n+m}; \quad \bar{k} = \rho\,(1 - p_{n+m});$$

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!}\,\frac{1-(m+1)\,\chi^m + m\chi^{m+1}}{(1-\chi)^2}; \qquad \bar{z} = \bar{r} + \bar{k};$$

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r} / A \qquad \bar{t}_{\text{сист}} = \bar{z} / A$$



Пример

Автозаправочная станция (АЗС) имеет две колонки ($n = 2$); площадка возле нее допускает одновременное ожидание не более четырех автомобилей ($m = 4$). Поток автомобилей, прибывающих на станцию, простейший с интенсивностью $\lambda = 1$ авт/мин. Время обслуживания автомобиля — показательное со средним значением $\bar{t}_{обсл} = 2$ мин. Найти финальные вероятности состояний АЗС и ее характеристики: A, Q, $P_{отк}$, $\bar{k}$, $\bar{z}$, $\bar{r}$, $\bar{t}_{сист}$, $\bar{t}_{оч}$.

Решение. $\lambda = 1$, $\mu = 1/2 = 0{,}5$; $\rho = 2$; $\chi = \rho / n = 1$.

$$p_0 = \left\{1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^2}{2!} \cdot 4\right\}^{-1} = \frac{1}{13};\ \ p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{2}{13};$$

$$P_{отк} = 2/13; \quad Q = 1 - P_{отк} = 11/13;$$

$$A = \lambda Q = 11/13 \approx 0{,}85 \text{ авт/мин};$$

$$\bar{k} = A/\mu = 22/13 \approx 1{,}69 \text{ колонки};$$

$$\bar{r} = \frac{2^2}{2!}\,\frac{4\,(4+1)}{2} \cdot \frac{1}{13} \approx 1{,}54 \text{ автомобиля};$$

$$\bar{z} = \bar{r} + k \approx 3{,}23 \text{ автомобиля}.$$

- В *замкнутой СМО* поток требований находится внутри системы и полностью зависит от состояния системы (в противоположность открытой СМО) .
- Пример:
- Компьютерный класс, или вычислительная система в которой узлы (компьютеры, устройства) периодически выходят из строя (отказ) и требуют восстановления: ремонта или переустановки программного обеспечения и таким образом создают заявки на обслуживание.

- Для таких замкнутых СМО в литературе можно встретить такое название, как например «СМО с конечным числом источников нагрузки» (или же с «конечным числом [источников заявок]\[заявок]\[клиентов]»), что означает, что каждый источник создаёт новую заявку при условии выполнения всех предыдущих.

- Дадим обзор простейших моделей замкнутых СМО, т.е. потоки отказов устройств будем рассматривать простейшими, а время восстановления каждого устройства - экспоненциальным.

Задачу про компьютерный класс(или ВС) можно рассмотреть в нескольких вариациях:

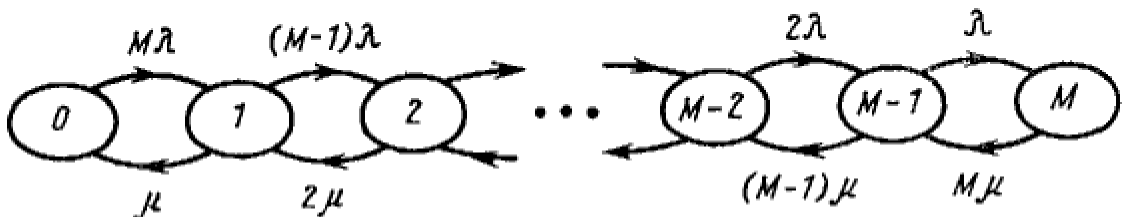
- устройства восстанавливаются по одному;

  (замкнутая одноканальная СМО с неограниченной очередью)
- могут восстанавливаться одновременно сразу все отказавшие устройства;

  (замкнутая СМО моментального обслуживания (или же: бесконечноканальная))
- есть строгое ограничение на число одновременно восстанавливающихся устройств.

  (замкнутая многоканальная СМО с неограниченной очередью)

- **Простейшая замкнутая СМО моментального обслуживания** (когда ремонтируем одновременно все узлы-устройства)



$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda(M-k), & 0 \leqslant k \leqslant M; \\ 0 \text{ в остальных случаях}; \end{cases}$$

$$\mu_k = k\mu, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

(Процесс гибели и размножения с такими интенсивностями)

M – количество узлов системы

$$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda(M-i)}{(i+1)\mu} = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \binom{M}{k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant M,$$

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{M} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \binom{M}{k}\right]^{-1} = \frac{1}{(1+\lambda/\mu)^M}$$

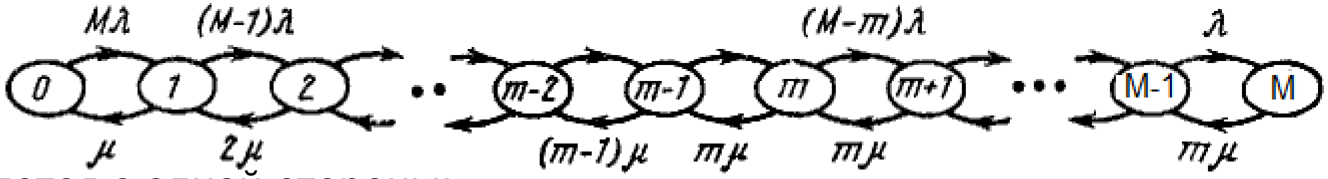
Таким образом,

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \binom{M}{k}}{(1+\lambda/\mu)^M}, & 0 \leqslant k \leqslant M; \\ 0 \text{ в остальных случаях}. \end{cases}$$

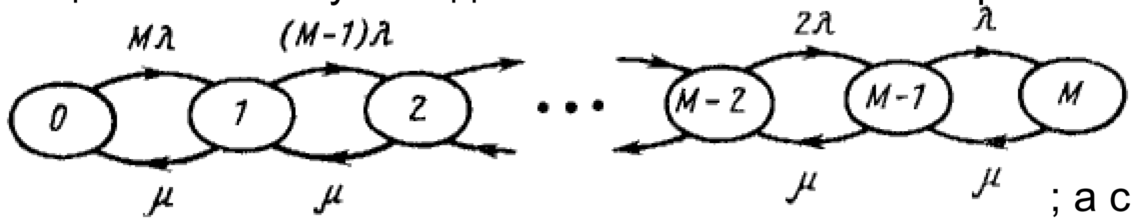
Важнейшей характеристикой эффективности будет среднее число работающих узлов системы:

$$\bar{z} = \sum_{k=0}^{M} k p_k = \frac{\sum_{k=0}^{M} k \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \binom{M}{k}}{(1+\lambda/\mu)^M} = \frac{\rho\left((1+\rho)^M\right)'_\rho}{(1+\rho)^M} = \frac{M\lambda/\mu}{1+\lambda/\mu}$$

- **Простейшая замкнутая многоканальная СМО с неограниченной очередью** (для задачи об отказах и восстановлении узлов системы – когда ремонтируют одновременно ограниченное число узлов) моделируется процессом Маркова вида

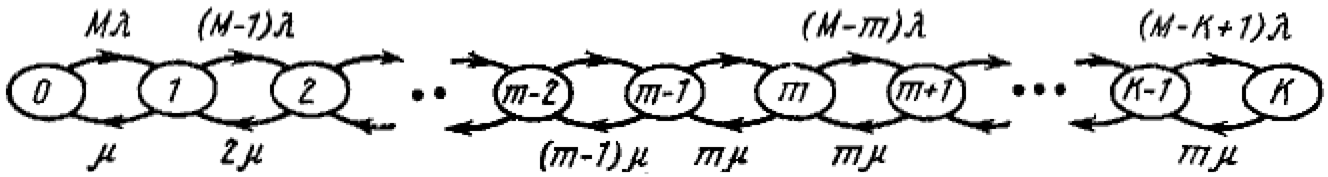


- и является с одной стороны:
  1) обобщением замкнутой одноканальной СМО с неограниченной очередью:



- ; а с другой стороны

2)частным случаем **простейшей замкнутой многоканальн. СМО с огранич.очередью**:



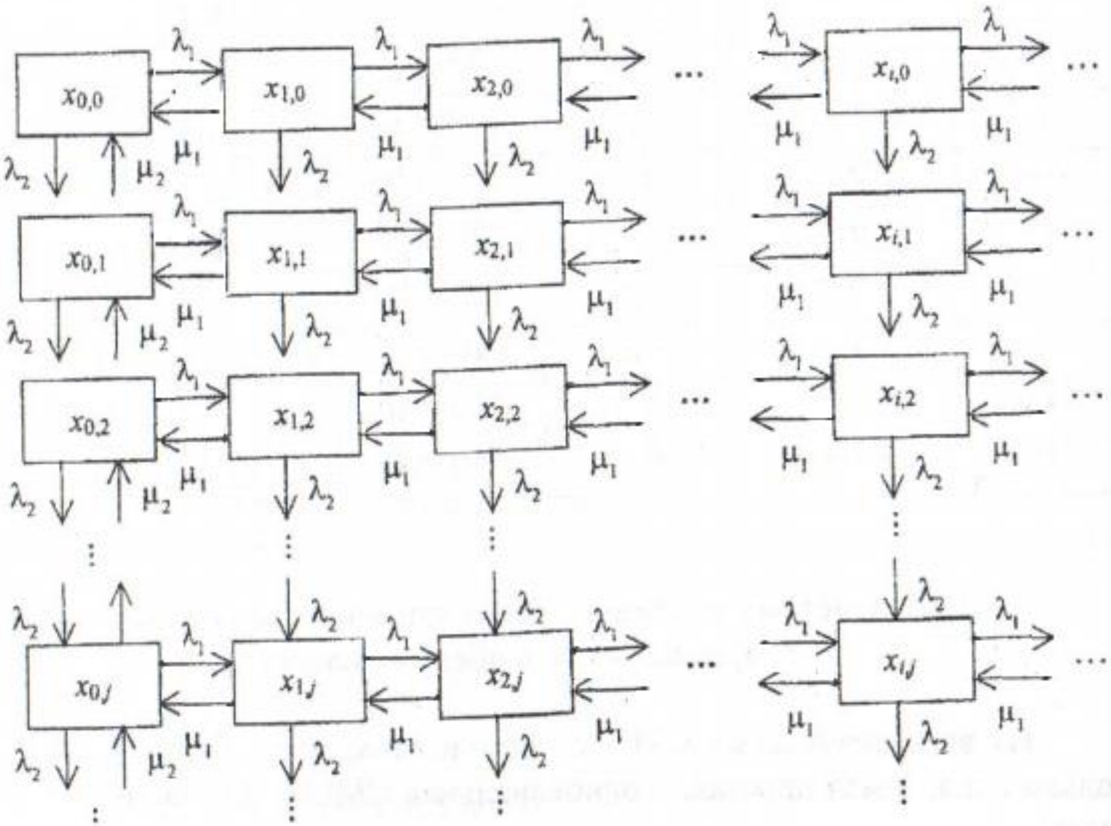
- $$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda (M-i)}{(i+1)\mu} = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \binom{M}{k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant m-1.$$

В области $m \leqslant k \leqslant K$ имеем $p_k = p_0 \prod_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda (M-i)}{(i+1)\mu} \prod_{i=m}^{k-1} \frac{\lambda (M-i)}{m\mu} =$

$$= p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \binom{M}{k} \frac{k!}{m!} m^{m-k}, \quad m \leqslant k \leqslant K.$$

Формула для p_0 получается весьма сложной и здесь не приводится, хотя она может быть получена непосредственными вычислениями.

Схема процесса Маркова для **простейшей одноканальной СМО с приоритетами и неограниченной очер**.



Первый индекс состояния – к-во приоритетных заявок в очереди, а второй – неприоритетных.

λ_1 – интенсивность потока приоритетных заявок;

λ_2 – интенсивность потока неприоритетных заявок

μ_1 и μ_2– параметры экспоненциальных распределений времени обслуживания приоритетной и неприоритетной заявки соответственно

Система Колмогорова:

$$\frac{dP_{0,0}(t)}{dt} = -(\lambda_1+\lambda_2)P_{0,0}(t)+\mu_1 P_{1,0}(t)+\mu_2 P_{0,1}(t),$$

....

$$\frac{dP_{i,0}(t)}{dt} = -(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)P_{i,0}(t)+\lambda_1 P_{i-1,0}(t)+\mu_1 P_{i+1,0}(t), \quad i>0,$$

....

$$\frac{dP_{0,j}(t)}{dt} = -(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)P_{0,j}(t)+\lambda_2 P_{0,j-1}(t)+\mu_2 P_{0,j+1}(t)+\mu_1 P_{1,j}(t), \quad j>0,$$

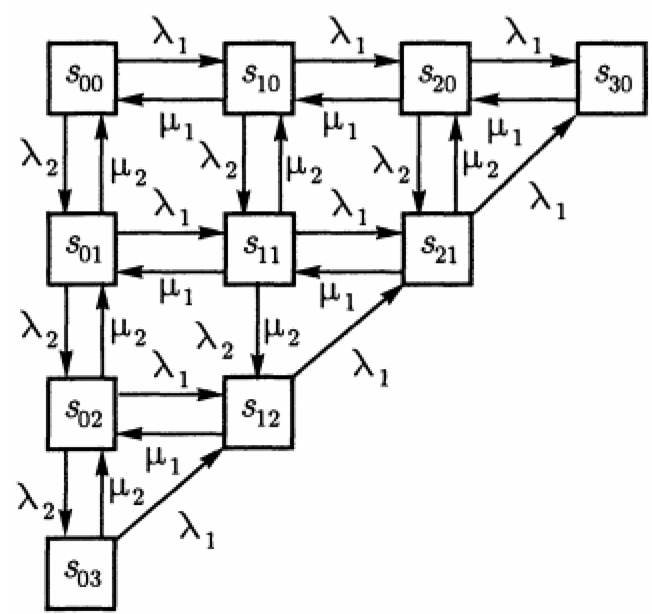
....

$$\frac{dP_{i,j}(t)}{dt} = -(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)P_{i,j}(t)+\lambda_2 P_{i,j-1}(t)+\lambda_1 P_{i-1,j}(t)+\mu_1 P_{i+1,j}(t), \quad i>0,\ j>0.$$

при начальных условиях $P_{0,0}(0)=1;\ P_{i,j}(0)=0$ (при $i\neq 0$ или $j\neq 0$)

- **Схема для простейшей одноканальной СМО с приоритетами и ограниченной очередью**

- (в этой задаче приоритетные заявки вытесняют неприоритетные из очереди, если она была полностью заполнена)



- **Схема для простейшей многоканальной СМО с приоритетами и отказами**

  (в этой задаче приоритетные заявки вытесняют неприоритетные с устройств обслуживания, если все они заняты)