# Свойства вероятности:

- 1. P(Ø) = 0

- 2. *Аддитивность вероятности*: для всякого конечного набора попарно несовместных событий A1, A2,…, An

  $$P(UA_i) = \Sigma P(A_i)$$

- 3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ для любого A

- 4. P(AUB) = P(A)+P(B)-P(AB)

- 5. P(UAn) = ΣP(Ai) - ΣP(AiAj) + ΣP(AiAjAk) - …

- 6. A c B ➔ P(A) ≤ P(B)

- 7. A1 c A2 c A3 c… ➔ ∃ lim P(Ai) = P (U Ai)

- 8. A1 ɔ A2 ɔ A3 ɔ … ➔ ∃ lim P(Ai) = P (∩ Ai)

*непрерывность вероятности*

- **Определение** Функция распределения $F_X(y)$ называется абсолютно непрерывной, если для любого значения y
- $$F_X(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt; \qquad (1)$$
- 

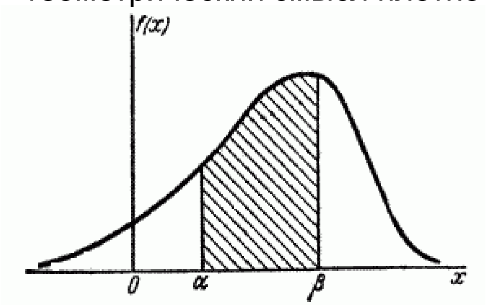
  стоящая под знаком интеграла функция f(t) называется *плотностью* распределения.

- 1. Определение напоминает, что для случайной величины X с плотностью распределения f (t) вероятность принимать значения внутри любого интервала
- вычисляется как площадь под графиком f (t) над этим интервалом.

- 2. Интеграл (1) непрерывен по x, поэтому функция распределения случайной величины с абсолютно непрерывным распределением всюду непрерывна .

- 3. Из равенства (1) следует также, что плотность абсолютно непрерывного
- распределения равна производной от функции распределения: f (x) = F'(x)

геометрический смысл плотности




- **Свойства плотности**

- 1. $f_X(t) \geq 0$
- 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt = 1$
- 3. $P\,(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{-\infty}^{b} f_X(t)\, dt - \int_{-\infty}^{a} f_X(t)\, dt = \int_{a}^{b} f_X(t)\, dt$ для любых a < b

1. Равномерное распределение

$$f(t) \equiv u_{a,b}(t) = \begin{cases} 1/(b-a), \text{ если } t \in [a, b], \\ 0, \text{ если } t \notin [a, b]. \end{cases} \qquad F(y) \equiv U_{a,b}(y) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t > b \end{cases}$$

2. Показательное (экспоненциальное) распределение

$$f(t) \equiv e(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t \le 0, \\ \alpha e^{-\alpha t}, \text{ если } t \in [a, b]. \end{cases} \qquad F(y) \equiv E(y) = \begin{cases} 0, & y<0 \\ 1^{-}e^{\alpha y}, & y>0 \end{cases}$$

3. Нормальное (гауссовское) распределение

$$f(t) = \varphi_{a,\sigma^2}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}}, t \in R \qquad F(y) = \Phi_{a,\sigma^2}(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{\frac{-(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}}$$

и его частный случай при α=0, σ=1 - стандартное нормальное распределение

$$\varphi_{0,1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(t^2}{2}} , t \in R \qquad \Phi_{0,1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{\frac{-(t^2}{2}} dt$$

4. Гамма-распределение

$$\gamma_{\alpha,\lambda} = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ (\alpha^{\lambda}/\Gamma(\lambda))\, t^{\lambda-1} e^{-\alpha t}, & t > 0, \end{cases}$$

где $$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} t^{\lambda-1} e^{-t} dt$$

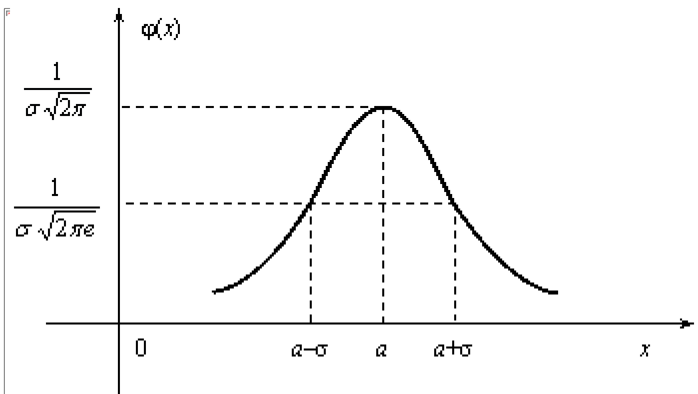
$\Gamma(\lambda+1)=\lambda\Gamma(\lambda)$, поэтому $\Gamma(n+1)=n!$

5. Распределение Коши

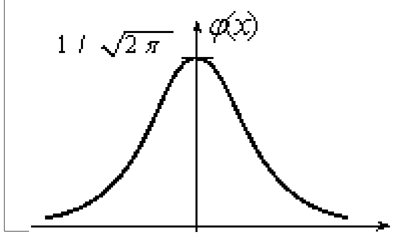
$k(t) = 1/\pi * 1/(1+t^2)$ $\quad -\infty < t < +\infty$ $\quad K(y) = ½ + 1/\pi \operatorname{arctg} y$

ГРАФИКИ ПЛОТНОСТЕЙ

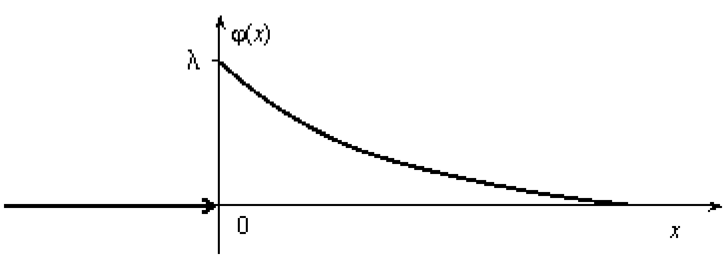
нормального

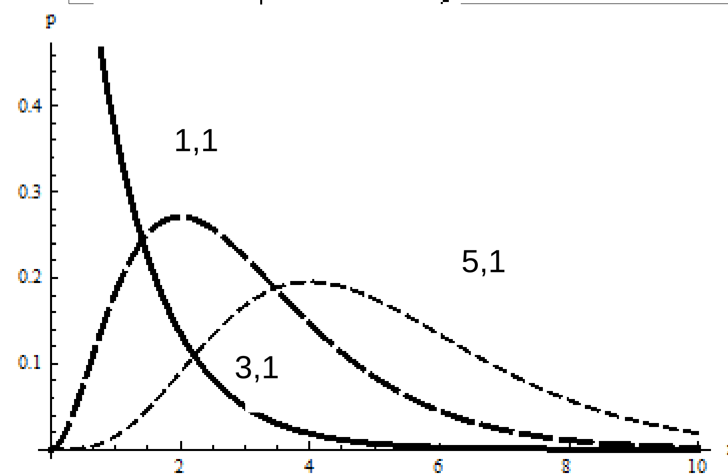



стандартного нормального




экспоненциального




гамма-распределения

**Определение**. Функция распределения F относится к смешанному типу, если при всех значениях y

$$F(y) = \alpha F_1(y) + \beta F_2(y),$$

где $F_1(y)$ — абсолютно непрерывная, а $F_2(y)$ — дискретная функция распределения, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$.

**Определение**. Функцией распределения случайного вектора X (многомерной функцией распределения, совместной функцией распределения) называется

$$F_{X1,X2,\ldots,Xn}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = P(X_1 < y_1, X_2 < y_2, \ldots, X_n < y_n),$$

где перечисление событий через запятую означает одновременное их осуществление, то есть пересечение.

**Определение**. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называются независимыми, если для любых $B_1 \subset R, \ldots, B_n \subset R$ выполняется соотношение

$$P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \ldots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1)\ P(X_2 \in B_2) \ldots P(X_n \in B_n).$$

- **Свойства функции совместного распределения.**
- Для простоты обозначений ограничимся вектором $(X_1, X_2)$ из двух величин (для n величин выполнены те же свойства).
- 

  1) Для любых $y_1, y_2$ верно неравенство:
  $0 \le F_{X1,\, X2}(y_1, y_2) \le 1$.

- 2) $F_{X1,X2}(y_1, y_2)$ не убывает по каждой координате вектора $(y_1, y_2)$.

- 3) Для любого i = 1, 2 существует $\lim\limits_{y_i \to -\infty} F_{X1,X2}(y_1, y_2) = 0$.
- Существует двойной предел $\lim\limits_{y_1 \to +\infty} \lim\limits_{y_2 \to +\infty} F_{X1,X2}(y_1, y_2) = 1$.

- 4) Функция $F_{X1,X2}(y_1, y_2)$ по каждой координате вектора $(y_1, y_2)$ непрерывна слева.

  5) Чтобы по функции совместного распределения восстановить функции распределения $X_1$ и $X_2$ в отдельности, следует устремить мешающую переменную к $+\infty$:
- $\lim\limits_{y_1 \to +\infty} F_{X1,X2}(y_1, y_2) = F_{X2}(y_2)$, $\quad\quad \lim\limits_{y_2 \to +\infty} F_{X1,X2}(y_1, y_2) = F_{X1}(y_1)$.

  Для n-мерного случая последнее свойство выглядит так:
  $\lim\limits_{y_n \to +\infty} F_{X1,X2,\ldots Xn}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = F_{X1\, X2,\ldots Xn-1}(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$,

- Пусть на вероятностном пространстве <Ω, F, P> (где F – мн-во событий) задана случайная величина X. Если g(X) — случайная величина, то полезно уметь находить распределение g(X) по распределению X.

- Если X имеет дискретное распределение, то для любой g(X) также имеет дискретное распределение, и таблица её распределения находится просто по определению

-

| X | $y_1$ | $y_2$ | … |
|---|---|---|---|
| P(X=y) | $p_1$ | $p_2$ | … |

➔

| g(X) | $g(y_1)$ | $g(y_2)$ | … |
|---|---|---|---|
| P(g(X)=g(y)) | $p_1$ | $p_2$ | … |

-

- **ТЕОРЕМА 1**
- Пусть X имеет функцию распределения $F_X(y)$ и плотность распределения $f_X(y)$, и постоянная a отлична от нуля. Тогда случайная величина Y = aX + b имеет плотность распределения $f_Y(x) = 1/\ |a|\ f_X\ (\ (y - b)/\ a)$.

- **Доказательство**.
- Пусть сначала $a > 0$.
- $F_Y(x) = P(aX + b < y) = P(X < (y - b)/a) = F_X((y - b)/a) = \int_{-\infty}^{(y-b)/a} f_X(t)dt$
- Сделаем замену переменной в последнем интеграле. Переменную $t$ заменим на новую переменную $u$ так: $t = (u - b)/a$. Тогда $dt = du/a$, верхняя граница области интегрирования $t = (y - b)/a$ перейдёт в $u = y$, нижняя $t = -\infty$ перейдёт в $u = -\infty$. Получим
- $F_X(y) = \int_{-\infty}^{y} (1/a)\, f_X((u-b)/a)du$
- Функция под интегралом — плотность распределения $f_Y(u)$ случайной величины $Y = aX + b$ при $a > 0$.
  Пусть теперь $a < 0$.
- $F_Y(x) = P(aX + b < y) = P(X > (y - b)/a) = \int_{(y-b)/a}^{+\infty} f_X(t)dt$
- Сделаем ту же замену переменной $t = (u - b)/a$, $u = at + b$. Но теперь граница интегрирования $t = +\infty$ перейдёт в $u = -\infty$, поскольку $a < 0$. Получим
- $F_X(y) = \int_{y}^{-\infty} (1/a)\, f_X((u-b)/a)du = \int_{-\infty}^{y} (1/|a|)\, f_X((u-b)/a)du$ ■

- **Теорема 2**. Пусть $X$ имеет плотность распределения $f_X(y)$, и функция $g : R \to R$ монотонна. Тогда случайная величина $Y = g(X)$ имеет плотность распределения $f_Y(t) = ( g^{-1}(t) )' f_X( g^{-1}(t) )$ . Здесь $g^{-1}$ — функция, обратная к $g$, и $(g^{-1}(y))'$ — её производная

- **Из теоремы 1 следует:**

  **Следствие 1**. Если X € $Φ_{0,1}$, то Y = σX + α € $Φ_{α,σ^2}$ .

- **Следствие 2**. Если X € $Φ_{α,σ^2}$, то Y = (X – α)/σ € $Φ_{0,1}$ .

- **Следствие 3**. Если X € $U_{0, 1}$, то aX + b € $U_{b, a+b}$ при a > 0

- **Следствие 4**. Если X € $E_α$, то αX € $E_1$.

  **Следствие 5**. Если X € $Φ_{α,σ^2}$, то Y = AX + B € $Φ_{Aα+ B, A^2σ^2}$

**ТЕОРЕМА 3**

Если случайные величины X и Y независимы и имеют плотности распределения $f_X(t)$ и $f_Y(t)$ соответственно, то случайная величина X + Y также будет иметь плотность, равную

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u) f_Y(t - u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(v)\, f_X(t - v)\,dv.$$

Эти интегралы называются *свертками плотностей* $f_X$ и $f_Y$.

**Д-ВО**

Достаточно доказать первое соотношение, второе получается из него заменой

$v = t - u$. Имеем для функции распределения

$$F_{X+Y}(y) = P(X+Y < y) = P((X,Y) \in \{(u,v): u+v < y\}) = \iint\limits_{u+v<y} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u) \int_{-\infty}^{y-u} f_Y(v)\,dv\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u) \int_{-\infty}^{y} f_Y(t-u)\,dt\,du = \int_{-\infty}^{y} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\, f_Y(t-u)\,du \right\} dt$$

Мы здесь воспользовались свойством $f_{X,Y}(u,v) = f_X(u)\, f_Y(v)$ для независимых X и Y, и заменой переменных $t = u+v$ ■

- **Следствие 1.** Пусть случайные величины $X \subset \Pi_{\lambda}$ и $Y \subset \Pi_{\mu}$ независимы. Тогда $X + Y € \Pi_{\lambda+\mu}$.

- **Следствие 2**. Пусть случайные величины $X € B_{n,p}$ и $Y € B_{m,p}$ независимы. Тогда $X + Y € B_{n+m,p}$.

- **Следствие 3**. Пусть случайные величины $X € \Phi_{\alpha 1,\sigma 1^2}$ и $Y € \Phi_{\alpha 2,\sigma 2^2}$ независимы. Тогда $X + Y € \Phi_{\alpha 1+\alpha 2,\sigma 1^2+\sigma 2^2}$.

- **Следствие 4** Пусть случайные величины $X € \Gamma_{\alpha,\lambda 1}$ и $Y € \Gamma_{\alpha,\lambda 2}$ независимы. Тогда $X + Y € \Gamma_{\alpha,\lambda 1+\lambda 2}$
- .
- **Следствие 5.** Пусть независимые случайные величины $X_1 \ldots X_n$ имеют показательное распределение $E_{\alpha} = \Gamma_{\alpha,1}$. Тогда $X_1 + \ldots + X_n € \Gamma_{\alpha,n}$