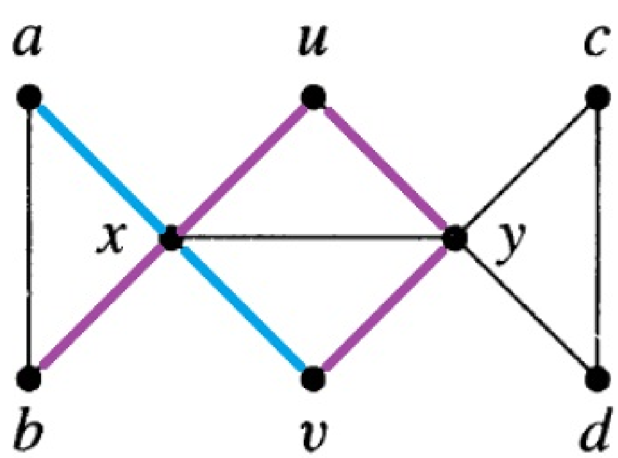
Nota

¿Si se sigue un u, v-camino y un v, w-camino, el resultado es un u, w-camino? No



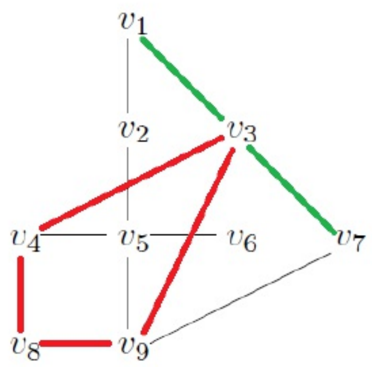
b - x - u - y - v   b, v - camino

v - x - a   v, a - camino

b - x - u - y - v - x - a   b, a - caminata y sendero

Lema

Cada u, v-caminata contiene un u, v-camino.



- $v_1 v_3 v_4 v_8 v_9 v_3 v_7$ — v_1, v_7 - caminata (sendero)

$v_1 v_3 v_7$ — v_1, v_7 - camino

Idea: Sea $u\, u_1\, u_2 \cdot u_m u_k\, u_j \ldots u_k u_n \ldots v$ una caminata donde u_k es el primer vértice repetido

Tomemos ahora $u\, u_1\, u_2 \ldots u_m\, u_k\, u_n \ldots v$ es una caminata sin repetición del vértice u_k.

(Repetimos todas las veces que sea necesario).

llegaremos a una caminata sin vértices repetidos (ni aristas repetidas), e.d. un camino.

Grafo conexo

- Un grafo G es **conexo** si existe un u, v-camino entre cada par $uv \in V(G)$. En otro caso es **disconexo**.
- Si G tiene un u, v-camino entonces u está **conectado** con v.

Relación de conexión

La **relación de conexión** en $V(G)$ consiste en todos los pares ordenados (u, v) tales que u está conectado con v:

$$uRv \text{ sii existe un } u, v\text{-camino.}$$

Teorema

La relación de conexión en $V(G)$ es una relación de equivalencia.

Reflexiva: uRu : u está conectado con u: u

Simétrica: Si uRv ent vRu :

$uRv \rightarrow u,v$-camino $\rightarrow v,u$-camino

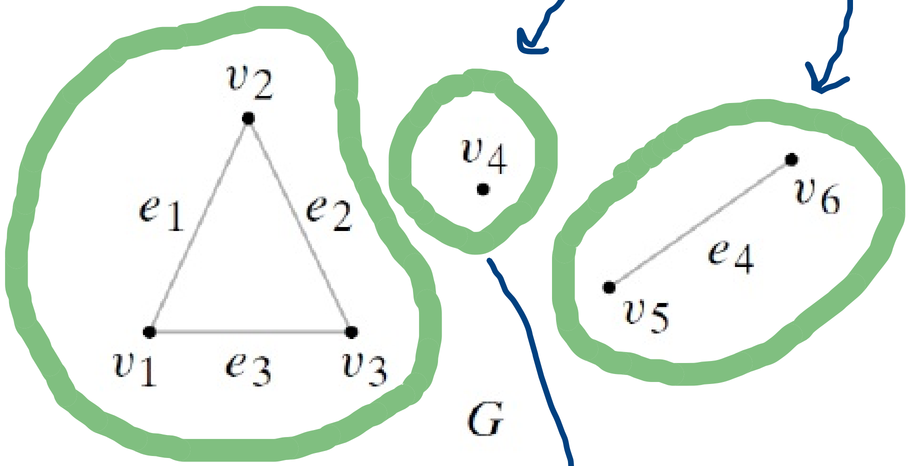
Transitiva: Si uRv y vRw ent uRw

$$\left.\begin{array}{ll} uRv : & u,v\text{-camino} \\ vRw : & v,w\text{-camino} \end{array}\right\} u,w\text{-caminata}$$

y por el lema u,w-camino

$\square$

componentes de G



G no es conexo.

componente trivial

Proposición

Todo grafo con n vértices y k aristas tiene al menos $n - k$ componentes.

Nota

- Las componentes de un grafo son disyuntas y no comparten vértices. Si se agrega una arista con extremos en distintas componentes, estas se combinan en una nueva componente.
- Agregar una arista a G disminuye el número de componentes en 1 ó 0.
- Quitar una arista a G aumenta el número de componentes en 1 ó 0.

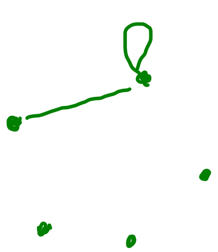
- Si $n \leq k$ la proposición garantiza 1 componente.

$n = 2$
$k = 3$

$n - k = -1$

- Interesante $n > k$.

Sea G un grafo con n vértices y 0 aristas



Hay n componentes

comp
n

- Ahora agregue 1 arista

n o $n-1$

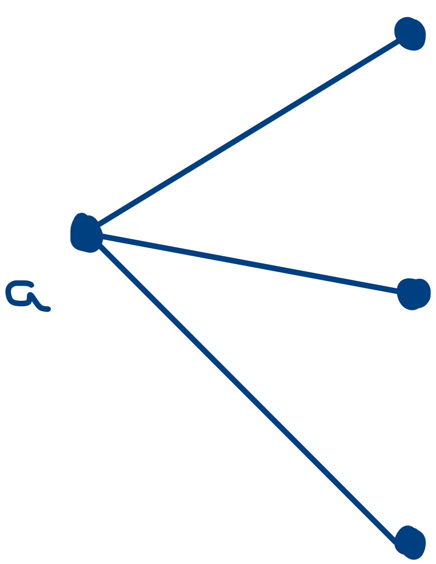
- Repita k veces $\longrightarrow$ tiene al menos $n-k$ componentes.

Arista de corte - vértice de corte

Una **arista de corte** o un **vértice de corte** es una arista o vértice cuya eliminación incrementa el número de componentes.

Nota

- Al eliminar un vértice se deben eliminar todas las aristas incidentes.
- El número de componentes podría aumentar en más de una. Observe $K_{1,m}$



$K_{1,3}$

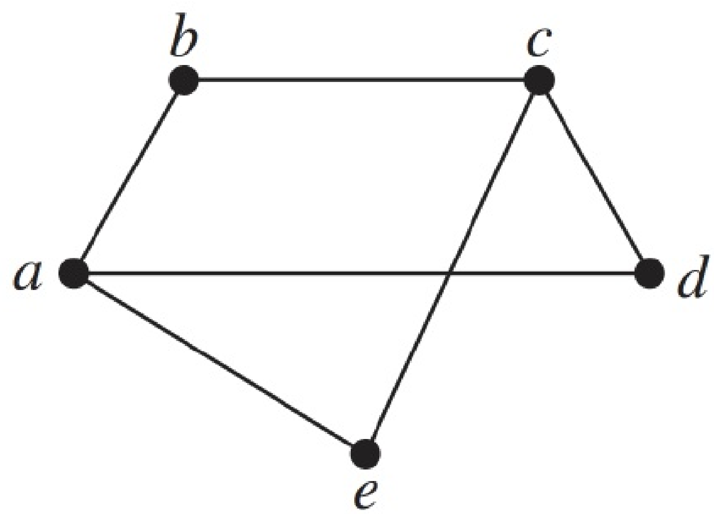
#componentes: 1 (es conexo)

Elimine a :

3 componentes

Subgrafo inducido

Un **subgrafo inducido** es un subgrafo que se obtiene al eliminar un conjunto de vértices. Se escribe $G[T]$ para $G - \overline{T}$ donde $\overline{T} = V(G) - T$, este es el subgrafo inducido por T.

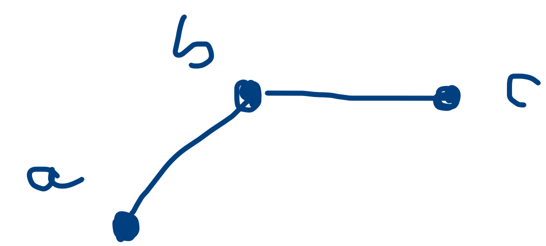


Calcular $G[S]$ y $G[T]$:

- $S = \{a, b, c\}$
- $T = \{b, d, e\}$

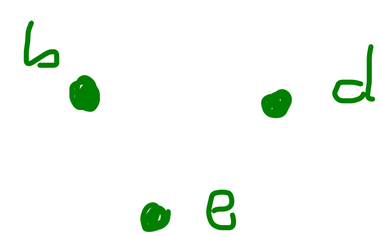
$G[S] = G - \overline{S}$

$= G - \{d, e\}$



$G[T] = G - \overline{T}$

$= G - \{a, c\}$



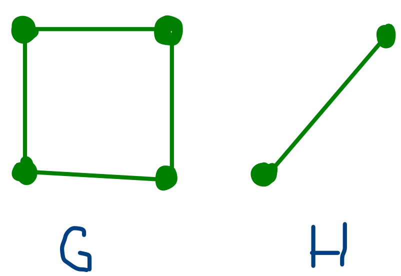
Unión

La **unión** de grafos $G_1, G_2, \ldots, G_k$ notada $G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_k$ es el grafo G con conjunto de vértices

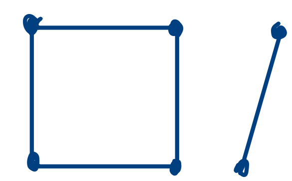
$$V(G) = \bigcup_{i=1}^{k} V(G_i)$$

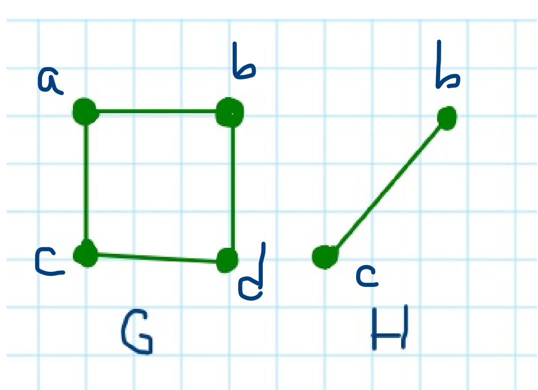
y conjunto de aristas

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^{k} E(G_i)$$

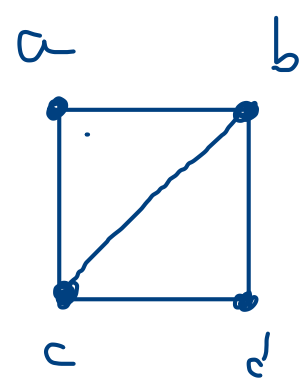


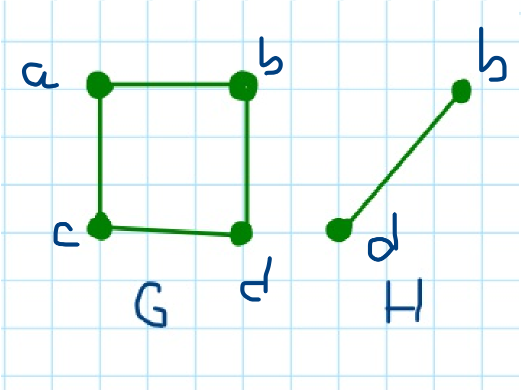
$G \cup H$:





$G \cup H$:





$G \cup H = G$