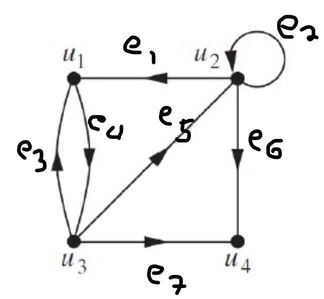
- La **matriz de entrada** de $G$ es la matriz $n \times m$, $M^-(G)$, definida por

$$m_{ij} := \begin{cases} -1 & \text{si } v_i \text{ es la cabeza de } e_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- La **matriz de salida** de $G$ es la matriz $n \times m$, $M^+(G)$, definida por

$$m_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es la cola de } e_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$M^-(G) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{matrix} \end{array}$$




$$M^+(G) = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Si $G$ no tiene bucles, $M^-(G) + M^+(G) = M(G)$

$d^-(u_1) = 2$ ✓

$d^+(u_1) = 1$ ✓

$d^-(u_2) = 2$

$d^+(u_2) = 3$

$N^-(u_3) = \{u_1\}$

$N^+(u_3) = \{u_1, u_4, u_2\}$

$N^-(u_2) = \{u_2, u_3\}$

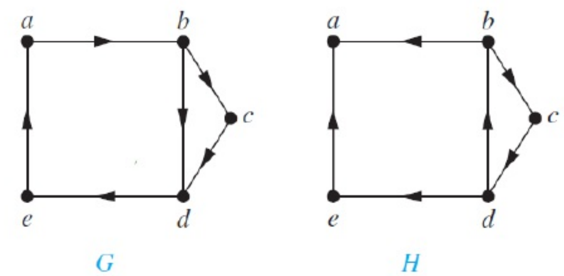
$N^+(u_2) = \{u_2, u_1, u_4\}$

## Conexión débil

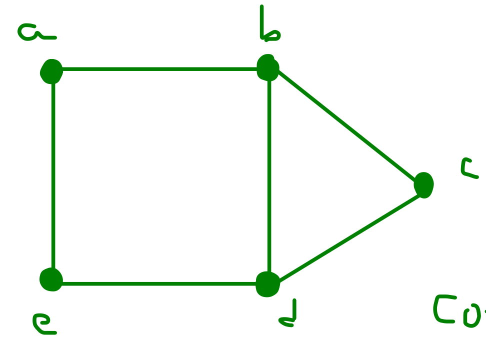
Un digrafo es **débilmente conexo** si su subgrafo subyacente es conexo.

## Conexión fuerte

Un digrafo es **fuertemente conexo** o **fuerte** si para cada par ordenado $(u, v)$ existe un camino de $u$ a $v$. Las componentes fuertes de un digrafo son sus subgrafos fuertes maximales.




subyacente $\rightsquigarrow$




Conexo $\Longrightarrow$ G y H son débilmente conexos.

* $(u, v) \longrightarrow u, v$ – camino

$(v, u)$ también es par ordenado $\longrightarrow v, u$ – camino.

- G es fuertemente conexo.
- H no es fuertemente conexo:

  No existe un e, b–camino

* Componentes fuertes:

## Proposición

En un digrafo $G$,

$$\sum_{v \in V(G)} d^+(v) = e(G) = \sum_{v \in V(G)} d^-(v)$$

$$u \xrightarrow{e} v$$

$e$ aporta $1$ a $d^-(v)$

$e$ aporta $1$ a $d^+(u)$

$$\sum_{v \in V(G)} d^+(v) = e(G) = \sum_{v \in V(G)} d^-(v)$$

## Sendero Euleriano - Circuito Euleriano

- Un **sendero Euleriano** en un digrafo $D$ es un sendero que contiene todas las aristas de $D$.
- Un **circuito Euleriano** en un digrafo $D$ es un circuito que contiene todas las aristas de $D$.

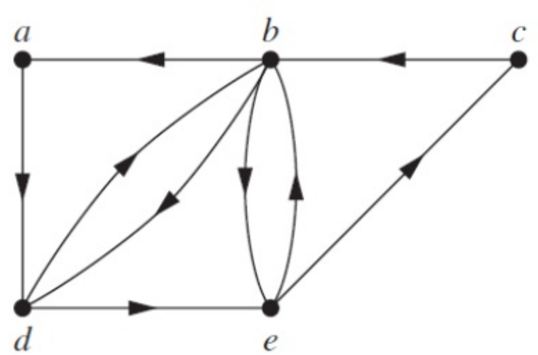
## Digrafo Euleriano

Un **digrafo** $D$ es **Euleriano** si tiene un circuito Euleriano.

## Teorema

Un digrafo $G$ es Euleriano sii $d^+(v) = d^-(v)$ para cada vértice $v$ y el grafo subyacente tiene a lo sumo una componente no trivial.

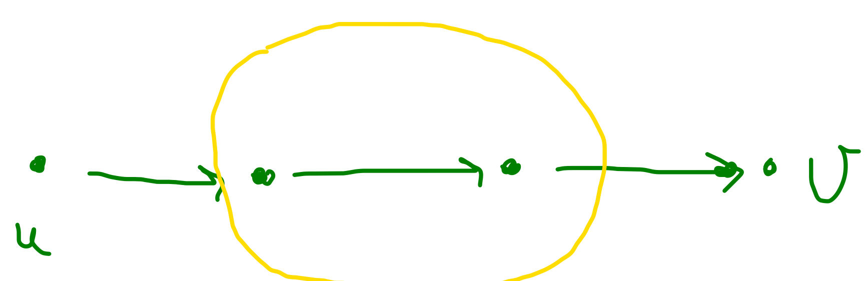
G




$d^+(v) = d^-(v) \quad \forall\, v \in V(G)$

G es euleriano

H

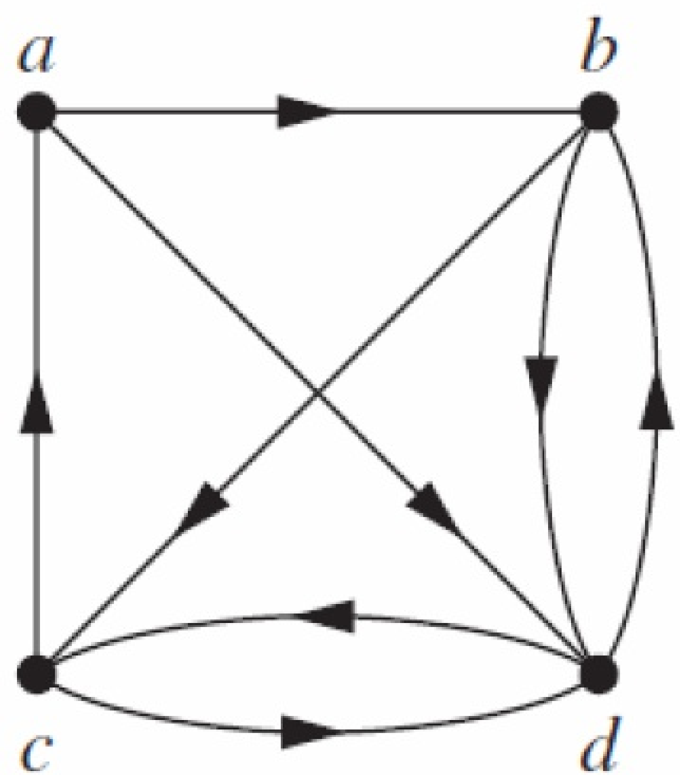



u,v − sendero euleriano

## Teorema

Un digrafo $G$ tiene un $u, v$-sendero Euleriano sii $d^+(w) = d^-(w)$ para cada vértice $w$ excepto para $u$ y $v$, $d^+(u) = d^-(u) + 1$, $d^-(v) = d^+(v) + 1$ y el grafo subyacente tiene a lo sumo una componente no trivial.

G




G no es euleriano

sidad del

G tiene un a,d-sendero euleriano

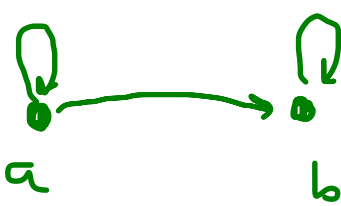
## Orientaciones y torneos

- Si $n(G) = n$, hay $n^2$ parejas ordenadas de vértices.
- Como un digrafo simple permite un bucle sobre cada vértice, se usa cada par de vértices a lo sumo una vez como arista. Luego hay $n^2$ pares ordenados que pueden ser o no aristas de un digrafo simple.
- Hay $2^{n^2}$ digrafos simples con conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

$\bullet$ a $\qquad \bullet$ b

16 digrafos simples

| Parejas | op | |
|---|---|---|
| (a, a) | 2 | si |
| (a, b) | 2 | si |
| (b, a) | 2 | no |
| (b, b) | 2 | si |




$$2^{\binom{n}{2}} \leq 2^{n^2}$$

$$\binom{n}{2} \leq n^2$$

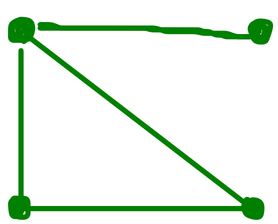
## Orientación

Una **orientación** de un grafo $G$ es un digrafo $D$ obtenido a partir de $G$ al seleccionar una orientación ($x \to y$ o $y \to x$) para cada arista $xy \in E(G)$.

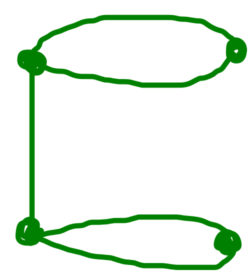
## Grafo orientado

Un **grafo orientado** es una orientación de un grafo simple.

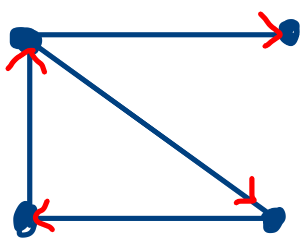
$G$



$H$

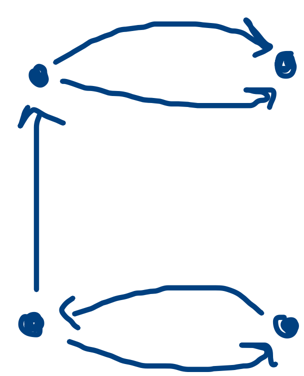


$G'$



Es una orientación de $G$

$G'$: grafo orientado



Es una orientación de $H$.

(No es un grafo orientado)

- Hay $3^{\binom{n}{2}}$ grafos orientados con vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

G : Simple $\binom{n}{2}$ : # pares de vértices $\{u, v\}$

op 1 : $e = (u, v)$

op 2 : $e = (v, u)$

op 3 : No hay arista

- Hay $2^{\binom{n}{2}}$ torneos con vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.