ТЕОРЕМА.

Пусть случайные величины X и Y независимы , g и h - функции из **R** в **R**. Тогда случайные величины g(X) и h(Y) также независимы.

Доказательство.

Для любых B_1 с **R** и B_2 с **R**

$P(g(X) \in B_1, h(Y) \in B_2) = P(X \in g^{-1}(B_1), Y \in h^{-1}(B_2)) = P(X \in g^{-1}(B_1))\ P(Y \in h^{-1}(B_2)) = = P(g(X) \in B_1)\ P(h(Y) \in B_2)$,

где $g^{-1}(B_1) = \{y: g(y) \in B_1\}$, $h^{-1}(B_2) = \{y: h(y) \in B_2\}$ ■

Утверждение (альтернативное определение независимости случ. величин**).**

- Случайные величины $X_1, . . . , X_n$ с абсолютно непрерывным совместным распределением независимы если и только если плотность совместного распределения распадается в произведение плотностей, т.е. для любых $t_1, . . . , t_n$ имеет место равенство: $f(t_1, . . . , t_n) = f_{X1}(t_1) \cdot . . . . \cdot f_{Xn}(t_n)$.

Утверждение.

Пусть случайная величина имеет показательное распределение $X € E_\alpha$. Тогда

1) для любых x, y > 0

$P(X \geq a + b \mid X \geq a) = P(X \geq b)$.

2) $\alpha X € E_1$

Утверждение (ещё одно следствие из теоремы свёртке)**.**

$X_1,\dots X_n € \Phi_{\alpha,\sigma^2}$ - независимы. Тогда $X_1+\dots+X_n € \Phi_{n\alpha,n\sigma^2}$ и $\overline{X} = \dfrac{X_1+\dots+X_n}{n} € \Phi_{\alpha,\sigma^2/n}$

Пусть случайная величина X дискретна, т.е. для некот. набора чисел $y_1, y_2, \ldots$

$$\Sigma\, P(X = y_k) = 1$$

Определение.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется

$$X = \sum y_k\, P(X = y_k)$$

если этот ряд абсолютно сходится, т. е. если

$$\Sigma |y_k|\, P(X = y_k) < \infty$$

В противном случае мы говорим, что математическое ожидание случайной величины X не существует.

Определение. *Математическим ожиданием* случайной величины X, имеющей абсолютно непрерывное распределение с плотностью $f_X(t)$, называется

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(y)dt,$$

если только $\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f_X(t)dt < \infty$. В противном случае считаем, что EX не существует.

- Пусть случайная величина X имеет функцию распределения смешанного типа

  $F_X(y) = \alpha \int t\, f(t)dt + \beta\, \Sigma y_k p_k$, где $\alpha + \beta = 1$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $F_1(y)$ — абс. непрерывная функция распределения, имеющая плотность f(t), а $F_2(y)$ — дискретная функция распределения, имеющая скачки величиной $p_1, p_2, \ldots$ в точках $y_1, y_2, \ldots$. Тогда, по определению,

  $EX = \alpha \int t\, f(t)dt + \beta \sum y_k p_k$,
- если только абсолютно сходятся участв. здесь интеграл и сумма ряда.
- В ряде случае возникает задача нахождения математического ожидания некоторой функции g(X) от случайной величины, при этом изначально известным является только распределение X.
  - $\Sigma P(g(X)=g(y_k)) = \Sigma P(X=y_k) \Rightarrow$
  - $\Rightarrow Eg(X) = \Sigma g(y_k) P(g(X) = g(y_k)) = \Sigma g(y_k) P(X=y_k)$

  В случае абсолютно-непрерывного распределения
  - $Eg(X) = \int t\, f_{g(X)}(t)dt = \int g(t)\, f_X(t)dt$
- Математическое ожидание функции от нескольких случайных величин вычисляется следующим образом:

  $Eg(X_1, \ldots, X_n) = \int \ldots \int g(t_1, \ldots, t_n) f(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_n$,
- где $g(t_1, \ldots, t_n)$ — плотность совместного распределения случайного вектора $(X_1, \ldots, X_n)$.

- **Свойства математического ожидания**
  1. E c = c , где c – постоянная величина, более того EX = c, если P(X=c) = 1
- 2. E (cX) = c EX
- (это легко показать, если вычислить как Eg(X) при g(X)=cX)
- 3. E(X+Y) = EX+EY для любых случайных величин X, Y (в том числе и зависимых) . Действительно:
- $$E\,(X+Y) = \Sigma\,(x_k + y_n)P(X = x_k, Y = y_n) = \sum_k x_k \underbrace{\sum_n P(X = x_k, Y = y_n)}_{P(X = x_k)} + \sum_n y_n \underbrace{\sum_k P(X = x_k, Y = y_n)}_{P(Y = y_n)} = EX+EY$$
- 4. E (XY) = EX EY, если X и Y независимы и их математические ожидания существуют.
- 5. Если X ≥ 0 почти наверное, т. е. если P(X ≥ 0) = 1, то EX ≥ 0.
- 6. Если X ≥ 0 почти наверное, и EX = 0, то X = 0 почти наверное (п.н.).
- 7. Если X ≤ Y п. н., то EX ≤ EY.
- 8. Если X ≤ Y п. н. и EX = EY, то X = Y п.н.
- 9. Если a ≤ X ≤ b п.н., то a ≤ EX ≤ b.

*

- **Определение**. Пусть $E|X|^k < \infty$. Число $E X^k$ называется моментом порядка k или k-м моментом случайной величины X, число $E|X|^k$ называется абсолютным k-м моментом, $E(X - EX)^k$ называется центральным k-м моментом, и $E|X - EX|^k$ — абсолютным центральным k-м моментом случайной величины X**.**
- **Определение**. Дисперсией случайной величины X называется $DX = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$.
  Для дискретных распределений дисперсия вычисляется по формулам
- $DX = \sum^{+\infty} (y_k - EX)^2 P(X = y_k) = \sum y_k^2 P(X = y_k) - (EX)^2$,
  для распределений абсолютно непрерывного типа имеем
- $DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - EX)^2 f_X(t)dt = \int t^2 f_X(t)dt - (EX)^2$.

- **Свойства дисперсии.**
- Пусть X, Y- случайные величины и $\alpha, \beta \in R$, , тогда
- 1) $DX \geq 0$;
- 2) $Dc = 0$, где c – константа.
- 3) $DX = 0$ тогда и только тогда, когда $P\{X = c\} = 1$ для некот. постоянной c;
- 4) $D(cX) = c^2 D(X)$, в частности $D(-X) = DX$
- 5) $D(X+c) = DX$
- 6) если X, Y - независимые, то $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$

Определение. Ковариацей между случайными величинами назывется величина

$$\mathrm{Cov}\,(X,Y) \equiv E((X-EX)(Y-EY)) = E(XY) - EXEY$$

Если X и Y независимы, то Cov (X,Y) = 0.

Определение. Случайная величина X называется нормированной, если EX = 0 и DX= 1. Любую случайную величину можно нормировать преобразованием:

$$X^* = \frac{X-EX}{\sqrt{DX}}$$

Определение. Коэффициентом корреляции случайных величин X, Y называется число

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DXDY}} = E\,(X^*, Y^*)$$

- Коэффициент корреляции показывает качественную зависимость случайных величин (например: зависмы\независмы, линейно\нелинейно зависимы).

Свойства корреляции:

- 1) $|\rho(X,Y)| \le 1$;
- 2) $|\rho(X,Y)| = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b$ для некоторых вещественных $a \neq 0$ и b, причём
- $\rho(X,Y)| = -1 \Leftrightarrow a < 0$
- 3) если X, Y- независимые, то $\rho(X,Y) = 0$. (обратное не всегда верно)

- **Определение**. Говорят, что последовательность случайных величин $\{X_n\}$ *сходится по вероятности* к случайной величине X при $n \to \infty$, и пишут: $X_n \xrightarrow{P} X$, если для любого $\varepsilon > 0$
- $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \to 0$ при $n \to \infty$

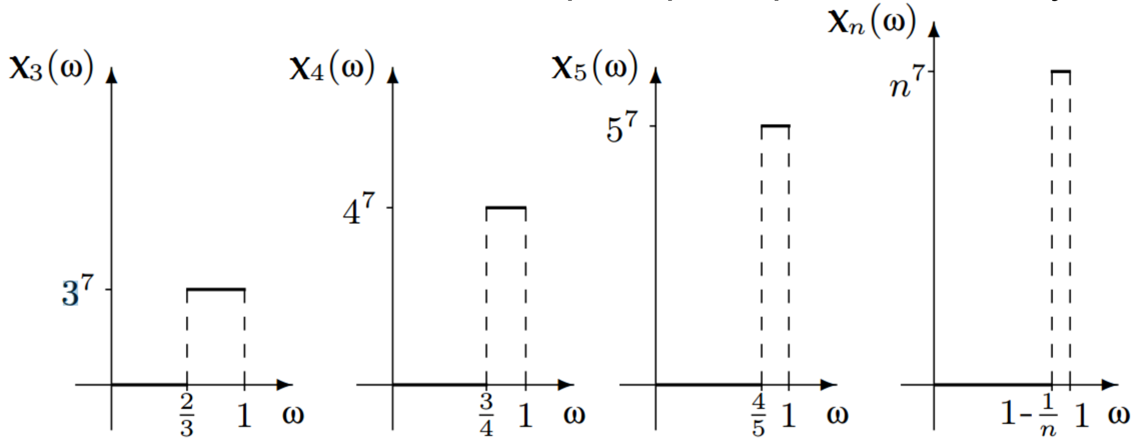
(далее просто $X_n \to X$)

- (или $P(|X_n - X| < \varepsilon) \to 1$ при $n \to \infty$).
- **Пример** .
- Рассмотрим последовательность $X_1, X_2, \ldots$, в которой всевеличины имеют разные распределения: величина X_n принимает значения 0 и n^7 с вероятностями $P(X_n = n^7) = 1/n = 1 - P(X_n = 0)$.
Докажем, что эта последовательность сходится по вероятности к нулю.
Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Для всех n, начиная с некоторого n такого, что $n^7 > \varepsilon$, верно равенство $P(X_n \geq \varepsilon) = P(X_n = n^7) = 1 / n$. Поэтому
- $P(|X_n - 0| \geq \varepsilon = P(X_n \geq \varepsilon) = P(X_n = n^7) = 1/n \to 0$ при $n \to \infty$.
- Итак, случайные величины X_n с ростом n могут принимать всё большие и большие значения, но со всё меньшей и меньшей вероятностью.

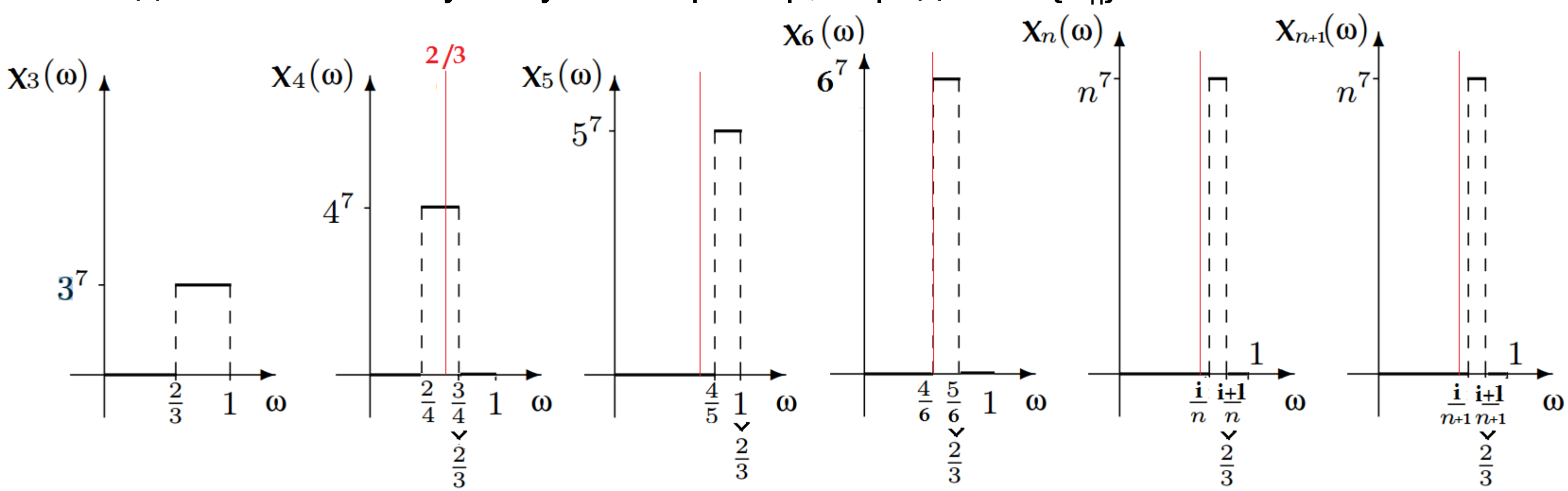
Вообще, существуют разные виды сходимости последовательности функций. Говоря о сходимости случайных величин (которые являются функциями), можно также вводить следующее понятие:

Определение. Последовательность $\{X_n\}$ *сходится почти наверное* к случайной величине X при $n \to \infty$, и пишут: $X_n \to X$ п. н., если
$P\{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega)$ при $n \to \infty\} = 1$.

- Покажем, что сходимости по вероятности и почти наверное не эквивалентны. Для этого последовательность из примера определим следующим образом:



Тогда P {ω : $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)=0$ при $n \rightarrow \infty$} = 1, т.е. имеем сходимость п.н.
Но можно определить эту последовательность так, чтобы отрезок ненулевых значений X_n «бегал» по интервалу [0,1] таким образом, чтобы для любой точки из определённого отрезка $[a,b] \subset [0,1]$ можно было бы выбрать подпоследов-ть $\{X_{n_k}\}$ такую, что $X_{n_k}(\omega) = n_k^7$ и тогда P {ω : $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)=0$ при $n \rightarrow \infty$} ≤ 1-(b-a) и сходимость п.н. отсутствует. Например, определим $\{X_n\}$ так:



- **Некоторые свойства сходимости по вероятности**

- 1. $X_n \to X$, $Y_n \to Y$, то а) $X_n + Y_n \to X+Y$

  б) $X_n Y_n \to X Y$

  Д-во

  Для любого $\varepsilon>0$

- $P(|X_n + Y_n - X - Y| \geq \varepsilon) = P(|(X_n-X) + (Y_n-Y)| \geq \varepsilon) \leq P(|X_n-X| + |Y_n-Y| \geq \varepsilon) \leq$
- $\leq P(\{|X_n-X| \geq \varepsilon/2\} \cup \{|Y_n-Y| \geq \varepsilon/2\}) \leq P(|X_n-X| \geq \varepsilon/2) + P(|Y_n-Y| \geq \varepsilon/2) \to 0$

- 2. Пусть при $n \to \infty$ $X_n^{(1)} \to a_1$, $X_n^{(2)} \to a_2$, …, $X_n^{(k)} \to a_k$, функция $g : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ непрерывна в точке $a = (a_1, \ldots, a_k)$. Тогда
  - $g(X^{(1)}{}_n, \ldots, X^{(k)}{}_n) \to g(a_1, \ldots, a_k)$ при $n \to \infty$

- 3. $X_n \to X$, функция $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ непрерывна, то $g(X_n) \to g(X)$

- 4. Если $X_n \to a$, $\alpha_n \to 0$ (где α_n – числовая последовательность), то $\alpha_n X_n \to 0$

  5. $X_n \to X$ п.н. ➔ $X_n \to X$ (сходимость почти наверное сильнее)

- **Теорема** (неравенство Маркова). Если $E\,|X| < \infty$, то для
- любого $\varepsilon > 0$

$$P\left(|X| \geq \varepsilon \right) \leq . \ \frac{E|X|}{\varepsilon}$$

- **Доказательство.** Нам потребуется следующее понятие.
- **Определение**. Назовём индикатором события A случайную
- величину I (A), равную единице, если событие A произошло, и нулю, если A не произошло.

- По определению, величина I (A) имеет распределение Бернулли с параметром $p = P(\,I(A) = 1) = P(A)$, и её математическое ожидание равно
- вероятности успеха $p = P(A)$. Индикаторы прямого и противоположного
- событий связаны равенством $I(A) + I(\bar{A}) = 1$. Поэтому
- $|X| = |X| \cdot I(|X| < \varepsilon) + |X| \cdot I(|X| \geq \varepsilon) \geq |X| \cdot I(|X| \geq \varepsilon) \geq \varepsilon \cdot I(|X| \geq \varepsilon)$.
- Тогда
- $E|X| \geq E\left(\varepsilon \cdot I(|X| \geq \varepsilon)\right) = \varepsilon \cdot P(|X| \geq \varepsilon)$, и
-
- . $\dfrac{E|X|}{\varepsilon} \geq P(|X| \geq \varepsilon)$ ■

- **Следствие** (**обобщённое неравенство Чебышёва**). Пусть
- функция g не убывает и неотрицательна на R. Если E g(X) < ∞, то для любого $y \in R$

$$P\ (X \geq y) \leq \frac{E\,g(X)}{g(y)}$$

- .
- **Доказательство**. Заметим, что $P\ (X \geq y) \leq P\ (g(X) \geq g(y))$, поскольку функция g не убывает. (Это прямо следует из одного из свойств вероятности, которого?) Оценим последнюю вероятность по неравенству Маркова, которое можно применять в силу неотрицательности g

$$P\ (g(X) \geq g(y)) \leq \frac{E\,g(X)}{g(y)}$$

- **Следствие.** (неравенство ***Чебышёва — Бьенеме***, часто называют просто ***неравенство Чебышёва***).
- Если DX существует, то для любого $\varepsilon > 0$

$$P\ (|X - E\,X| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

- **Доказательство**.
- Для $x > 0$ неравенство $|X - E\,X| \geq \varepsilon$ равносильно неравенству $(X - E\,X)^2 \geq \varepsilon^2$ $\blacksquare$
- , поэтому $P\ (|X - E\,X| \geq \varepsilon) = P\ ((X - E\,X)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(X - E\,X)^2}{\varepsilon^2} = \frac{DX}{\varepsilon^2}$

- **Теорема** (**закон больших чисел Чебышёва**, ЗБЧ).
- Для любой последовательности $X_1, X_2, \ldots$ попарно независимых и одинаково распределённых случайных величин с конечным вторым моментом $EX_1^2 < \infty$ имеет место сходимость:

$$\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} \to EX_1$$

- **Доказательство**.
- Обозначим через $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Из линейности математического ожидания получим:

$$E(S_n/n) = \frac{EX_1+\ldots+EX_n}{n} = \frac{nEX_1}{n} = EX_1$$

- Пусть $\varepsilon > 0$. Воспользуемся неравенством Чебышёва – Бьенме

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D(S_n/n)}{\varepsilon^2} = \frac{DS_n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{DX_1+\ldots+DX_n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{nDX_1}{n^2\varepsilon^2} = \frac{DX_1}{n\varepsilon^2} \to 0$$

- Также справедлива

  Теорема (**усиленный ЗБЧ**, УЗБЧ)

  При всех тех же условиях из теоремы Чебышёва о ЗБЧ:

$$\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} \to EX_1 \quad \text{п.н.}$$