ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

лектор: Латкин Василий Иванович

НЕФОРМАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Системы массового обслуживания (СМО) состоят из одного или нескольких устройств обслуживания при условии существования:

- объектов (либо людей), нуждающиеся в обслуживании;
- незапланированно возникающих нежелательных простоев устройств обслуживания и задержек в обслуживании для объектов.

Примеры систем массового обслуживания.

- расчетно-кассовая система в магазине
- лента обслуживания в столовой
- сеть АЗС
- автоматическая телефонная станция
- сервер в компьютерной сети

В математических моделях все элементы и подсистемы СМО будут максимально упрощены и типизированы. Любой сотрудник обслуживающего предприятия и устройство обслуживания и любой клиент в общем потоке клиентов будут лишены своей уникальности подобно тому как на иллюстрации все человечки одинаковы. Такой подход позволит отвечать на вопрос об оптимальной комплектации той или иной системы, определяемой набором числовых характеристик (к-во узлов обслуживания, число сотрудников и т.д.), а также даст возможность применять один общий метод для решения множества однотипных примеров.

(ЛИРИЧЕСКОЕ ОТСТУПЛЕНИЕ)

- Пусть есть парикмахерская, и для большей наглядности туда наняты парикмахеры одинакового уровня мастерства, и в ней будут предлагать клиентам стрижку только одного типа. Пусть нас интересует такой основополагающий показатель, как величина дневной прибыли парикмахерской. Попробуем предложить следующую формулу для её расчёта:

X = К-во_парикмахеров ● К-во_стр_в_день ● цена,

где К-во_стр_в_день – число стрижек, кот. делает один парикмахер за день

? К-во_стр_в_день = [длина_раб.дня / $t_{\text{одной стр.}}$] ?

X = [длина_раб.дня / $t_{\text{одной стр}}$] ● цена ● К-во_парикмахеров

Как расчитать $t_{одн\_стр}$? Если известно, что у каждого клиента есть свои индивидуальные биологические параметры:
- форма головы
- густота волос
- толщина и жёсткость волос
- наличие\отсутствие облысений
- и пр.

- Рассмотрим предельный случай, когда парикмахерская в населённом пункте всего одна (пусть это будет село). Поэтому в неё редко приходят новые клиенты. Допустим ещё, что либо каждый клиент всегда приходит со строго определённой «степенью обрастания», либо для него можно определить некую среднюю «степень обрастания».
- Тогда определим величину $t_{одн\_стр}$ как усреднение времени обслуживания отдельного клиента по множеству всех клиентов:

$$t_{одн\_стр} = (\sum_{i \in K} t_i)/\mathrm{card}(K),$$

где K – мн-во постоян. клиентов, а t_i – время обслуживания i-го кл.

X = К-во_парикмахеров • К-во_стр_в_день • цена

К-во_стр_в_день = [длина_раб.дня / $t_{одной\ стр}$]. = const

НО! Клиенты не идут как роботы по строгому расписанию! При этом парикмахерская иногда пустует, а иногда в ней может образовываться очередь.

~~X = К-во_парикмахеров • К-во_стр_в_день • цена~~

НО! К-во_стр_в_день ≠ [длина_раб.дня / $t_{\text{одной стр}}$] = const

ГИПОТЕЗА: величину К-во_стр_в_день из формулы выше можно будет вычислить как математическое ожидание некоторой случайной величины.

Примеры вероятностных экспериментов

- 1) подбрасывание монеты
  2) бросок игрального кубика
  3) загадывание натурального числа
  4) число звонков на АТС, поступивших за час
  5) прерывание кипения
  6) стрельба по мишени
-

  Пространства элементарных исходов (*эл. событий*):

  1) $\Omega = \{\omega_1 = Г, \omega_2 = Р\}$

  2) $\Omega = \{\omega_1=1, \omega_2=2, \omega_3=3, \omega_4=4, \omega_5=5, \omega_6=6\}$

  где ω_i – *элементарное событие* (*элементарный исход*)

  3,4) $\Omega = \{0,1,2,3,\ldots\} = \mathbf{N_0}$

  дискретные
- 5) $\Omega = (t_{комнаты}, 100] \in \mathbf{R}$
- 6) $\Omega = \{ (x,y) : x^2+y^2 < r^2 \} \in \mathbf{R^2}$

континуальные

Можно рассматривать последовательность (либо мн-во одновременно происходящих) вероятностных экспериментов как один вероятностный эксперимент, элементарными исходами которого являются все имеющие возможность быть последовательности исходов отдельных экспериментов.

Пример: бросание монеты трижды:

Ω = { ω_1=<Р,Р,Р>, ω_2= <Р,Р,Г>, ω_3= <Р,Г,Р>, ω_4= <Г,Р,Р>, ω_5= <Р,Г,Г>, ω_6= <Г,Р,Г>, ω_7= <Г,Г,Р>, ω_8= <Г,Г,Г> }

Опыты с подбрасыванием монеты

Исследователь	К-во бросков	Частота выпадений Г
Бюффон	4040	0,507
Де Морган	4092	0,5005
Феллер	10000	0,4979
Джевонс	20480	0,5068
Пирсон К.	24000	0,5005
Романовский	80640	0,4923

Результаты экспериментов из таблицы подтверждает закон больших чисел (рассмотрим далее), согласно которому чем больше проводим испытаний (**n** раз бросаем монету), тем ближе относительная частота встречаемости интересующего нас события (выпадение герба) к теоретической вероятности (1/2).

$$\mathbf{S_n/n \to p = \tfrac{1}{2},}$$

где Sn – число экспериментов, закончившихся определённым результатом (выпал герб), p – теоретическая вероятность этого результата.

- **Опр.** *Событием* называется любое подмножество пространства элементарных исходов $A \subset \Omega$.

- **Пример**:
  Производится 3 броска монеты
  Ω = {<Р,Р,Р>, <Р,Р,Г>, <Р,Г,Р>, <Г,Р,Р>, <Р,Г,Г>, <Г,Р,Г>, <Г,Г,Р>, <Г,Г,Г>}

- Событие A: из трёх бросков монеты не менее двух раз выпал герб (Г).
  A = {<Р,Г,Г>, <Г,Р,Г>, <Г,Г,Р>, <Г,Г,Г>}
- Событие B: ровно два раза Г.
  B = {<Р,Г,Г>, <Г,Р,Г>, <Г,Г,Р>}
- Событие C: хотя бы один раз решка (Р).
- C = {<Р,Р,Р>, <Р,Р,Г>, <Р,Г,Р>, <Г,Р,Р>, <Р,Г,Г>, <Г,Р,Г>, <Г,Г,Р>}
  Событие D: все разы гербом.
- D = {<Г,Г,Г>}

- Пересечение двух событий называется также «умножением», оно так же является событием и о нём говорят, что оно происходит в случаях, когда одновременно (совместно) происходят оба события.
  $AC := A \cap C = B$ $\qquad$ $CD = \varnothing$

- Объединение двух событий называется «суммой», она так же является событием и о нём говорят, что оно происходит в случаях, когда происходит хотя бы одно из двух событий.
  $A+B = A$ $\qquad$ $A+C := A \cup C = C+D = \Omega$

- **Опр.** Если $AB=\varnothing$, то говорят, что события A и B *несовместны.*
  $\varnothing$ называют *невозможным* событием.

Опр. *Функцией вероятности* называется

$P: 2^{\Omega} \to [0,1]$, где 2^{Ω} – мн-во подмножеств Ω, т.е. *мн-во событий,*

удовлетворяющая условию:

1) $P(A) \geq 0$

2) $P(\Omega) = 1$ (*счётная аддитивность*)

3) $P(UA_i) = \Sigma P(A_i)$, для счёного мн-ва событий $A_1\ A_2\ldots$, кот. попарно несовместны ($A_{i1}\ A_{i2} = \varnothing$)

- В дискретном пространстве **Ω** любое мн-во вида **{ω}**, состоящее из одного эл. исхода имеет ненулевую вероятность **p**, далее будем называть её *вероятностью эл.исхода* и обозначать **P(ω)**.
- Если о вероятностном эксперименте с дискретным Ω известно, что элементарные исходы имеют одинаковые вероятности, то вероятность любого события A определяется по формуле (кот. называется ***классическое определение вероятности***):

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}, \quad \text{как следствие} \quad P(A) = \sum_{\omega\epsilon A} P(\omega)=\sum_{\omega\epsilon A}(1/N(\Omega)), \quad \text{где } N(X) \text{ – мощность мн-ва } X$$

- **Пример**
- Очевидно, что при проведении серии бросков монеты элементарные события имеют одинаковую вероятность в силу равновероятности исходов каждого отдельного броска и отсутствия влияния на его результаты со стороны других бросков.

A = {<Р,Г,Г>, <Г,Р,Г>, <Г,Г,Р>, <Г,Г,Г>} - не менее двух Г.

- B = {<Р,Г,Г>, <Г,Р,Г>, <Г,Г,Р>} - ровно два раза Г. D = {<Г,Г,Г>}
- C = {<Р,Р,Р>, <Р,Р,Г>, <Р,Г,Р>, <Г,Р,Р>, <Р,Г,Г>, <Г,Р,Г>, <Г,Г,Р>} - хотя бы раз Р.
- P(A) = 4/8; P(B) = 3/8; P(C) = 7/8; P(D) = 1/8;
- P(AB) = 3/8; P(CUD) = (7+1)/8 = 1; P(AUC) = 1

Свойства вероятности:

1. $P(\varnothing) = 0$

2. *Аддитивность вероятности*: для всякого конечного набора попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$

   $P(\cup A_i) = \Sigma P(A_i)$

3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ для любого A

4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

5. $P(\cup A_n) = \Sigma P(A_i) - \Sigma P(A_i A_j) + \Sigma P(A_i A_j A_k) - \ldots$

6. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

7. $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \Rightarrow \exists \lim P(A_i) = P(\cup A_i)$

8. $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \Rightarrow \exists \lim P(A_i) = P(\cap A_i)$

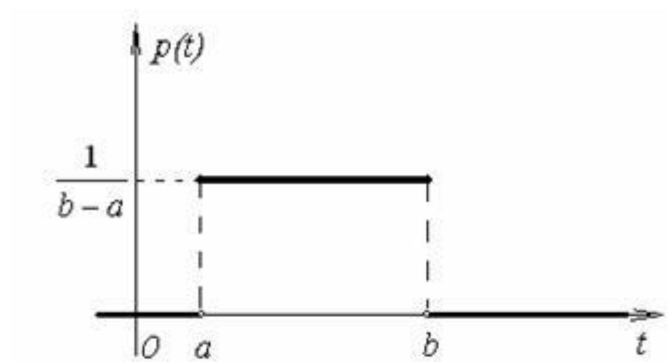
непрерывность вероятности

- Рассмотрим случай континуального пр-ва элем. исходов, а именно когда **Ω = R** или **$\Omega = R^n$**. Для определения вероятности на таком пр-ве вводится вспомогательная функция π, такая что:
- (в случае **Ω = R**) (в случае **$\Omega = R^n$**)
- 1) $\pi(\omega) \geq 0$ для любого $\omega \in \Omega$ 1) $\pi(\omega) \geq 0$ для любого $\omega \in \Omega$
- 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\omega)d\omega = 1$ 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\omega)d\omega_1 \ldots d\omega_n = 1$

и вероятность события $A \subset \Omega$ можно определить как результат интегрирования
- по множеству А:

$$P(A) = \int_A \pi(\omega)d\omega$$

- **Пример**
- $$\Omega = R, \quad \pi(\omega) = \begin{cases} 1/(b-a), & \omega \in [a,b] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$



Здесь вероятность равномерно «размазана» по отрезку [a,b], и поэтому этот случай является *обобщением классического определения вероятности для* **Ω = R**:

$$P(A)= \frac{\lambda(A)}{\lambda(D)},$$ где D = [a,b], а λ([x,y]) – длина отрезка [x,y].

В **R^n** можно рассматривать аналогичный случай, где вместо отрезка [a,b] будет компактное мн-во D, на котором π(ω) принимает постоянное значение, а вне его равна 0. Тогда вероятность будет определена по той же формуле, с той разницей ,что λ(A) – n-мерный объем мн-ва A.

- **Опр.** События A и B называются *независимыми*, если$P(AB) = P(A)P(B)$.

- **Опр.** События из мн-ва $\{A_1,\ldots, A_n\}$ называются *независимыми в совокупности*, если для любого подмножества индексов $\{i_1,\ldots,i_k\}$:

- $$P(A_{i1}A_{i2}\ldots A_{ik}) = P(A_{i1})P(A_{i2})\ldots P(A_{ik})$$
- В дискретном пр-ве элем. исходов Ω не всегда все эл. исходы равновероятны. В этом случае классическое определение вероятности не работает. Для определения вероятности того или иного события бывает удобно иметь (или вывести, хотя это не всегда удаётся) формулу, позволяющую вычислять вероятность любого элем. исхода, и затем найти вероятность интересующего события как сумму вероятностей его элем. исходов.

  Разберём этот подход на следующем примере:
- **Пример (*схема Бернулли*)**
  Рабочий изготовляет *n* изделий в день. С вероятностью *p* - бракованное,с вер-ю *q* – хорошее. Вопрос: какова вероятность того, что кол-во брака за день $S_n \le K$?

- $B_1 = \{1\text{-е Б}\}$ $B_{n+1} = \{1\text{-е Х}\}$
  $B_2 = \{2\text{-е Б}\}$ $B_{n+1} = \{2\text{-е Х}\}$
  … …
- $B_n = \{n\text{-е Б}\}$ $B_{2n} = \{n\text{-е Х}\}$
- Имеем $P(B_i) = \begin{cases} p, & i = 1,2,..n \\ q, & i = n+1,\ldots,2n \end{cases}$, кроме того любой элементарный исход представляет собой событие вида $B_{i1}\ldots B_{in}$, с индексами $i_j \in \{ j, n+j \}$.

  Из условия задачи делаем вывод о независимости событий $B_{i1},\ldots B_{in}$. Поэтому

  $$P(S_n\le K) = \sum_{k=1\ldots K} P(S_n= k) = \sum_{k} \sum_{\omega\in A_k} P(\omega) = \sum_{k} (\text{к-во эл. исх. с } k \text{ бракован.})\, p^k q^{n-k} = \sum_{k=1\ldots K} C_n^k\, p^k q^{n-k}$$

  (обозначили $A_k \equiv (Sn = k)$)

- **Опр.** *Условной вероятностью* (или вероятностью события А при условии, что событие В произошло) называется

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$ и существует только при условии $P(B)\neq 0$.

Пример (опыт с 3-кратным подбрасыванием монеты)

- A = {<Р,Г,Г>, <Г,Р,Г>, <Г,Г,Р>, <Г,Г,Г>} - не менее двух Г.

C = {<Р,Р,Р>, <Р,Р,Г>, <Р,Г,Р>, <Г,Р,Р>, <Р,Г,Г>, <Г,Р,Г>, <Г,Г,Р>} - хотя бы раз Р.

$$P(A|C) = \frac{3/8}{7/8} = \frac{3}{7} \qquad P(C|A) = \frac{3/8}{4/8} = \frac{3}{4}$$

Пусть нас интересует вероятность некот. события А и есть набор вспомогательных событий $H_1,\ldots,H_n$, которые называются *гипотезами* и удовлетворяют следующим требованиям:

1) $H_i H_j = \varnothing \quad (i\neq j)$

2) $A \subset \cup H_i$

Тогда справедлива ***формула полной вероятности***:

$$P(A) = \Sigma\, P(A|H_i)\, P(H_i)$$

$P(H_i)$ называется *априорной вероятностью гипотезы*,

$P(H_i|A)$ – *апостериорной вероятностью гипотезы.*

Для нахождения апостериорных вероятностей используется ***формула Байеса***

$$P(Hi|A) = \frac{P(A|H_i)\, P(H_i)}{\Sigma P(A|H_j)\, P(H_j)}$$

- **Опр.** *Случайная величина* X – это функция вида
  $X : \Omega \to \mathbf{R} \setminus \{+\infty, -\infty\}$
- Будем говорить, что нам известно *распределение* случайной величины, если для произвольных чисел $a \le b$ мы можем находить вероятности $P(\omega: a \le X(\omega) \le b)$.
- (краткая запись: $P(a \le X \le b)$)
- Для этого достаточно знать *функцию распределения* сл.величины.
- **Опр.** *Функцией распределения* случайной величины X называется

$$F_X(y) = P(\omega: X(\omega) < y) \equiv P(X < y), \quad -\infty < y < +\infty$$

Свойства функции распределения случайной величины:

1. $0 \le F_X(y) \le 1$, $-\infty < y < +\infty$

2. Если $y_1 < y_2$, то $F_X(y_1) \le F_X(y_2)$, т.е. функция распределения монотонно не убывает.

3. Существуют пределы $\lim\limits_{y \to -\infty} F_X(y) = 0$ и $\lim\limits_{y \to +\infty} F_X(y) = 1$

4. Для любого y $F_X(y-0) = F_X(y)$, то есть функция распределения всегда непрерывна слева.

Опр. Случайная величина называется *дискретной*, если существует конечная, либо счётная последовательность $y_1, y_2, y_3, \ldots$ такая, что

$$\sum_k P(X = y_k) = 1$$

Функция распределения дискретной случайной величины называется *дискретной*.

1. Вырожденное распределение $X \in I_a$

k	a
P(X=k)	1

2. Распределение Бернулли $X \in B_p$

k	1	0
P(X=k)	p	q

3.Биномиальное распределение. $X \in B_{n,p}$, если

$$P(X=k) = C_n^k\, p^k(1-p)^{n-k}, \qquad 0 < p < 1, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

4. Распределение Пуассона. $X \in \Pi_\lambda$, если

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad \lambda>0, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

5. Геометрическое распределение $G_{p:}$ $X \in G_p$, если

$$P(X=k)=(1-p)p^{k-1}, \qquad 0 < p < 1, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$