Teorema (Euler)

Si G es un grafo conexo plano con n vértices, e aristas y f caras, entonces

$$n - e + f = 2$$

Demostración (Inducción sobre n):

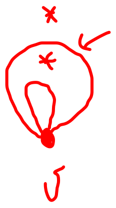
- Paso base: $n = 1$, G consta únicamente de bucles.
  - Si $e = 0$, $f = 1$. (La fórmula es válida).
  - Si $e > 0$, cada bucle adicional pasa a través de una cara y la corta en dos (Jordan), esto aumenta el número de aristas y el número de caras en 1.

  Luego la fórmula se cumple para $n = 1$ y cualquier número de aristas.

$n=1$
$e=0$
$f=1$

$\overset{1}{n} - e + \overset{1}{f} = 2$ ✓

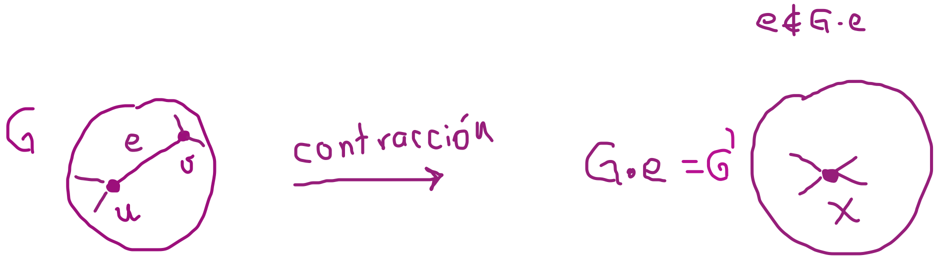
$n=1$
$e=1$
$f=2$ ✓



nueva arista

$+1$ cara

- Paso inductivo: $n > 1$, supongamos que la fórmula es válida para todo grafo con menos de n vértices.
  - Como G es conexo, existe una arista que no es un bucle.
  - Si se contrae esta arista se obtiene un grafo plano G' con n' vértices, e' aristas y f' caras.
  - La contracción no cambia el número de caras (sólo se reduce la frontera), pero reduce el número de vértices y aristas en 1, luego $f' = f$, $e' = e - 1$ y $n' = n - 1 < n$.
  - Por hipótesis de inducción, $n' - e' + f' = 2$.
  - Por lo tanto, $(n - 1) - (e - 1) + f = 2$, es decir, $n - e + f = 2$.



n- vértices
e -aristas
f- caras

$n' = n-1$: vértices
$f' = f$
$e' = e-1$

por HI G' satisface Euler:

$$n' - e' + f' = 2$$

Luego $(n-1) - (e-1) + f = 2$

ent $n - e + f = 2$

ed G satisface Euler. □

Corolario

Si G es un grafo plano simple con al menos tres vértices, entonces

$$e \leq 3n - 6$$

- Si G es conexo:
  - Como G es simple y $n \geq 3$, $l(F_i) \geq 3$. (No hay bucles que generan fronteras de longitud 1 ni aristas múltiples que generan fronteras de longitud 2).
  - Luego $\sum l(F_i) \geq 3f$, es decir, $2e \geq 3f$.
  - Como $f = e - n + 2$, $2e \geq 3e - 3n + 6$, es decir, $e \leq 3n - 6$.
- Si G no es conexo: Se agregan aristas a G hasta que sea conexo, en este caso, G' es un grafo conexo con e' aristas y n vértices. Luego $e < e' \leq 3n - 6$.

- G simple: No hay bucles  → No hay fronteras de longitud 1

No hay aristas múltiples  → No hay fronteras de longitud

Luego $l(F_i) \geqslant 3$ ent $\sum l(F_i) \geqslant 3f$

Fi: cara

Lema: $2e \geqslant 3f$

Como G es conexo, vale Euler

$n - e + f = 2 \rightarrow f = 2 - n + e$

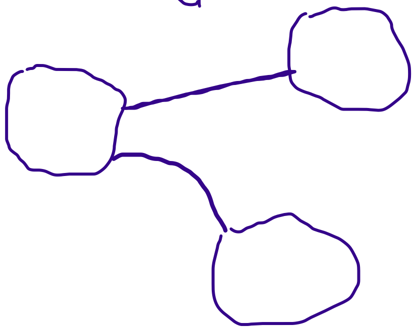
Y sustituimos: $2e \geqslant 3(2 - n + e)$

$2e \geqslant 6 - 3n + 3e$

$3n - 6 \geqslant e$

G no conexo : e aristas

$G' \rightarrow$ conexo



Nótese $e < e'$

$$G' : \begin{cases} n \\ e' \\ f \end{cases} \xrightarrow[(1)]{\text{Lema}} e < e' \leq 3n - 6$$

Luego $e < 3n - 6$

Proposición

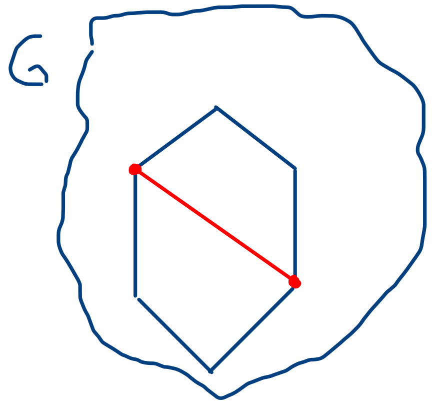
Sea G un grafo plano simple con n vértices, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

I. G tiene $3n-6$ aristas.
II. G es una triangulación.
III. G es un grafo plano maximal.

- I↔II $e = 3n-6$ sii $n = \dfrac{e+6}{3}$ sii $3f = 2e = \sum l(F_i)$ sii $l(F_i) = 3$.
- II↔III Hay una cara cuya frontera es mayor a un 3-ciclo sii hay una forma de agregar una arista para obtener un grafo simple mayor.

- G no es triangulación

Existe una cara F_i, $l(F_i) > 3$ (G es simple)



G' : Plano

G es subgrafo de expansión de G'

G no es plano maximal.

G no triang ↔ G no plano max

Teorema (Kuratowski)

- Un grafo G es plano sii no contiene una subdivisión de K_5 o $K_{3,3}$.
- Un grafo G es plano sii no contiene un subgrafo homeomorfo a K_5 o $K_{3,3}$.

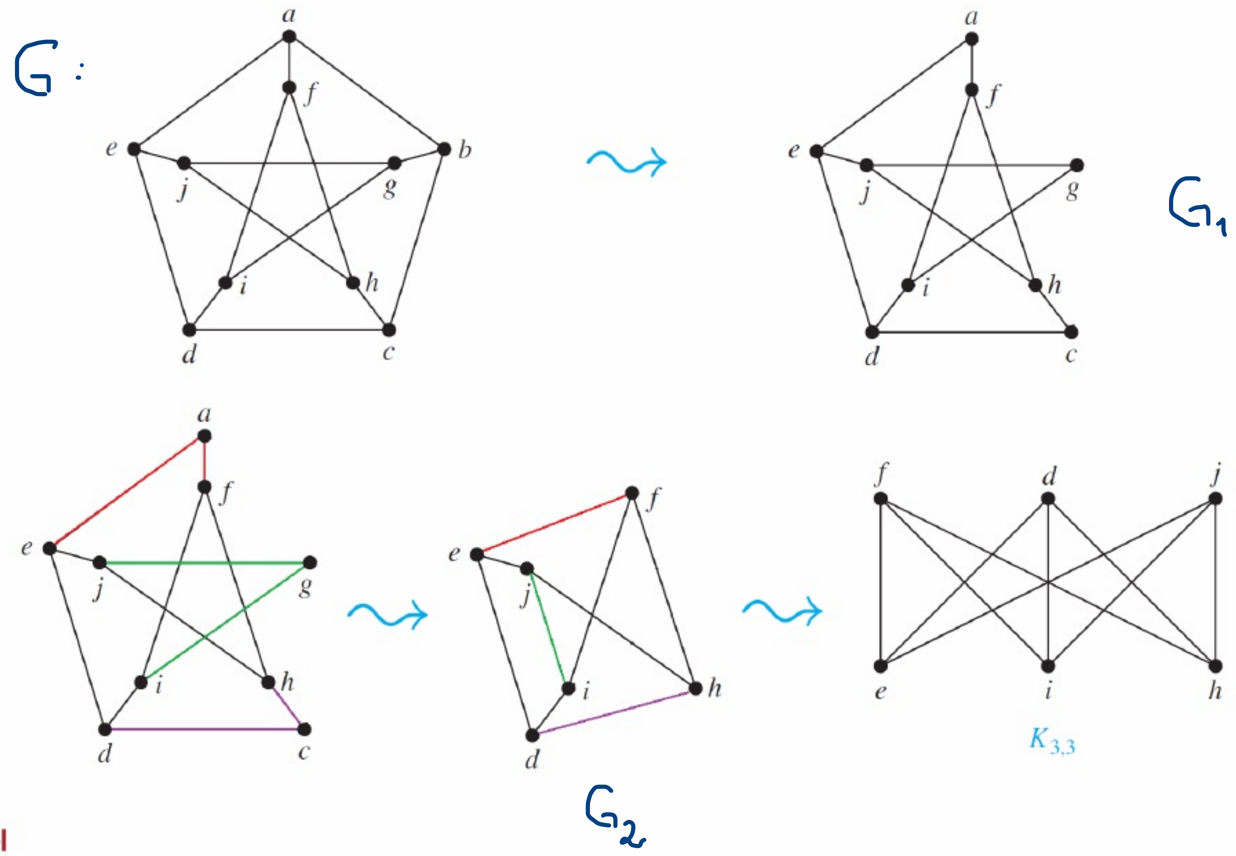
G no es plano :

- $H \subseteq G$ (Eliminar vértices o aristas)
- Reducciones en serie (o subdivisiones)
- H' ($H' \cong K_5$ o $H' \cong K_{3,3}$) .

G contiene un subgrafo (H) homeomorfo (H') a K_5 o $K_{3,3}$ $\Longrightarrow$ G no es plano

($H' \cong K_5$ o $K_{3,3}$)

Grafo de Petersen



1. Elimino el vértice b : G_1 → subgrafo de G.
2. Reducción en serie en a, en g y en c : G_2

   G_2 es Homeomorfo a G_1

3. $G_2 \cong K_{3,3}$

G contiene un subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$.

Por el teorema de Kuratowski G no es plano.