Álgebra Linear I

Aula 21

Professora Kelly Karina

Operadores Auto-adjuntos

Dizemos que um operador $T : V \to V$ é auto-adjunto (ou simétrico) se a matriz que o representa numa base ortonormal A é uma matriz simétrica, ou seja:

$$[T]_A^t = [T]_A$$

Note que em particular temos:

$$[T]^t = [T]$$

Exemplo:

1) O operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (2x + 4y, 4x - y)$ é auto-adjunto, pois a matriz canônica de T

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

é simétrica, ou seja, $[T]^t = [T]$

2) O operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (x - y, -x + 3y - 2z, -2y)$ é auto-adjunto, pois a matriz canônica de T

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

é simétrica, ou seja, $[T]^t = [T]$

Propriedade:

Seja V um espaço vetorial euclidiano. Se $T : V \to V$ é um operador simétrico, então para quaisquer $u, v \in V$ temos

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle.$$

Exemplo:

Seja o operador simétrico, no $\mathbb{R}^2$, definido por $T(x, y) = (x + 3y, 3x - 4y)$. Consideremos os vetores $u = (2, 3)$ e $v = (4, 2)$ e calculemos $T(u)$ e $T(v)$:

$T(u) = T(2, 3) = (11, -6)$

$T(v) = T(4, 2) = (10, 4)$

Assim temos:

$\langle T(u), v\rangle = \langle(11, -6), (4, 2)\rangle = 44 - 12 = 32$

$\langle u, T(v)\rangle = \langle(2, 3), (10, 4)\rangle = 20 + 12 = 32$

Subespaços Invariantes

Definição:

Se V é um espaço vetorial e W um subespaço vetorial de V, dizemos que W é invariante pelo operador linear $T : V \to V$ quando $T(W) \subset W$, isto é, quando a imag em $T(v)$ de qualquer vetor $v \in W$ é ainda um vetor em W

Exemplo:

- Os subespaços $\{0\}$ e V são invariantes por qualquer operador $T : V \to V$;
- O núcleo $N(T)$ e $Im(T)$ são também exemplos de subespaço invariante;
- Um subespaço W de dimensão 1 é invariante por A se e somente se existe um número λ tal que $T(v) = \lambda v$ para todo $v \in W$.

Observação:

Um vetor $w \neq 0$ em V chama-se autovetor do operador T quando existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(v) = \lambda v$.

Autovalores e Autovetores

Seja $T : V \to V$ um operador linear. Um vetor $v \in V$, $v \neq 0$ é um autovetor do operador T se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(v) = \lambda v$. O número λ tal que $T(v) = \lambda v$ é denominado autovalor de T associado ao autovetor v.

Observação:

- Os autovetores também podem ser denominados vetores próprios ou vetores característicos.
- Os autovalores também podem ser denominados valores próprios ou valores característicos.

Exemplo:

1) O vetor $v = (5, 2)$ é autovetor do operador linear

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y)$$

associado ao autovalor $\lambda = 6$ pois

$$T(v) = T(5, 2) = (30, 12) = 6(5, 2)$$

O vetor $v = (2, 1)$ não é autovetor deste operador T pois

$$T(2, 1) = (13, 5) \neq \lambda(2, 1) \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

2) Na simetria no $\mathbb{R}^3$ definida por $T(v) = -v$, qualquer vetor $v \neq 0$ é autovetor associado ao autovalor $\lambda = -1$.