Лекция 8

Найти общее решение ДУ $x' - x = 1;$

Допустим $x(0) = c$. Пусть $x(t) \fallingdotseq X(p).$

Тогда изображающее уравнение имеет вид

$$(pX - c) - X = \frac{1}{p};$$

Находим $\boldsymbol{X}$

$$X = \frac{1}{p(p-1)} + \frac{c}{p-1} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} + \frac{c}{p-1};$$

Восстановим оригинал: $x(t) = (c+1)e^t - 1.$

Изображение периодического сигнала

Рассмотрим периодическую функцию

$$f(t) = A\cdot\left(\chi(t) - \chi(t-\tau) + \chi(t-2\tau) - \chi(t-3\tau) + \cdots\right)$$

$$F(p) = A\cdot\left(\frac{1}{p} - e^{-\tau}\cdot\frac{1}{p} + e^{-2\tau}\cdot\frac{1}{p} - e^{-3\tau}\cdot\frac{1}{p} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{A}{p} \cdot \left(1 - e^{-p\tau} + e^{-2p\tau} - e^{-3p\tau} + \cdots\right) = \frac{A}{p} \cdot \frac{1}{1 + e^{-p\tau}}$$

Использована формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

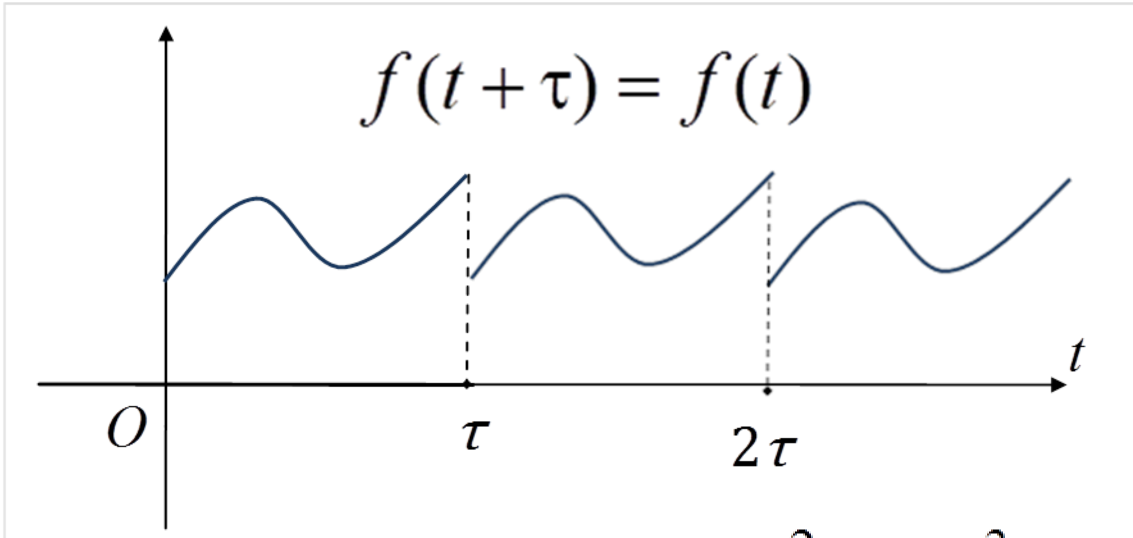
$$1 - q + q^2 - q^3 + \cdots = \frac{1}{1+q}, \quad |q| < 1$$

Итак, изображение периодического прямоугольного импульса

$$F(p) = \frac{A}{p} \cdot \frac{1}{1 + e^{-p\tau}}$$

при условии $\operatorname{Re} p > 0$.

Найдем изображение произвольной периодической функции - оригинала



$$F(p)=\int_0^{\infty} e^{-pu} f(u)du=\int_0^{\tau}\cdots+\int_{\tau}^{2\tau}\cdots+\int_{2\tau}^{3\tau}\cdots+\cdots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} e^{-pu} f(u)du=\left|\begin{matrix}\text{замена}\\ u=t+\tau n\end{matrix}\right|=$$

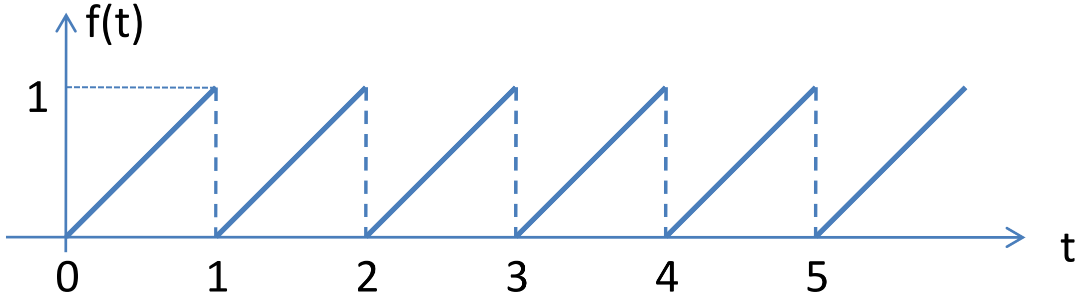
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\tau} e^{-p(t+\tau n)} f(t+n\tau)dt = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-np\tau} \int_0^{\tau} e^{-pt} f(t)dt =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\tau p}} \cdot \int_0^{\tau} e^{-pt} f(t)dt.$$

Итак, изображение периодической функции с периодом τ

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-\tau p}} \int_0^{\tau} e^{-pt} f(t)dt \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} p > 0$$

Пример. Найти изображение периодической функции:



В нашем случае формула примет вид

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-p}}\int_0^1 te^{-pt}dt$$

Вычислим интеграл (по частям)

$$\int_0^1 te^{-pt}dt = t\cdot\frac{e^{-pt}}{-p}\Bigg|_0^1 - \frac{e^{-pt}}{p^2}\Bigg|_0^1 = \frac{e^{-p}}{-p}-\frac{e^{-p}}{p^2}+\frac{1}{p^2};$$

Таким образом

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-p}}\cdot\frac{1-e^{-p}-pe^{-p}}{p^{2}}=\frac{1}{p^{2}}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p\left(1-e^{-p}\right)}.$$

Свертка

Сверткой функций $f(t)$ и $g(t)$ называется функция, вычисляемая по формуле

$$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

Символически свертка обозначается $f(t)*g(t)$, т.е.

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

Пример:

Пусть $f(t)=t;\ g(t)=e^t$ Тогда $f*g=\int_0^t (t-\tau)e^\tau d\tau=$

$$=(t-\tau)e^\tau\Big|_0^t+\int_0^t e^\tau d\tau=e^t-t-1$$

Симметричность свертки: $f * g = g * f$

Доказательство:

$$f * g = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau = \begin{vmatrix} замена \\ x = t - \tau \end{vmatrix} =$$

$$= \int_t^0 f(x) g(t-x) \left(-dx\right) = \int_0^t f(x) g(t-x) dx = g * f$$

9.Теорема умножения изображений

Пусть $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$, $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$

Тогда $f_1(t) * f_2(t) \risingdotseq F_1(p) \cdot F_2(p)$

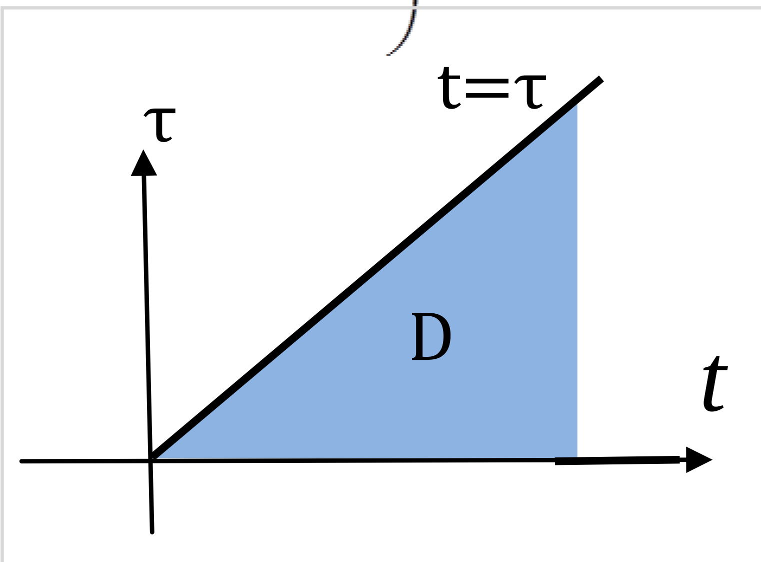
(Произведение двух изображений является изображением свертки соответствующих оригиналов)

Доказательство:

$$f * g \risingdotseq \int_0^\infty \left(\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau \right) e^{-pt} dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau;$$

Изменим порядок интегрирования



$$\int_0^\infty \int_\tau^\infty e^{-pt} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,dt\,d\tau =$$

$$= \int_0^\infty f_1(\tau)\left(\int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau)\,dt\right)d\tau = \left|\begin{matrix} \textit{замена} \\ z = t-\tau \end{matrix}\right| =$$

$$= \int_0^\infty f_1(\tau)\left(\int_0^\infty e^{-p(z+\tau)} f_2(z)\,dz\right)d\tau =$$

$$= \int_0^\infty f_1(\tau) e^{-p\tau}\,d\tau \cdot \int_0^\infty f_2(z) e^{-pz}\,dz = F_1(p)\cdot F_2(p)$$

Пример. Найти оригинал по данному изображению

$$F(p)=\frac{p^2}{\left(p^2+1\right)^2}$$

Решение:

$$F(p)=\frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}\risingdotseq\cos t*\cos t=$$

$$=\int_0^t\cos\left(t-\tau\right)\cos\tau d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\cos t+\cos\left(t-2\tau\right)d\tau=$$

$$=\frac{\cos t}{2}\tau\Big|_0^t-\frac{1}{4}\sin\left(t-2\tau\right)\Big|_0^t=\frac{1}{2}\left(t\cos t+\sin t\right).$$

Формула Дюамеля

Если $f_1(t) * f_2(t) \risingdotseq F_1(p) \cdot F_2(p)$ и $f_1'(t)$ - оригинал,

то $p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \risingdotseq \int_0^t f_1'(\tau) \cdot f_2(t-\tau)d\tau + f_1(0) \cdot f_2(t)$

Доказательство:

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) = \underbrace{\left(p \cdot F_1(p) - f_1(0)\right) \cdot F_2(p)}_{f_1'(t) * f_2(t)} + \underbrace{f_1(0) \cdot F_2(p)}_{f_1(0) \cdot f_2(t)}$$

(использованы свойства: дифференцирование оригинала, линейность и умножение изображений)

Дельта-функция Дирака

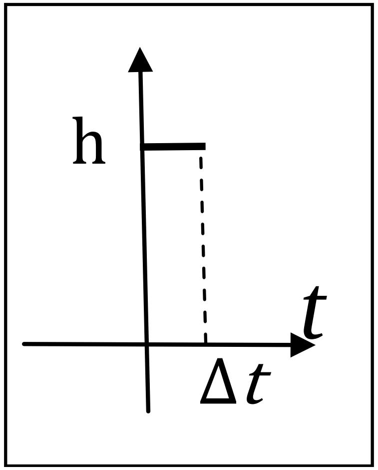
Дельта-функция — обобщённая функция, которая позволяет записать точечное воздействие, а также пространственную плотность физических величин (масса, заряд, интенсивность источника тепла, сила и т. п.), сосредоточенной или приложенной в одной точке.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

Найдем изображение дельта-функции

$$\tilde{\delta}(t) = h\Big(\chi(t) - \chi(t+\Delta t)\Big)$$

$$h = \frac{1}{\Delta t}$$



$$\tilde{\delta}(t) \risingdotseq \frac{1}{p} \cdot \frac{1 - e^{p\Delta t}}{\Delta t}$$

$$\delta(t) \risingdotseq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{p} \cdot \frac{1 - e^{p\Delta t}}{\Delta t} = \frac{1}{p} \cdot p = 1$$

Использована форма 2-го замечательного предела:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{ax}}{x} = a$$

Итак, $\delta(t) \risingdotseq 1$.

Дельта-функция Дирака

Поль Адриен Морис Дира́к

1902 — 1984

Английский физик-теоретик, один из создателей квантовой механики. Лауреат Нобелевской премии по физике 1933 года Работы Дирака посвящены квантовой физике, теории элементарных частиц, общей теории относительности.

Он является автором основополагающих трудов по квантовой механике, квантовой электродинамике и квантовой теории поля. Предложенное им релятивистское уравнение электрона позволило естественным образом объяснить спин и ввести представление об античастицах. К другим известным результатам Дирака относятся статистическое распределение для фермионов, концепция магнитного монополя, гипотеза больших чисел, гамильтонова формулировка теории гравитации и др.

Свойства преобразования Лапласа (сводка)

1. Линейность $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \risingdotseq c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)$

2. Подобие $f(at) \risingdotseq \dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{p}{a}\right)$

3. Сдвиг (запаздывание) $f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p)$

4. Смещение(затухание) $e^{at} f(t) \risingdotseq F(p-a)$

5. Дифференцирование оригинала $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$

6. Интегрирование оригинала $\displaystyle\int_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$

Свойства преобразования Лапласа (сводка)

7. Дифференцирование изображения

$$-t \cdot f(t) \risingdotseq F'(p)$$

8. Интегрирование изображения

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^{\infty} F(z)dz$$

9. Умножение изображений (свертывание)

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau \risingdotseq F_1(p) \cdot F_2(p)$$

10. Формула Дюамеля

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \risingdotseq \int_0^t f_1'(\tau) \cdot f_2(t-\tau)d\tau + f_1(0) \cdot f_2(t)$$

Таблица оригиналов и изображений

$f(t)$	$F(p)$
$\chi(t)=1$	$\dfrac{1}{p}$
e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
t	$\dfrac{1}{p^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$

$f(t)$	$F(p)$
$e^{at}\cos\omega t$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
$t\sin\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$
$e^{at}\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$

Таблица оригиналов и изображений

$f(t)$	$F(p)$
$e^{at}\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$
$t\cdot\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{2\omega p}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$
$t\cdot\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{p^2+\omega^2}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$
$e^{at}\cdot t\cdot\cos\omega t$	$\dfrac{(p-a)^2-\omega^2}{\left((p-a)^2+\omega^2\right)^2}$

$f(t)$	$F(p)$
$e^{at}\cdot t\cdot\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega(p-a)}{\left((p-a)^2+\omega^2\right)^2}$
$\sin(\omega t+\varphi)$	$\dfrac{\omega\cos\varphi+p\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t+\varphi)$	$\dfrac{p\cos\varphi-\omega\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$
$\delta(t)$ Дельта-функция	1