Лекция 10

Основные математические структуры

Элементы теории множеств

Немецкий математик. Родился и жил до 11 лет в Санкт-Петербурге. Наиболее известен как создатель теории множеств, ставшей крае-угольным камнем в математике.

Теория Кантора о трансфинитных числах была воспринята настолько нелогичной, парадоксальной и даже шокирующей, что натолкнулась на резкую критику со стороны математиков-современников. Его называли «научным шарлатаном», «отступником» и «развратителем молодёжи». Периодические приступы депрессии Кантора , закончившиеся его смертью, возможно связаны с жёстким неприятием его работ.

Гео́рг Ка́нтор
1845 - 1918

Резкой критике противостояли всемирная известность и одобрение. В 1904 году британское Королевское общество наградило Кантора Медалью Сильвестра, своей высшей наградой. Он становится почетным членом многих Академий, почетным доктором университетов Европы и Америки.

Давид Гильберт: «***Никто не изгонит нас из рая, который основал Кантор***».

«**Математический мир видит в лице Кантора великого пролагателя новых путей не только в математике, но и в физике, в философии**...»

Георг Кантор:

“Veniet tempus, quo usta, quae nunc latent, in lucem dies extrahst et longioris aevi di Cigentia”

«Придет время, когда ныне скрытое извлечено будет на свет усердием будущего века»

(эпиграф к одной из последних работ)

Множество – совокупность элементов, мыслимая как единое целое. (*Б.Рассел*)

Мощность множества А обозначим |А|.

|А| = числу элементов, если А – конечное

|А| = кардинальному числу, если А – бесконечное.

Множество всех подмножеств множества А называется **булеаном**, обозначается 2^A .

Мощность булеана равна $2^{|A|}$.

Теорема Кантора: $|A| < 2^{|A|}$

Два множества ***эквивалентны*** (имеют одинаковую мощность), если существует взаимно-однозначное соответствие между элементами этих множеств.

Множество натуральных чисел N – счётное.

Всякое множество, эквивалентное (равномощное) множеству натуральных чисел, счётно.

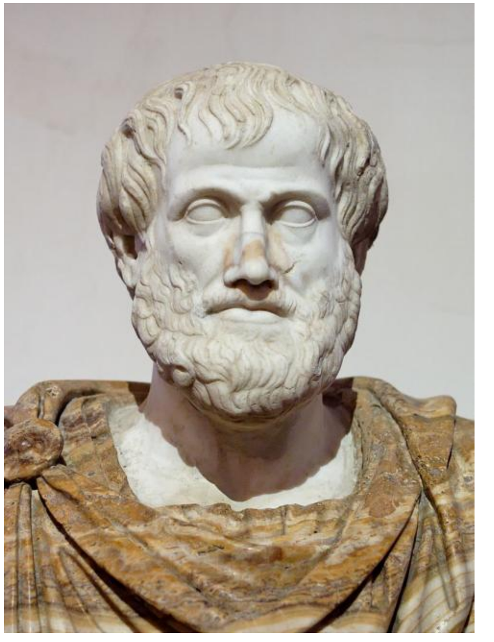
Мощность множества N обозначим $\aleph_0$ (алеф нуль).

Это кардинальное число - наименьшее из трансфинитных чисел.

Потенциальная и актуальная бесконечность

- **Потенциальная Б**. – неограниченность некоторого процесса, например, возможность неограниченно и непрерывно продолжать прямую линию, но существование такого объекта как ***бесконечная прямая***, из этого не следует.
- **Актуальная Б**. – сущность рассмотрения конечно неизмеримых объектов как реально существующих, единых и целостных, и оперирование с ними, как например, ***множество натуральных чисел***.

Принятие актуальной Б. – нетривиальная философская задача.



«*Невозможно, чтобы [она] существовала в действительности как нечто сущее, либо как субстанция или первоначало*» -

- Аристотель (IV в. до н.э.)

В средние века споры о бесконечности могли вести только богословы.

«*Бесконечен лишь Бог и его мысли*» -

- Аврелий Августин (354 – 430 г. н.э.)

«Мы живём в бесконечном пространстве, содержащем бесконечное множество миров…» -

- **Джордано Бруно**

(1548 – 1600)

В науке актуальная бесконечность не признавалась до конца XIX века.

По современным исследованиям ученых более 50% людей не признают актуальной бесконечности.

«Бесконечность поистине велика - особенно ближе к концу!»

Свойства бесконечных множеств

- Всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество.
- Всякое бесконечное множество эквивалентно некоторому своему собственному подмножеству.

«Познание бесконечности требует бесконечного времени»

Открытая математическая проблема:

- существуют ли такие бесконечные множества A и B, что мощность множества A меньше мощности множества B и мощность множества B меньше мощности множества всех подмножеств

множества A:

$$|A| < |B| < 2^{|A|} \quad ?$$

Парадоксы, связанные с теорией множеств

Парадокс Рассела

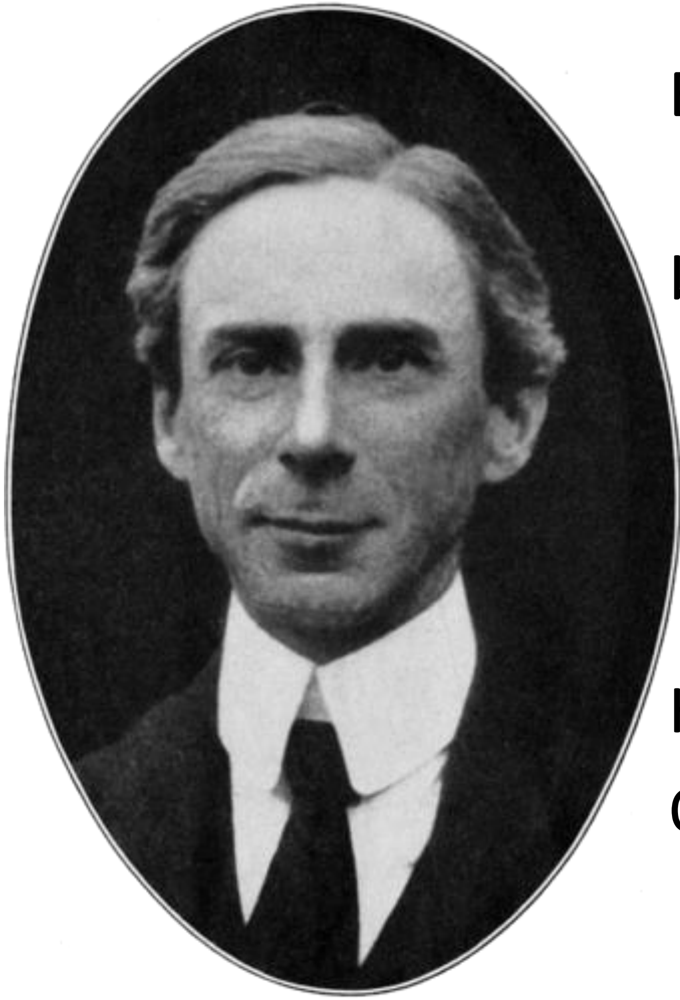
Пусть ***М*** — множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве своего элемента. Содержит ли ***М*** само себя в качестве элемента?

Парадокс брадобрея

Пусть в некой деревне живёт брадобрей, который бреет всех жителей деревни, которые не бреются сами, и только их. Бреет ли брадобрей сам себя?

Парадокс лжеца

Дано высказывание: ***«То, что здесь сказано – ложь» .*** Истинно ли это высказывание?



Бертран Артур Уильям Рассел

1872-1970

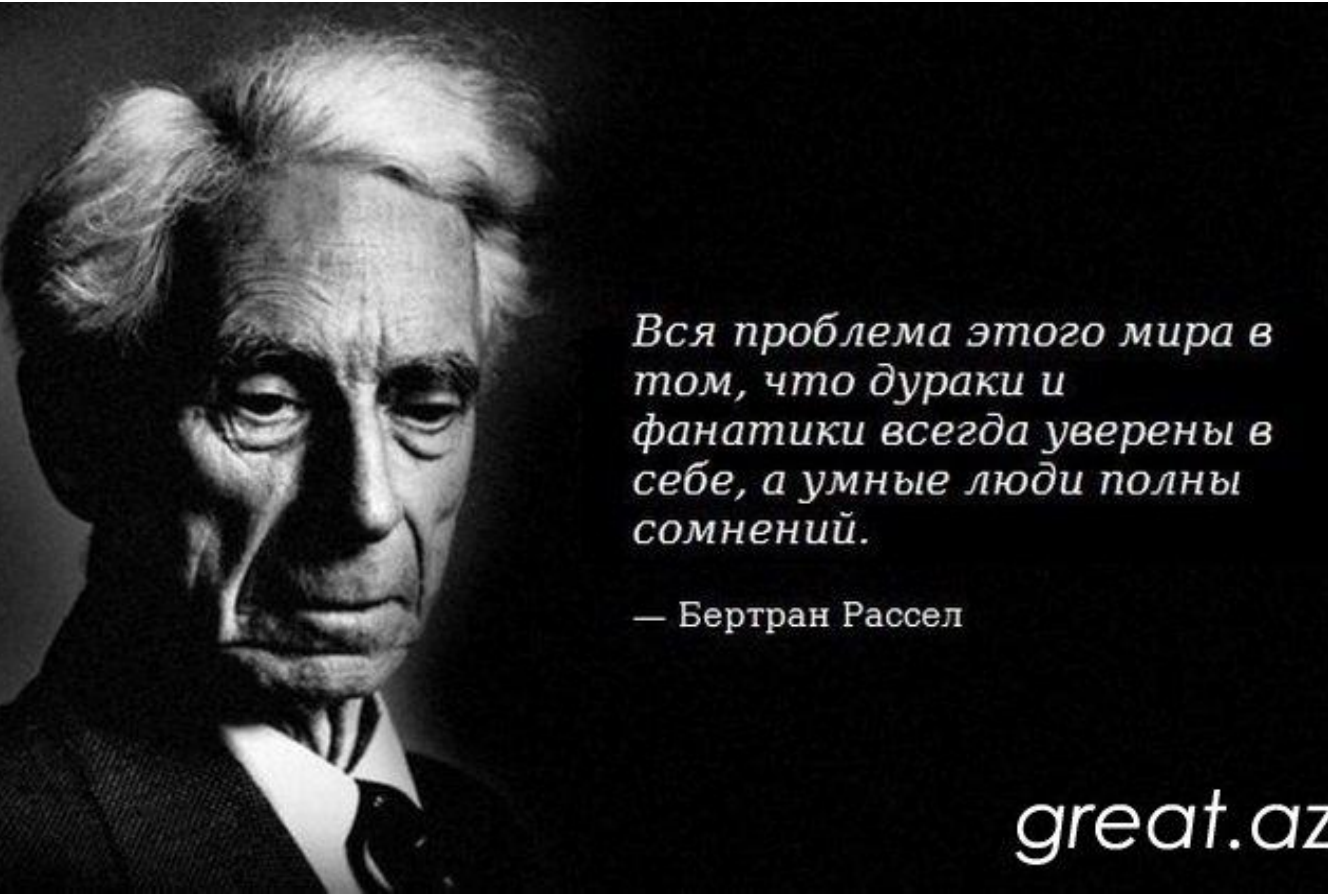
Британский философ, математик и общественный деятель.

Известен своими работами в защиту пацифизма, атеизма и либерализма. Внёс неоценимый вклад в математическую логику, историю философии и теорию познания.

Наиболее влиятельный логик XX века.

Один из самых блестящих представителей рационализма и гуманизма, бесстрашного борца за свободу слова и свободу мысли на Западе.

Лауреат Нобелевской премии по литературе (1950).


Вся проблема этого мира в том, что дураки и фанатики всегда уверены в себе, а умные люди полны сомнений.
— Бертран Рассел
great.az

Эффект Ричардсона (парадокс измерения)

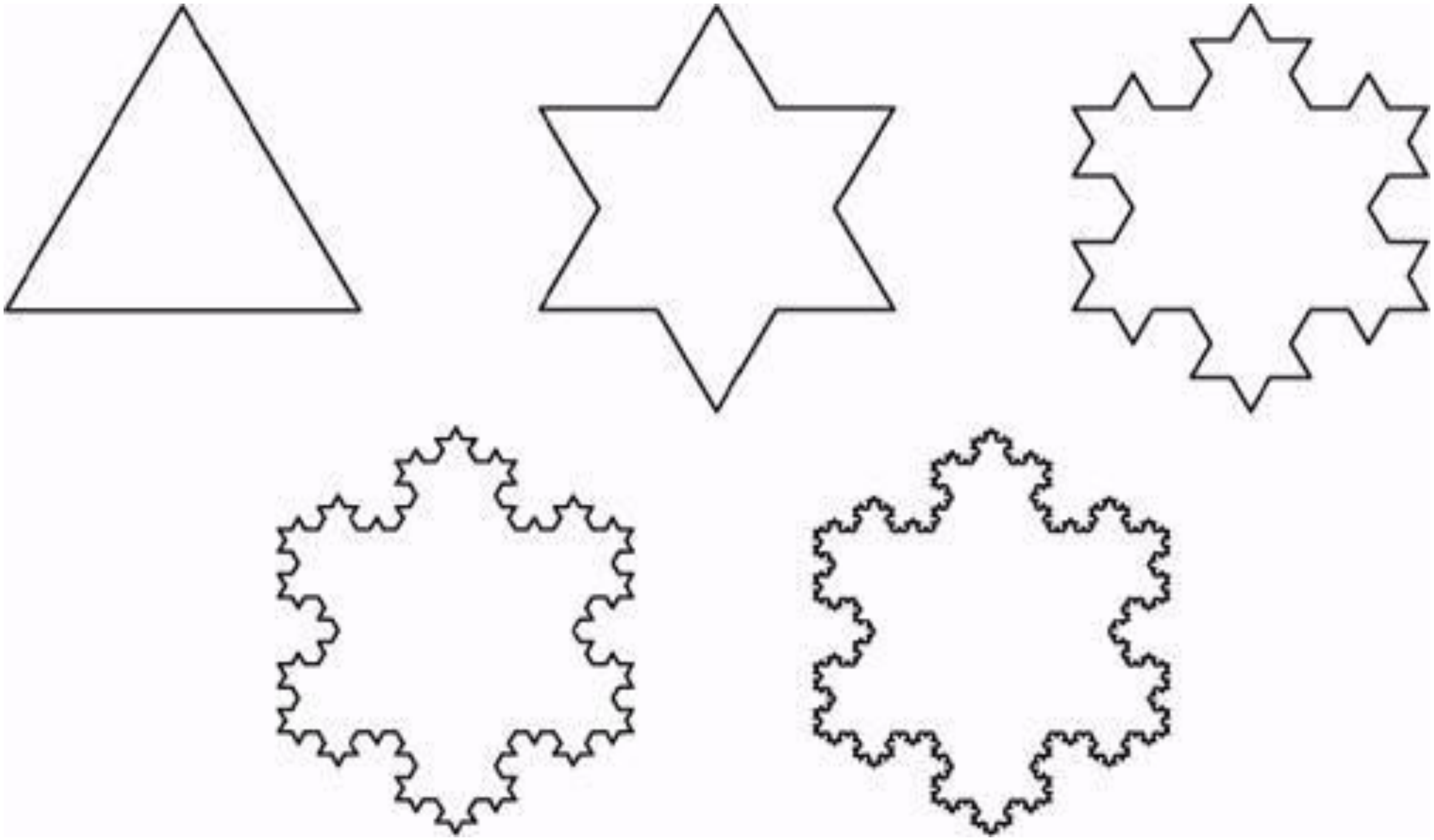
Протяженность сухопутной границы между Испанией и Португалией составляет

987 км (по данным Испании),

1214 км (по данным Португалии).

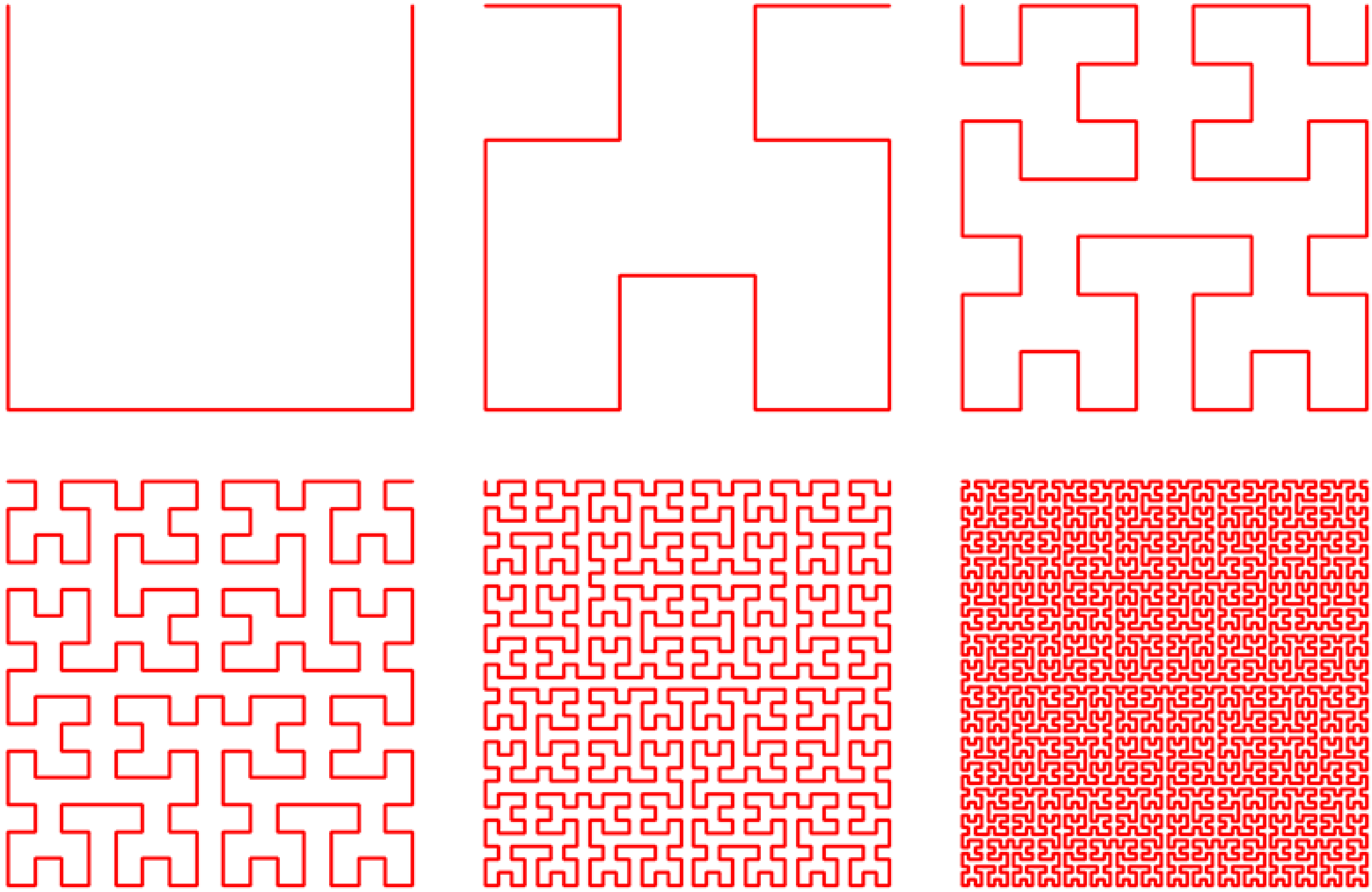
А на самом деле?

Снежинка Коха



Задача. Найти периметр и площадь снежинки Коха

Кривая Гильберта



Аксиома выбора Цермело

Для всякого семейства ***X*** непустых множеств существует функция ***f***, которая каждому множеству семейства сопоставляет один из элементов этого множества.

Множество ***R*** действительных чисел – ***континуум.***

Мощность континуума обозначается ***c***.

Континуум- гипотеза (Кантор)

$$\boldsymbol{c} = \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$$ (П.Коэн, 1963)

«Иерархия бесконечностей»

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1,\ 2^{\aleph_1} = \aleph_2, \cdots$$

- трансфинитные числа.

Свойства счётных множеств

1. Всякое подмножество счётного множества конечно или счётно.
2. Сумма конечного или счётного множества счётных множеств – счётна.
3. Множество всех конечных подмножеств счётного множества – счётно.

4. Множество всех подмножеств (булеан) счётного множества – несчётно.

Счетные множества

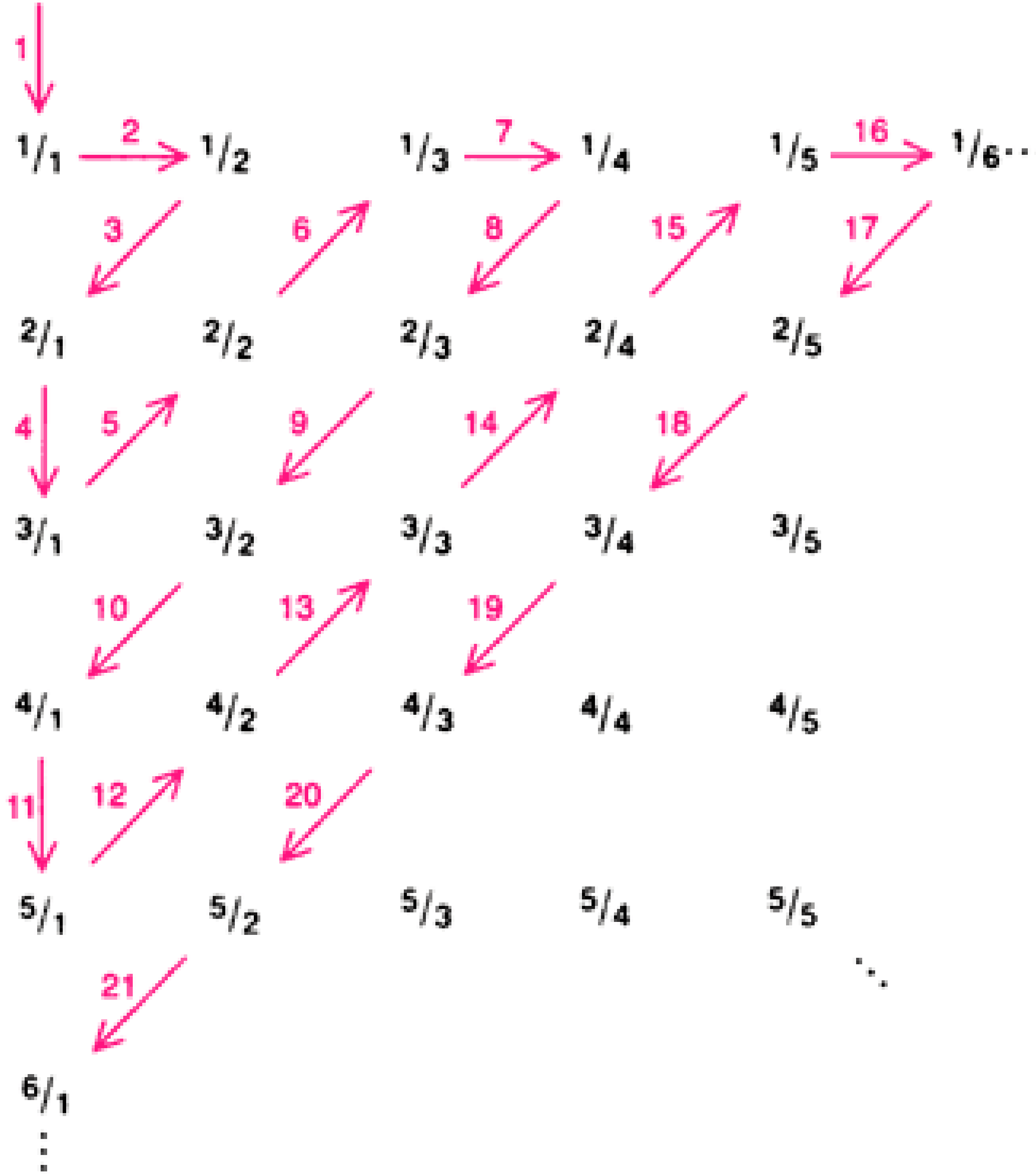
Счетными множествами являются

- множество целых чисел;
- множество рациональных чисел;
- множество точек плоскости с рациональными координатами;
- множество рациональных интервалов на прямой;
- множество многочленов с рациональными коэффициентами;
- множество **алгебраических чисел** (корней многочленов с рациональными коэффициентами).

Пример пересчета всех рациональных чисел.

Задача (для самостоятельного решения)

Придумать иной способ пересчета всех рациональных чисел.



Несчётные множества

Теорема. Множество действительных чисел из промежутка [0,1] – несчётно.

Доказательство. Допустим, что это множество чисел счётно. Занумеруем все числа:

$$0,a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\ldots$$

$$0,a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\ldots$$

$$0,a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Составим новое число $b=0,b_1b_2b_3\cdots$ такое, что $b_k \neq a_{kk}$

Очевидно, это число не входит в пронумерованную последовательность, т.к. отличается от k-го числа k-ым знаком. Противоречие доказывает теорему.

- Несчётными являются:

множество всех точек прямой,
множество всех точек плоскости,
множество всех точек пространства,
множество всех прямых на плоскости,
множество всех непрерывных функций,
множество трансцендентных чисел, …

Трансцендентные числа – действительные числа, не являющиеся алгебраическими.

Трансцендентными являются:

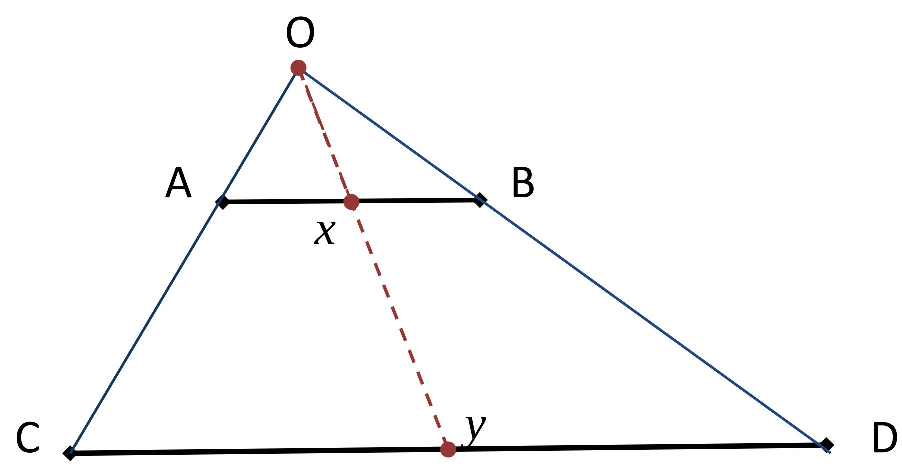
число e=2,71828… (Ш.Эрмит, 1873)

число π=3,14159… (Ф.Линдеман, 1882)

числа $e^{\pi}, 2^{\sqrt{2}}, \sin 1, \ln 2$

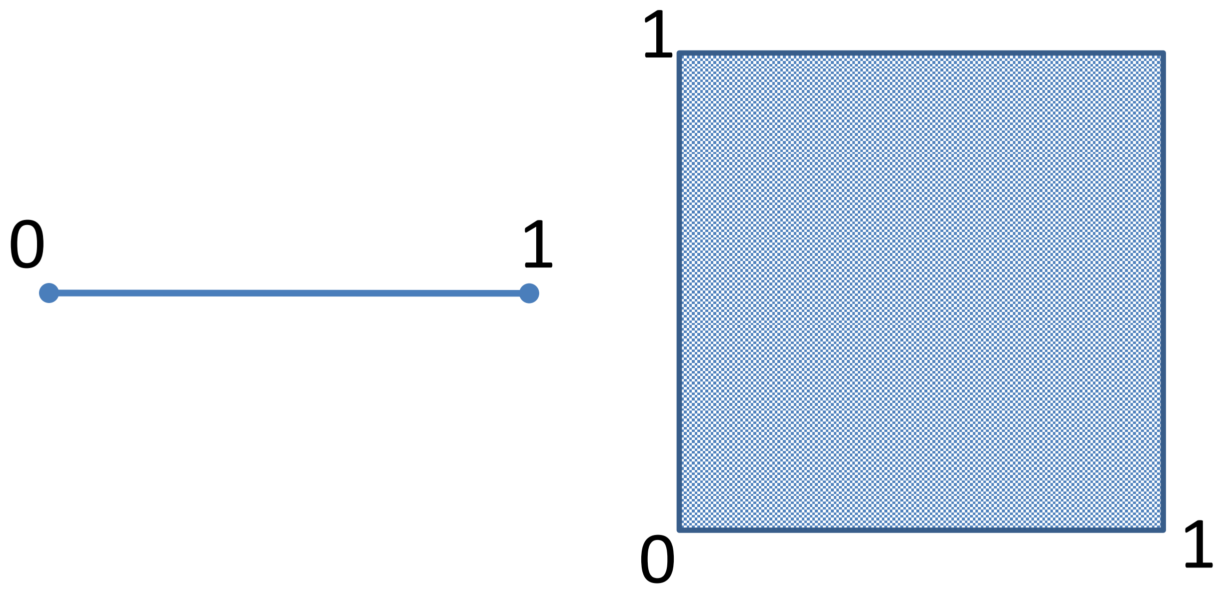
(?) $e^{e}, \pi^{\pi}, \pi^{e}$ - не доказано.

- Равномощность множества точек отрезков AB и CD



- Равномощность множества точек отрезка $(0;1)$ и всей числовой оси $(-\infty;+\infty)$

- Равномощность множества точек отрезка $(0;1)$ и квадрата $(0;1)$ x $(0;1)$ (!!!)



Доказательство.

Пусть координаты некоторой точки квадрата $(x;y)$

$$\left(x;y\right)=\left(0,x_1x_2x_3\ldots;0,y_1y_2y_3\ldots\right)$$

Сопоставим этой паре чисел число из отрезка [0;1]

$$0,x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots$$

Таким образом установлено взаимно-однозначное соответствие между точками квадрата и точками отрезка, и, следовательно, равномощность этих множеств.

Доказательство.

Пусть координаты некоторой точки квадрата $(x;y)$

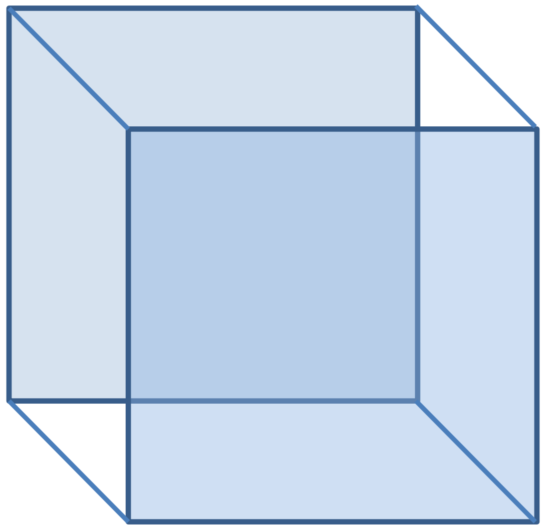
$$\left(x;y\right)=\left(0,x_1x_2x_3\ldots;0,y_1y_2y_3\ldots\right)$$

Сопоставим этой паре чисел число из отрезка [0;1]

$$0,x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots$$

Таким образом установлено взаимно-однозначное соответствие между точками квадрата и точками отрезка, и, следовательно, равномощность этих множеств.

- Равномощность множества точек отрезка $(0;1)$ и куба $(0;1)$х$(0;1)$х$(0;1)$



- Равномощность множества точек единичного отрезка и двумерной плоскости
- Равномощность множества точек единичного отрезка и трёхмерного пространства
- Равномощность множества точек единичного отрезка и n-мерного пространства