**Замечание**
Случайные процессы также иногда называют *случайными функциями*.

**Опр.**

Если n-мерная функция распределения $F_X(y_1,t_1;\ldots;y_n,t_n)$ допускает представление

$$F_X(y_1,t_1;\ldots;y_n,t_n) = \int_{-\infty}^{y_1}\ldots\int_{-\infty}^{y_n} f_X(y_1,t_1;\ldots;y_n,t_n)\,dy_n\ldots dy_1$$

где $f_X(y_1,t_1;\ldots;y_n,t_n)$ – некоторая измеримая неотрицательная функция такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y_1,t_1;\ldots;y_n,t_n)\,dy_n\ldots dy_1 = 1$$

то $f_X$ называется n-мерной плотностью распределения случайного процесса X(t).
(также для плотности распространено обозначение $p_X$)

При этом условия согласованности примут вид

$$f_X(y_1,t_1;\ldots;y_n,t_n) = \int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y_1,t_1;\ldots;y_n,t_n;y_{n+1},t_{n+1};\ldots;y_{n+p},t_{n+p})\,dy_{n+p}\ldots dy_{n+1}$$

$$f_X(y_1,t_1;\ldots;y_n,t_n) = f_X(y_{i1},t_{i1};\ldots;y_{in},t_{in}) \quad .$$

- Рассмотрим примеры на нахождение конечномерных функций распределения.

- **Пример1**. Пусть случайный процесс $X(t) = \varphi(t)V$, $t \in [0,1]$, где V – некоторая случайная величина, с функцией распределения $F_V(y)$, а $\varphi(t) > 0$.
- Найти многомерную функцию распределения случайного процесса X(t).

- **Решение**. В соответствии с определением
- $F_X(y_1,t_1;\ldots;y_n,t_n) = P\{X(t_1)<y_1, \ldots, X(t_n)<y_n\} = P\{\varphi(t_1)V < y_1, \ldots, \varphi(t_n)V < y_n\} =$
- $$= P\{V < \frac{y_1}{\varphi(t_1)}, \ldots, V < \frac{y_n}{\varphi(t_n)}\} = P\{V < \min_{i=1,2,\ldots} \frac{y_i}{\varphi(t_i)}\} = F_V(\min_{i=1,2,\ldots} \frac{y_i}{\varphi(t_i)})$$

- Если функция распределения $F_V(y)$ имеет плотность $f_V(x)$, то существует
- и одномерная плотность случайного процесса X(t). Так как для n = 1 имеем

- $F_X(y,t) = F_V(\frac{y}{\varphi(t)}) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\varphi(t)} f_V(\frac{z}{\varphi(t)})\, dz$, то

- $f_X(y,t) = \frac{1}{\varphi(t)} f_V(\frac{x}{\varphi(t)})$

- **Пример2**.
- Пусть случайный процесс, определяется соотношением
- $X(t) = Ut+V$, где $U$ и $V$ – независимые случайные величины с функциями
- распределения $F_U(x)$, $F_V(y)$. Определить вид реализаций данного процесса
- и найти закон распределения.

- **Решение**. Реализации этого случайного процесса представляют собой прямые линии со случайным наклоном и случайным начальным значением при $t = 0$. Одномерная функция распределения случайного процесса $X(t)$ при $t > 0$ имеет вид

$$F_X(y,t) = P\{X(t)<y\} = P\{ Ut + V < y \} = \int_{-\infty}^{+\infty} P\{Ut+V < y \mid V = z\} \overbrace{dF_V(z)}^{f_V(z)dz\text{, если } V \text{ – абс-непр.}} =$$

- $$= \int_{-\infty}^{+\infty} P\{Ut+z < y\}\, dF_V(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P\left\{U < \frac{y-z}{t}\right\} dF_V(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_U\left\{\frac{y-z}{t}\right\} dF_V(z).$$

Если же $t = 0$, то $F_X(y,t) = F_V(y)$.
Для n-мерной функции распределения, аналогично предыдущему примеру, получаем вид

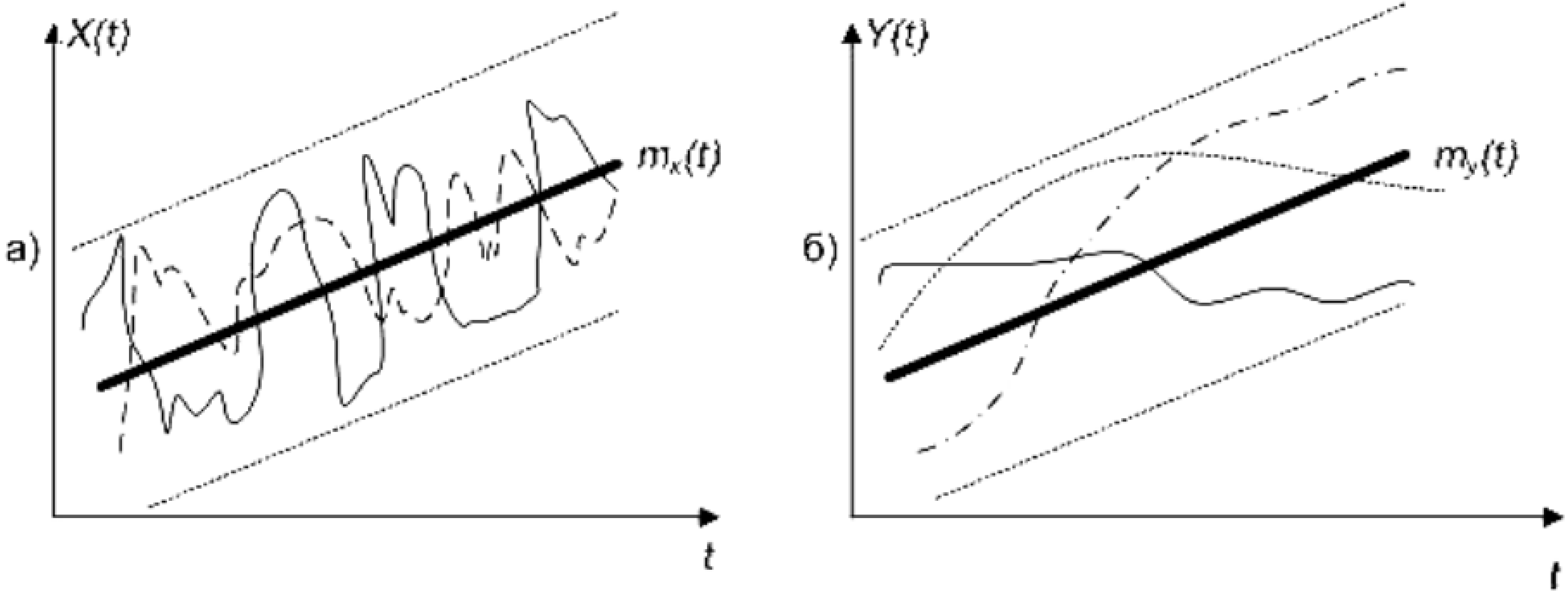
- $$F_X(y_1,t_1;\ldots;y_n,t_n) = P\{X(t_1)<y_1, \ldots, X(t_n)<y_n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} F_U\left( \min_{i=1,2,\ldots} \frac{y_i-z}{t_i} \right) dF_V(z)$$

- Конечномерные распределения дают полное и исчерпывающее описание случайного процесса.
  Однако существует большое число задач, для решения которых оказывается достаточным использование основных характеристик случайного процесса, которые в более краткой и сжатой форме, отражают основные свойства случайного процесса. Такими характеристиками являются моменты первых двух порядков. В отличие от случайных величин, для которых моменты являются числами и поэтому их называют числовыми характеристиками, моменты случайной функции являются неслучайными функциями(их называют характеристиками случайной функции (процесса)).

- **Опр**.
- *Математическим ожиданием* случайного процесса или (иногда) его *средним значением* называется неслучайная функция EX(t), t϶T, (или E[X(t)], часто также обозначают MX(t), либо $m_X(t)$ ), определяемая соотношением

$$EX(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_X(y,t)\, dy$$

- Значение этой функции при любом t равно математическому ожиданию соответствующего сечения случайного процесса. Математическое ожидание, есть«средняя» функция, вокруг которой происходит разброс реализаций случайного процесса.


а)
X(t)
$m_x(t)$
t
б)
Y(t)
$m_y(t)$
t

- **Свойства математического ожидания случайного процесса**
- 1. $E\varphi(t) = \varphi(t)$ для неслучайной функции $\varphi(t)$
- 2. $E[\varphi(t) X(t)] = \varphi(t) \cdot EX(t)$
- 3. Для любых двух случайных функций (процессов) $X_1(t)$ и $X_2(t)$
-

  $E[X_1(t)+X_2(t)] = EX_1(t) + EX_2(t)$
- 4. $E[X(t)+ \varphi(t)] = EX(t) + \varphi(t)$

- **Опр.**
- *Дисперсией случайного процесса* X(t) называется неслучайная неотрицательная функция DX(t), которая при любом значении аргумента t

  равна дисперсии соответствующего сечения случайного процесса:
- $DX(t) = D(X(t)) = E(X(t) - EX(t))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - E[X(t)])^2 \, \partial_y F_X(y,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - E[X(t)])^2 f_X(y,t)\, dy$

## Свойства дисперсии случайного процесса

- 1. $D\varphi(t) = 0$ для неслучайной функции $\varphi(t)$
- 2. $D[X(t)+\varphi(t)] = DX(t)$
- 3. $D[\varphi(t) \cdot X(t)] = \varphi^2(t) \cdot DX(t)$

- **Опр**.
- Центрированным случайным процессом $\overset{\circ}{X}(t)$ называется процесс, который получится, если из случайного процесса $X(t)$ вычесть его мат ожидание:

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - EX(t)$$

- **Свойства центрированного случайного процесса**

- 1. Если $X_2(t) = X_1(t) + \varphi(t) \Rightarrow \overset{\circ}{X}_2(t) = \overset{\circ}{X}_1(t)$
- 2. Если $X_2(t) = X_1(t) \cdot \varphi(t) \Rightarrow \overset{\circ}{X}_2(t) = \overset{\circ}{X}_1(t) \cdot \varphi(t)$
- 3. $E\,\overset{\circ}{X}(t) = 0$

- **Опр**.
- *Функцией ковариации (ковариационной функцией)* случайного процесса X(t) называется математическое ожидание произведения центрированных сечений случайного процесса в моменты времени t1 и t2 (т.е. ковариация этих сечений).
- $K(t_1,t_2) = Cov\ (X(t_1), X(t_2)) = E\ [\ (X(t_1) - E(X(t_1))\ ) \cdot (X(t_1) - E(X(t_1))\ )\ ]$
- $K_X(t_1,t_2)$ характеризует не только степень линейной зависимости между двумя сечениями, но и разброс этих сечений относительно математического ожидания случайного процесса EX(t).