Лекция 12

Алгебраические структуры

- ***Алгебраическая структура*** это ***множество*** с заданным на нём набором ***операций*** и ***отношений***, удовлетворяющим некоторой системе аксиом.
- Алгебраическая система с пустым множеством отношений называется ***алгеброй***, а система с пустым множеством операций — ***моделью***.
- ***Морфизм*** это отображение, сохраняющее операцию (изоморфизм, автоморфизм, гомоморфизм, эндоморфизм).
- Основные структуры – ***группы, кольца, тела, поля***.

Кольцо

- ***Кольцо*** – алгебраическая структура (множество ***К***), в котором определены две бинарные операции (+ -«сложение» и x –«умножение»), причём $\forall a,b,c \in K$

1) $a+b=b+a$ коммутативность сложения;
2) $a+(b+c)=(a+b)+c$ ассоциативность сложения;
3) $\exists\, 0 \in K : a+0=a$ существование нейтрального элемента (нуля) ;
4) $\forall a \in K\ \exists b \in K : a+b=0$ существование противоположного элемента ($b=-a$);

5) $\begin{cases} a\times(b+c)=a\times b+a\times c \\ (b+c)\times a=b\times a+c\times a \end{cases}$ дистрибутивность.

- Кольцо – это абелева группа по сложению и полугруппа по умножению, с дистрибутивностью операций.
- Примеры колец:

1) {0} - тривиальное кольцо;

2) множество целых чисел;

3) множество рациональных чисел;

4) множество кватернионов;

5) множество вычетов по модулю натурального числа n;

6) множество квадратных матриц;

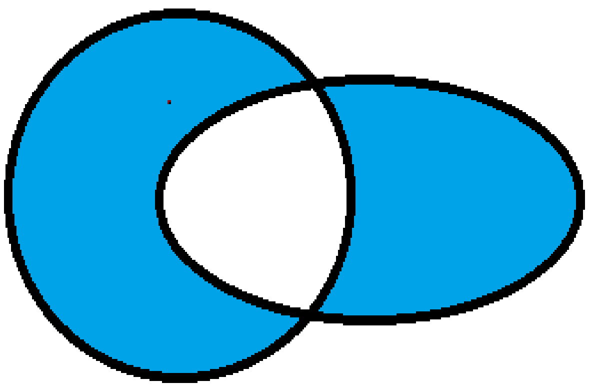
7) множество многочленов с целыми коэффициентами от n переменных;

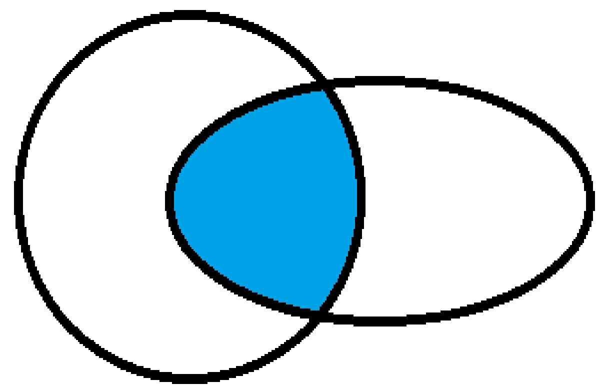
8) множество подмножеств некоторого множества X с операциями:

$$A + B = A\Delta B = \left(A \setminus B\right) \cup \left(B \setminus A\right)$$ симметрическая разность;

$$A \times B = A \cap B$$ пересечение.

$A + B$





$A \cdot B$

Тело

- Тело – это алгебраическая структура, которая является абелевой группой по сложению и группой по умножению (исключая деление на нуль).

- Пример. Тело <u>кватернионов</u> (гиперкомплексных чисел).

Кватернион можно определить

- стандартно (арифметически)
- матрично
- через вектор и скаляр

Кватернион стандартно определяется как формальная сумма вида $q = a + bi + cj + dk$,

где a, b, c, d — вещественные числа, а i, j, k — мнимые единицы со следующим свойством:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 .$$

Таблица умножения базисных кватернионов:

x	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Например,

$$(1 + i + j + k) \cdot (j + k) = -2 + 2k$$

Умножение кватернионов некоммутативно.

Кватернионы также можно определить как вещественные квадратные матрицы следующего вида:

$$q = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

Сумма и произведение определяются как обычные сумма и произведение матриц.

Кватернионы удобны при описании изометрий 3-х и 4-х мерных евклидовых пространств.

Кватернионы применяются в механике, вычислительной математике, при создании 3D графики.

Поле

- ***Поле*** – это алгебраическая структура, состоящая из множества, в которой определены две бинарные операции (сложение и умножение) и обратные к ним (вычитание и деление, кроме деления на нуль); обе операции коммутативные и связанные дистрибутивностью $\left((a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c \right)$

- Поле – абелева группа по сложению и абелева группа по умножению (исключая деление нуль).
- Коммутативное по умножению тело есть поле.
- Всякое конечное тело является полем.

- Примеры полей.

  1) поле рациональных чисел;

  2) поле действительных чисел;

  3) поле комплексных чисел;

  4) поле вычетов по модулю простого числа *p*

  (в этом последнем случае поле – конечно).

Линейные пространства

Векторное (или ***линейное***) ***пространство*** — это математическая структура, которая представляет собой множество элементов, называемых ***векторами***, для которых определены операции сложения друг с другом и умножения на число — скаляр.

Эти операции подчинены ***восьми аксиомам***.

Скаляры – элементы какого-либо поля чисел.

Если снабдить векторное пространство ***метрикой,*** то оно становится метрическим (евклидовым) пространством.

Если снабдить его ***топологией***, оно становится функциональным (гильбертовым) пространством.

Определение

Линейное пространство ***F*** над полем ***P*** это множество элементов произвольной природы, называемых векторами $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots\}$, над которыми определены операции <u>сложения</u> и <u>умножения на число</u> из поля ***P***, удовлетворяющие <u>аксиомам:</u>

1. Коммутативность сложения

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

2. Ассоциативность сложения

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$$

3. Существование нуля

$$\exists \mathbf{0}\, \forall \mathbf{x} :\ \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$$

4. Существование противоположного элемента

$$\forall \mathbf{x}\, \exists (-\mathbf{x}) : \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

5. Ассоциативность умножения на число

$$\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$$

6. Унитарность (умножение на 1 сохраняет вектор)

$$1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

7. Дистрибутивность умножения на вектор относительно сложения скаляров

$$(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}$$

8. Дистрибутивность умножения на скаляр относительно сложения векторов

$$\alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y}$$

Примеры линейных пространств

1. Множество L_n ***n-мерных векторов*** с действительными координатами над полем действительных чисел с обычными операциями сложения векторов и умножения вектора на число;
2. Множество ***матриц размерами m***х***n*** с целыми числами в качестве элементов и обычными операциями сложения матриц и умножения на число;
3. Множество ***многочленов степени ≤ n*** с целыми коэффициентами с обычными операциями сложения и умножения на число;
4. Множество ***непрерывных функций***, заданных на отрезке [0;1], с обычными операциями сложения и умножения на число;

Свойства линейных пространств

- *Линейная комбинация*: $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{x}_n$
- *Линейная зависимость*:

  система векторов $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ линейно зависима, если хотя бы один из них можно выразить линейно через остальные.
- *Базис* – максимальная линейно независимая система векторов.
- *Размерность* (ранг) – мощность базиса.
- *Теорема*. Каждый вектор линейного пространства можно представить, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации векторов базиса.

- Коэффициенты такой линейной комбинации (коэффициенты разложения) называются *координатами* вектора в данном базисе.
- *Подпространство* – подмножество линейного пространства, которое само является линейным пространством с теми же операциями.
- *Теорема.* Сумма и пересечение линейных подпространств также являются линейными подпространствами.

Размерность суммы линейных подпространств равна сумме их размерностей минус размерность их пересечения.

- Изоморфизм линейных пространств – взаимно-одно-значное соответствие, сохраняющее операции.

Пример решения РГЗ-3

Образует ли линейное пространство множество всех векторов, лежащих на одной оси, если в нём определены сумма любых двух элементов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, равная $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и произведение любого элемента $\boldsymbol{a}$ на любое действительное число α, равное $\alpha\cdot|\boldsymbol{a}|$?

<u>Решение</u>. **Не образует**, т.к. не выполнены аксиомы 6 и 8. Действительно, если $1\cdot\mathbf{x}=|\mathbf{x}|=\mathbf{x}$, то $1\cdot(-\mathbf{x})=|-\mathbf{x}|=\mathbf{x}$, что возможно только если $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

Дистрибутивность: $\alpha\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\cdot|\mathbf{x}+\mathbf{y}|=\alpha\cdot|\mathbf{x}|+\alpha\cdot|\mathbf{y}|$, что верно только для однонаправленных векторов.

Еще пример решения РГЗ-3

Образует ли линейное пространство множество всех функций $\boldsymbol{a} = f(t), \boldsymbol{b} = g(t)$, принимающих положительные значения, если в нем определена сумма любых двух элементов, равная $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = f(t) \cdot g(t)$, и произведение любого элемента на любое действительное число, равное на $\alpha \cdot \boldsymbol{a} = \left(f(t) \right)^{\alpha}$?

<u>*Решение.*</u> Выполнены почти все аксиомы линейного пространства. При этом роль нейтрального элемента выполняет функция $e(t) \equiv 1$. Не выполнена лишь аксиома 4 (существование противоположного элемента).

Примечание. Если дополнительно потребовать монотонность функций, то множество станет линейным пространством.