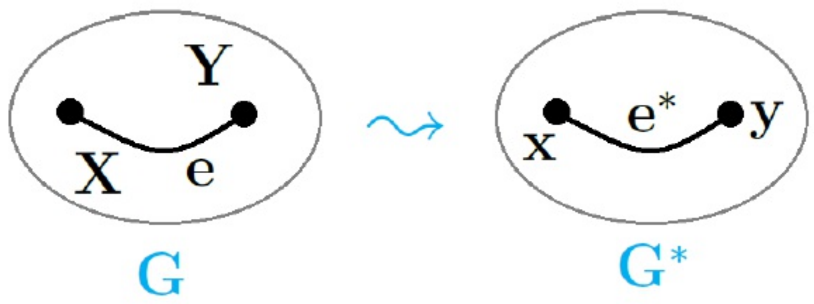
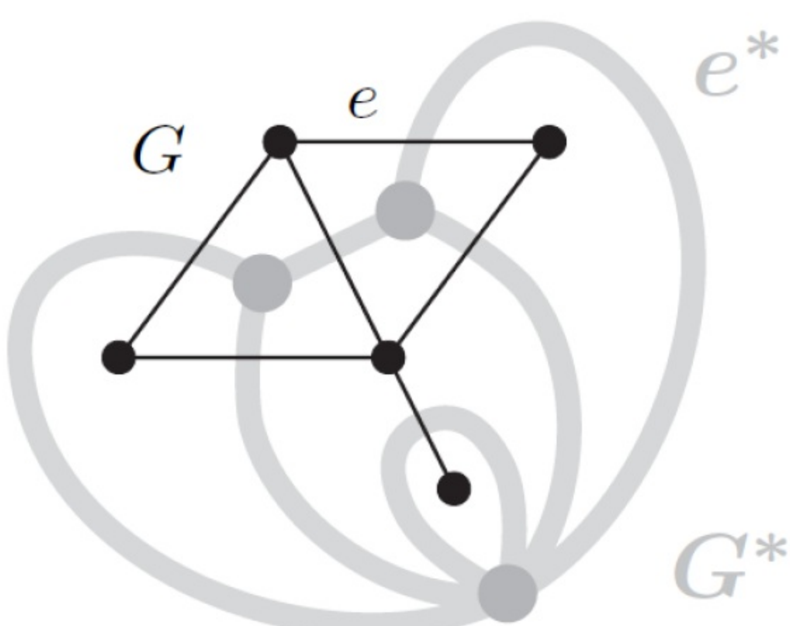
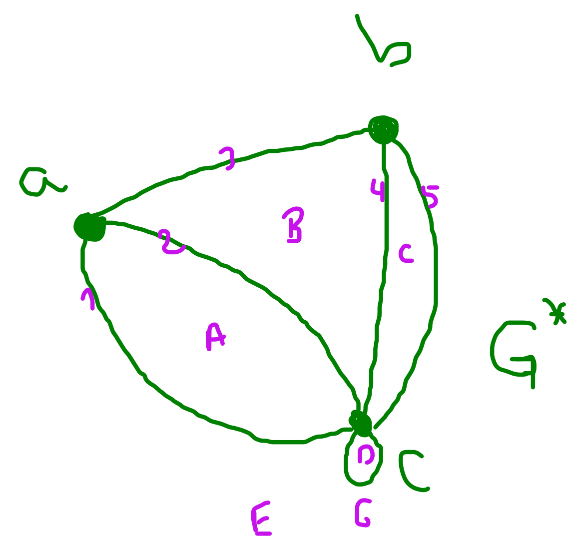
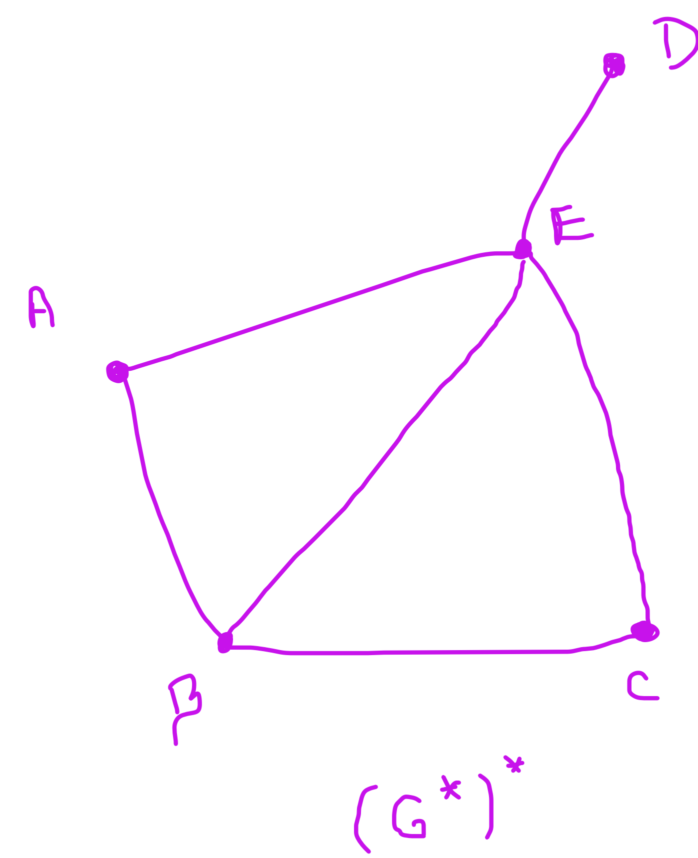
Grafo dual

El **grafo dual** G^* de un grafo plano G es el grafo plano cuyos vértices corresponden a las caras de G. Las aristas de G^* corresponden a las aristas de G de la siguiente manera: si $e \in E(G)$ con una cara X en un lado y una cara Y en otro lado, entonces los extremos de la arista dual $e^* \in E(G^*)$ son los vértices $x, y \in V(G^*)$ que representan las caras X, Y de G.









$$G \cong (G^*)^*$$

Teorema (Euler)

Si G es un grafo conexo plano con n vértices, e aristas y f caras, entonces

$$n - e + f = 2$$

Nota

- $|E(G^*)| = |E(G)|$ ✓
- $|V(G^*)| = |F(G)|$ ✓
- $|F(G^*)| = |V(G)|$ si G es conexo. ✓
- G^* es conexo. ✓
- G^* es plano. ✓
- El grado de un vértice $x \in V(G^*)$ es igual a la longitud de la frontera X en G. ✓
- Si e es una arista de corte en G entonces e^* es un bucle en G^*.

- G conexo $\longrightarrow$ $n - e + f = 2$ en G

Euler en G^*: $n^* - e^* + f^* = 2$

$n^* = f \quad e^* = e \quad \longrightarrow \quad f^* = n$

Coloración de grafos

k-coloreado

Un **k-coloreado** de un grafo G es una función (de etiquetado) $f : V(G) \mapsto S$, donde $|S| = k$.

- Las etiquetas de S son los "colores".
- Los vértices del mismo color forman una **clase de color**.

k-coloreado propio

Un k-coloreado es **propio** si vértices adyacentes tienen etiquetas diferentes:

$$(\forall u, v \in V(G))(u \leftrightarrow v \rightarrow f(u) \neq f(v))$$

Grafo k-coloreable

Un grafo es **k-coloreable** si tiene un k-coloreado propio.

Número cromático

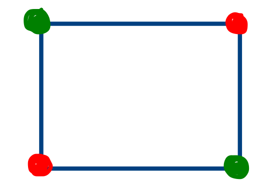
El **número cromático** $\chi(G)$ es el menor valor de k tal que G es k-coloreable.

Grafo k-cromático

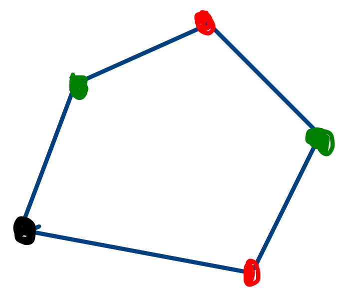
Un grafo es **k-cromático** si $\chi(G) = k$. Un k-coloreado propio de un grafo k-cromático es un **coloreado óptimo**.

· $\chi_n(K_n) = n$

· $\chi(C_4) = 2 \rightarrow \chi(C_{2n}) = 2$



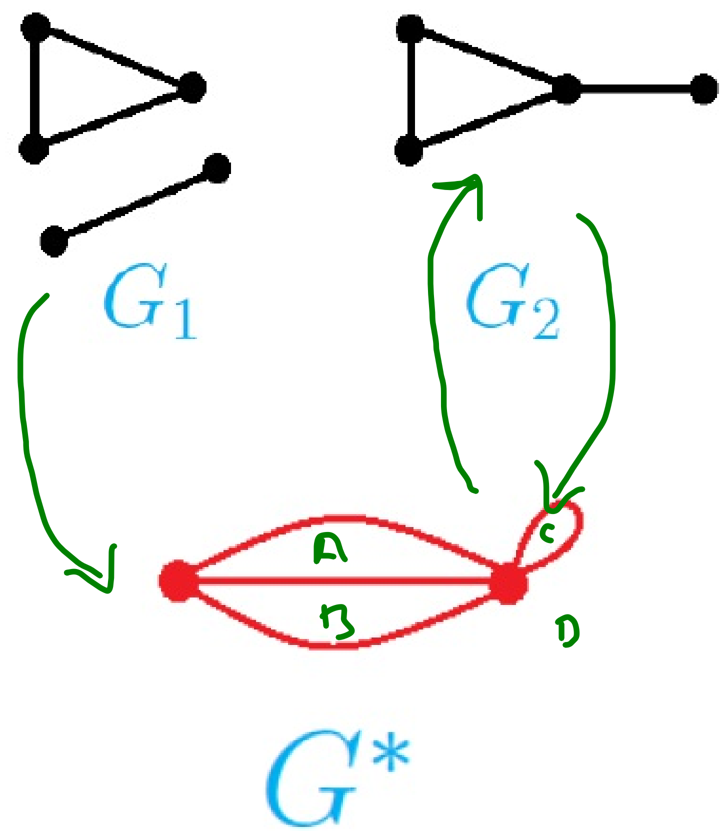
· $\chi(C_{2n+1}) = 3$



3-crítico

Nota

Dos grafos no isomorfos podrían tener duales isomorfos:



¿$(G^*)^*$?