А. А. Марков (1886).

Для однородной цепи $p_{ij}^{(n)} = p_{ij}$ и $\pi^{(n)} = \pi$, поэтому

$$p^{(n)} = p^{(n-1)} \pi \qquad (1)$$

$$p^{(n)} = p^{(0)} \pi^n$$

Когда существует предел (это касается не только однородного случая)

$$\lim p^{(n)} = p^* \qquad (\lim p(t) = p^*)$$

и этот предел не зависит от начального распределения состояний $p^{(0)}$ и также от распределения в любой иной момент времени $p(t_0)$, то этот предел p^* называется *финальными (или предельными) вероятностями состояний (финальным распределением состояний).* Тогда говорят, что в соответствующей дин. системе устанавливается ***стационарный режим***, и что она является эргодической, и сам **процесс Маркова** является ***эргодическим***.

Но: последнее означает не более и не менее, чем сходимость на бесконечности процесса Маркова к некоему строго стационарному и эргодическому процессу $Y(t)$ с одномерным распределением p^*.

Эргодичность Y можно вывести из следующего:

Так как для любых $(n, t_1 < t_2 < \ldots < t_n)$ p^* не зависит от $p(t_n)$ $\Leftrightarrow$ $K(X(t_n), Y(t_n+t)) = 0$

С другой стороны $\lim X(t_n) = \lim Y(t_n)$,и ввиду огранич. $|X| < C$ $\Rightarrow$ $EY = \lim\limits_{t \to \infty} EX(t)$

Следовательно,

$$\lim_{t_n \to \infty} \lim_{t \to \infty} K(Y(t_n), Y(t_n+t)) = \lim_{t_n \to \infty} \lim_{t \to \infty} K_Y(t_n, t_n+t) = 0 .$$

Финальные вероятности можно вычислить, перейдя в (1) к пределу:

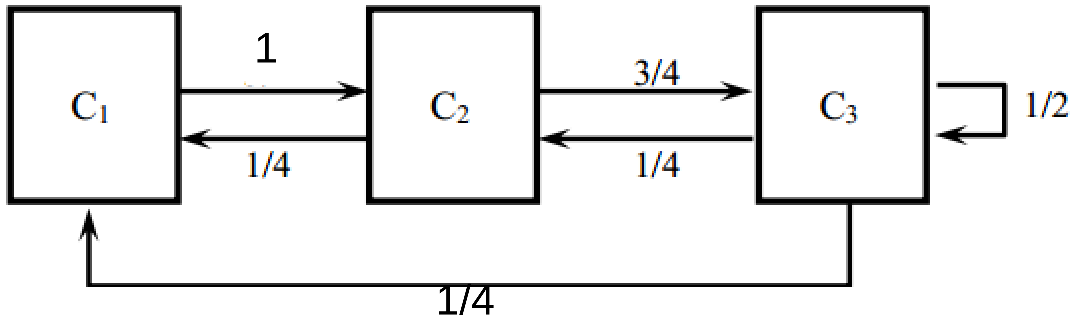
$$p^* = p^* \pi$$

Достаточное условие эргодичности для однородных цепей Маркова даёт **Эргодическая ТЕОРЕМА Маркова**

Если существует целое $m>0$, такое что все элементы матрицы π^m строго положительны, то процесс Маркова эргодичен.

Д-ВО Почитать – Б.В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. (М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988; § 17 «Теорема о предельных вероятностях»)

- Размеченный граф состояний цепи Маркова
-



- Узлы графа состояний с именами С1, С2, С3 соответствуют значениям процесса Маркова (удобно построить граф так, чтобы индекс узла был равен соответствующему целочисленному значению процесса). Ориентированные рёбра (стрелки) графа соответствуют возможным переходам в цепи Маркова, рядом со стрелкой пишут вероятность перехода.
- Состояние i называют существенным, если попав в него, всегда можно вернуться назад, т.е. для любого j

$$i \rightarrow j \quad \Rightarrow \quad j \rightarrow I \,,$$

где символ → означает существование пути как цепочки переходов между состояниями с началом в левом состоянии и концом в правом.

- Поглощающее состояние – это состояние, из которого нельзя перейти ни в какое другое. (Всегда существенное.)

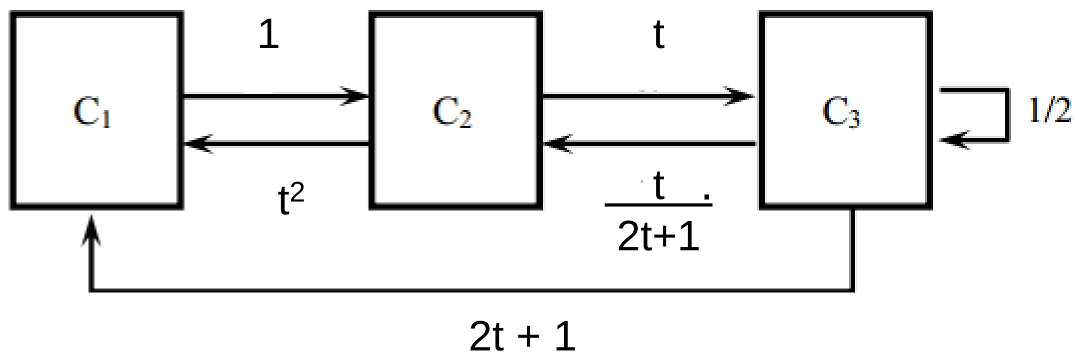
- Пусть I – некоторое мн-во состояний. Будем называть I мн-вом *сообщающихся состояний* (либо *неразложимым классом состояний*), если для любых I,j є I

$$i \rightarrow j \;\; \text{и} \;\; j \rightarrow i \quad (\text{обозначим } i \leftrightarrow j)$$

-

- В процессе Маркова с непрерывным временем T можно ввести понятие интенсивности (плотности) вероятности перехода(или просто инт. перехода) λ_{ij} (t) :

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(j, t+\Delta t, i, t)}{\Delta t}$$

- **УТВЕРЖДЕНИЕ.**
- Интенсивности однородного процесса Маркова постоянны: $\lambda_{ij}(t) = \lambda_{ij}$.(очевидно)
- Если известны интенсивности перехода для любой пары состояний процесса Маркова, то можно составить размеченный граф состояний процесса, пометив рёбра графа соответствующими интенсивностями переходов:
- 

- **ТЕОРЕМА**
Критерием эргодичности однородного процесса Маркова с конечным числом состояний (как с дискретным так и с непрерывным временем) является то, что любое множество существенных состояний сообщается между собой (существует цепочка переходов между любыми существ. состояниями).

- В конечной однородной цепи Маркова для существования предельных распределений состояний **p** (без требования независимости от начального распределения $p^{(0)}$) достаточно существование предела последовательности $\{\pi^k\}$ степеней стохастической (сумма элементов в любой строке = 1 – **определение**) матрицы перехода.

- **ТЕОРЕМА**
  (достаточный признак существов-я предельного распределения состояний в конечной однородн. цепи Маркова) (не эргодичность!, более слабое утверждение)
- Предел стохастической матрицы π существует, если выполнено хотя бы одно:
  1) для некоторой степени m матрицы π^m есть строго положительный столбец (в этом случае говорят, что π^m *принадлежит классу матриц Маркова **M***);
- 2) π – примитивная матрица (см. определение ниже)

- Квадратная Матрица A = (a_{ij}) называется *неразложимой,* если одновременной перестановкой строк и столбцов ее нельзя привести к виду
- $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$ A_1 и A_3—квадр подматрицы $k \times k$ и $(n-k)\times(n-k)$ соотв
- это в точности означает, что в множестве индексов {1,..,n} нет *изолированных подмножеств* J, т.е. таких, что элементы матрицы a_{ij} = 0 всегда, когда одновременно i϶ {1,..,n} \ J и j ϵ J.
- Неотрицательная (все элементы ≥ 0) матрица A называется *примитивной*, если она неразложима и имеет лишь одно собственное значение с максимальным модулем (т.е. мн-во собств. значений $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots < \lambda_n$).
- (В любой стохастической матрице все собств. значения $\lambda \le 1$)

Достаточные признаки для эргодичности неоднородных цепей Маркова

УТВЕРЖДЕНИЕ 1

Класс примитивных матриц $\mathbf{K_1}$ не замкнут относительно умножения.
(перемножая можно поучить результат $\notin \mathbf{K_1}$)

-

Пусть $\mathbf{K_1}$ – множество всех примитивных матриц. Оно не замкнуто относительно умножения. В $\mathbf{K_1}$ выделим подмножество $\mathbf{K_2}$ следующим образом:

- $A \in \mathbf{K_2} \Leftrightarrow$ произведение A на любую матрицу из $\mathbf{K_1}$ – примитивная матрица.

- **УТВЕРЖДЕНИЕ 2**
- Если у примитивной матрицы все элементы главной диагонали положительны, то она принадлежит классу $\mathbf{K_2}$.

- **УТВЕРЖДЕНИЕ 3**
- Класс матриц Маркова **M** (т.е. у которых есть положит. столбец) входит в $\mathbf{K_2}$.

- **ТЕОРЕМА (достаточн. признаки эргодичности конечн. неоднор. цепи Маркова)**
- 1) Если все матрицы последовательности $\{H_k = \pi_1 \cdot \ldots \cdot \pi_k\}$ принадлежат классу $\mathbf{K_2}$ и наименьший элемент каждой матрицы H_k не меньше некотор. фиксированного числа $\delta > 0$, то цепь Маркова, определяемая этой последовательностью, является эргодической.

- 2) Если выполняется только второе условие, то для эргодичности цепи необходимо и достаточно, чтобы существовала бесконечная последовательность марковских стохастических матриц вида

$$M_{n_i, n_{i-1}} = \pi_{n_{i-1}+1} \cdot \pi_{n_{i-1}+2} \cdot \ldots \cdot \pi_{n_i} \quad \text{, где } i = 1, 2, \ldots \text{ и } n_0 = 1..$$

- **ТЕОРЕМА**
- Пусть динамическая система S имеет мн-во возможных состояний $\{S_k\}$, а процесс изменения состояний этой системы представляет собой случайный процесс Маркова, и для всех пар состояний $\{S_i , S_j \}$ определены интенсивности перехода $\lambda_{ij}(t)$ и $\lambda_{ji}(t)$. Тогда вероятности состояний системы удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Колмогорова:

- $p'_k(t) = \sum\limits_{i\neq k} p_i(t)\lambda_{ik}(t) - p_k(t) \sum\limits_{j\neq k} \lambda_{kj}(t)$, $k = 1,2,\ldots,n,$ $t \in T$ (2) .

- Д-ВО

  Пусть n – количество всех состояний

  Так как
  $p_k(t+\Delta t) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i(t)\, p(t, i, t+\Delta t, k) \Rightarrow p_k(t+\Delta t) - p_k(t)\, p(t, k, t+\Delta t, k) = \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} p_i(t)\, p(t, i, t+\Delta t, k)$
- И по свойствам вероятн-ти $p(t, k, t+\Delta t, k) = 1 - \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} p(t, k, t+\Delta t, j) \Rightarrow$

- $p_k(t+\Delta t) - p_k(t)\left(1 - \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} p(t, k, t+\Delta t, j)\right) = \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} p_i(t)\, p(t, k, t+\Delta t, i) \Rightarrow$

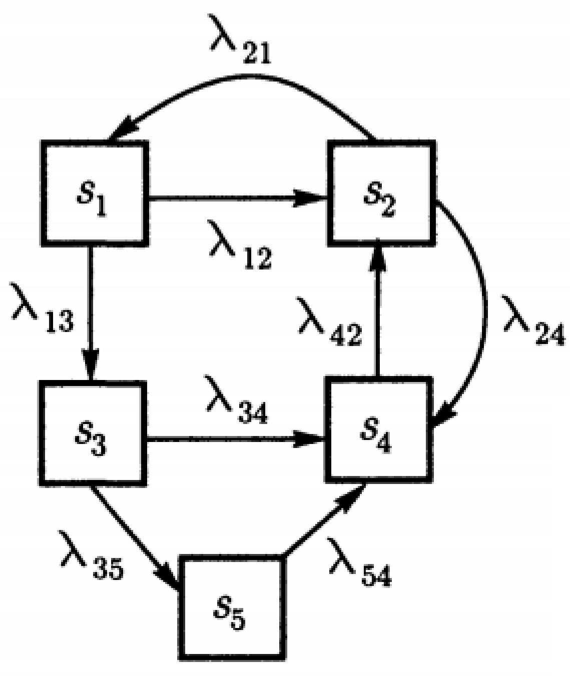
- $p_k(t+\Delta t) - p_k(t) = \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} p_i(t)\, p(t, i, t+\Delta t, k) - p_k(t) \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} p(t, k, t+\Delta t, j)$
- Поделив обе части уравнения на Δt и переходя к пределу по $\Delta t \to 0$ получим

- $p'_k(t) = \sum\limits_{i\neq k} p_i(t)\lambda_{ik}(t) - p_k(t) \sum\limits_{j\neq k} \lambda_{kj}(t)$ ■

- В общем случае для определения вероятностей состояний системы в момент времени нужно решить задачу Коши с одним дополнительным (нормировочным) условием:
- $\left\{\begin{array}{l} (2) \\ p^{(0)} \\ \Sigma\, p_i(t) = 1 \end{array}\right.$ (3)
- Если интенсивности всех переходов имеют предел при $t \to \infty$, то финальные вероятности состояний p^* могут быть получены решением системы линейных алгебраических уравнений, которая получается из системы (3), если перейти в ней к пределу по $t \to \infty$, положив левые части уравнений (2) (производные) равными нулю (потому что $p(t)$ должен стремиться к постоянному вектору).

- Систему уравнений Колмогорова можно составлять непосредственно по графу состояний, пользуясь мнемоническим правилом: для каждого состояния суммарный выходящий поток вероятности равен суммарному входящему.

- Например, для системы S, с размеченным графом состояний, данным на рис. уравнения для финальных вероятностей состояний имеют вид



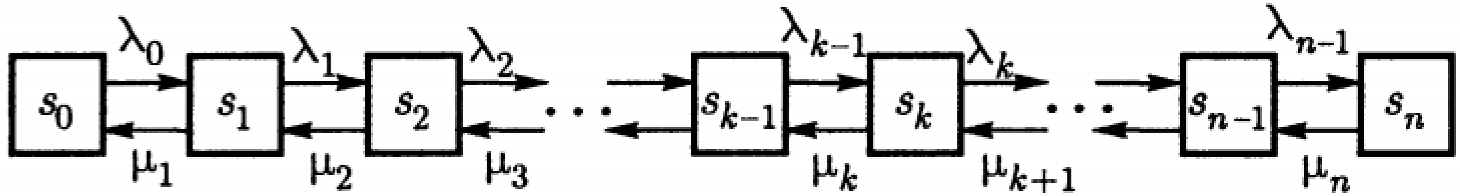
$$(\lambda_{12} + \lambda_{13})\, p_1^* = \lambda_{21} p_2^*;$$

$$(\lambda_{21} + \lambda_{24})\, p_2^* = \lambda_{12} p_1^* + \lambda_{42} p_4^*;$$

$$(\lambda_{34} + \lambda_{35})\, p_3^* = \lambda_{13} p_1^*;$$

$$\lambda_{42}\, p_4^* = \lambda_{24} p_2^* + \lambda_{34} p_3^* + \lambda_{54} p_5^*;$$

$$\lambda_{54}\, p_5^* = \lambda_{35} p_3^*.$$



- граф состояний которых имеет вид, показанный на рис. Называется схемой гибели и размножения. Это название заимствовано из биологических задач, где состояние популяции sk означает наличие в ней к единиц. Переход в право связан с «размножением» единиц, а влево — с их «гибелью».
  «Интенсивности размножения» -(λ_0 ,…,λ_{n-1}). «Интенсивности гибели» - (μ_1,…, μ_n)

- Из уравнений Колмогорова можно найти финальные вероятности состояний:

$$p_1^* = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\,p_0^*; \quad p_2^* = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\,p_0^*;\ldots;$$

$$p_k^* = \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}\,p_0^* \quad (k = 0, \ldots, n);\ldots;$$

- $$p_n^* = \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\,p_0^*; \quad p_0^* = \left\{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2} + \ldots + \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\right\}^{-1}$$

Кроме того интерес представляют ещё моментные характеристики процесса: усреднение по вероятности для функции популяции получается из: $\frac{dEX(t)}{dt} = \Sigma(\lambda_k-\mu_k)p_k(t)$

а мера отклонений от него(дисперсия): $\frac{d\,DX(t)}{dt} = \Sigma(\lambda_k+\mu_k+2k(\lambda_k-\mu_k)-2EX(t)\ (\lambda_k-\mu_k))p_k(t)$

- Причём уравнение для математического ожидания величины популяции следует непосредственно из уравнений Колмогорова.
  Действительно, если расписать (k-1)-ый, k-ый и (k+1)-ый члены суммы
- $\frac{d\,EX(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{n} k\, p'_k(t)$ через уравнения Колмогорова :
- $(k-1)\,[\,-(\lambda_{k-1}+\mu_{k-1})\,p_{k-1} + \lambda_{k-2}\,p_{k-2} + \mu_k p_k\,]$
- $k\,[\,-(\lambda_k+\mu_k)\,p_k + \lambda_{k-1}\,p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1}\,]$
- $(k+1)\,[\,-(\lambda_{k+1}+\mu_{k+1})\,p_{k-1} + \lambda_k\,p_k + \mu_{k+2}p_{k+2}\,]$
- то легко видеть, что остальные члены суммы не содержат p_k и поэтому
- коэффициент при p_k можно найти из суммы выделенных слагаемых:
- $(k-1)\,\mu_k - k(\lambda_k+\mu_k) + (k+1)\lambda_k = \lambda_k - \mu_k$, т.е.
-

$$\frac{d\,EX(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \mu_k)\, p_k(t)$$