- **Замечание**

  Потоки с ограниченным последействием также иногда называют *потоками восстановления*.

  (Смысл этого термина раскрывает постановка задачи, когда событием на потоке является очередной отказ оборудования (системы) и замена его на новое с известной функцией распределения времени безотказной работы.)

- **УТВЕРЖДЕНИЕ**
  Если в простейшем потоке известно, что за время (0,t] произошло ровно n событий-точек (это событие А вероятностного пр-ва), то моменты наступления этих событий $\Theta_1(\omega \epsilon A)$, $\Theta_2(\omega)$, … $\Theta_n(\omega)$ соответсвуют статистической выборке равномерного распределения Uo,t. Проще говоря, условное распределение
- $F_{\Theta i \mid N(t) = n} = U_{0,t.}$ для каждого $1 \le i \le n$.

УТВЕРЖДЕНИЕ
Рассмотрим два простейших потока с интенсивностями λ_1 и λ_2 соответственно. Вероятность, что n событий первого потока наступит раньше m событий второго потока равна

$$P(\Theta^{(1)}_n < \Theta^{(2)}_m) = \sum_{k=n}^{n+m-1} C_k^{n+m-1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n+m-1-k}$$

- **УТВЕРЖДЕНИЕ**
- В простейшем потоке интенсивности λ последовательно проделаем следующее: каждому событию с вероятностью p будем присваивать цифру 1 (как новый индекс). Всем неизменённым данной операцией событиям присвоим цифру 2. Из событий с цифрой 1 составим новый поток событий, а из событий с цифрой 2 другой поток событий. Утверждается, что таким образом поток разбивается на два простейших потока с интенсивностями pλ и (1-p)λ.

УТВЕРЖДЕНИЕ
- То же самое справедливо и для потока Пуассона интенсивности λ(t). Т.е. описанной в прошлом утверждении операцией поток Пуассона разбивается на два пуассоновских потока с интенсивностями pλ(t) и (1-p)λ(t).

Задача

Магазин работает с 10^{00} до 18^{00}. Посетители прибывают в магазин соответственно потоку Пуассона с функцией интенсивности $\lambda(t)$, равной нулю в момент открытия магазина, 4-ём (посетителям/час) в полдень, 6 в 14^{00}, 2 в 16^{00} и снова 0 в момент закрытия. Функция линейна всюду между этими моментами. Найти:

а) распределение для числа посетителей в данный день;

б) вероятность того, что до полудня не будет посетителей;

в) ожидаемые моменты прибытия первых двух посетителей, если дополнительно предполагается, что до полудня будут двое и только двое;

г) ожидаемое число покупок, если известно, что только каждый третий посетитель делает покупку.

Решение.

а) знаем, что число посетителей за 8 часов рабочего дня (обозначим его X) имеет распределение Пуассона с параметром $a(10,8) = \int\lambda(t)dt$

$$EX(10,8) = a(10,8) = \int_{10}^{18}\lambda(t)dt = \int_{10}^{12}\lambda(t)dt + \int_{12}^{14}\lambda(t)dt + \int_{14}^{16}\lambda(t)dt + \int_{16}^{18}\lambda(t)dt =$$

$$\tfrac{1}{2}(\lambda(10)+ \lambda(12))(12-10) + \tfrac{1}{2}(\lambda(12)+ \lambda(14))(14-12) + \ldots + \tfrac{1}{2}(\lambda(16)+ \lambda(18))(18-16) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left((0+4)*2 + (4+6)*2 + (6+2)*2 + (2+0)*2 \right) = \tfrac{1}{2}(8 + 20 + 16 + 4) = 24$$

$\Rightarrow X \in \Pi_{24}$

б) $p_0(10, 2) = e^{-a(10,12)} = e^{-4} \approx 0{,}018$

$a(10,2) = \int \lambda(t)dt =$ знаем, что $\lambda(t)$ линейна на этом интервале $\left\{\begin{array}{l} 10a+b = 0 \\ 12a+b = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -20 \end{array}$

$= \int (2t-20)dt = -4$

в) чтобы найти матожидание момента прибытия второго посетителя Θ_2, найдём функцию распределения и плотность для Θ_2 (при условии, что $N(12)=2$)

Так как $P(\Theta_2 < y) = P(N(y) \geq 2)$

$$F_{\Theta 2 \mid N(12)=2}(y) = P(N(y) \geq 2 \mid N(12)=2) = \frac{P(N(y) \geq 2,\ N(12)=2)}{P(N(12)=2)} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\substack{i=2,\\(2-i)\geq 0}}^{\infty} P(N(y) = i,\ X(y,12-y) = 2-i)}{P(N(12)=2)} = \frac{P(N(y) = 2,\ X(y,12-y) = 0)}{P(N(12)=2)} = \frac{P(N(y)=2)P(X(y,12-y)=0)}{P(N(12)=2)} =$$

$$= \frac{\dfrac{(a(10,y-10) = \int\lambda(t)dt)^2}{2!} \cdot e^{-a(10,y-10)} \cdot e^{-a(y,12-y)}}{e^{-a(10,2)} \cdot (a(10,2))^2 / 2!} = \frac{\left.\dfrac{t^2-20t}{2}\right|_{t=10}^{t=y} \cdot e^{-a(10,2)}}{4^2/2! \cdot e^{-a(10,2)}} =$$

$$= \frac{(y^2 - 20y - 100 + 200)^2}{16} = \frac{(y-10)^4}{16}$$

$$F_{\Theta 2 - 10 \mid N(12)=2}(y) = \frac{y^4}{16} \qquad f_{\Theta 2 - 10 \mid N(12)=2}(y) = \frac{y^3}{4}$$

$$E(\Theta_2 - 10 \mid N(12)=2) = \int t \cdot t^3/4\, dt = \left. t^5/20 \right|_{t=0}^{t=2} = \frac{8}{5} \Rightarrow E(\Theta_2 \mid N(12)=2) = 10 + 8/5 = 11{:}36$$

$F_{\Theta 1 \mid N(12)=2}(y) = P(N(y) \geq 1 \mid N(12)=2) =$

$$= \frac{P(N(y)=1,\ N(12)-N(y)=1) + P(N(y)=2,\ N(12)-N(y)=0)}{P(N(12)=2)} = \frac{(y-10)^2}{2} - \frac{(y-10)^4}{16}$$

•

$\Rightarrow \quad F_{\Theta 1-10 \mid N(12)=2}(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{16} \qquad f_{\Theta 1-10 \mid N(12)=2}(t) = t - \frac{t^3}{4}$

$E(\Theta_1 - 10 \mid N(12)=2) = 1\ 1/15 \quad \Rightarrow \quad E(\Theta_1 \mid N(12)=2) = 11{:}04$

г) самостоятельно

- **Утверждение**
  Пусть дан поток Пуассона **P** с интенсивностью $\lambda(t)$, тогда **P** $\cap$ $(T,+\infty)$ поток Пуассона с интенсивностью $\lambda^{|}(t) = \lambda(t+T)$.


HEALTH 77
SUIT 21
AMMO 14 122

набегают с интенсивностью $\frac{1}{1+t}$

- Значит, их там может быть и пятеро?

- Тут тебе не Амстердам, Винсент. Это поток Пуассона с интенсивностью $\frac{1}{1+t}$

- **Задача**.
  Интенсивность пуассоновского потока
- $\lambda(t) = 1/1+t$.

  в игровой постанове

  Найти распределения первых двух интервалов T_0 и T_1. (Если $ET_1 < 2$, то ружьё)
-

  Решение.

$$1 - F_{T0}(y) = P(T_0 \geq y) = P(T_0 > y) = P(N(y)=0) = e^{-\int_0^y \frac{1}{1+u} du} = \left(v'(t) = \frac{-v(t)}{1+t} \right) = \frac{1}{1+y} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $f_{T1}(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2}$. Тогда, учитывая утверждение на прошлой странице

$$1 - F_{T1\,|\,T0}(y) = P(T_1 \geq y \mid T_0) = P(T_1 > y \mid T_0) = P(X(T_0,y)=0) = \exp\left(-\int_{T_0}^{T_0+y} \frac{dt}{1+t}\right) = \frac{1+T_0}{1+T_0+y}$$

Находим безусловную вероятность:

$$\ln \frac{1+T_0+y}{1+T_0}$$

$$F_{T1}(y) = \int_0^y \int_0^\infty f_{T1\,|\,T0}(s \mid t)\, f_{T0}(t)\, dt\, ds = \int_0^\infty \int_0^y f_{T1\,|\,T0}(s \mid t)\, f_{T0}(t)\, ds\, dt =$$

$$= \int_0^\infty \left(1 - \frac{1+t}{1+t+y}\right) f_{T0}(t)\, dt = 1 - \int_0^\infty \frac{1+t}{1+t+y} f_{T0}(t)\, dt = 1 - \int_0^\infty \frac{1}{(1+t)(1+t+y)}\, dt = 1 - \frac{\ln(1+y)}{y}$$

$$\Rightarrow f_{T1}(t) = \frac{(1+t)\ln(1+t) - t}{t^2(1+t)}$$

Матожидание - ?

$P(T_1 < 2) = \int_0^2 f_{T1}(t)\, dt \approx 0{,}45$ $\Rightarrow$ лучше что-нибудь автоматическое

- Точно, надо было брать пистолеты-пулемёты ...

- **Определение**. Случайным процессом (с.п.) $X(t)$ называется функция, значение которой при любом фиксированном $t = t_0$ является случайной величиной, которую будем называть *сечением* случайного
- процесса в момент времени t.
- Из определения следует, что с.п. $X(t)$ есть функция двух переменных
  - $X(t) = \varphi(\omega,t), \ \omega \in \Omega, \ t \in T, \qquad \varphi(\omega,t) \in G \subset \mathbf{R}+,$
- где Ω - пространство элементарных событий; T- множество значений аргумента t; G- множество значений с.п. $X(t)$.

  При каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ функция $\varphi(\omega,t)$ называется *траекторией* или *реализацией* с.п. $X(t)$. Это означает, что
- опыт, в ходе которого случайный процесс протекает, уже произведен и
- произошло элементарное событие $\omega \in \Omega$. Случайный процесс называется *непосредственно заданным*, если каждый элементарный исход ω эксперимента описывается соответствующей траекторией в пространстве всех функций на множестве T со значениями в G.

- В зависимости от мощности множества T значений аргумента t случайные процессы можно разделить на четыре класса:
- 1) процессы с дискретными состояниями и дискретным временем;
- 2) п. с дискретными состояниями и непрерывным временем;
- 3) п. с непр. состояниями и дискр. временем;
- 4) п. с непр. состояниями и непр. временем.

- Подобно тому как вводили функцию распределения для случ. величины X, для с.п. X(t) введем *одномерную функцию распределения случайного процесса*
- *в момент времени t_1*
  - $F_X(y,t_1) = P\{ X(t_1)<y \}$,
- где $y \times t \in \mathbf{R} \times T$.
- Если зафиксировать два значения моментов времени t_1 и t_2, то функция
- $F_X(x_1,t_1;x_2,t_2) = P\{F(t_1)<x_1,F(t_2)<x_2\}$
- называется *двумерной функцией распределения* случайного процесса.
- Для n сечений случайного процесса функция
- $F_X(x_1,t_1; \ldots;x_n,t_n) = P\{F(t_1)<x_1;\ldots;F(t_n)<x_n\}$ (1)
- называется *n-мерной функцией распределения* случайного процесса.

  Будем считать, что случайный процесс X(t) задан, если задано семейство функций распределений (1) для любого n.
- Функция $F_X(x_1,t_1;\ldots;x_n,t_n)$ должна удовлетворять очевидным соотношениям, которые называются условиями согласованности:
- $F_X(x_1,t_1; \ldots;x_n,t_n) = F_X(x_1,t_1; \ldots;x_n,t_n; x_{n+1},t_{n+1}; \ldots;x_{n+p},t_{n+p})$ (1.2)
- $F_X(x_1,t_1; \ldots;x_n,t_n) = F_X(x_{i_1},t_{i_1}; \ldots;x_{i_n},t_{i_n})$ (1.3)
- где i1,i2,…,in– любая перестановка индексов1,2,…n для каждого n. Теперь можно сформулировать ещё одно определение случайного процесса.
- **Определение**. Случайным процессом X(t), заданным на множестве
- T (t ϵT) называется семейство распределений (1), удовлетворяющих
- условиям согласованности(1.2) и(1.3).
- Набор функций $F_X(x_1,t_1;\ldots;x_n,t_n)$ для n = 1,2,… называют конечномерным распределением случайного процесса X(t).