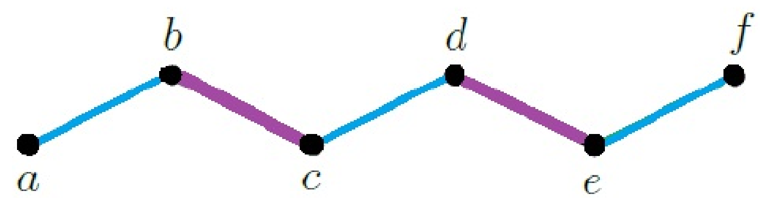
M-camino alternante

Dado un emparejamiento M, un M-**camino alternante** es un camino que alterna entre aristas $e \in M$ y aristas $e' \notin M$.



P_6

- $M_2 = \{ab, cd, ef\}$

P_6 es M_2- alternante.

M-camino de aumento

Un M-**camino de aumento** es un M-camino alternante cuyos extremos son insaturados por M.

- $M_1 = \{bc, de\}$

P : $b - c - d - e$

P es M_1 alternante (NO es de aumento)

Los extremos b y e están saturados por M_1

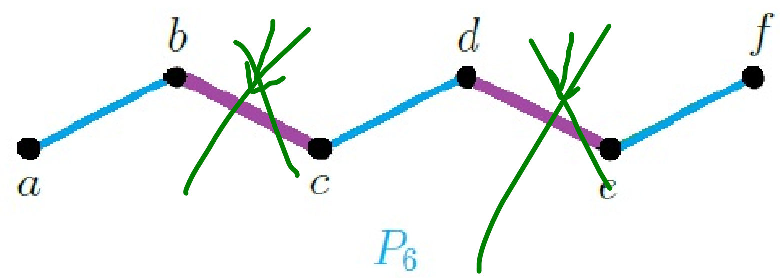
P_6 : $a - b - c - d - e - f$

P_6 es M_2-alternante y es de aumento:

sus extremos a y f están insaturados por M_1

Nota

Dado P un M-camino de aumento, si se reemplazan las aristas de M en P con las otras aristas de P se obtiene un nuevo emparejamiento M' con una arista adicional.



- En $M_1 = \{bc, de\}$, P_6 es un M_1-camino alternante. Los extremos son insaturados por M_1, luego P_6 es un M_1-camino de aumento.

$M_1 = \{bc, de\}$ emparejamiento

M_1- Camino de aumento : P_6

$M' = \{ab, cd, ef\} \rightarrow$ nuevo emparejamiento con una arista adicional.

Teorema (Berge)

Un emparejamiento M en un grafo G es un emparejamiento máximo en G sii G no tiene un M-camino de aumento.

Definición

Sea M un emparejamiento en un grafo G. Si S es un conjunto de vértices, $S \subseteq V(G)$, entonces $N(S)$ es el conjunto de vértices que tienen un vecino en S.

Teorema (Condición de Hall)

Un X, Y-bigrafo G tiene un emparejamiento que satura a X (emparejamiento completo) sii

$$|N(S)| \geq |S|, \ \forall S \subseteq X.$$

Objetivo: Saturar X

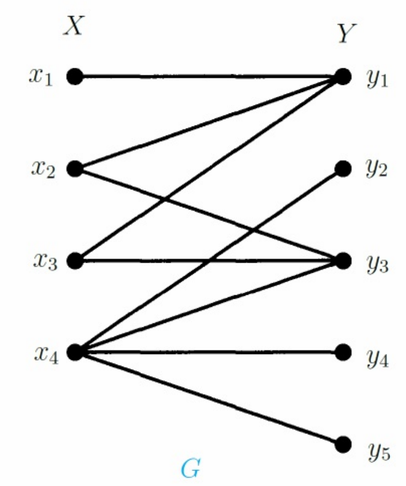
$\forall S \subseteq X$

$|S| \leq |N(S)|$

"Hay más vecinos que elementos" (o igual).

Ejemplo

Sean $S = \{x_1, x_2, x_3\}$ y $N(S) = \{y_1, y_3\}$. Como $|N(S)| < |S|$, entonces no existe un emparejamiento que sature a X.



Existe un conjunto S que tiene más elementos que vecinos.

$S \subseteq X$

$|S| = 3$

$N(S) = \{y_1, y_3\}$

$|N(S)| = 2$

Corolario

Para $k > 0$, todo grafo bipartito regular tiene un emparejamiento perfecto.

G : $X-Y$ bipartito

$d(u) = k$ $\qquad |Y| = |X| = k$

$\forall \ S \subseteq X \qquad |N(S)| = k$

$|S| \leq k = |N(S)|$: cumple Hall

↳ satura X → perfecto

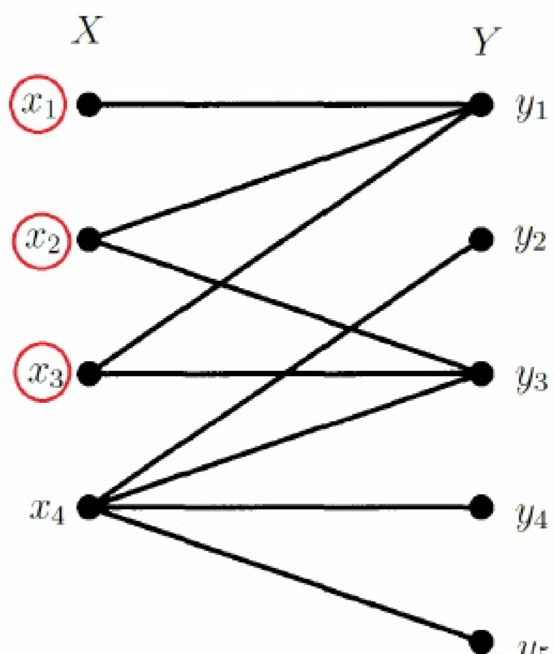
Corolario

Un X, Y-bigrafo G tiene un emparejamiento completo si para algún $k > 0$, $d(x) \geq k \geq d(y)$ para todos los vértices $x \in X$ y $y \in Y$.

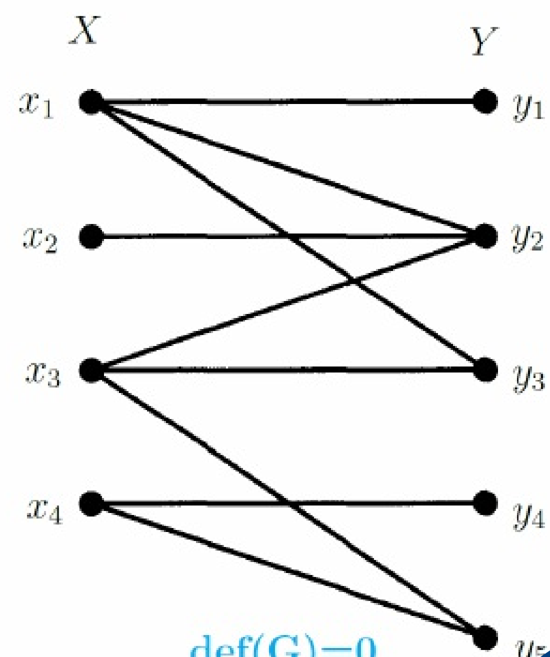
Deficiencia

- Sea G un X, Y-bigrafo. Si $A \subseteq X$ la **deficiencia** de A está definida por $def(A) = |A| - |N(A)|$.
- La **deficiencia** de G, es $def(G) = \text{máx}\{def(A) | A \subseteq X\}$.

NO —— Hall —— SI



def(G)=1



def(G)=0

$A = \{x_2\}$

$def(A) = 0$

$A = \{x_1, x_2, x_3\}$

$N(A) = \{y_1, y_3\}$

$def(A) = 1$