Teorema

Sea G un grafo con n vértices, $n \geq 1$, las siguientes afirmaciones son equivalentes (y caracterizan los árboles con n vértices):

A. G es conexo y no tiene ciclos.

B. G es conexo y tiene $n-1$ aristas.

C. G tiene $n-1$ aristas y no tiene ciclos.

D. Para cada par $u, v \in V(G)$, G tiene exactamente un u, v-camino.
Existe un único camino entre cada par de vértices.

$B \Rightarrow \{A, C\}$

Sea G conexo, $e(G) = n-1$. (Ver: G es acíclico)

- Si G es cíclico, eliminamos aristas a cada ciclo hasta que el grafo resultante sea acíclico: G'.

Como las aristas eliminadas no son aristas de corte, G' es conexo. (G' es árbol).

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Por } (A \Rightarrow B) & e(G') = n-1 \\ \text{Por hipótesis,} & e(G) = n-1 \end{array}\right\} \text{no se eliminaron aristas}$$

luego G no tiene ciclos.

Teorema

Sea G un grafo con n vértices, $n \geq 1$, las siguientes afirmaciones son equivalentes (y caracterizan los árboles con n vértices):

A. G es conexo y no tiene ciclos.

B. G es conexo y tiene $n-1$ aristas.

C. G tiene $n-1$ aristas y no tiene ciclos.

D. Para cada par $u, v \in V(G)$, G tiene exactamente un u, v-camino.
Existe un único camino entre cada par de vértices.

$C \Rightarrow \{A, B\}$

Sea G acíclico con $e(G) = n-1$. (Ver: G es conexo)

Supongamos que G no es conexo y sean $G_1, G_2, \ldots, G_k$ las componentes de G.

Como cada vértice de G aparece en una única componente G_i. $\sum_i n(G_i) = n$

Ahora, como G es acíclico, cada G_i es acíclico (G_i satisface A)

como $(A \Rightarrow B)$ $e(G_i) = n(G_i) - 1$

Luego $e(G) = \sum_{i=1}^{k} e(G_i) = \sum_{i=1}^{k} (n(G_i) - 1) = \overbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} n(G_i) \right)}^{n} - k = n - k$

por hipótesis $e(G) = n-1$ luego $k = 1$, por lo tanto, G es conexo.

Teorema

Sea G un grafo con n vértices, $n \geq 1$, las siguientes afirmaciones son equivalentes (y caracterizan los árboles con n vértices):

A. G es conexo y no tiene ciclos.

B. G es conexo y tiene $n-1$ aristas.

C. G tiene $n-1$ aristas y no tiene ciclos.

D. Para cada par $u, v \in V(G)$, G tiene exactamente un u, v-camino.
Existe un único camino entre cada par de vértices.

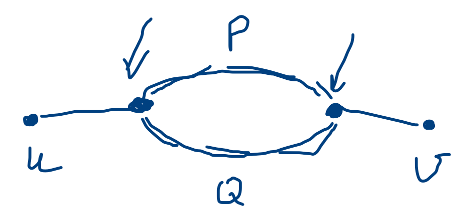
$A \equiv B \equiv C$

$A \Rightarrow D$

Sea G conexo acíclico.

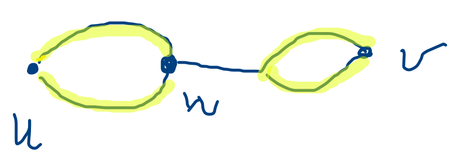
Como G es conexo entre cada par de vértices u, v existe al menos un u,v-camino.

Si existen dos u,v-caminos se selecciona el mínimo par de caminos distintos con los mismos extremos: P, Q



Como $P \neq Q$, $P \cup Q$ es un ciclo $\rightarrow\leftarrow$

Luego, el camino es único.



$D \Rightarrow A$: Supongamos que existe un único u,v-camino para cualquier par u, v de vértices.

Luego G es conexo.

Si G es cíclico, existen dos vértices u, v con dos u,v-caminos distintos $\rightarrow\leftarrow$ Luego G es acíclico

$\square$