Camino Hamiltoniano

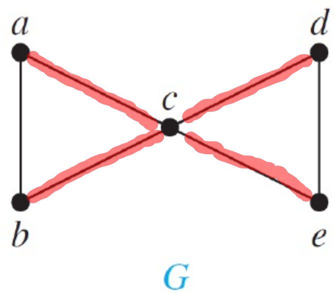
Un **camino Hamiltoniano** en un grafo G es un camino de expansión de G, es decir, un camino que contiene todos los vértices de G.

Ciclo Hamiltoniano

Un **ciclo Hamiltoniano** en un grafo G es un ciclo de expansión de G, es decir, un ciclo que contiene todos los vértices de G.

Grafo Hamiltoniano

Un **grafo Hamiltoniano** es un grafo que contiene un ciclo Hamiltoniano.



Camino Hamiltoniano:

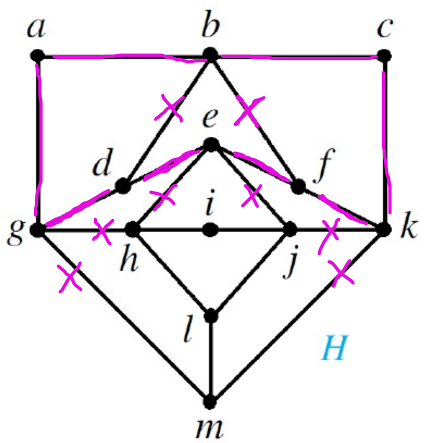
$a - b - c - d - e$

G no es Hamiltoniano:

Si existe C el ciclo Hamiltoniano,

ac, bc, dc y $ec \in E(C)$

$\rightarrow\leftarrow$ c sería un vértice de grado 4 en C.



H no es Hamiltoniano:

Si existe C ciclo hamiltoniano:

$ab, ag, bc, ck \in E(C)$

$bd, df \notin E(C)$

$dg, de, ef, fk \in E(C)$

$gh, gm, he, ej, jk \notin E(C)$

$h, j \notin V(C)$ $\rightarrow\leftarrow$

• Si G es X,Y-bipartito y $|X| \neq |Y|$ ent G no es Hamiltoniano.

Condiciones necesarias

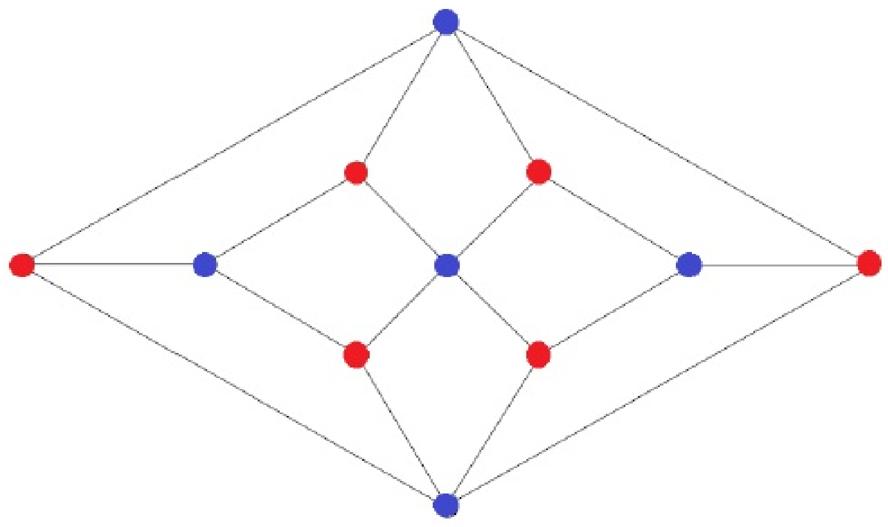
Proposición

Si G es un X, Y- grafo bipartito Hamiltoniano, entonces $|X| = |Y|$.

Un ciclo Hamiltoniano en G alterna los vértices de la bipartición.

Ejemplo

El grafo de Herschel no es Hamiltoniano.



Universidad del Rosario

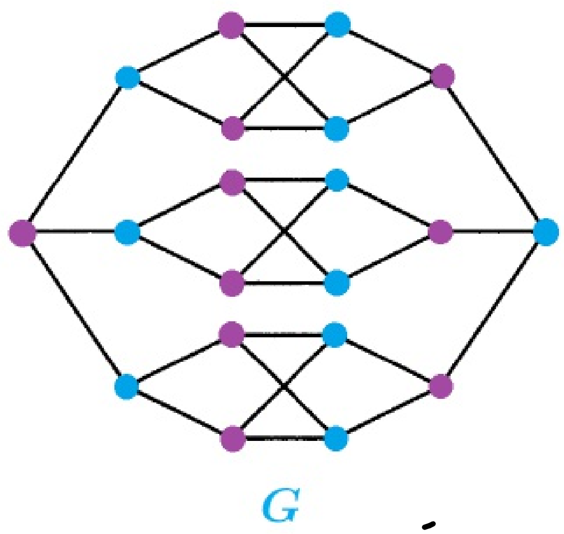
G es bipartito

$|X| = 5$ $|Y| = 6$

Como $|X| \neq |Y|$ ent G no es Hamiltoniano.

Nota

G es un X, Y- grafo bipartito con $|X| = |Y|$, sin embargo G no es Hamiltoniano. (Pendiente).

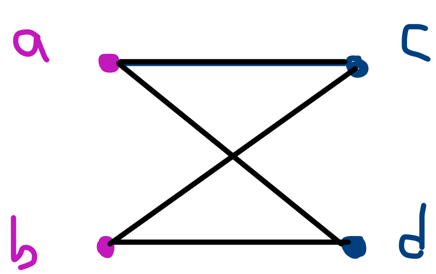


(1)

La condición es necesaria pero no es suficiente.

Cuando: G X,Y-bipartito y $|X|=|Y| \longrightarrow \begin{cases} G \text{ Hamiltoniano (2)} \\ G \text{ no Hamiltoniano (1)} \end{cases}$

$K_{2,2}$



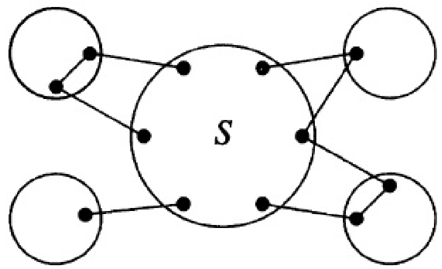
$|X|=|Y|$

a - c - b - d - a $\leadsto$ ciclo Hamiltoniano

Proposición

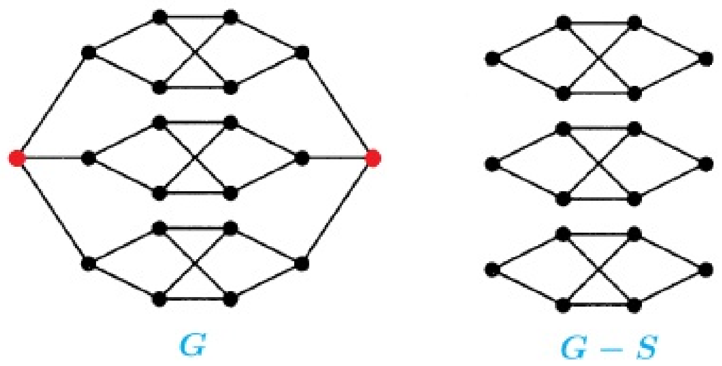
Si G es grafo Hamiltoniano, entonces para cada conjunto no vacío $S \subseteq V(G)$, el grafo $G - S$ tiene a lo sumo $|S|$ componentes, (c(G-S)).

Cuando sale de una componente de $G - S$, un ciclo Hamiltoniano sólo puede ir a S (usando un vértice distinto cada vez). Luego $|S| \geq c(G - S)$.



Nota

Si existe un conjunto no vacío $S \subseteq V(G)$, tal que $|S| < c(G - S)$ entonces G no es Hamiltoniano.



$S = \{a, b\}$ $\quad |S| = 2$

$c(G-S) = 3$

$|S| < c(G-S) \rightarrow$ G no es Hamiltoniano.

Condiciones suficientes

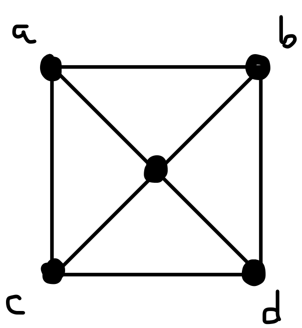
Teorema (Ore)

Sea G un grafo simple con $|V(G)| = n$, $n \geq 3$. Si $d(u) + d(v) \geq n$, para todo par de vértices no adyacentes $u, v \in V(G)$, entonces G es Hamiltoniano.

Ejemplo

W_4 y W_5 son Hamiltonianos.

$d(u) + d(v) = 6 \geq 5$, $\forall u \nsim v \in V(W_4)$,
$d(u) + d(v) = 6 \geq 6$, $\forall u \nsim v \in V(W_5)$.

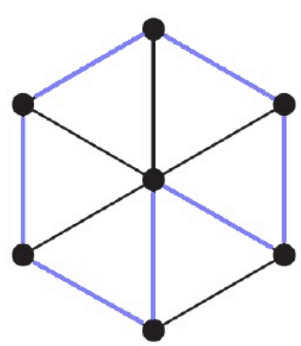


$d(a) + d(b) = 6 > 5 = n$
$d(b) + d(c) = 6 > 5 = n$

cumple la condición de Ore $\longrightarrow$ W_4 es Hamiltoniano.

Nota

W_6 es Hamiltoniano, sin embargo existen vértices no adyacentes $u, v \in V(W_6)$, tales que $d(u) + d(v) < n$.



W_6

NO cumple la condición de Ore:

$d(v) + d(u) = 6 \not> 7$

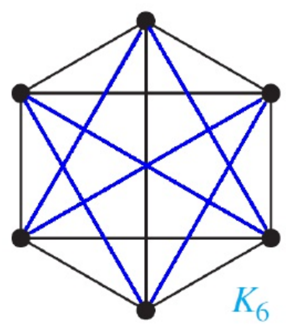
Teorema (Dirac)

Sea G un grafo simple con $|V(G)| = n$, $n \geq 3$. Si $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, entonces G es Hamiltoniano.

Ejemplo

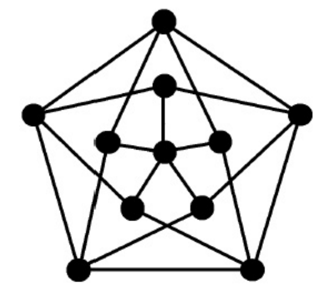
K_n, $n \geq 3$ es Hamiltoniano.

$\delta(K_n) = n - 1 \geq \frac{n}{2}$, $n \geq 3$.

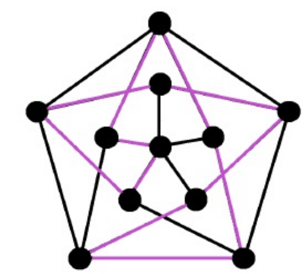


Nota

El grafo de Grötzsch es Hamiltoniano, sin embargo, $3 = \delta(G) < \frac{n}{2} = \frac{11}{2}$,

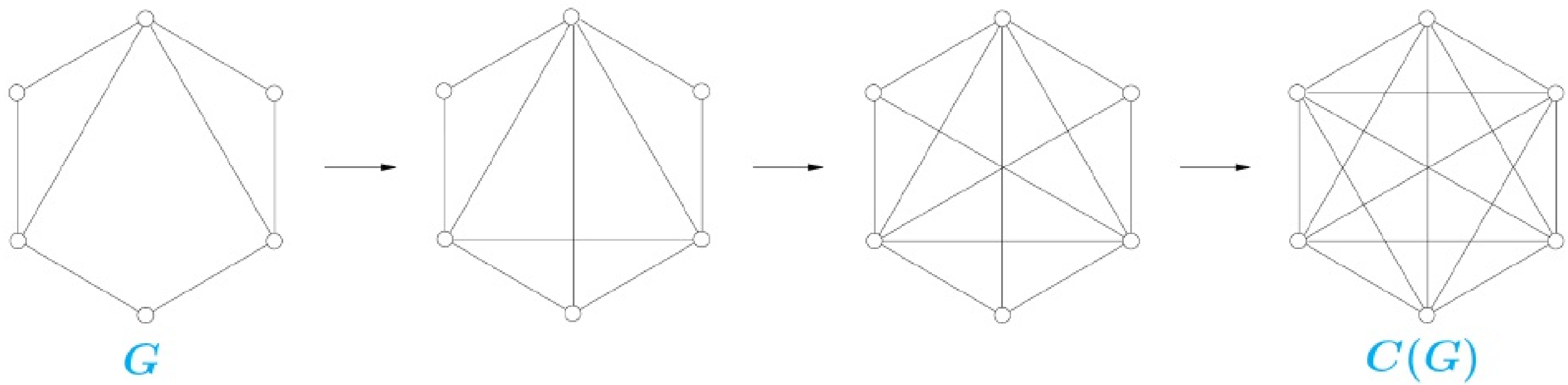


No cumple la condición de Dirac, pero es Hamiltoniano



Clausura (Hamiltoniana)

La **clausura** de un grafo G es el grafo obtenido a partir de G al unir recursivamente pares de vértices no adyacentes u, v tales que $d(u) + d(v) \geq n(G)$, hasta que no quede ningún par. Se nota $C(G)$.



Lema (Ore)

Sea G un grafo simple y sean u, v vértices no adyacentes tales que $d(u) + d(v) \geq n(G)$. Entonces G es Hamiltoniano sii $G + uv$ es Hamiltoniano.

Teorema (Bondy - Chvátal)

Un grafo simple G es Hamiltoniano sii su clausura es Hamiltoniana.

Caminos Hamiltonianos

Teorema

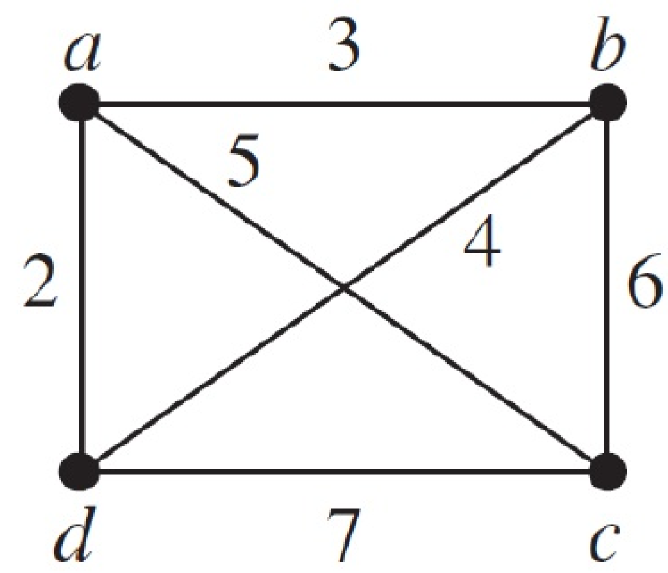
Sea G un grafo simple con $|V(G)| = n$, $n \geq 2$. Si $d(u) + d(v) \geq n - 1$, para todo par de vértices $u \neq v \in V(G)$, entonces G tiene un camino Hamiltoniano.

Teorema

Sea G un grafo simple con $|V(G)| = n$, $n \geq 3$. Si $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$, entonces G tiene un camino Hamiltoniano.

Condiciones suficientes

Problema del agente viajero



Ciclo Hamiltoniano

+

Menor peso posible

$$\left.\begin{array}{l} a - d - b - c - a \\ 2 + 4 + 6 + 5 \end{array}\right\} 17$$

¿Es el menor peso?