- **ТЕОРЕМА**

В простейшем потоке распределение длин интервалов T между соседними событиями показательное с параметром λ, равным интенсивности потока. $\mathbf{T \in E_\lambda}$

Д-ВО

То же, что и теоремы в предыдущей лекции, только надо ещё показать, что параметр λ - не что иное, как интенсивность потока.
Рассмотрим введённую в доказательстве функцию
$p(t) = 1 - F_T(t) = p_0(t)$ (вероятность, что в отрезке длины t не будет событий).
Тогда в силу ординарности
$1 - p(\Delta t) = p_{>1}(\Delta t) = p_1(\Delta t) + o(\Delta t)$, и
$M(\Delta t) = p_1(\Delta t) + o(\Delta t)$ - матожидание числа событий.
Поэтому введённая величина λ в доказательстве прошлой теоремы

$$\lambda = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - p(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M(\Delta t)}{\Delta t}$$ - равна интенсивности потока.

ТЕОРЕМА

Случайная величина числа событий на отрезке длины h **в простейшем потоке** распределена по закону Пуассона с параметром λh: $\mathbf{X(h) \in \Pi_{\lambda h}}$

Д-ВО

$P\,(X(h)=k) \equiv p_k(h) = P\,\{T_0+T_1+\ldots+T_{k-1} < h,\ T_0+T_1+\ldots+T_k > h\} =$

| Рассмотрим $T^{(n)} = T_0+\ldots+T_n$ - сумма n независимых случайных величин с показательным распределением с параметром λ. Мы знаем, что $T^{(n)}$ имеет распределение $\Gamma_{\lambda,n}$ (Следствие из теоремы о свёртке.)

Обозначим $A^h_n \equiv \{T^{(n)} < h\} \subset A^h_{n-1}$. Тогда $P(A^h_n) = \Gamma_{\lambda,n}(h)$. |

$= P(A^h_{k-1}(\Omega \backslash A^h_k)) = P\,(A^h_{k-1} \backslash A^h_k) = P(A^h_{k-1}) - P(A^h_k) =$

$$= \int \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)=(k-1)!} t^{k-1} e^{-\lambda t}\, dt - \underbrace{\int \frac{\lambda^{k+1}}{k!} t^k e^{-\lambda t}\, dt}_{(*)} = \left\{ \begin{array}{ll} \text{интегрируем по частям, такие замены:} & \\ u = t^{n-1}/(n-1)! & dv = \lambda^n e^{-\lambda t}\, dt, \\ du = t^{n-2}/(n-2)! & v = -\lambda^{n-1} e^{-\lambda t} \end{array} \right.$$

$$= -\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\lambda t}\Big|_0^h + \int \frac{\lambda^{k+1}}{k!} t^{k-2} e^{-\lambda t}\, dt - (*) =$$

$$= \int \lambda e^{-\lambda t}\, dt - \sum_{m=1}^{k-1} \frac{(\lambda h)^m}{m!} e^{-\lambda h} - \left(\int \lambda e^{-\lambda t}\, dt - \sum_{n=1}^{k} \frac{(\lambda h)^n}{n!} e^{-\lambda h} \right) = \frac{(\lambda h)^k}{k!} e^{-\lambda h} \quad \blacksquare$$

Замечание. Матожидание числа событий на интервале $(t,t+h)$ в потоке заданной интенсивности равно

$$EX(t,h) = \int_t^{t+h} \lambda(t)dt$$

Опр *Потоком Пуассона* называется ординарный поток без последействия.

Простейший поток является частным случаем пуассоновского, а именно когда характеристика интенсивности постоянна $\lambda(t) = \lambda$.

ТЕОРЕМА (о преобразовании временной оси простейшего потока Пуассона). Пусть поток Пуассона $\{\Theta_1,\Theta_2,\ldots\}$ имеет интенсивность $\lambda(t)$. Тогда подействуем на него преобразованием

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(\tau)d\tau,$$

которое переводит произвольно взятый интервал (a,b) временной оси в

$(\Lambda(a), \Lambda(b)) \equiv (\Lambda(a), \Lambda(a) + \Lambda(a,b-a))$, где $\Lambda(a,b-a) \equiv \int_a^b \lambda(t)dt$.

Полученный поток событий $\{\Lambda(\Theta_1), \Lambda(\Theta_2),\ldots\}$ будет простейшим с единичной интенсивностью.

Д-ВО

Рассмотрим произвольный пуассоновский поток.
Заметим, что при «искажении времени» под действием Λ для любого ω (эл.исх.)

- $\Lambda(\Theta_{n+1}(\omega)) - \Lambda(\Theta_n(\omega)=t_\omega) = \int_{\Theta n = t_\omega}^{\Theta n+1(\omega)} \lambda(t)\, dt$
- Также заметим, что $\Lambda(x)$ – монотонно возрастает, если всюду кроме счётного числа точек $\lambda(t)>0$. Но если бы было $\lambda(t) = 0$ на некотором интервале, то это бы означало наличие последействия. (Почему?) Поэтому $\lambda(t) >0$ почти всюду, и в силу этого существует $\Lambda^{-1}(x)$, и
- $\Theta_{n+1}(\omega) – \Theta_n(\omega) = \tau \iff \Lambda(\Theta_{n+1}(\omega)) - \Lambda(\Theta_n(\omega)) = \int_t^{t+\tau} \lambda(t)\, dt$ (1)
- $\Theta_n \in (a,b) \iff \Lambda(\Theta_n(\omega) \in (\Lambda(a), \Lambda(b)) = (\Lambda(a), \Lambda(a) + \Lambda(a,b-a))$, следовательно
  (2) $p_k(t,h) = p'_k(\Lambda(t), \Lambda(t,h))$ - вероятность в преобразованном потоке, из чего легко показать сохранение отсутствия последействия.
- Также $p_{>1}(t, \Delta t) = p'_{>1}(\Lambda(t), \Lambda(t, \Delta t)) \Rightarrow$ Для ординарности остаётся показать, что для любого t $o(\Delta t) = o(\Lambda(t, \Delta t))$
  $\Lambda(t, \Delta t) = \int_t^{\Delta t} \lambda(t)\, dt \Rightarrow \Delta t \min \lambda(t) = c_1 \Delta t \le \Lambda(t, \Delta t) \le c_2 \Delta t = \Delta t \max \lambda(t)$,
  $\Rightarrow o(c_1\Delta t) \le o(\Lambda(t, \Delta t)) \le o(c_2 \Delta t) = o(\Delta t)$. Заметим, что эти рассуждения работают и в обратную сторону, т.е. $\Lambda^{-1}(t)$ тоже сохраняет эти свойства.

- Теперь рассмотрим простейший поток с интенсивностью 1. Для произвольно выбранного интервала между двумя соседними событиями $T(t)$
- $P(T(t) \ge h) = P(T \ge h) = 1 - F_T = e^{-h}$
- $P(T(t) \ge \Lambda(t,h)) = e^{-\Lambda(t,h)}$
  В силу (1) это равносильно
- $P(\Lambda^{-1}(T(t)) \ge h) = e^{-\Lambda(t,h)}$ - вероятность для соответствующего интервала в пуассоновском потоке, полученном преобразованием времени $\Lambda^{-1}(t)$.

- В силу (2) в новом потоке
  $p'_1(\Lambda^{-1}(t), \Delta t) = p_1(t, \Lambda(t, \Delta t)) \approx 1 \cdot \Lambda(t, \Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} \lambda(\tau)d\tau$ - в старом потоке.
- Поэтому интенсивность нового потока
- $$\lambda'(\Lambda^{-1}(t)) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p'_1(\Lambda^{-1}(t), \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_t^{t+\Delta t} \lambda(\tau)d\tau}{\Delta t} = \lambda(t)$$
  ординарность
- И преобразованием $\Lambda(t)$ получим из этого пуассоновского потока исходный простейший поток с единичной интенсивностью ■

СЛЕДСТВИЕ 1 В пуассоновсом потоке

$$p_0(t,h) = e^{-a(t,h)}$$

- **СЛЕДСТВИЕ 2**
  Число событий на интервале времени в потоке Пуассона имеет распределение Пуассона с параметром $\Lambda(t, h)$ $(= EX(t,h) \equiv a(t.h))$

$$P(X(t,h)=k) = \frac{(a(t,h))^k}{k!} e^{-a(t,h)}$$

ТЕОРЕМА

Сумма (наложение) n пуассоновских потоков с интенсивностями $\lambda_1(t),\ldots,\lambda_n(t)$ будет пуассоновским с интенсивностью $\lambda(t) = \Sigma \lambda_i(t)$.
Д-ВО: Достаточно доказать для n = 2 . (Отсутствие послед-я - элементарно)

Покажем ординарность суммы: $p^{\Sigma}_k(t,\Delta t) = p^1_k(t,\Delta t)\, p^2_0(t,\Delta t) + p^1_{k-1}(\Delta t)\, p^2_1(\Delta t) +$
$+ p^1_0(\Delta t)\, p^2_k(\Delta t) = Q_k(\Delta t) R_0(\Delta t) + Q_{k-1}(\Delta t) R_1(\Delta t) + \ldots + Q_0(\Delta t) R_k(\Delta t)$, где
R_i и Q_i - полиномы с младшей степенью i, полученные при разложении в ряд Тейлора. В произведении коэф.при меньшей степени вида $\lambda_1^i(t)\, \lambda_2^{k-i}(t) / i!(k-i)!$
➔ Поэтому $p_k(t,\Delta t) < (2\max^k(\lambda_1(t), \lambda_2(t))=const) \cdot (\Delta t)^k$ ➔ $p_{>1} = O(\Delta t^2) = o(\Delta t)$

- **Опеделение.**
- Ординарный поток событий называется *потоком с ограниченным последствием*, если интервалы времени T_n между последовательными событиями (см.рис.) представляют собой независимые случайные величины. Если эти случайные величины одинаково распределены, то такой поток называется ***потоком Пальма***. В связи с одинаковостью распределений T поток Пальма всегда стационарен.
- Простейший поток является частным случае мпотока Пальма; внеминтервалымежду событиями распределены по показательному закону E_λ,где λ—интенсивность потока.

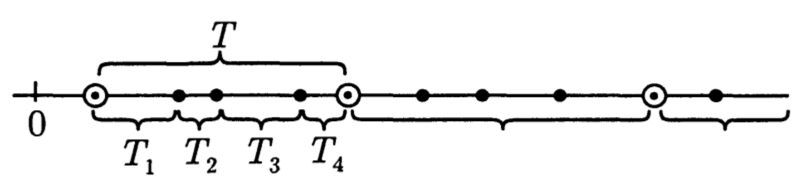
  УТВЕРЖДЕНИЕ 1.
  Поток Пальма стационарен.

  УТВЕРЖДЕНИЕ 2.
- Поток Пальма ординарен.

- **УТВЕРЖДЕНИЕ 3.**
- В потоке Пальма $\lambda = 1/ET$.

- **Опр.**
- *Потоком Эрланга k-го порядка* называется поток событий, получающийся «прореживанием» простейшего потока, когда сохраняется каждая k-я точка (событие) в потоке, а все промежуточные выбрасываются.
  (На рис. показано по лучение потока Эрланга 4-гопорядка из простейшего потока).
  Интервал времени T между двумя соседними событиями в потоке Эрланга k-го порядка представляет собой сумму k независимых случайных величин T_1, T_2 ,... ,$T_к$, имеющих показательное распределение с параметром λ – интенсивность простейшего потока.
- Из этого следует, что поток Эрланга является пальмовским потоком и стационарен.

- Найдём **плотность закона распределения T** ≡ $T^{(k)}$ **для потока Эрланга** k-го порядка. Для этого рассмотрим простейший поток с интенсивностью λ и найдём элемент вероятности
- $f_{T(k)}(t)dt = P((T^{(k)} = \Sigma T_i) \in (t, t+dt))$
- Событие в скобках произойдёт, когда на интервал от [0,t] попадёт k-1 точка (событие) и на интервал (t, t+dt) - k-я точка. Поэтому, и в виду отсутствия последействия
- $f_{T(k)}(t)dt = p_{k-1}(t)\, p_1(dt) = \dfrac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \cdot \lambda dt$



➔ $f_{T(k)}(t) = \dfrac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}$ (t>0) .

- Так как интервал $T^{(k)}$ между соседними событиями в потоке Эрланга k-го порядка, полученном из простейшего интенсивности λ с интервалами T_i равен
- $T^{(k)} = \Sigma T_i \quad ➔ \quad ET^{(k)} = kET_i = k / \lambda \quad ➔$
- Интенсивность потока Эрланга k-го порядка
- $\lambda^{(k)} = 1/ET^{(k)} = \lambda / k \quad \to \ 0 \quad$ (при $k \to \infty$)
-

  Теперь заметим, что если произвести «операцию увеличения масштаба в k раз» потока, то есть сопоставить каждой реализации потока {Θ1(ω), Θ2(ω), …} бесконечномерный вектор {Θ1(ω) = Θ1(ω)/k , Θ2(ω) = Θ2(ω)/k , … }, то также пропорционально уменьшатся интервалы $T^{(k)}$, и
- $ET^{(k)} = ET^{(k)}/ k = 1/\lambda$.

  Назовём такой поток *нормированным потоком Эрланга k-го порядка*.
- $$f_{T(k)}(t) = \frac{\lambda k(\lambda kt)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda kt}$$
- и дисперсия $T^{(k)}$ равна $\quad DT^{(k)} = 1 / k\lambda^2$

  $(= DT^{(k)} / k^2 = \Sigma DT_i / k^2 = (k / \lambda^2) /k^2 = 1 / k\lambda^2)$
- В виду того, что $DT^{(k)} \to 0$ при $k \to \infty$, длины интервалов стремятся к постоянному значению $\quad T^{(k)} \to \ C = ET = 1/\lambda$.
  Это свойство потоков Эрланга удобно в практических применениях: оно даёт возможность, задавая различные k, получать потоки с разной степенью последействия: от полного отсутствия при k = 1, до жесткой функциональной зависимости между моментами появления событий (k = ∞)

- В целях упрощения часто бывает удобно приближенно заменить реальный пальмовский поток событий - потоком Эрланга с той же степенью последействия. Это делают, согласовывая характеристики реального потока – матожидание и дисперсию интервала между событиями - с теми же характеристиками заменяющего потока Эрланга.