Corolario

Sean $d_1, d_2, \ldots, d_n$ enteros positivos que sumen $2(n-1)$, entonces existen exactamente

$$\frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n}(d_i-1)!}$$

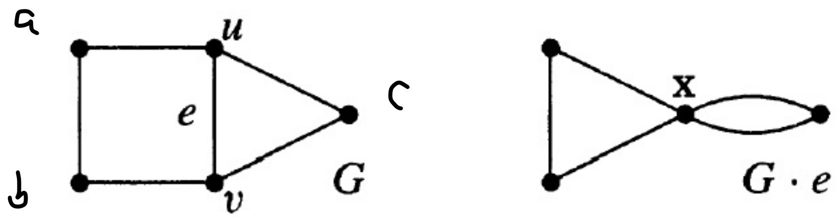
árboles con conjunto de vértices $[n]$ tales que para todo i, $d(v_i) = d_i$.

$$n(T) = n, \; e(T) = n-1, \; \sum_{v \in V(T)} d(v_i) = 2e(T)$$

Árboles de expansión

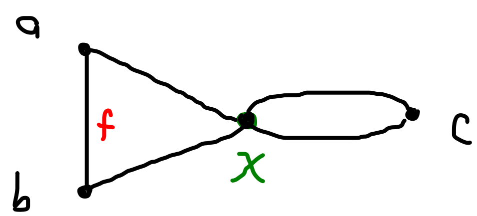
Contracción

Sea G un grafo y e una arista con extremos u, v. La **contracción** de la arista e consiste en reemplazar u, v con un único vértice x cuyas aristas incidentes son las aristas distintas de e que eran incidentes a u o v. El grafo resultante, notado $G \cdot e$ tiene una arista menos que G.

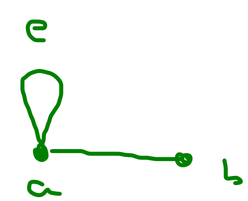


$e = (a,a)$

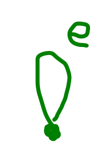
$G \cdot e$:



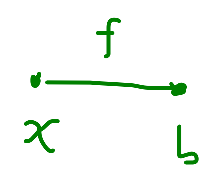
G :



H :

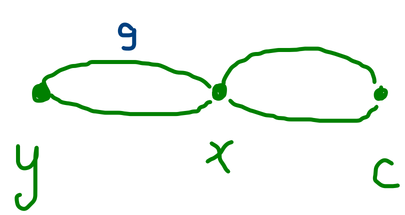


$G \cdot e$:

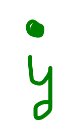


$H \cdot e$:

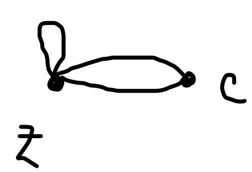
$(G \cdot e) \cdot f$:



$(G \cdot e) \cdot f$:



$((G \cdot e) \cdot f) \cdot g$:



G

con e | sin e

Teorema

Sea $\tau(G)$ el número de árboles de expansión de un grafo G. Si $e \in E(G)$ no es un bucle, entonces

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$$

Clave: Los árboles de expansión que no incluyen e son los árboles de expansión de G−e

#árboles que contienen e $= \tau(G \cdot e)$!

Se define una función:

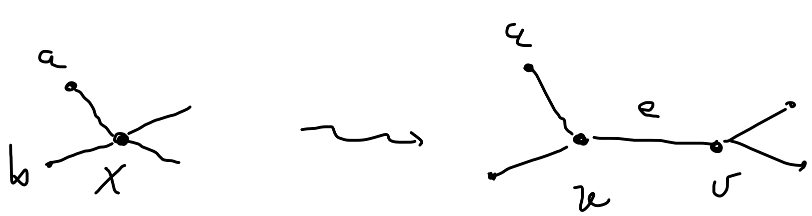
$$f : \underset{\text{Árboles que tienen } e}{T_e(G)} \longrightarrow \underset{\text{Árboles de } G\cdot e}{T(G \cdot e)} \quad \text{(biyectiva)}$$

- Cuando se contrae una arista e en un árbol de expansión que contiene a e, se obtiene un árbol de expansión de G·e

G ⟶ T (contiene a e)

árbol de exp de G·e

- Cada árbol de expansión de G·e surge de esta manera pues al expandir el número de vértices de regreso a e se obtiene un árbol de expansión de G (que contiene a e)



G·e G

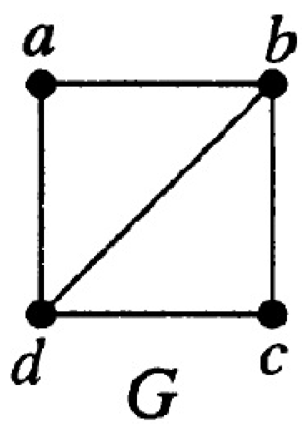
Teorema (Matrix Tree Theorem)

Dado G un grafo sin bucles con vértices $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, sea a_{ij} el número de aristas con extremos v_i y v_j. Sea Q la matriz definida por:

$$q_{ij} := \begin{cases} -a_{ij} & \text{si } i \neq j \\ d(v_i) & \text{si } i = j \end{cases}$$

Entonces

$$\tau(G) = Q_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$



$$Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Q_{4,4} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8$$