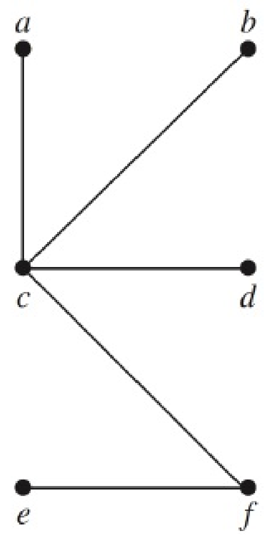
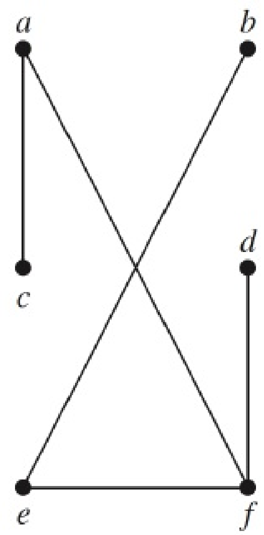
Árbol

Un **árbol** es un grafo no dirigido, acíclico y conexo.



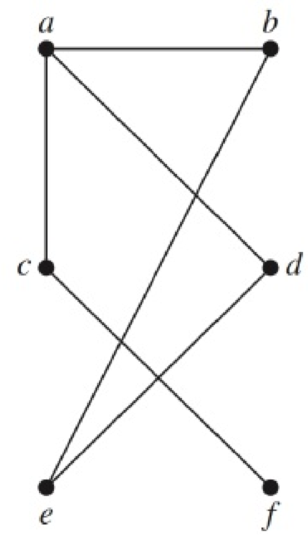
G_1

Árbol



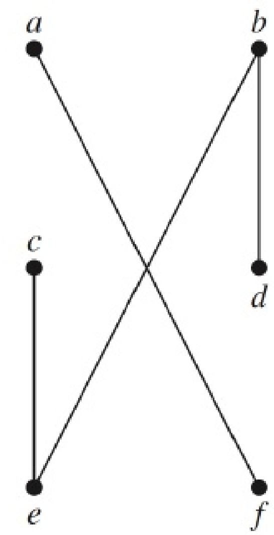
G_2

Árbol



G_3

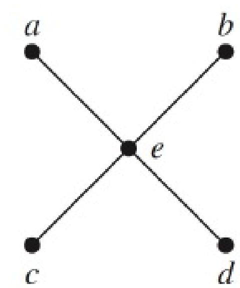
Tiene ciclos
→ no es árbol



G_4

No es conexo

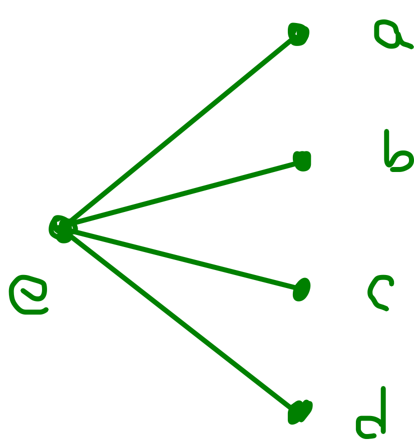
→ Bosque



G_5

Árbol

estrella



$K_{1,4}$

- Un árbol T es un camino sii $\Delta(T) = 2$.

Grafo P_n : 

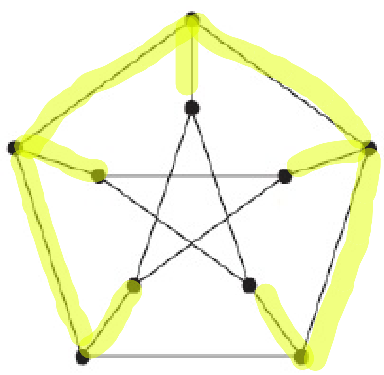
T árbol con $\Delta(T) = 2 \longrightarrow$ sólo hay dos hojas (u_1, u_2)

- T es conexo, $d(u) = 1$ o $d(v) = 2$

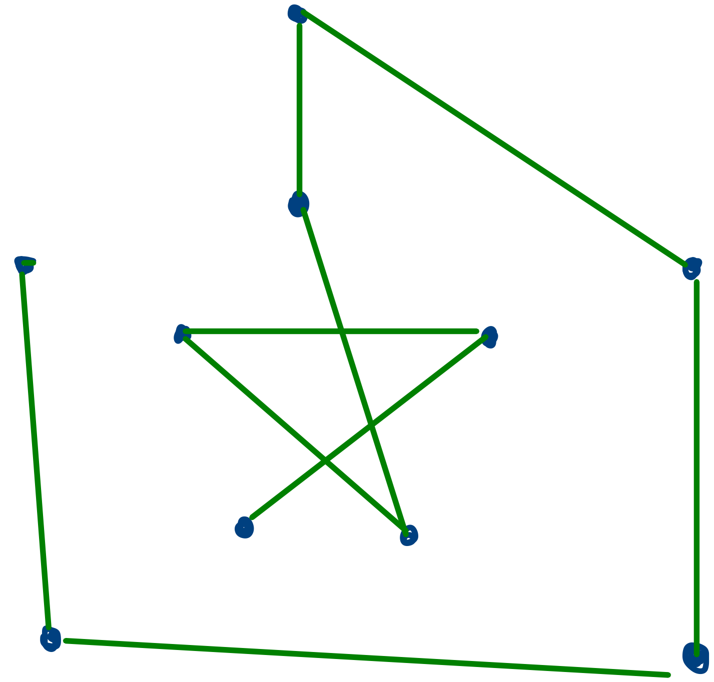
$\Leftarrow$) formamos P_n : $u_1 - v_1 - v_2 - v_3 \cdots v_n - u_2$

$\Rightarrow$) Nótese que P_n es un grafo conexo, acíclico tq $\Delta(P_n) = 2$.

G



Petersen



H

$V(H) = V(G)$ ✓

H es un árbol

} H es un árbol de expansión de G

Inducción Fuerte:

- Sea P una propiedad en $\mathbb{N}$.

  Supongamos que:

  1) $P(j)$ es verdadero

  2) $P(j) \wedge P(j+1) \wedge \ldots \wedge P(k-1) \rightarrow P(k)$

  Entonces $P(n)$ es verdadera $\forall n \geq j$

Teorema

Sea G un grafo con n vértices, $n \geq 1$, las siguientes afirmaciones son equivalentes (y caracterizan los árboles con n vértices):

A. G es conexo y no tiene ciclos.

B. G es conexo y tiene $n-1$ aristas.

C. G tiene $n-1$ aristas y no tiene ciclos.

D. Para cada par $u, v \in V(G)$, G tiene exactamente un u, v-camino.
Existe un único camino entre cada par de vértices.

$A \Rightarrow B, C$

Supongamos que G es conexo y acíclico.

Inducción sobre n:

Paso Base: $n=1$: $\underset{u}{\bullet} \rightsquigarrow G$ nótese que $e(G)=0$

Paso Inductivo: Sea $n \geq 1$. Supongamos que todo grafo con menos de n vértices satisface la condición (Si $n(G)=k$ entonces $e(G)=k-1$)

Como G es conexo y acíclico, G tiene una hoja v

Sea ahora $G' = G - \{v\}$ G' es conexo y acíclico y $n(G') = n-1 < n$ por HI

$$e(G') = (n-1)-1 = n-2$$

Por lo tanto $e(G) = (n-2)+1 = n-1$.

$B \Rightarrow A, C$ $\qquad$ $C \Rightarrow A, B$ $\qquad$ $A \Rightarrow D$

$D \Rightarrow A$