k-coloreado de aristas

Un **k-coloreado de aristas** de un grafo G es una función (de etiquetado) $c : E(G) \mapsto S$, donde $|S| = k$.

- Las etiquetas de S son los "colores".
- Las aristas del mismo color forman una **clase de color**.

k-coloreado propio

Un k-coloreado de aristas es **propio** si aristas incidentes tienen etiquetas diferentes:

$$(\forall e, e' \in E(G))(e \sim e' \to c(e) \neq c(e')),$$

es decir, si cada clase de color es un emparejamiento.

Grafo k-coloreable

Un grafo es **k-coloreable por aristas** si tiene un k-coloreado de aristas propio.

Índice cromático

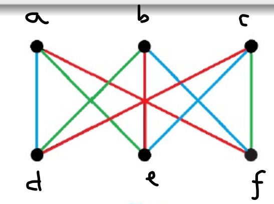
El **índice cromático** $\chi'(G)$ de un grafo sin bucles G es el menor valor de k tal que G es k-coloreable por aristas.

Nota

- Si G tiene bucles, G no es coloreable por aristas.
- Las aristas múltiples si afectan el coloreado de aristas.

Ejemplo

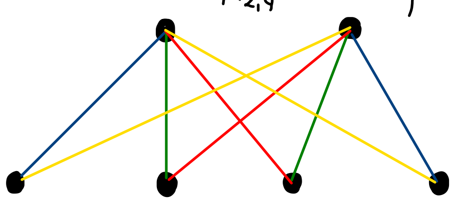
$\chi'(Km, n) = \text{máx}\{m, n\}$

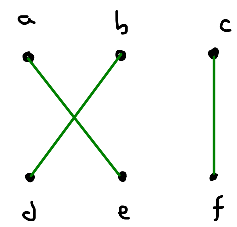


$K_{3,3}$

3-coloreado de aristas

$K_{2,4}$ $\quad \chi'(K_{2,4}) = 4$



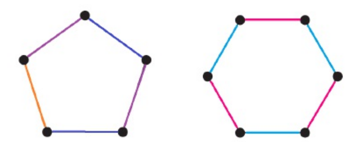


Clase del verde

⟶ Emparejamiento en $K_{3,3}$

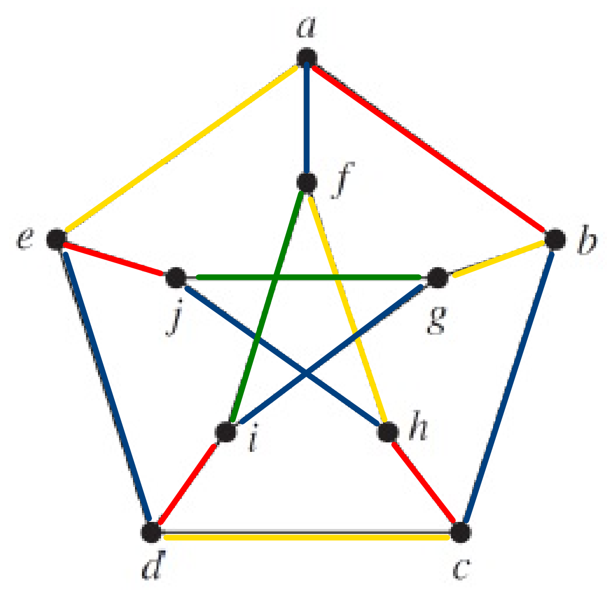
Ejemplo

$\chi'(C_n) = 3$, si n es impar y $\chi'(C_n) = 2$, si n es par.



C_5 $\quad C_6$

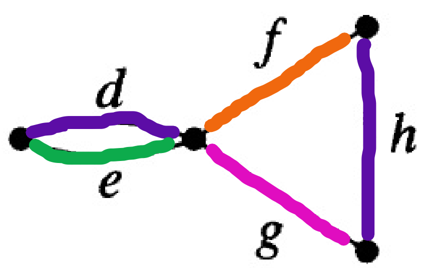
- $\Delta(C_n) = 2 \longrightarrow \chi'(C_n) \geq 2$



4 – coloración por aristas

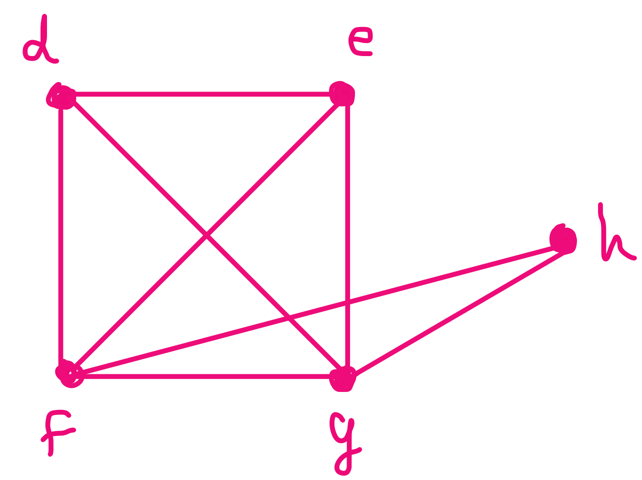
Grafo lineal

El **grafo lineal** de G, notado $L(G)$, es el grafo simple cuyos vértice son las aristas de G. Dos vértices son adyacentes en $L(G)$ sii las aristas correspondientes en G tienen un extremo común.

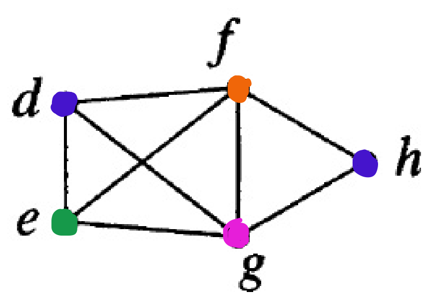


G

$\chi'(G)=4$



$L(G)$



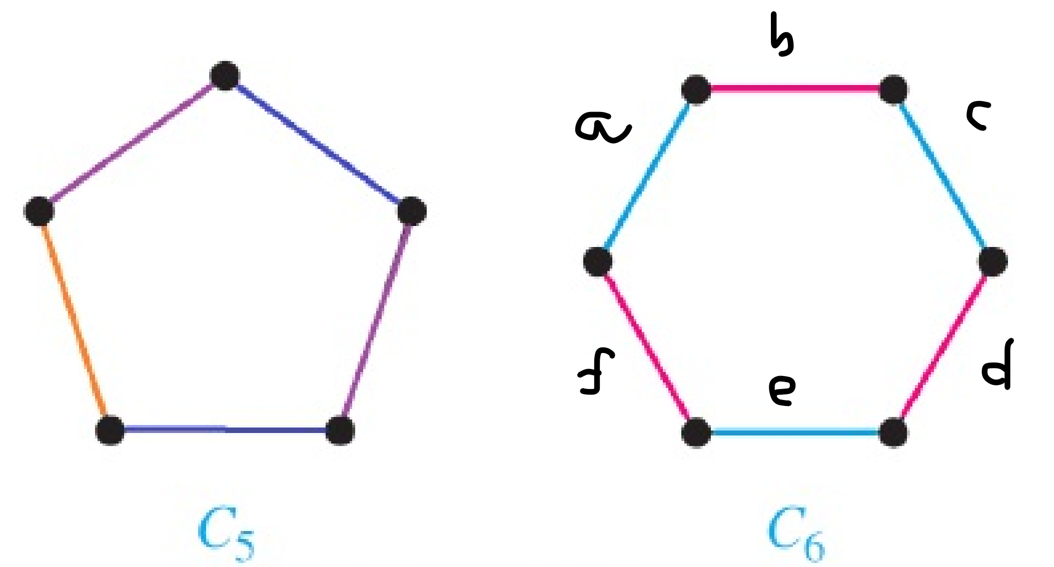
$L(G)$

$\chi(L(G))=4$

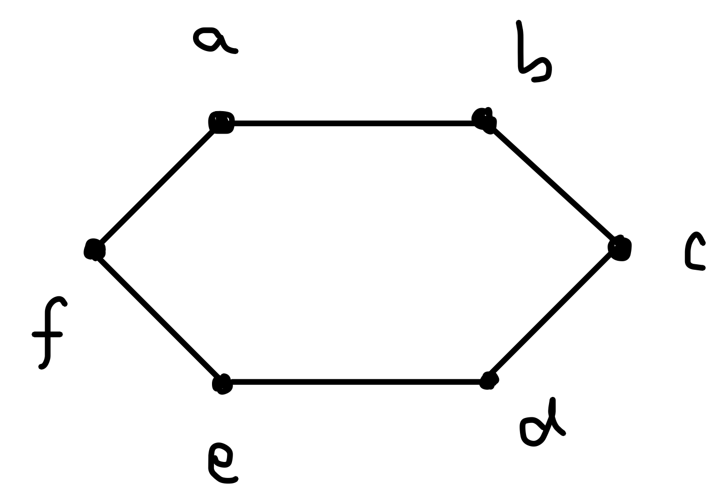
Nota

Todo coloreado por aristas de un grafo G puede interpretarse como un coloreado del grafo lineal asociado $L(G)$. Así,

$$\chi'(G) = \chi(L(G))$$



$L(C_6)$:

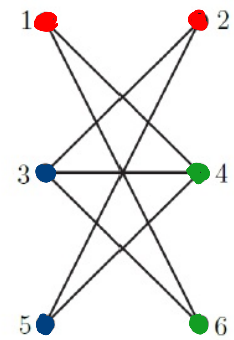


$$C_6 \cong L(C_6)$$

Algoritmo de coloreado voraz

Input: Un grafo G con n vértices ordenados: $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
Output: $f(v)$, $\forall v \in V(G)$, un coloreado propio de G.
Iteración:

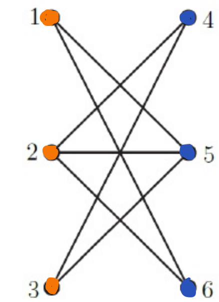
1. $c = 0$
2. Mientras que algún vértice no esté coloreado:
   - a. $c = c + 1$.
   - b. Para $i = 1$ hasta n:
     1. Si v_i no está coloreado y ningún vecino de v_i tiene asignado el color c:
        - a. $f(v_i) = c$.



$C = 1$

$C = 2$

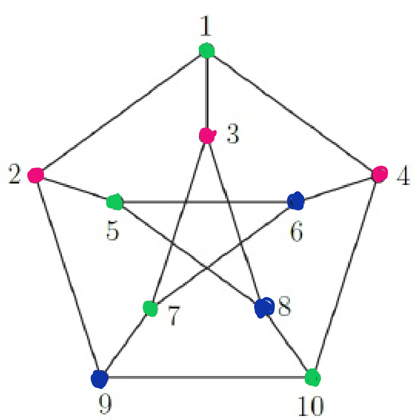
$C = 3$



$C = 1$

$C = 2$

óptimo.



$C = 1 =$ $\quad f(1) = f(5) = f(7) = f(10) = 1$

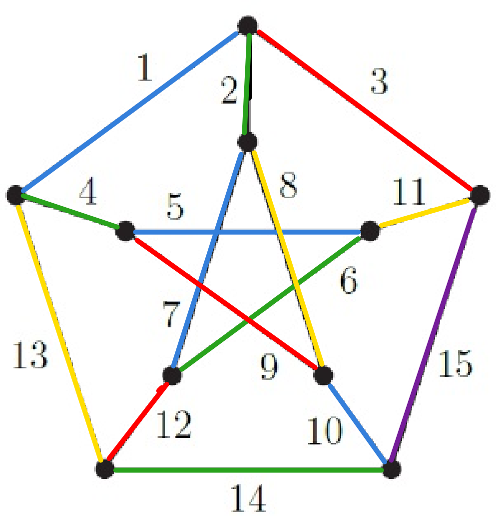
$C = 2 =$ $\quad f(2) = f(3) = f(4) = 2$

$C = 3 =$ $\quad f(6) = f(8) = f(9) = 3$

Algoritmo voraz de coloreado por aristas

Input: Un grafo G con n aristas ordenadas: $e_1, e_2, \ldots, e_n$.
Output: $c(e)$, $\forall e \in E(G)$, un coloreado por aristas propio de G.
Iteración:

1. $c = 0$
2. Mientras que alguna arista no esté coloreada:
   a. $c = c + 1$.
   b. Para $i = 1$ hasta n:
      1. Si e_i no está coloreada y ninguna arista vecina de e_i tiene asignado el color c:
         a. $c(e_i) = c$.



c = 1

c = 2

c = 3

c = 4

c = 5