

Red de flujo

- Grafo dirigido : N
- $s, t \in V(N)$
 s : fuente
 t : sumidero
- $\forall e \in E(N)$,
 $c(e) \geq 0 \rightarrow$ capacidad de flujo

Flujo factible

Un flujo f es **factible** si satisface las siguientes restricciones:

- Restricciones de capacidad:

$$0 \leq f(e) \leq c(e), \forall e \in E(N)$$

- Restricciones de conservación:

$$f^-(v) = f^+(v), \forall v \in V(N) - \{s, t\}$$

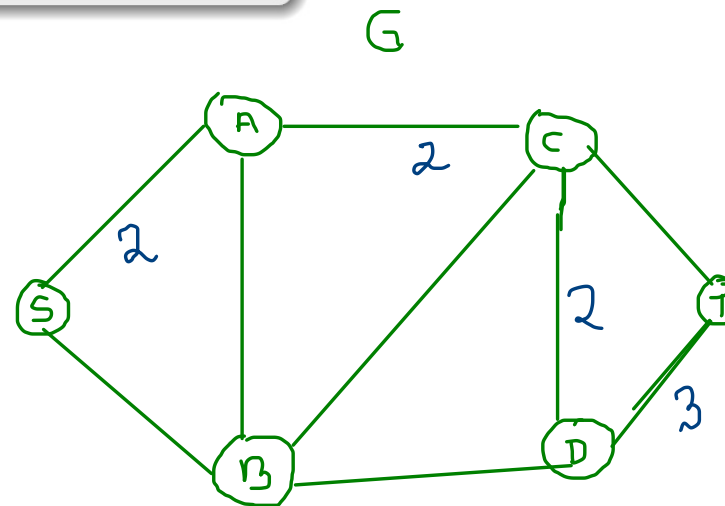
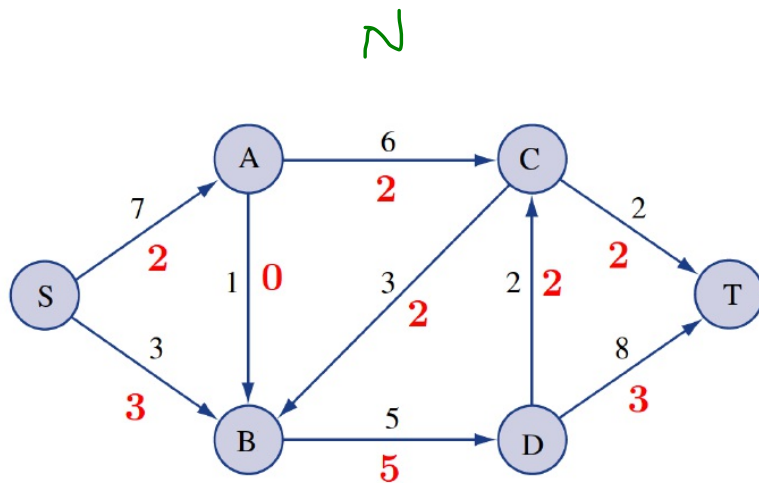
Valor de un flujo

El **valor de un flujo**, $val(f)$, es el flujo neto $f^-(t) - f^+(t)$ en el sumidero.

f -Camino de aumento

Sea f un flujo factible en una red N , un f -camino de aumento es un s, t -camino P en el grafo subyacente G tal que para cada arista $e = (u, v) \in E(P)$,

- a) $f(e) < c(e)$ si $(u, v) \in E(N)$.
- b) $f(e) > 0$ si $(v, u) \in E(N)$.



$S \ A \ C \ D \ T$

$$SA \in E(N) \quad f(SA) < c(SA)$$

$$AC \in E(N) \quad f(AC) < c(AC)$$

$$CD \notin E(N) \quad f(CD) > 0 \quad * \ DC \in E(N)$$

$$DT \in E(N) \quad f(DT) < c(DT)$$

Capacidad residual - Tolerancia

Sea f un flujo factible en una red N y P un f -camino de aumento.

- Si $e = (u, v) \in E(P)$, la **capacidad residual** de e es

$$\epsilon(e) := \begin{cases} c(e) - f(e) & \text{si } (u, v) \in E(N). \\ f(e) & \text{si } (v, u) \in E(N). \end{cases}$$

- La **tolerancia** de P es $\min_{e \in E(P)} \epsilon(e)$.

$$\epsilon(SA) = 7 - 2 = 5$$

$$\epsilon(AC) = 6 - 2 = 4$$

$$\epsilon(CD) = 2$$

$$\epsilon(DT) = 8 - 3 = 5$$

Tolerancia: 2

Lema

Si P es un f -camino de aumento con tolerancia z y $e = (u, v)$, entonces

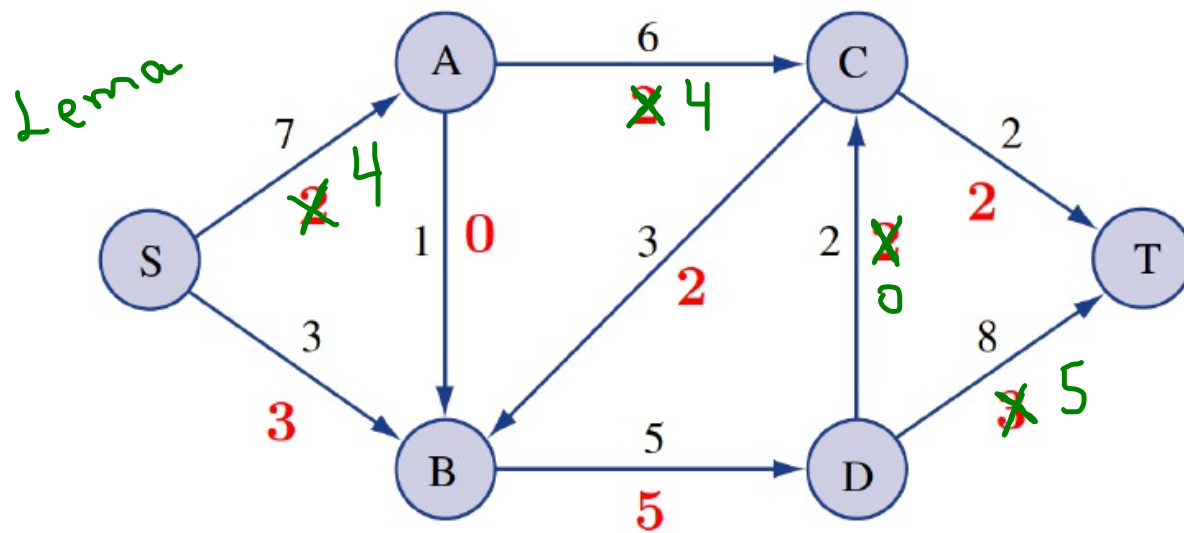
$$f'(e) := \begin{cases} f(e) + z & \text{si } e \in E(P) \cap E(N). \\ f(e) - z & \text{si } e \in E(P) \text{ y } (v, u) \in E(N) \\ f(e) & \text{si } e \in E(N) - E(P) \end{cases}$$

es un flujo factible con valor $val(f') = val(f) + z$.

→ la arista del camino coincide en la red

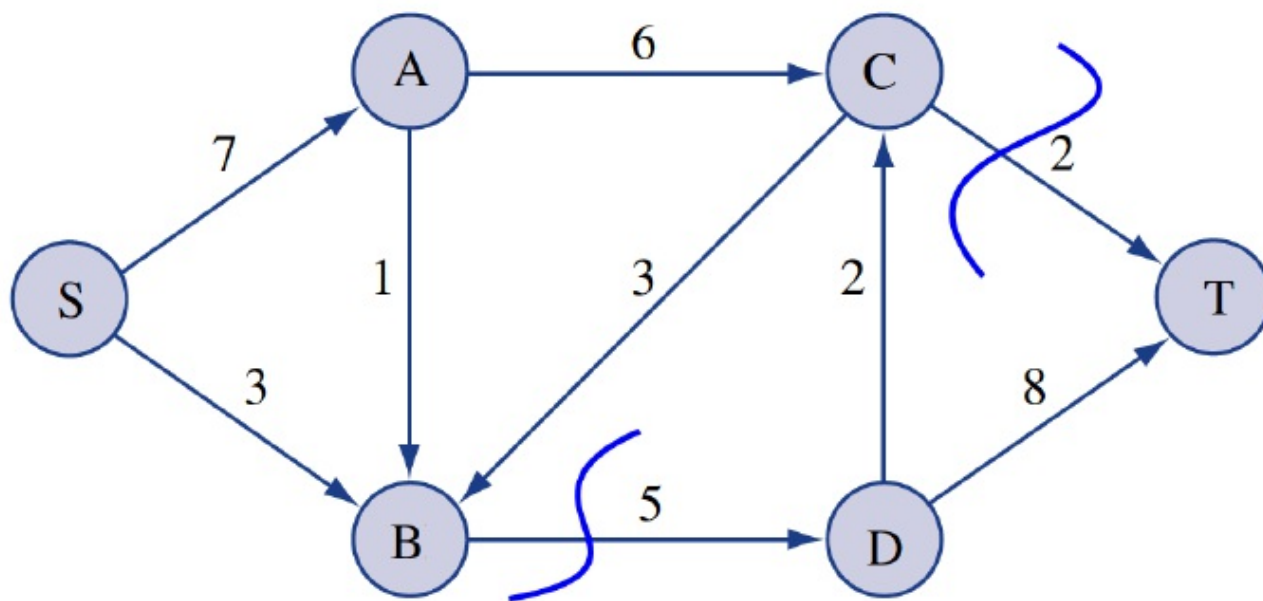
→ la arista del camino va en dirección opuesta

→ No se modifican las aristas que no pertenecen al camino



- $P = S - A - C - D - T$ es un f -camino de aumento.
- $\epsilon(SA) = 5$, $\epsilon(AC) = 4$, $\epsilon(CD) = 2$ y $\epsilon(DT) = 5$.
- La tolerancia de P es 2.





- $\mathbf{S} = \{S, A, B, C\}, \mathbf{T} = \{D, T\}.$

S

S
A
B
C

S

S
B
C

T

T
D

T

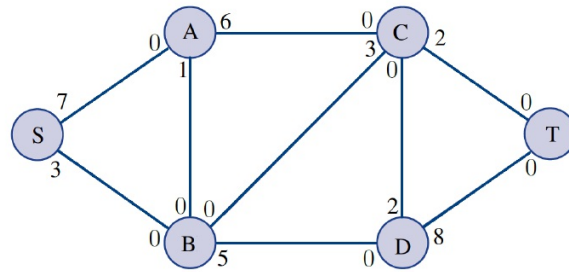
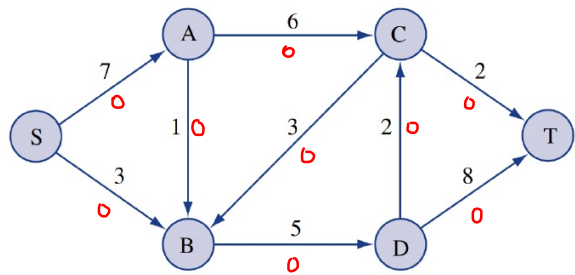
T
A
D

$$[S, T] = \{BD, CT\}$$

$$cap[S, T] = 5 + 2 = 7$$

$$[S, T] = \{SA, BD, CT\}$$

$$cap[S, T] = 7 + 5 + 2 = 14$$



Camino de aumento

S B D C T
 S A C B D T
 S A C D T

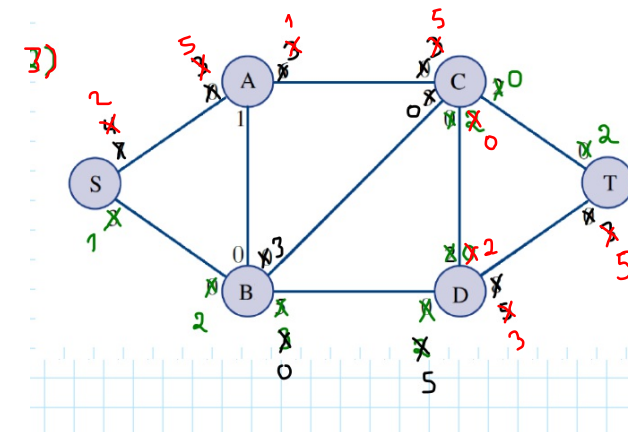
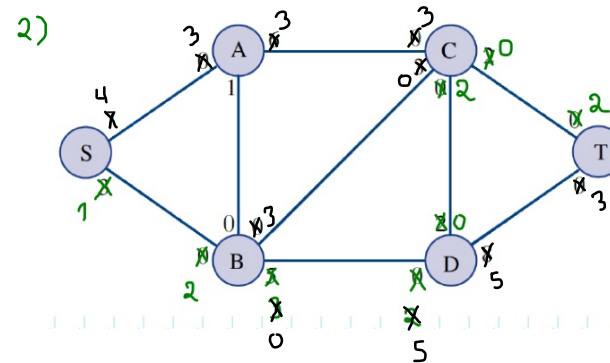
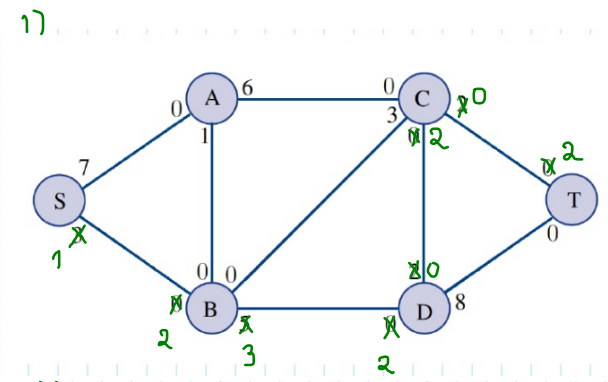
Tolerancia

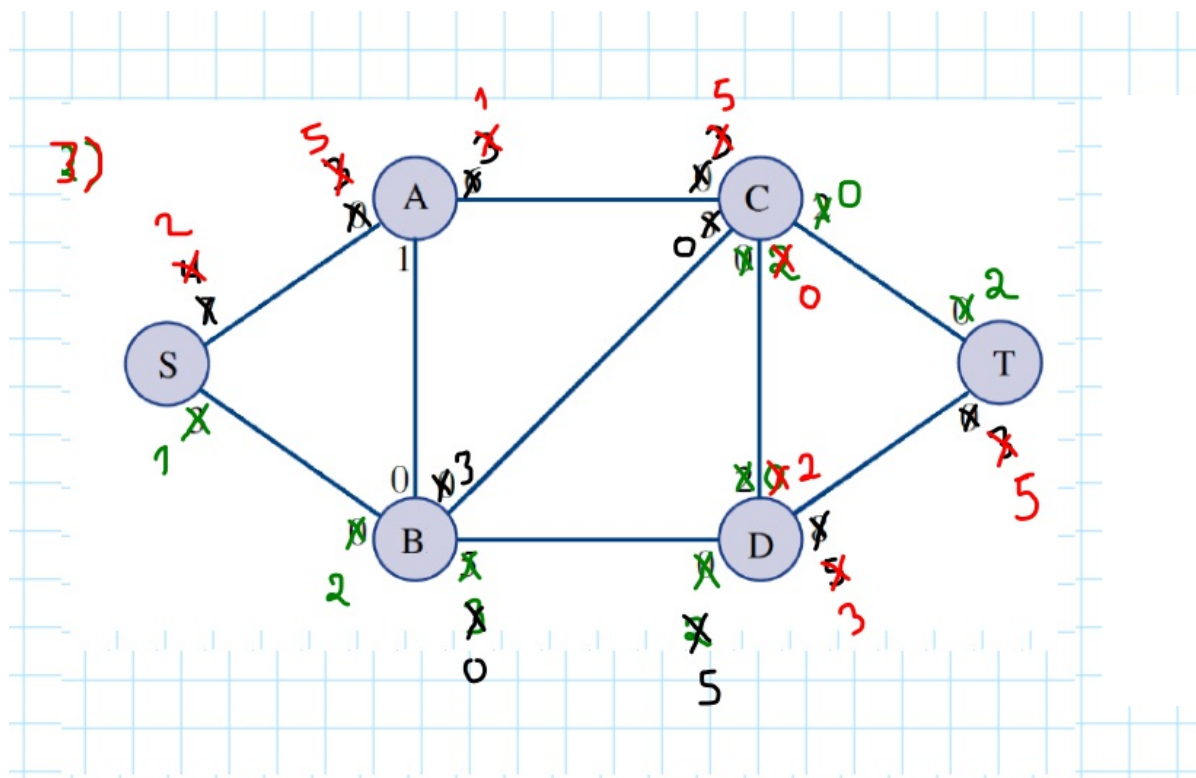
2

3

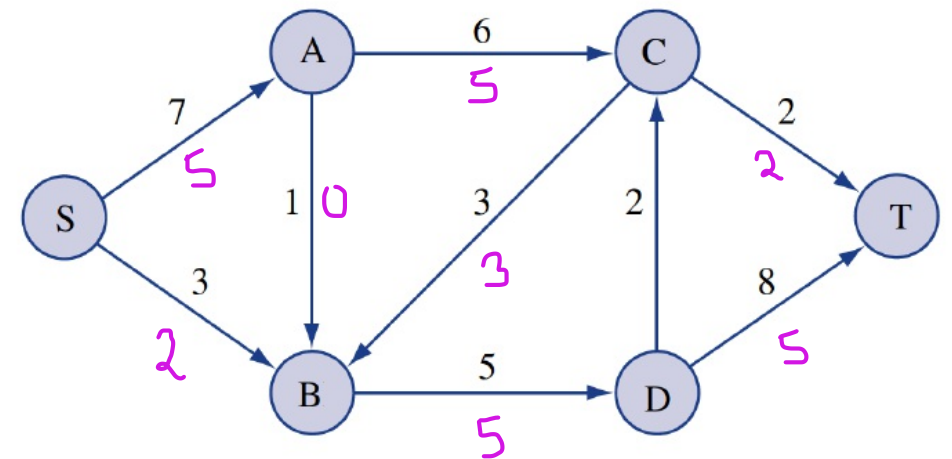
2

7 = val(f)





$$[ST] = \{BD, CT\} \quad \text{cap}(ST) = 0$$



$$\text{val}(f) = 7$$

NO CERO

S

T

SA CA

S

T

SB BS

A

D

AB DB

B

AC DC

C

BC DT
TD

$$[ST] = \{ \overset{\checkmark}{BD}, \overset{\checkmark}{CT}, CD \}$$

$$\text{cap}(S, T) = 0$$

\Rightarrow (3) no tiene trayectorias de aumento.

