Определение. Случайный процесс X(t) называется *стационарным* или *стационарным процессом в узком смысле* (*строго стационарным*), если
$F_X(t_1,\ldots,t_n,x_1,\ldots,x_n) = F_X(t_1+\tau,\ldots,t_n+\tau,x_1,\ldots,x_n)$ для любых n, τ, $t_1,\ldots,t_n,x_1,\ldots,x_n$

Для случайных процессов, являющихся стационарными в узком смысле:

1) $F_X(t,x)| = F_X(0,x) = F_X(x)$

2) $F_X(t_1, t_2, x_1, x_2)| = F_X(0, t_2-t_1,x_1,x_2) = F_X(t_2-t_1,x_1,x_2)$,

то есть двухмерная функция распределения зависит от трёх параметров: $F_X(\tau, x_1, x_2)$, где τ – разность моментов времени сечений

Определение. Случайный процесс X(t) называется *стационарным процессом в широком смысле*, если выполняются следующие свойства (при этом из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле):

1) $EX(t) = EX$

2) $DX(t) = DX$

3) $K_X(t_1,t_2) = K_X(\tau)$, где $\tau = t_2-t_1$

При этом условие (2) является «лишним» и может быть выведено из условия (3).

Замечание.

Ковариационная функция стационарного процесса обладает следующими свойствами:

1) $K_X(\tau) = K_X(-\tau)$

2) $D_X = K_X(0)$

3) $| K_X(\tau) | \le D_X$

4) $\Sigma^N_{k=1} \Sigma^N_{i=1} x_i x_k K_X(t_i-t_k) \ge 0$, для любых N, $t_1, \ldots, t_N$, $x_1, \ldots, x_N$

- **Определение.**
  Случайный процесс называется *процессом с независимыми значениями*, если его сечения в произвольные моменты времени являются независимыми в совокупности.

$$F_X(t_1,\ldots,t_n,x_1,\ldots,x_n) = P(X(t_1) \le x_1,\ldots, X(t_n) \le x_n) = P(X(t_1) \le x_1) \cdot\ldots\cdot P(X(t_n) \le x_n) =$$
$$= F_X(t_1,x_1)\ldots F_X(t_n,x_n)$$

Замечание

Процесс с независимыми значениями $X(t)$ часто называют *белым шумом*. При этом стационарный процесс с независимыми значениями, для которого $F_X(t,x) = F_X(x)$ называют *стационарным белым шумом*.

Определение.

Случайный процесс называется *процессом с независимыми приращениями*, если случайные величины $X(t_0)$, $\Delta X_1 = X(t_1) - X(t_0)$, $\Delta X_2 = X(t_2) - X(t_1)$. … являются независимыми в совокупности.

Характеристической функцией случайной величины X называется

$$\varphi(\lambda) = Ee^{i\lambda X}, \quad \text{где } i \text{ – мнимая единица.}$$

А для случайного вектора $(X_1,..,X_n)$ характеристическая функция имеет вид:

$$\varphi(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = Ee^{i(\lambda 1X1 + \ldots + \lambda nXn)}$$

Х.ф. - один из способов задания распределения случ. величины, к примеру, справедлива такая формула:

$$f_X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda X}\,\varphi(\lambda)\,d\lambda$$

Характеристическая функция обладает важным свойством: если X и Y независимые независимые случайные величины, то $\varphi_{X+Y}(\lambda) = \varphi_X(\lambda)\,\varphi_Y(\lambda)$.

ТЕОРЕМА.

Случайный процесс с независ. приращениями исчерпывающе характеризуется двухмерной функцией распределения (либо совокупностью таких распредел-й).

Д-ВО

Рассмотрим случайный вектор $Y = (Y_1,\ldots,Y_n) = (X(t_0), X(t_1)-X(t_0), \ldots, X(t_n)-X(t_{n-1}))$ и его характеристическую функцию

$$\varphi_X(t_0,\ldots, t_n,\lambda_0,\ldots, \lambda_n) = \prod_{k=1}^{n} Ee^{i\lambda kYk} = Ee^{i\lambda 0Y0}\, Ee^{i\lambda 1(X(t1)-X(t0))}\ldots Ee^{i\lambda n(X(tn)-X(tn-1))}$$

Покажем, что общая характеристическая функция $\varphi_Y(t_0,\ldots, t_n,\lambda_0,\ldots, \lambda_n)$ выражается через $\varphi_X(t_1, t_2, \lambda_1, \lambda_2) = Ee^{i(\lambda_1 X(t_1)+\lambda_2 X(t_2))}$. В матричном виде Y,X выражаются между собой следующим образом

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1(t)\\ X_2(t)\\ \vdots\\ X_n(t)\end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1&0&0&0&\dots&0\\ 1&1&0&0&\dots&0\\ 1&1&1&0&\dots&0\\ 1&1&1&1&\dots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 1&1&1&1&\dots&1 \end{pmatrix}}_{\substack{\|\\ A^{-1}}} = \begin{pmatrix} Y_1\\ Y_2\\ \vdots\\ Y_n\end{pmatrix}$$

$t=(t_0,\dots,t_n)$, $\lambda=(\lambda_0,\dots,\lambda_n)$

$$\varphi_Y(t,\lambda) = Ee^{i\lambda^T A^{-1} Y} = \left|\ \mu = \lambda^T A^{-1}\ \right| = Ee^{i(\mu_0 Y_0 + \dots + \mu_n Y_n)} = Ee^{i\mu_0 Y_0} \dots Ee^{i\mu_n Y_n} =$$

$$= Ee^{i\mu_0 X(t_0)} \underbrace{Ee^{i\mu_1(X(t_1)-X(t_0))}}_{\substack{\|\\ \varphi_X(t_0,t_1,-\mu_1,\mu_1)}} \dots \underbrace{Ee^{i\mu_n(X(t_n)-X(t_{n-1}))}}_{\substack{\|\\ \varphi_X(t_{n-1},t_n,-\mu_n,\mu_n)}} = \varphi_X(t_0,\mu_0)\prod_{k=0}^{n}\varphi_X(t_{k-1},t_k,-\mu_k,\mu_k)$$

Опр.

Случайный процесс w(t) с независимыми приращениями называется *винеровским процессом*, если выполняются следующие условия:

1) $w(0) = 0$;

2) $w(s) - w(t) \in N(0, \sigma^2(s-t))$, $s \geq t \geq 0$

Опр.

Если для любого n n-мерная функция распределения процесса является n-мерным гауссовским (нормальным) распределением, то такой процесс называется *гауссовским*.

Будем говорить, что их совместное распределение является N-мерным гауссовым (нормальным), если соответствующая N-мерная плотность вероятности имеет вид

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \frac{\exp\left[(-1/2|\mathbf{C}|)\sum_{i,j=1}^{N}|\mathbf{C}_{ij}|(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)\right]}{(2\pi)^{N/2}|\mathbf{C}|^{1/2}},$$

где **C** — ковариационная матрица,

$|\mathbf{C}|$ — определитель **C**, а $|\mathbf{C}_{ij}|$ — алгебраическое дополнение C_{ij}.

, а $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ - вектор первых моментов случайной величины.

Случайная величинаX имеет n-мерное нормальное распределение записывается так.:

$X \in N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C})$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.

Винеровский процесс является гауссовским.

Винеровскими процессами характеризуются в физике броуновское движение.

Пример винеровского процесса:

$X(t) = e^{i\,w(t)}$, где $w(t)$ € $N(0,1)$

Найдём функции моментов и исследуем на стационарность.

Математическое ожидание процесса:

$$E\,e^{iw(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} f_w(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix}\,e^{-x^2/2}\,dx = e^{-t/2}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-it)^2/2}\,dx = e^{-t/2}$$

Ковариационная функция

$$K_X(t_1,t_2) = \underbrace{E\,[e^{iw(t1)}]\,[\overline{e^{iw(t2)}}]}_{=\,E\,e^{i(w(t1)-w(t2))}} - \underbrace{Ee^{iw(t1)}}_{=\,e^{-t1/2}}\,Ee^{iw(t2)} = e^{(t1-t2)/2} - e^{-(t1+t2)/2}$$

Процесс не является стационарным, так как функция ковариации не может быть выражена через $\tau = t_2 - t_1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.

Для гауссовского процесса из стационарности в широком смысле следует стационарность в узком смысле.

- **Пример**
- Для случайного процесса $X(t) = U \cos wt + V \sin wt$, где случайный вектор $(U,V) \in N(0, \sigma^2, 0, \sigma^2, 0)$, w - число
- (матожидания обеих U и V равны 0, дисперсии σ^2, а матрица **C** = $\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$)
- Найдем функции моментов; выясним является ли процесс стационарным в широком смысле; в узком смысле.

  ►

  Найдем моментные функции:
- $m_1 = EX(t) = E(U \cos wt + V \sin wt) = E(U \cos wt) + E(V \sin wt) =$
- $= \underset{0}{EU} \cos wt + \underset{0}{EV} \sin wt = 0$
- $m_2 = EX^2(t) - (EX(t))^2 = EX^2(t) = E[U^2 \cos^2 wt + V^2 \sin^2 wt + 2UV \cos wt \sin wt] =$
- $= EU^2 \cdot \cos^2 wt + EV^2 \cdot \sin^2 wt + 2E(UV) \cos wt \sin wt = \cos^2 wt \cdot EU^2 + \sin^2 wt \cdot EV^2$

  $= \sigma^2$ (независимы, см. матрицу **C**) $E(UV) = EU\,EV = 0$; $EU^2 = DU = E(U-EU)^2 = \sigma^2$

- Для того, чтобы выяснить, является ли процесс стационарным, найдём ковариационную функцию:
- $K_X(t_1,t_2) = EX(t_1)X(t_2) - EX(t_1)EX(t_2) = E[U^2 \cos wt_1 \cos wt_2 + V^2 \sin wt_1 \sin wt_2 +$
- $+ \underset{0}{UV} \cos wt_1 \sin wt_2 + UV \cos wt_2 \sin wt_1] = \ldots = \cos(wt_2 - wt_1) g(t_2 - t_1)$
- Тогда, заметим, что: $\underset{0}{\parallel}$
- 1) $EX(t) = EX = 0$ 3) $K_X(t_1,t_2) = K_X(t_2 - t_1)$
- 2) $DX(t) = DX = \sigma^2$

- то есть процесс является стационарным в широком смысле. При этом, справедливо следующее

  УТВЕРЖДЕНИЕ: Если процесс $X(t)$ является линейной комбинацией нормальных случайных процессов, то он сам является нормальным случайным процессом.

  И тогда, основываясь на утверждении 2, можно считать, что процесс $X(t)$ является стационарным в узком смысле. ◄

- Моментные функции винеровского процесса:

  1) $Ew(t) = 0$
- 2) $Dw(t) = \sigma^2 t$
- 3) $K_w(s,t) = \sigma^2 \min(s,t)$

- **Опр.**
- Случайный процесс $\pi(t)$ с независимыми приращениями называется *пуассоновским*, если:
- 1) $\pi(0) = 0$;
- 2) $\pi(s) - \pi(t) \in \Pi(\lambda(s-t))$, $s \ge t \ge 0$

- Моментные функции пуассоновского процесса:

- 1) $E\pi(t) = \lambda t$
- 2) $D\pi(t) = \lambda t$
- 3) $K_\pi(s,t) = \lambda \min\{s,t\}$

- При помощи пуассоновских потоков в физике моделируют распад вещества.

Замечание

- Пуассоновский процесс π(t) связан с простейшим пуассоновским потоком событий интенсивности λ следующим образом: его значение π(t) равно числу событий в потоке, уже произошедших вплоть до данного момента времени t.

Для процессов с в общем справедливо следующее:

- 1) любой процесс где а) $X(t) \in \mathbf{N}$, и
- б) $X(t2) \geq X(t1)$, если $t2 > t1$

равен числу событий, произошедших на данный момент времени в некотором потоке событий

- 2) стационарность соответствующего потока событий не означает стационарность процесса

- 3) Свойство независимости приращений процесса даёт отсутствие последействия в соответствующем потоке.

- **Замечание**
- Параметр λ равен тангенсу угла наклона прямой математического ожидания и называется интенсивностью пуассоновского процесса. Величина T = 1/λ является средним временем между скачками значений.