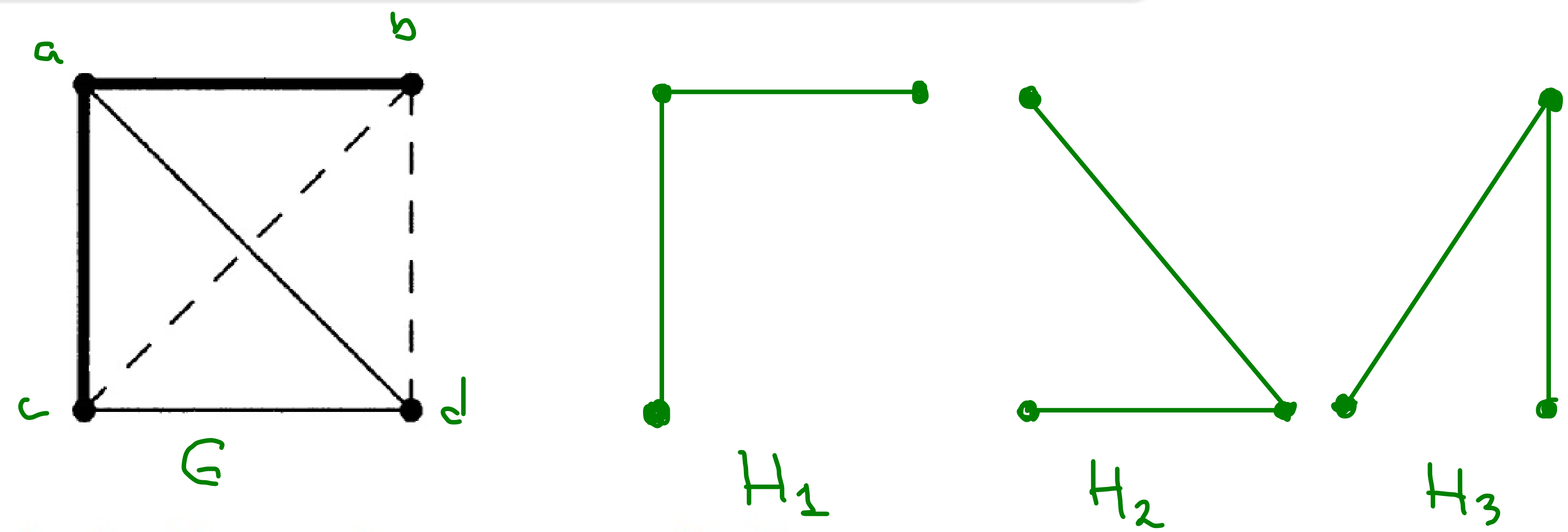
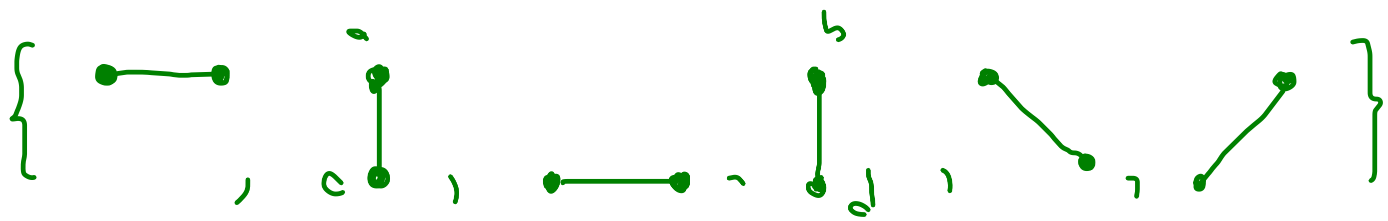
Descomposición

Una **descomposición** de un grafo G es una lista de subgrafos $H_i \subseteq G$ tal que cada arista $e \in E(G)$ pertenece exactamente a un subgrafo de la lista.



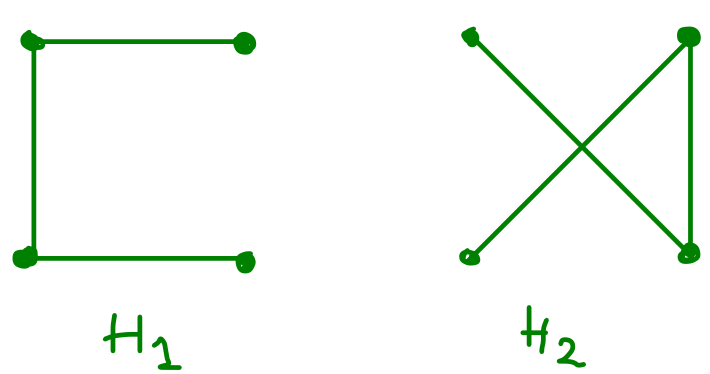
Descomposición de K_4 usando tres copias de P_3

$H_i \subseteq G$



→ Descomposición de G

Otra;



→ Descomposición de G

H_1 y H_2 son copias de P_4

(P_4 es autocomplementario)

Grafo de Petersen

El **grafo de Petersen** es el grafo simple cuyo conjunto de vértices son los subconjuntos de 2 elementos de un conjunto de 5 elementos y sus aristas son pares disyuntos de éstos subconjuntos.

Spg $\quad A = \{1,2,3,4,5\}$

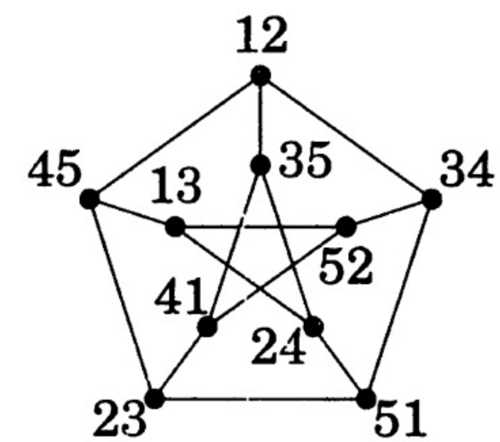
Subconjuntos de 2 elementos de A

$= \{12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45\}$

$\{1,2\}$

$\binom{5}{2} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$

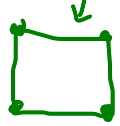
G: Grafo de Petersen $\qquad |V(G)| = 10$

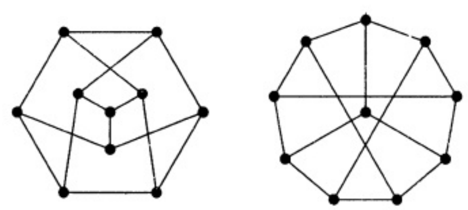


Grafo de Petersen

$P(5,2)$

Ejercicio



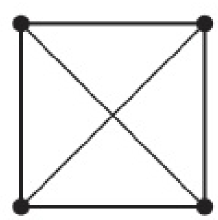


$P(5,2) \qquad P(5,2)$

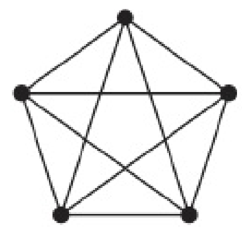
$P(6,3) \qquad P(7,2) \quad \ldots$

Ejercicio

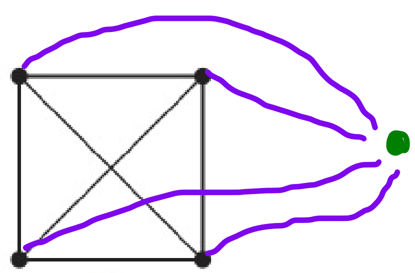
Un grafo $K_{1,n-1}$ y K_{n-1} forman una descomposición de K_n.



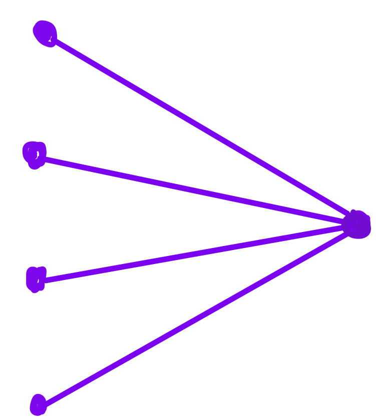
K_4



K_5



K_4



$K_{4,1}$ $K_{1,4}$

K_4 y $K_{1,4}$ forman una descomposición de K_5

Teorema

Un grafo G de n vértices es autocomplementario sii K_n tiene una descomposición que consiste en dos copias de G. (Grafos isomorfos con G).

Dem:

$\Rightarrow$) Sea G un grafo de n vértices autocomplementario,

ed, $G \cong \overline{G}$.

Como $|V(G)| = n$ entonces $G \leq K_n$ y $\overline{G} \leq K_n$.

Sea $e \in E(K_n)$, luego $e \in E(G)$ o $e \notin E(G)$

ed $e \in E(G)$ o $e \in E(\overline{G})$

como $E(G) \cap E(\overline{G}) = \phi$, decimos que e pertenece exactamente a uno de los dos subgrafos.

Luego G y $\overline{G}$ forman una descomposición de K_n

y como $G \cong \overline{G}$ ent K_n tiene una descomposición que consiste en dos copias de G.

$\Leftarrow$) Sea C_1, C_2 una descomposición de K_n que consiste en dos copias de G.

Ed, $C_1 \cong G$ $C_2 \cong G$.

Para cada arista $e \in E(K_n)$,

$e \in E(C_1)$ o $e \in E(C_2)$, pero no en ambos,

Ed, si $e \in E(C_1)$ ent $e \notin E(C_2)$

y si $e \notin E(C_1)$ ent $e \in E(C\ )$

Por lo tanto $e \in E(C_1)$ sii $e \notin E(C_2)$

Como $C_1 \cong C_2$ $V(C_1) = V(C_2)$

Entonces $C_1 = \overline{C}_2$ y como $C_1 \cong C_2 \cong G$

G es autocomplementario.