Опр.

Говорят, что стационарный в широком смысле случайный процесс X(t) (имеет постоянное матожидание) *подчиняется закону больших чисел* или, что то же самое, называется *эргодическим (эргодическим относительно матожидания, эргодическим)*, если среднее по времени значение сходится по вероятности к математическому ожиданию.

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} X(t)dt \underset{T \to \infty}{\longrightarrow} EX$$

Опр.

Случайный процесс X(t) *сходится в по вероятности* к случайной величине Y при $t \to t_0$, когда для любой последовательности моментов времени $t_n \to t_0$

$$X(t_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} Y$$

ТЕОРЕМА (эргодическая 1)

Достаточным условием эргодичности стационарного в широком смысле случайного процесса X(t) является равенство

$$\lim_{\tau \to \infty} K_X(\tau) = 0$$

Д-ВО

Для простоты возьмём $t_0 = 0$. Тогда нужно доказать следующее:

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{T} X(t)dt \underset{T \to \infty}{\longrightarrow} EX$$

Сходимость по вероятности следует из более сильной среднеквадратической сходимости.

- **Опр.**
- Случайный процесс $X(t)$ *сходится в смысле среднего квадратического* к случайной величине Y при $t \to t_0$, если

$$\lim_{t \to t_0} E(X(t)-Y)^2 = 0,$$

обозначается

$$X(t) \xrightarrow[t \to t_0]{\text{с.к.}} Y$$

(продолжение **Д-ВА**)

Т.е. нам достаточно доказать следующее:

$$\lim_{T \to \infty} E\left(\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt - EX\right)^2 = 0$$

для доказательства преобразуем подпредельное выражение:

$$E\left(\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt - EX\right)^2 = \frac{1}{T^2} E\left[\int (X(t) - EX)\,dt\right]^2 = \frac{1}{T^2} E\left[\int_0^T\int_0^T (X(t) - EX)(X(u) - EX)\,du\,dt\right]$$

$$= \{\text{аддитивность } E\} = \frac{1}{T^2}\int\int_0^T K_X(t,u)\,du\,dt = \{\tau = t-u\} =$$

$$= \frac{1}{T^2}\Big(\underbrace{\int_{-T}^{0}\int_{-\tau}^{T} K_X(\tau)\,du\,d\tau}_{t<u} + \underbrace{\int_0^T\int_0^{T-\tau} K_X(\tau)\,du\,d\tau}_{t>u}\Big) = \frac{1}{T^2}\left(\int_{-T}^{0} K_X(\tau)(T+\tau)\,d\tau + \int_0^T K_X(\tau)(T-\tau)\,d\tau\right) =$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_{-T}^{T} K_X(\tau)(T-|\tau|)\,d\tau = \frac{2}{T}\int_0^T K_X(\tau)\left(1-\frac{\tau}{T}\right)d\tau > 0$$

Тогда

$$\lim_{T\to\infty} \frac{2}{T}\left|\int_0^T K_X(\tau)\left(1-\frac{\tau}{T}\right)d\tau\right| \le \lim_{T\to\infty}\frac{2}{T}\int_0^T \left|K_X(\tau)\right| d\tau = \left|\text{правило Лопиталя}\right| = 2\lim_{T\to\infty}\frac{\left(\int |K_X(\tau)|\,d\tau\right)'_T}{T'_T}$$

$$= 2\lim_{T\to\infty}\left|K_X(T)\right| .$$

Последнее равно 0 когда $\lim\limits_{\tau\to\infty} K_X(T) = 0$, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА (эргодическая 2)
Необходимым и достаточным условием эргодичности стационарного в широком смысле процесса является устремление к нулю среднего значения ковариационной функции процесса:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T K_X(t_1,t_2) = 0$$

для док-ва теоремы нам понадобится

ЛЕММА

Если для случайного процесса X(t) существует конечный второй момент, то предел

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \rho(t)\,(\,X(t) - EX(t)\,)\,dt = 0$$

существует тогда и только тогда, когда существует предел

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T\int_0^T \rho(t_1)\,\rho(t_2)\,K_X(t_1,t_2)\,dt = 0$$

- **Д-ВО леммы**
- Обозначим $Y = \int_0^T \rho(t)X(t)\,dt$ - случайная величина.
- $EY = \int_0^T \rho(t)EX(t)\,dt$, $\quad DX = \int_0^T \int_0^T \rho(t_1)\,\rho(t_2)\,K_X(t_1, t_2)\,dt_1\,dt_2$
- Но, с другой стороны $DX = E(Y-EY)^2 = E\left(\int_0^T \rho(t)\,[X(t) - EX(t)]\,dt\right)^2$
- Пользуясь свойствами сходимости по вероятности имеем:
- $\lim\limits_{T\to\infty} \int_0^T \rho(t)\,[X(t) - EX(t)]\,dt = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = \lim\limits_{T\to\infty} E\left(\int_0^T \rho(t)\,[X(t) - EX(t)]\,dt\right)^2 =$

  $= \lim\limits_{T\to\infty} \int_0^T \int_0^T \rho(t_1)\,\rho(t_2)\,K_X(t_1, t_2)\,dt_1\,dt_2$
- **Д-ВО теоремы**
- Следует из леммы при $\rho(t) = 1/T$ ■
- Практическая проверка реализуемости необходимого и достаточного условия эргодичности стационарного в широком смысле процесса может быть связана с большими трудностями, поэтому чаще всего используется теорема 1.
- Для справедливости эргодических теорем достаточно вместо стационарности процесса в широком смысле всего лишь существование постоянного математического ожидания и конечного второго момента (что ещё не означает стационарности в широком смысле). Для такого класса процессов условие из теоремы 1 перепишется как
- $$\lim_{|t1-t2| \to \infty} K_X(t_1 - t_2) = 0$$

- Тем не менее, отметим, что когда говорят о нестационарном эргодическом процессе, то зачастую имеют в виду что он нестационарен в узком смысле.

  Смысл эргодичности можно пояснить так. Для расчёта/определения параметров физической системы, описываемой эргодическим процессом можно долго наблюдать за поведением одного её элемента (реализация процесса; усредняем параметры по времени), а можно за очень короткое время рассмотреть все её элементы (или достаточно много элементов, - сечение элемента; и тогда усредняем по вероятности). В обоих случаях получатся одинаковые результаты, если процесс обладает свойством эргодичности.

- Ещё раз подчеркнём, что стационарность (даже строгая) случайного процесса не означает его вырождения ни в постоянную величину, ни в случайную величину.

- **Пример** стационарного в узком смысле, но не эргодического процесса:

  $X(t) = U \operatorname{Sin} (t + V)$,   где U,V -случ. величины с заданным распредлением

- Все сечения данного процесса по отдельности имеют одно и то же распределение, но в зависимости от взаимного расположения сечений их совместное распределение будет различным.

- Функция $f(t)$ является непрерывной в точке t_0 если
- $\lim\limits_{\Delta t \to 0} | f(t_0 + \Delta t) — f(t_o) | = 0.$

- **Опр**. Случайный процесс является непрерывным в точке t_0, если
- $\lim\limits_{\Delta t \to 0} E (X(t_0 + \Delta t) — X(t_o))^2 = 0.$

- **УТВЕРЖДЕНИЕ 1**
- Необходимым и достаточным условием непрерывности стационарного в широком смысле случайного процесса $X(t)$ является непрерывность его ковариационной функции K_X в нуле:

$$\lim_{\tau \to 0} K_X(\tau) = K_X(0)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2

Если ковариационная функция K_X стационарного в широком смысле случайного процесса $X(t)$ непрерывна в нуле, то она непрерывна в любой точке.

Опр. Процессом Маркова называется процесс, обладающий следующим свойством отсутствия памяти (отсутствия последействия):

$P(X(t_n) = x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1},\ldots, X(t_2)=x_2, X(t_1)=x_1) = P(X(t_n) = x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1})$

Опр.

- Переходная функцией процесса Маркова называется ф-я
- $p(s,x,t,y) = P(X(t) = y \mid X(s) = x)$, которая исчерпывающе характеризует п. Маркова
- **УТВЕРЖДЕНИЕ**

  Переходная функция марковского процесса обладает следующими свойствами:

  1) $p(s,x,s,y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$

- 2) Уравнение Колмогорова- Чепмена
- $$p(s,x,t,y) = \sum_{z \in E} p(s,x,u,z)\, p(u,z,t,y), \quad \text{для любых} \quad s \le u \le t \quad \text{и} \quad x, y \in E$$

  где E – мн-во значений процесса Маркова. В случае непрерывности E имеем интеграл.

- **Опр**.
- Марковский процесс называется однородным, если переходные вероятности не зависят от абсолютного времени, а только от разности между моментами времени:

  $$p(s,x,t,y) = p(t-s,x,y)$$

- **УТВЕРЖДЕНИЕ**

  Любой процесс с независимыми приращениями является марковским.

  Д-ВОследует из того,что условие отсутств.памяти в процессе можно переписать

  $P(X_n-X_{n-1}=x_n-x_{n-1} \mid X_{n-1}-X_{n-2}=x_{n-1}-x_{n-2},\ldots, X_2-X_1=x_2-x_1, X_1=x_1)$

  и из определения процесса с независисмыми приращениями

Опр

- *Цепью Маркова* называется марковский процесс с дискретным временем
- $T = \{t_0, t_1, t_2, \ldots\}$ и конечным, либо счётным множеством состояний E, которое далее, если не оговорено иное, для простоты будем считать мн-вом целых неотрицательных чисел.
- **Опр**.
- В цепи М. обозначим переходные вероятности p_{ij} (m,n) = p (m,i,n,j) ,
- Через $p_{ij}^{(n)}$ будем обозначать p (n-1,i,n,j) = P (X(t_n) = j | X(t_{n-1} = i).

  а в случае однородности марковской цепи обозначим через
- p_{ij} (n-m) условную вероятность, что процесс Маркова за (n-m) шагов перейдёт из состояния m в состояние n

- (будем также говорить,что некот. *динамическая система* S со счётным числом возможных состояний, которую описывает процесс, переходит в состояние s_n, когда процесс Маркова (не обязательно с дискр. временем) принимает значение n). (Дин. система - множество элементов, для которого задана функциональная зависимость между временем и совокупным положением в пространстве (которое и есть состояние s системы). Любую задачу, где искомые параметры зависят от положения в пространстве физических объектов, можно наглядно описать некоторой динамической системой, в том числе и все примеры в следующ. лекциях)

  Тогда уравнения Колмогорова-Чепмена для однородной марковской цепи можно переписать так:

  $p_{ij}(m + n) = p_{ik}(m) + p_{kj}(n)$ для любых целых положительных m, n и i,k ,j ϵ E
- **Опр**.
- Обозн. *вектор (распределения) вероятностей состояний* в момент t_n через $p^{(n)}$
- - i-я компонента вектора $p_i^{(n)}$ показывает вер-ть, что система в момент t_n находится в состоянии номер i (отметим, что сумма $\Sigma p_i^{(n)}=1$)

  Матрица перехода $\pi^{(n)}$, элементами кот. являются вероятности перехода $p_{ij}^{(n)}$ связывает векторы распределения состояний на шаге n и n-1 след. образом:

$$p^{(n)} = p^{(n-1)} \pi^{(n)}$$