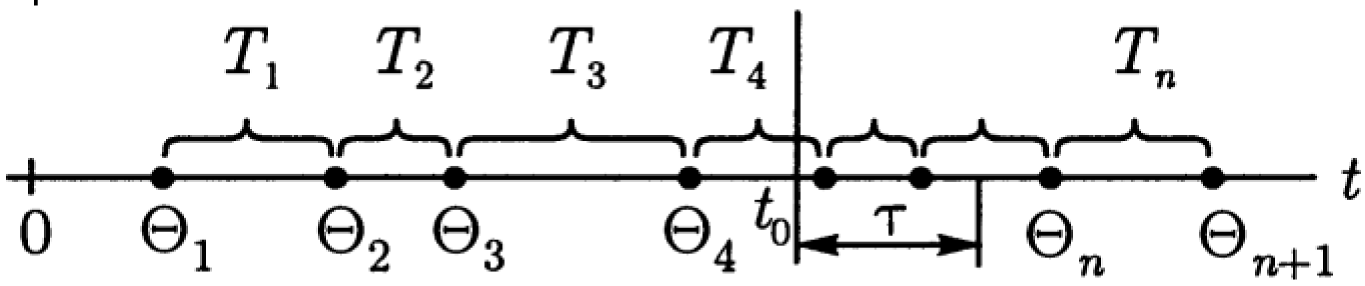
- **Центральная предельная теорема** (ЦПТ).
  Пусть X1, X2, … — независимые одинаково распределенные случайные величины. Предположим,что $EX_1^2 < 1$. Обозначим $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $a = EX_1$, $\sigma^2 = DX_1$, и пусть $\sigma^2 > 0$. Тогда для любого y
- $$P\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < y \right) = F_{\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}}(y) \to \Phi_{0,1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-t^2/2}\, dt$$ при $n \to \infty$

- Потоком событий называется последовательность однородных событий, появляющихся одно за другим в случайные моменты времени. Примеры: поток вызовов на телефонной станции; поток забитых шайб при игре в хоккей; поток сбоев ЭВМ; поток заявок на проведение регламентных работ в вычислительном центре и т.п.



- Поток событий наглядно изображается рядом точек с абсциссами Θ_1, Θ_2,… с интервалами между ними: $T_1= \Theta_2- \Theta_1$, $T_2= \Theta_3- \Theta_2$,…, $T_n= \Theta_{n+1}- \Theta_n$. При его вероятностном описании поток событий может быть представлен как последовательность случайных величин:
- $\{\Theta_1, \Theta_2= \Theta_1+T_1, \Theta_3= \Theta_1+T_1+T_2,…\}$ либо как $\{\Theta_1, T_1, T_2, …\}$.
- Заметим, что термин «событие» в понятии «поток событий» совершенно отличен по смыслу от ранее введенного термина «случайное событие». В частности, не имеет смысла говорить о вероятностях «событий», образующих поток (например, о «вероятности вызова» на телефонной станции; ясно, что рано или поздно вызов придет, и не один).
- Заметим также, что на рисунке в виде ряда точек можно изобразить не сам поток событий (он случаен),а только какую-то его конкретную реализацию.

- Поток событий называется *стационарным*, если его вероятностные характеристики не зависят от выбора начала отсчета или, боле конкретно, если вероятность попадания того или другого числа событий на любой интервал времени зависит только от длины т этого интервала и не зависит от того, где именно на оси 0t он расположен.
- Поток событий называется *ординарным*, если вероятность попадания на элементарный интервал времени Δt двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события.
- П. с. называется *потоком без последействия*, если число событий, попадающих на любой интервал времени т, не зависит от того, сколько событий попало на любой другой непересекающийся с ним интервал.
- Практически отсутствие последствия в потоке означает, что события, образующие поток, появляются в те или другие моменты времени независимо друг от друга.
- П. с. называется *простейшим*, если он стационарен, ординарен и не имеет последействия.

- Для формализации этих понятий введём следующие математические объекты.
  Пусть p_k: R×R $\to$ R – семейство двумерных функций, таких что
  $p_k(t, \Delta t)$ - вероятность того, что «за время Δt, примыкающего к моменту времени t, появилось k событий» (высказывание, характеризующее событие в некотором вероятностном пр-ве), k = 0,1,2,…
  Очевидно, что сумма всех таких событий равна всему вероятностному пространству: $\Sigma p_i(t, \Delta t) = 1$ (1)

- Введем обозначение $p_{>1}(t,\Delta t) = \sum_{i=2}^{\infty} p_i(t, \Delta t)$ - вероятность того, что за время
- Δt появилось более одного события.
  Тогда формула (1) примет вид:
- $p_0(t, \Delta t) + p_1(t, \Delta t) + p_{>1}(t, \Delta t) = 1$
- и свойство **ординарности** можно записать как
- $p_{>1}(t, \Delta t) = o(\Delta t)$,
- где $o(\Delta t)$ – бесконечно малая по отношению к Δt величина, т.е. $o(\Delta t) /\Delta t \to 0$ при $\Delta t \to 0$
  Обозначим через $M(t, \Delta t)$ математическое ожидание числа событий, появившихся за время Δt, тогда
- $M(t, \Delta t) = \Sigma i\, p_i(t, \Delta t) = 0^* p_0(t, \Delta t) + 1^* p_1(t, \Delta t) + \sum_{i=2}^{\infty} i\, p_i(t, \Delta t) = p_1(t, \Delta t) + o(\Delta t)$
- для ординарного потока, так как последняя сумма равна некому $o(\Delta t)$. Это тривиальный факт, если взять дополнительное ограничение на число событий за малый отрезок. Если не ограничивать число событий, то это очевидно следует из одного из свойств сходимости по вероятности, если считать, что матожидание $M(t, \Delta t)$ существует и конечно для любого Δt.
  Ещё одно свойство сходимости по вероятности
- Пусть $Xn \to X$ при $n \to \infty$. Тогда для сходимости $EX_n \to EX$ достаточно выполнения любого из следующих условий :
- 1. Все члены послед-ти ограничены одной и той же постоянной: $|X_n| \le C$
  2. Все члены послед-ти огранич. одной и той же случ. величиной с конечным первым моментом: $|X_n| \le Y$, $EY < \infty$.
  3. Существует $\alpha > 1$ такое, что $E|X_n|^{\alpha} \le C = const$ для любого n.

- Действительно, рассмотрим последов-ть $\Delta t_k \to 0$ и соответствующую ей послед-ть случайных величин
- X_k = {число событий на интервале $[t, \Delta t_k]$ }, имеющих распределения $P(X_k = i) = p_i(t, \Delta t_k)$
- и определим послед-ть $\{Y_k(\omega) = X_k(\omega)$ для любого ω, такого что $X_k(\omega) < 2$, иначе $Y_k(\omega) = 0\}$
- Тогда послед-ть
- $Z_k = (X_k - Y_k) \to 0$ при $k \to \infty$ и воспользуемся вышепривед. свойством сходимости по вероятности, пункт 2:
  $|Z_k| \le X_k \le X_1$, $EX_1 = M(t, \Delta t_1) < \infty$ ➔ $EZ_k \to 0$ при $k \to \infty$,
- а это означает $\sum_{i=2}^{\infty} i\, p_i(t, \Delta t) = o(\Delta t)$
- **Определение**
  Интенсивностью (плотностью) потока событий в момент t будем называть функцию
- $$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M(t, \Delta t)}{\Delta t}$$
-

  И плотность ординарного потока будет равна
- $$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_1(t, \Delta t)}{\Delta t}$$

  По смыслу плотность выражает среднее число событий, приходящихся на единицу времени, для малого участка Δt, примыкающего к моменту t.

- Среднее число событий, наступающих на интервале времени τ, следующем непосредственно за моментом t_0 равно
- $$a(t_0,\tau) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)\, dt$$
- Как видно из определения стационарности, если поток событий **стационарен**, то
$$p_k(t, h) = p_k (h), \quad \text{и}$$
- $$a(t,h) = a(h)$$

Следовательно $\lambda(t) = \lambda$, т.е. интенсивность стационарного потока постоянна и
$$a(h) = \lambda h.$$

Наконец, отсутствие последействия можно формализовать так:
- Пусть $p_{n-k,n} (t,\tau)$ - вероятность того, что за время τ, примыкающего к моменту времени t, появилось k событий при условии, что в момент времени t было $n-k$ событий. Тогда условие отсутствия последействия означает, что
- $$p_{0,n} (0,t+\tau) = p_{0,n-k} (0,t)\, p_{n-k,n} (t,\tau).$$

Более просто **отсутствие последействия** можно записать, если рассматривать случайные величины вида
$X(t,h) \equiv X_{[t,t+h]} \equiv$ {число событий на интервале $[t,t+h]$ }.
Тогда отсутствие последействия будет означать независимость $X_{[a,b]}$ и $X_{[c,d]}$ для любых непересекающихся $[a,b]$ и $[c,d]$.

- **ТЕОРЕМА**. Если поток событий- **простейший**, то распределение длин
- интервалов T_n между поступлениями любой пары соседних событий (т.е. для любого n)- показательное (экспоненциальное) с плотностью λ. **$T \in E_\lambda$**
- ► Следующие постулаты вытекают из определения простейшего потока:
- 1) для всякого малого $\Delta t > 0$ существует ненулевая вероятность появления события;
- 2) если система начинает функционировать с момента $t = 0$, то первое появление события имеет место в момент $t > 0$.
- Рассмотрим функцию
- $p(t) = 1 - \int_0^t f(\tau)\, d\tau$ (2)
- Если $f(\tau)$ – плотность распределения интервала T_n, то $p(t)$ = P { первое событие появилось после момента t}. Из свойства отсутствия последействия имеем:
- $p(t + \Delta t) = p(t)\, p(\Delta t)$
- Вычитая из обеих частей формулы p(t), получим
  $p(t + \Delta t) - p(t) = -p(t)\,(1 - p(\Delta t))$.
- Разделим обе части на Δt и перейдем к пределу по Δt:
- $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t} = -p(t) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - p(\Delta t)}{\Delta t}$$
- Если пределы существуют, то полагая $\lambda = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - p(\Delta t)}{\Delta t} > 0$, будем иметь
  $p'(t) = -\lambda\, p(t)$, где $p(0) = 1$.
- ➔ $p(t) = e^{-\lambda t}$ ➔ $e^{-\lambda t} = 1 - \int_0^t f(\tau)\, d\tau$ ➔ $\int_0^t f(\tau)\, d\tau = 1 - e^{-\lambda t}$ ➔ $f(\tau) = \lambda e^{-\lambda \tau}$ ◄
  подставляя в (2)