Лекция 9

Восстановление оригинала по его рациональному изображению

Пусть $F(p) = \dfrac{Q(p)}{R(p)}$ правильная рациональная дробь.

Способ 1). Разложить дробь в сумму простейших дробей с помощью метода вычёркивания и/или метода неопределенных коэффициентов. Затем использовать таблицу оригиналов и изображений.

Способ 2). Представить дробь в виде произведения простых дробей и использовать теорему о свёртке.

Способ 3). Использовать теоремы разложения.

Первая теорема разложения

Если функция $\boldsymbol{F}(p)$ в окрестности точки $p = \infty$ может быть представлена в виде ряда Лорана

$$F(p) = \frac{c_0}{p} + \frac{c_1}{p^2} + \frac{c_2}{p^3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}},$$

то её оригинал имеет вид

$$f(t) = c_0 + c_1 t + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \frac{t^n}{n!} \qquad (t > 0)$$

Вторая теорема разложения

Если $F(p)$ имеет ***полюсы*** в точках $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то оригинал $f\,(t)$ имеет вид

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(F(p_k) \cdot e^{p_k t}\right)$$

Следствие.

Если $F(p) = \dfrac{Q(p)}{R(p)}$ имеет простые полюсы в точках $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то оригинал имеет вид

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q(p_k)}{R'(p_k)} \cdot e^{p_k t}$$

Формулы для вычисления вычетов

p_0 - простой полюс $\quad \operatorname{Res} F(p_0) = \lim\limits_{p \to p_0} \left(\left(p - p_0 \right) \cdot F\left(p \right) \right)$

p_0 - полюс 2 порядка

$$\operatorname{Res} F(p_0) = \lim_{p \to p_0} \left(\left(p - p_0 \right)^2 \cdot F\left(p \right) \right)'$$

p_0 - полюс 3 порядка

$$\operatorname{Res} F(p_0) = \lim_{p \to p_0} \frac{1}{2} \left(\left(p - p_0 \right)^3 \cdot F\left(p \right) \right)''$$

Пример. Найти оригинал для изображения

$$F(p)=\frac{1}{p^3(p-1)}$$

Способ 1.

Разложим дробь в сумму простейших дробей:

$$F(p)=\frac{1}{p^3(p-1)}=-\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p-1}$$

Восстановим оригинал

$$f(t)=-1-t-\frac{t^2}{2}+e^t.$$

Способ 2. Представим дробь как произведение дробей

$$\frac{1}{p^3(p-1)}=\frac{1}{p^3}\cdot\frac{1}{p-1}$$

и так как $\frac{1}{p^3} \risingdotseq \frac{t^2}{2}, \ \frac{1}{p-1} \risingdotseq e^t,$

то, пользуясь теоремой умножения изображений и дважды интегрируя по частям, получим

$$f(t)=\int_0^t \frac{1}{2}\tau^2 e^{t-\tau}d\tau=-\frac{1}{2}\tau^2 e^{t-\tau}\Big|_0^t+\frac{1}{2}\cdot 2\int_0^t \tau e^{t-\tau}d\tau=$$

$$=-\frac{1}{2}t^2-t-1+e^t.$$

Способ 3). Имеем простой полюс при p=1 и полюс 3-го порядка при p=0. Используем вторую теорему разложения:

$$f(t)=\operatorname*{Res}_{p=1}\left(F(p)\cdot e^{pt}\right)+\operatorname*{Res}_{p=0}\left(F(p)\cdot e^{pt}\right)=$$

$$=\lim_{p\to 1}\left(\frac{1}{p^3\,\cancel{(p-1)}}\cdot e^{pt}\cdot\cancel{(p-1)}\right)+\frac{1}{2!}\lim_{p\to 0}\left(\frac{1}{\cancel{p^3}\,(p-1)}\cdot e^{pt}\cdot\cancel{p^3}\right)''=$$

$$=e^t+\frac{1}{2}\lim_{p\to 0}\left(\frac{e^{pt}}{p-1}\right)''=\cdots=e^t-\frac{t^2}{2}-t-1.$$

$$f(t)=\underset{p=1}{\mathrm{Res}}\left(F(p)\cdot e^{pt}\right)+\underset{p=0}{\mathrm{Res}}\left(F(p)\cdot e^{pt}\right)=$$

$$=\lim_{p\to 1}\left(\frac{1}{p^3\cancel{(p-1)}}\cdot e^{pt}\cdot\cancel{(p-1)}\right)+\frac{1}{2!}\lim_{p\to 0}\left(\frac{1}{\cancel{p^3}(p-1)}\cdot e^{pt}\cdot\cancel{p^3}\right)''=$$

$$=e^t+\frac{1}{2}\lim_{p\to 0}\left(\frac{e^{pt}}{p-1}\right)''=\cdots=e^t-\frac{t^2}{2}-t-1.$$

Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

1. Искомая функция и ее производные заменяются их изображениями. Получается алгебраическое линейное уравнение относительно изображения искомой функции.

2. Решая его, получим так называемое операторное решение.

3. Остается восстановить оригинал, являющийся искомым решением данного дифференциального уравнения.

Для этой последней операции используются все теоремы и правила операционного исчисления, а также готовые таблицы оригиналов и изображений

Пример 1. Решить уравнение операторным методом

$$x''(t)-3x'(t)+2x(t)=2e^{3t} \qquad x(0)=0,\ x'\left(0\right)=0$$

Решение.

Обозначим изображение искомой функции $X(p)$.

Тогда

$$x'(t) \risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$$

$$x''(t) \risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)$$

$$e^{3t} \risingdotseq \frac{1}{p-3}$$

Операторное уравнение будет иметь вид

$$p^2X(p)-3pX(p)+2X(p)=\frac{2}{p-3}$$

Отсюда

$$X(p)(p^2 - 3p + 2) = \frac{2}{p-3}$$

$$X(p) = \frac{2}{(p-1)(p-2)(p-3)}$$

$$X(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-3} = \frac{1}{p-1} - \frac{2}{p-2} + \frac{1}{p-3}$$

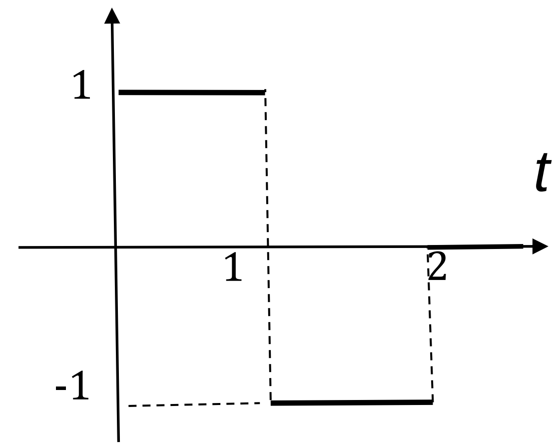
Восстановим оригинал $x(t)$

$$\boxed{x(t) = e^t - 2e^{2t} + e^{3t}}$$

Пример 2. Решить операторным методом уравнение

$x''(t) + x(t) = f(t)$, при нулевых начальных условиях,

если $f(t)$ задана графически:



Решение:

Выразим функцию с помощью единичной функции Хевисайда:

$$f(t) = \chi(t) - 2\chi(t-1) + \chi(t-2)$$

Тогда

$$f(t) \risingdotseq \frac{1}{p} - \frac{2}{p}e^{-p} + \frac{1}{p}e^{-2p}$$

Тогда операторное уравнение имеет вид

$$p^2 X(p) + X(p) = \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{p}$$

Отсюда

$$X(p) = \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{p\left(p^2 + 1\right)} = \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}\right)\left(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}\right)$$

Используя еще раз теорему запаздывания, получим

$$\boxed{\begin{aligned} &x(t) = (1 - \cos t)\chi(t) - 2\left(1 - \cos(t-1)\right)\chi(t-1) + \\ &+ \left(1 - \cos(t-2)\right)\chi(t-2) \end{aligned}}$$

Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пример

$$\begin{cases} y' - 2y - 4z = \cos t & y(0) = 0 \\ z' + y + 2z = \sin t & z(0) = 0 \end{cases}$$

Решение: пусть

$$y(t) \fallingdotseq Y(p)$$

$$z(t) \fallingdotseq Z(p)$$

Переходим к изображениям

$$\begin{cases} pY(p) - 2Y(p) - 4Z(p) = \dfrac{p}{p^2+1} \\ pZ(p) + Y(p) + 2Z(p) = \dfrac{1}{p^2+1} \end{cases}$$

Из первого уравнения находим:

$$Z(p)=\frac{1}{4}\left(pY(p)-2Y(p)-\frac{1}{p^2+1}\right)=\frac{1}{4}\left(Y(p)(p-2)-\frac{p}{p^2+1}\right)$$

Подставляя во второе уравнение системы, найдем

$$Y(p)=\frac{p^2+2p+4}{p^2(p^2+1)}$$ и затем $$Z(p)=-\frac{2}{p^2(p^2+1)}$$

Теперь восстанавливаем оригинал для $Y(p)$

$$Y(p)=\frac{p^2+2p+4}{p^2(p^2+1)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{Cp+D}{p^2+1}=\frac{2}{p}+\frac{4}{p^2}+\frac{(-2p-3)}{p^2+1}=$$

$$=\frac{2}{p}+\frac{4}{p^2}-\frac{2p}{p^2+1}-\frac{3}{p^2+1}\risingdotseq 2+4t-2\cos t-3\sin t$$

Восстановим оригинал для Z(p)

$$Z(p) = -\frac{2}{p^2}\frac{1}{p^2+1} \risingdotseq -2t * \sin t = -2\int_0^t \tau \sin(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= -2\tau\cos(t-\tau)\Big|_0^t - 2\sin(t-\tau)\Big|_0^t = -2t + 2\sin t$$

Итак,

$$y(t) = 2 + 4t - 2\cos t - 3\sin t$$

$$z(t) = -2t + 2\sin t$$

Решение интегральных уравнений операторным методом

Пример. Решить уравнение $x(t)-\int\limits_0^t (t-\tau)x(\tau)d\tau=\sin t$

Решение. Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$

Интеграл в левой части есть свёртка функций $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$

Составим операторное уравнение

$$X(p)-\frac{1}{p^2}\cdot X(p)=\frac{1}{p^2+1}.$$

Решая его относительно $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})$, находим

$$X(p)=\frac{p^2}{\left(p^2+1\right)\left(p^2-1\right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2+1}+\frac{1}{p^2-1}\right).$$

Находим оригинал $\boxed{x(t)=\frac{1}{2}\left(\sin t+\operatorname{sh} t\right)}$