UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
DCC511 – Lógica de Predicados (2022.2)
Prof. Msc. Thais Oliveira Almeida

AULA 14:
CONSEQUÊNCIA LÓGICA

Consequência Lógica

- Teorema da correção: Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados. Se existe uma prova de H utilizando tableaux semânticos, então H é uma tautologia.
- Teorema da completude: Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados. Se H é uma tautologia então existe uma prova de H no sistema de tableaux semânticos.
- Dada uma fórmula H e um conjunto de hipóteses β = {H1,H2,...Hn}. Então H é conseqüência lógica em tableaux semânticos de β se existe uma prova, usando tableaux semânticos de:
  - (H1^H2^...^Hn) $\rightarrow$ H
  - Porém em Lógica de 1ª Ordem, isto é raro.

Notação

- Dada uma fórmula H, se H é consequência lógica de um conjunto de hipóteses $\beta = \{H1,H2,...Hn\}$ em tableaux semânticos, diz-se que:
  - $\beta \vdash H$ ou
  - $\{H1,H2,...Hn\} \vdash H$
  - $\vdash \{H1,H2,...Hn,\neg H\}$
- Queremos provar, por negação ao absurdo, que β U H é insatisfatível;
  - β U H $\vdash$ Falso .

Exemplo

- Se E1 = $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$ e E2 = $(\exists x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x)$, mostre que E2 implica E1 mas E1 não implica E2.
- E2 implica E1 se e somente se E2 $\rightarrow$ E1 for uma tautologia.
- (E2 $\rightarrow$ E1) é uma tautologia, se e somente se:
- $\vdash$ (E2 $\rightarrow$ E1).

- E1=$(\forall x)(p(x)\rightarrow q(x))$ e E2=$(\exists x)p(x)\rightarrow(\forall x)q(x)$
- $\neg$(E2 $\rightarrow$ E1)
- 1. $\neg(((\exists x)p(x)\rightarrow(\forall x)q(x)) \rightarrow((\forall x)(p(x)\rightarrow q(x)))$

Exemplo

1.	$\neg(((\exists x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x)) \rightarrow ((\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)))$			$\neg(E2 \rightarrow E1)$
2.	$(\exists x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x)$			R8, .1
3.	$\neg(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$			R8, .1
4.	$(\exists x)\neg(p(x) \rightarrow q(x))$			R10, .3
5.	$\neg(p(a) \rightarrow q(a))$			R12, .4
6.	$p(a)$			R8, .5
7.	$\neg q(a)$			R8, .5
8.	$\neg(\exists x)p(x)$		$(\forall x)q(x)$	R3, .2
9.	$(\forall x)\neg p(x)$	R11, .8	$q(a)$	R13, .8
10.	$\neg p(a)$	R13, .9	*Fechada*	
	Fechada			

Exemplo

1.	$\neg(((\exists x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x)) \rightarrow ((\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)))$			$\neg(E2 \rightarrow E1)$
2.	$(\exists x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x)$			R8, .1
3.	$\neg(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$			R8, .1
4.	$(\exists x)\neg(p(x) \rightarrow q(x))$			R10, .3
5.	$\neg(p(a) \rightarrow q(a))$			R12, .4
6.	**p(a)**			R8, .5
7.	**¬q(a)**			R8, .5
8.	$\neg(\exists x)p(x)$		$(\forall x)q(x)$	R3, .2
9.	$(\forall x)\neg p(x)$	R11, .8	**q(a)**	R13, .8
10.	**¬p(a)**	R13, .9	*Fechada*	
	Fechada			

Regras de Inferência

- Sejam A e B duas fórmulas da Lógica de Predicados. As regras de inferência do tableau semântico na Lógica de Predicados são R1, ..., R13. As regras R1, ..., R9 são as mesmas do tableau semântico da Lógica Proposicional.

$R_1 = A \wedge B$

A

B

$R_2 = A \vee B$

$A \quad B$

$R_3 = A \rightarrow B$

$\neg A \quad B$

$R_4 = A \leftrightarrow B$

$A \wedge B \quad \neg A \wedge \neg B$

$R_5 = \neg\neg A$

A

$R_6 = \neg(A \wedge B)$

$\neg A \quad \neg B$

$R_7 = \neg(A \vee B)$

$\neg A$

$\neg B$

$R_8 = \neg(A \rightarrow B)$

A

$\neg B$

$R_9 = \neg(A \leftrightarrow B)$

$\neg A \wedge B \quad A \wedge \neg B$

Regras Novas para Quantificadores

$$R10 = \frac{\neg(\forall x)H}{(\exists x)\neg H}$$

$$R11 = \frac{\neg(\exists x)H}{(\forall x)\neg H}$$

$$R12 = \frac{(\exists x)H}{A(t)}$$

Onde t é novo.

$$R13 = \frac{(\forall x)H}{A(t)}$$

Onde t é qualquer.

R12 e R13 devem ter preferência. Por que?

Conclusões

- Dada uma fórmula da lógica de predicados H:
  - H é tautologia $\leftrightarrows$ EXISTE um Tableau associado a $\neg$H que é fechado;
  - H é contraditória (insatisfatível) $\leftrightarrows$ $\neg$H é tautologia $\leftrightarrows$ EXISTE um Tableau associado a H que é fechado;
  - H é refutável $\leftrightarrows$ TODO Tableau associado a $\neg$H é aberto (não necessariamente aberto completamente).