Nome: Eduardo Henrique de Almeida Izidorio
Matrícula: 2020000315
Disciplina: Matemática Discreta
Professor: Elzimar de Oliveira Rufino

/ /

Atividade 3

1) De quantos modos podemos formar uma mesa de buraco com 4 jogadores? Pelo P.F.C existe

$$PC_n = PC_4 = (n-1)! = (4-1)! = 3! = 6 \text{ modos}$$

2) De quantos modos podemos formar uma mesa de ciranda com 5 meninos e 5 meninas de modo que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?

Meninas: $PC_5 = (n-1)! = (5-1)! = 4! = 24$ modos.

Meninos: $C_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$ modos.

logo, pelo P.F.C existem $4!.5! = 24.120 = 2880$ modos.

3) De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 6 crianças, de modo que duas delas Vera e Isadora não fiquem juntas?

$PC_6 = (n-1)! = (6-1)! = 5! = 120$ modos de formar uma roda.

$PC_5 = 2.(n-1) = 2.(5-1)! = 2.4! = 2.24 = 48$ modos de Vera e Isadora fiquem juntas, assim, pelo P.F.C temos que

$5! - 4!.2 = 120 - 48 = 72$ modos de formar uma roda que Vera e Isadora não fiquem juntas.

4) Quantas são as soluções inteiras e positivas de $x+y+z=7$?

Resposta: $x+1+y+1+z+1 = 7 \Rightarrow x+y+z = 4$, assim

$$CR_3^4 = C_{4+3-1}^4 = C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6.5.4!}{4!\,2!} = \frac{30}{2} = 15$$ soluções.

/ /

5) Quantas são as soluções inteiras positivas de $x+y+z \leq 6$?

Resposta: Pensamos em uma variável de folga w, tal que $x+y+z+w=6$. Quando w for zero, as soluções serão para $x+y+z=6$, quando w for maior que zero, o valor da expressão $x+y+z$ será menor do que 6 assim como queremos calcular.

Assim $C_9^6 = \frac{9!}{6!(9-6)!} = \frac{9.8.7.\cancel{6!}}{\cancel{6!}\,3!} = \frac{504}{6} = 84$ soluções.

6) Uma indústria fabrica 5 tipos de balas que são vendidas em caixas de 20 balas, de um só tipo ou sortidas. Quantos tipos de caixas podem ser montados?

Resposta: Podemos representar por X1 a quantidade de vezes que escolhemos as balas do tipo 1, X2 a quantidade de vezes que escolhemos as balas do tipo 2, etc.

Assim, temos como expressão $X1+X2+X3+X4+X5=20$.

Logo, encontraremos soluções inteiras não negativas desta equação.

Portanto, $CR_n^p = C_{n+p-1}^p = C_{5+20-1}^{20} = C_{24}^{20} = \frac{24!}{20!(24-20)!} = \frac{24.23.22.21.\cancel{20!}}{\cancel{20!}\,4!}$

$= \frac{255.024}{24} = 10.626$ caixas que podem ser montadas.

7) Usando que $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ mostre (faça as contas) a Relação de Stifel:

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}.$$

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1} \Rightarrow C_{n+1}^{p+1} = \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-(p+1))!} \Rightarrow$$

$$= C_{n+1}^{p+1} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n+1-(p+1))!}$$

8) Usando que $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ mostre (faça as contas) que

$C_n^p = C_n^{n-p}$

Resposta: $C_n^p = C_n^{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} \Rightarrow$

$\Rightarrow C_n^p = C_n^p$ //

9) Determine o termo independente de x (que não figura o x) no desenvolvimento de $\left(x^3 - \dfrac{1}{x^2}\right)^{10}$.

Termo independente de x

$\left(x^3 - \dfrac{1}{x^2}\right)^{10} = \square + \dots + n^o\, x^0$

$(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n} \boxed{C_n^p a^p . x^{n-p}}$

$\left(x^3 - \dfrac{1}{x^2}\right)^{10} = C_{10}^0 \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)^0 . (x^3)^{10} + C_{10}^1 \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)^1 . (x^3)^9 + C_{10}^2 \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)^2 . (x^3)^8 + \dots$

O termo geral é: $\boxed{C_{10}^p \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)^p . (x^3)^{10-p}} =$

$= C_{10}^p . (-1)^p . x^{-2p} . x^{10-3p}$

$= \boxed{C_{10}^p (-1)^p} . x^{10-5p}$ → Deve ter $30-5p=0$

ou seja, $\boxed{p=6}$ //

Resposta: $C_{10}^6 . (-1)^6 =$

$= C_{10}^6 = \dfrac{10!}{6!(10-6)!}$

$= \dfrac{10.9.8.7.\cancel{6!}}{\cancel{6!}\ 4!} = \dfrac{5040}{24} = \boxed{210}$ //

10) (UNIFOR-CE) No desenvolvimento do binômio $\left(2x + \dfrac{1}{x}\right)^4$, o termo independente de x é:

$\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^4 = C_4^0 . \left(\dfrac{1}{x}\right)^0 . (2x)^4 + C_4^1 . \left(\dfrac{1}{x}\right)^1 . (2x)^3 + C_4^2 . \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 . (2x)^2 + C_4^3 . \left(\dfrac{1}{x}\right)^3 . (2x)^1 +$
$+ C_4^4 . \left(\dfrac{1}{x}\right)^4 . (2x)^0$

O termo geral é: $\boxed{C_4^p . \left(\dfrac{1}{x}\right)^p . (2x)^{4-p}}$ $\Rightarrow C_4^p . x^{-p} . 2x^{4-p} =$

logo, $2x^{4-p-p}$ $= 4-p-p=0$

$-p-p=-4 \Rightarrow p = \dfrac{-4}{-2} =$

$\Rightarrow p = 2$ //

logo, a resposta é: $C_4^2 . (1)^2 = C_4^2 = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{4.3.\cancel{2!}}{\cancel{2!}\ 2!} = \dfrac{12}{2} = \boxed{6}$ //

11) (Mack - SP) O coeficiente do termo em x^3 no desenvolvimento de $(\sqrt{x} + 1/x)^6$ é: Termo geral é: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^6 = \sum_{p=0}^{6} \boxed{C_6^p \left(\frac{1}{x}\right)^p \cdot \left(\sqrt{x}\right)^{6-p}} \Rightarrow C_6^p \cdot x^{-p} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{6-p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_6^p \cdot x^{-p} \cdot x^{\frac{6-p}{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{-p \cdot 2}{2} + \frac{6-p}{2} = \frac{-2p+6-p}{2} = \frac{-3p+6}{2}$$

$$\Rightarrow C_6^p \cdot x^{-p+\frac{6-p}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_6^p \cdot \boxed{x^{\frac{-3p+6}{2}}}$$

$$\frac{-3p+6}{2} = 3 \Rightarrow -3p+6 = 3 \cdot 2$$

$$= -3p = 6-6 \Rightarrow p = \frac{0}{-3}$$

$$\Rightarrow \boxed{p = 0}$$

Resposta é: $C_6^0 = \frac{6!}{0!(6-0)!} \Rightarrow \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1!}{1 \cdot 6!}$

$$= \frac{720}{720} = \boxed{1}$$