CAPÍTULO 7

A SEMÂNTICA DA LÓGICA DE PREDICADOS

7.1 Introdução

Após a definição da linguagem da Lógica de Predicados, ou seja, de sua sintaxe, o próximo passo é a análise da semântica. De forma análoga àquela considerada na Lógica Proposicional, é definida, a seguir, a semântica das fórmulas e sua relação com a sintaxe, associando significados aos símbolos sintáticos. Mas, como a Lógica de Predicados contém quantificadores, variáveis, funções e predicados, as definições das estruturas de interpretação são mais elaboradas. Por isso, representar e interpretar fórmulas da Lógica de Predicados requer atenção a detalhes que não estão presentes nas fórmulas da Lógica Proposicional. Além disso, devemos notar que não existe uma padronização da definição da semântica na Lógica de Predicados. Frequentemente, é definida uma estrutura na qual as variáveis são interpretadas separadamente dos outros objetos que compõem as fórmulas, como pode ser visto em [Enderton, 1972] e [Shoenfield, 1967]. Esse enfoque é diferente do que estamos considerando neste livro, em que os objetos que compõem as fórmulas são interpretados pela mesma estrutura, denominada interpretação. O enfoque que estamos considerando pode ser encontrado, por exemplo, em [Manna] e [Mendelson] Entretanto, mesmo não havendo padronização das definições, todas são equivalentes e têm como fundamento as formalizações de Tarski, que tratam de satisfatibilidade e verdade. A seguir, analisamos por partes a interpretação das fórmulas da Lógica de Predicados. Inicialmente, consideramos uma abordagem informal e em seguida as definições formais. Além disso, começamos pelas estruturas mais simples, que são os termos e átomos. Depois, são analisadas as fórmulas que contêm quantificadores universais e existenciais. Nesse contexto, a visão inicial informal é importante, pois é a partir dela que introduzimos as definições formais.

7.2 Interpretações informais

Considere inicialmente a proposição "Zé é inteligente". Essa proposição pode ser representada na Lógica de Predicados por um símbolo proposicional P. Lembre-se de que os símbolos proposicionais estão presentes no alfabeto da Lógica de Predicados. Eles são os símbolos de predicado que não possuem argumento. Portanto, podemos definir, na Lógica de Predicados, a representação: $P =$ "Zé é inteligente". Nesse caso, a proposição diz algo somente a respeito de Zé e a ninguém mais. Isso simplifica a representação, pois o universo do discurso é constituído apenas de um objeto, o Zé. Por outro lado, na Lógica de Predicados há também os predicados com um ou mais argumentos. E nesse caso, as representações que utilizam tais predicados são obtidas utilizando uma análise com mais detalhes. Isso, porque, em geral, o universo do discurso a que referimos, nesses casos, pode ter infinitos componentes.

Exemplo 7.1 (interpretação informal de um predicado) Considere, de maneira informal, o predicado q e uma interpretação I tal que:

$q(x)$ é interpretado como verdadeiro se, e somente se, x é interpretada como um número par.

Escrito de outra forma:

$I[q(x)] = T$, se, e somente se, $I[x]$ é número par.

Nesse caso, $q(x)$ é um átomo dado por um predicado que identifica a categoria dos números pares. Mas, para que $q(x)$ possa ser interpretado, é necessário estabelecer o domínio do discurso da interpretação I. Ou seja, suponha que I é uma interpretação cujo domínio é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Observe que a interpretação deve falar sobre números, pois não haveria sentido falar, por exemplo, em pessoas pares. Considere, agora, as constantes a e b com as respectivas interpretações, $I[a] = 4$ e $I[b] = 5$. Nesse caso, as constantes são interpretadas como números do domínio da interpretação I, que é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Logo, temos que $I[q(a)] = T$, pois $I[a] = 4$. Também, temos $I[q(b)] = F$, pois $I[b] = 5$. Outro fato a ser observado é o seguinte: podemos combinar átomos com conetivos. E nesse caso, interpretar os resultados. Por exemplo, temos as interpretações das fórmulas: $I[q(a) \lor q(b)] = T$, $I[q(a) \land q(b)] = F$, e $I[q(a) \rightarrow q(b)] = F$. ■

Exemplo 7.2 (interpretação informal de um predicado) Considere I uma interpretação sobre o conjunto dos alunos de Computação. Isto é, o domínio ou universo de I é o conjunto dos alunos de Computação. Isso significa que I interpreta fatos sobre alunos de Computação. Considere, também, que segundo I:

$q(x)$ é interpretado como verdadeiro se, e somente se, x é interpretada como um aluno que é inteligente.

Escrito de outra forma:

$I[q(x)] = T$, se, e somente se, $I[x]$ é aluno que é inteligente.

Neste exemplo, o domínio de I é diferente daquele considerado no Exemplo 7.1. Dada mudança no domínio de I, não haveria sentido interpretar o predicado q como anteriormente. Pois como o novo domínio é um conjunto de pessoas, não haveria sentido interpretar q como um predicado que define a categoria dos números pares. Então, da mesma forma, as constantes a e b não podem mais ser interpretadas como números, mas, sim, como alunos de Computação. Suponha, então, que: $I[a] =$ Zé e $I[b] =$ Dinalva. Nesse caso, se Zé é um aluno que foi aprovado em Lógica com nota 95 e Dinalva foi reprovada com nota 15, então $I[q(a)] = T$, pois Zé é inteligente, e $I[q(b)] = F$, pois Dinalva não é inteligente. Logo, como antes, $I[q(a) \vee q(b)] = T$, $I[q(a) \wedge q(b)] = F$, e $I[q(a) \rightarrow q(b)] = F$. ■

Dessa análise, temos algumas conclusões preliminares:

1. Para interpretar um átomo, como $p(x)$, devemos definir o domínio da interpretação I. Nesse caso, a interpretação não é tão simples como na Lógica Proposicional, caso em que não é necessário definir o domínio da interpretação.
2. O resultado da interpretação de um átomo é T, ou F.
3. O resultado da interpretação de uma constante é um elemento do domínio da interpretação.
4. Os átomos podem ser combinados utilizando conectivos e a interpretação das fórmulas obtidas segue as ideias da Lógica Proposicional.
5. O símbolo p é um objeto sintático que pertence ao alfabeto da Lógica de Predicados. Por outro lado, $I[p(x)]$ é um objeto semântico que pertence ao conjunto $\{T, F\}$.

Se a interpretação dos predicados requer a definição do domínio da interpretação, então como deve ser o caso das funções? De forma análoga, devemos também definir o domínio da interpretação.

Exemplo 7.3 (interpretação informal de uma função) Considere uma interpretação I sobre os números naturais $\mathbb{N}$. Isto é, o universo do discurso de I é o conjunto $\mathbb{N}$. Seja a uma constante tal que, $I[a] = 0$. Isto é, a constante a é interpretada como o número zero. Em seguida, seja f uma função interpretada segundo I, informalmente, como se segue:

$f(x)$ é interpretado como o número sucessor do número x.

Escrito de maneira mais formal:

$I[f(x)]$ é igual ao número sucessor de $I[x]$.

Nesse caso, os termos $f(a), f(f(a)), f(f(f(a)))$ e $f(f(f(f(a))))$ são interpretados como: $I[f(a)] = 1$, $I[f(f(a))] = 2$, $I[f(f(f(a)))] = 3$, $I[f(f(f(f(a))))] = 4$ e assim por diante. Portanto, o resultado da interpretação de um termo, que é o resultado de uma função, é um elemento do domínio da interpretação. Por isso, dado que essa interpretação não é um valor de verdade, não é possível combinar os termos com os conectivos. Isto é, não há sentido escrever, por exemplo, $(f(a) \vee f(f(a)))$, $(f(a) \wedge f(f(a)))$ e muito menos, $(f(a) \rightarrow f(f(a)))$. Isso, porque não há como interpretar tais sequências de símbolos. Por exemplo, o que significa $I[(f(a) \vee f(f(a)))]$, ou seja, o que significa "1 ou 2"? Não há sentido algum. E essa é a razão para não se considerar, como fórmulas, as sequências de símbolos $(f(a) \vee f(f(a)))$, $(f(a) \wedge f(f(a)))$ e $(f(a) \rightarrow f(f(a)))$. Fato que está de acordo com a definição de fórmula, Definição 6.4. ■

Exemplo 7.4 (interpretação informal de uma função) No Exemplo 7.3 o domínio de I é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Mas, pode ser diferente. Considere uma interpretação I sobre o conjunto das pessoas. E seja a uma constante tal que $I[a] =$ Zé. Isto é, a constante a é interpretada como sendo a pessoa Zé. Nesse caso, considere que o símbolo f seja interpretado, segundo I, informalmente, como se segue:

$f(x)$ é interpretado como sendo o pai da pessoa x.

Ou seja,

$I[f(x)]$ é igual ao pai de $I[x]$.

Portanto, $I[f(a)] =$ pai de Zé, $I[f(f(a))] =$ pai do pai de Zé, $I[f(f(f(a)))] =$ pai do pai do pai de Zé, $I[f(f(f(f(a))))] =$ pai do pai do pai do pai de Zé e assim por diante. Analogamente ao Exemplo 7.3, o resultado da interpretação de um termo, que é o resultado de uma função, é um elemento do domínio da interpretação. Por isso, de novo, não há sentido em escrever, por exemplo, $(f(a) \vee f(f(a)))$, $(f(a) \wedge f(f(a)))$ e muito menos, $(f(a) \rightarrow f(f(a)))$. Isso porque não há como atribuir um valor de verdade à sentença: "pai de Zé, ou pai do pai de Zé". ■

Dessa análise, temos mais algumas conclusões preliminares.

1. Para interpretar uma função, como $f(x)$, devemos definir o domínio da interpretação I.
2. O resultado da interpretação de um termo é um elemento do domínio, ou universo da interpretação.
3. Os termos não podem ser combinados utilizando conectivos, como ocorre com os átomos.
4. O símbolo f é um objeto sintático que pertence ao alfabeto da Lógica de Predicados. Por outro lado, $I[f(x)]$ é um objeto semântico que pertence ao domínio da interpretação I.

A interpretação de um símbolo para função f, em geral denotada por $I[f]$, é uma função semântica $I[f]$, cujo domínio e contradomínio é o conjunto que define o universo da interpretação. Isto é:

$$I[f] : \text{domínio de } I \longrightarrow \text{domínio de } I.$$

Isso parece confuso, pois a palavra "domínio" ocorre várias vezes na descrição da função semântica $I[f]$. Analisamos, então, com mais cuidado os diferentes significados dessa palavra. Suponha o caso da função do Exemplo 7.3. Nesse caso, a interpretação tem como domínio o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Por isso, $I[a]$, que é igual a 0, é um elemento do domínio de I, ou seja, $I[a] \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, a função semântica $I[f]$ tem como domínio e contradomínio, enquanto função, o domínio de I. Isto é, $I[f]$ é uma função que tem como domínio e contradomínio o conjunto $\mathbb{N}$. Utilizando a notação matemática de função, temos, $I[f] : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. A interpretação de um símbolo de predicado p segue passos análogos à interpretação de um símbolo para função. Mas, no caso de um predicado, $I[p]$ é uma função semântica que tem como domínio aquele da interpretação I e como contradomínio o conjunto $\{T, F\}$. Suponha o caso do predicado do Exemplo 7.1. Nesse caso, a interpretação tem como domínio o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Logo, nesse caso, a função semântica $I[p]$ tem como domínio o conjunto $\mathbb{N}$ e como contradomínio o conjunto $\{T, F\}$. Assim, no caso da função semântica $I[p]$, temos:

$$I[p]: \text{ domínio de } I \to \{T, F\}.$$

Isto é, $I[p]$ é uma função cujo domínio é o domínio, universo da interpretação I e contradomínio é o conjunto $\{T, F\}$.

$$I[p] : \mathbb{N} \to \{T, F\}.$$

Observe, nesse caso, uma diferença importante entre $I[p]$ e $I[f]$. O contradomínio de $I[p]$ é o conjunto $\{T, F\}$ e o contradomínio de $I[f]$ é o conjunto $\mathbb{N}$. Essa é uma diferença sutil, mas importante, e que faz diferença quando programamos, por exemplo, em Programação em Lógica.

Exemplo 7.5 (interpretação incorreta) Considere uma interpretação I sobre os números naturais $\mathbb{N}$. E seja a uma constante, tal que $I[a] = 25$. Seja, também, f uma função interpretada, informalmente, segundo I, como se segue. $I[f]$ é igual à função "raiz quadrada". Nesse caso, temos $I[f(a)] = 5$, pois a função semântica $I[f]$ calcula a raiz quadrada da interpretação de a. Entretanto, temos um problema aqui. Suponha que a constante b seja interpretada como o número 20. Isto é, $I[b] = 20$. Daí concluímos que $I[f(a)] = \sqrt{20}$. Mas isso está incorreto, pois, necessariamente, devemos ter $I[f] : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. E, como sabemos, desde o ensino fundamental, $\sqrt{20}$ não é um número natural, isto é, $\sqrt{20} \notin \mathbb{N}$. Ou seja, nesse caso, $I[f(a)]$ está fora do contradomínio de $I[f]$, o que é incorreto. ■

Exemplo 7.6 (interpretação incorreta) Como no Exemplo 7.5, constantes e predicados também podem ser interpretados de forma incorreta, dependendo do domínio da interpretação. Considere uma interpretação I sobre os números naturais $\mathbb{N}$. E seja a uma constante, tal que $I[a] =$ Zé. Essa interpretação da constante a está incorreta, pois I fala de números, seu domínio é igual a $\mathbb{N}$. Logo, não faz sentido interpretar a constante a como sendo a pessoa Zé. Considere, agora, o predicado p interpretado, informalmente, segundo I, como se segue.

$I[p(x)] = T$, se, e somente se, $I[x]$ é um número negativo.

O predicado p não pode ser interpretado, segundo I, dessa forma. Isso, porque o domínio de I é o conjunto $\mathbb{N}$. E se p é interpretado da forma acima, tal predicado identifica números negativos, ou não. Mas, como já sabemos, desde a escola fundamental, há números negativos que não são números naturais. ■

Portanto, na definição de uma interpretação, na Lógica de Predicados, é necessário observar a coerência entre o domínio e a interpretação dos objetos sintáticos.

7.3 Interpretação de átomos e termos

As fórmulas da Lógica de Predicados contêm símbolos que não ocorrem nas fórmulas da Lógica Proposicional. Assim, as interpretações dessas fórmulas são obtidas de uma forma diferente daquela considerada na Lógica Proposicional. Inicialmente, são consideradas as definições de interpretação de termos e átomos. Depois, é considerada a interpretação das fórmulas da Lógica de Predicados. É importante observar que não há uma forma única de apresentar a semântica da Lógica de Predicados [Andrews], [Barwise], [Costa], [Enderton], [Mendelson], [Mortari], [Dalen], [Manna], [Manna] e [Shoenfield].

Notação. No que se segue, para simplificar a notação, consideramos as seguintes denotações: $\breve{x}_I$ denota $I[x]$, $\breve{f}_I$ denota $I[\breve{f}]$, $\breve{p}_I$ denota $I[\breve{p}]$ etc. Portanto, $\breve{x}_I$ denota o resultado da interpretação de $\breve{x}$ segundo a interpretação I. Da mesma forma, $\breve{f}_I$ denota uma função semântica que é o resultado da interpretação de $\breve{f}$ segundo a interpretação I. E $\breve{p}_I$ denota o resultado da interpretação de $\breve{p}$ segundo a interpretação I. Observe que $\breve{x}_I, \breve{f}_I$ e $\breve{p}_I$ são os objetos semânticos que correspondem aos símbolos sintáticos $\breve{x}, \breve{f}$ e $\breve{p}$. Nesse sentido, é importante salientar que tais símbolos são diferentes. Ou seja, $\breve{x}_I \neq x$, $\breve{f}_I \neq \breve{f}$ e $\breve{p}_I \neq \breve{p}$.

Definição 7.1 (interpretação de termos e átomos) *Seja U um conjunto não vazio. Uma interpretação I sobre o domínio, ou universo, U, na lógica de predicados, é uma função cujo domínio é o conjunto dos símbolos de função, de predicados e das expressões da Lógica de Predicados. A interpretação dos termos e átomos, segundo I, é dada por:*

1. *Para toda variável $\breve{x}$, $\breve{x}_I$ é um elemento semântico que pertence ao domínio U;*
2. *Para todo símbolo proposicional $\breve{P}$, $\breve{P}_I$ é um elemento semântico que pertence ao conjunto $\{T, F\}$;*
3. *Para todo símbolo de função $\breve{f}$, n-ário, $\breve{f}_I$ é uma função semântica n-ária em U, isto é, $\breve{f}_I : U^n \to U$;*
4. *Para todo símbolo de predicado $\breve{p}$, n-ário, $\breve{p}_I$ é um predicado semântico n-ário em U, isto é, $\breve{p}_I : U^n \to \{T, F\}$;*

5. *Dado um termo* $\breve{f}(t_1, ..., t_n)$, *então* $I[\breve{f}(t_1, ..., t_n)] = \breve{f}_I(t_{1_I}, ..., t_{n_I})$;
6. *Dado um átomo* $\breve{p}(t_1, ..., t_n)$, *então* $I[\breve{p}(t_1, ..., t_n)] = p_I(t_{1_I}, ..., t_{n_I})$.

Notação. U^n denota o produto cartesiano $U \times U \times \ldots \times U \times U$

Seguem algumas observações a respeito da Definição 7.1.

O domínio da interpretação. Observe que a palavra "domínio" é utilizada na definição 7.1, com dois significados diferentes. Por um lado, temos uma interpretação sobre um domínio U. Nesse caso, "domínio" representa o universo semântico da interpretação. Por outro, o domínio da função I é o conjunto dos símbolos de função, de predicado e expressões. Nesse caso, "domínio" se refere ao conceito matemático relativo às funções.[1] Portanto, o domínio de uma interpretação é um conjunto não vazio, que contém os resultados das interpretações dos termos. Além disso, a Lógica Clássica estabelece, como fundamento, que o domínio da interpretação deve ser não vazio, porque, nesse contexto, não se admite que os resultados das interpretações dos elementos da linguagem estejam em um domínio vazio. I tem como domínio, no sentido lógico, um conjunto não vazio no qual ocorrem os resultados das interpretações dos termos.

Definição redundante. Como sabemos, toda variável é um termo. Logo, o item 1, da Definição 7.1, é um caso particular do item 5. Para isso, basta considerar, no item 5, o caso no qual f é a função identidade. De forma análoga, o item 2 é um caso particular do item 6. Basta considerar, no item 6, o caso no qual p é um predicado zero-ário. Mantemos a redundância na Definição 7.1 apenas para fins didáticos.

A interpretação I é uma função total. A interpretação I é uma função total que tem como domínio, no sentido matemático, todos os símbolos de função, de predicado e expressões da Lógica de Predicados. Isso significa que I interpreta todos esses objetos, ou seja, tem opinião formada sobre todos eles. Em outras palavras, na Lógica clássica não temos objeto com interpretação indeterminada. Todos os elementos da linguagem são interpretados. Isto é, a interpretação na Lógica de Predicados é uma extensão do mesmo conceito na Lógica Proposicional. Analogamente, na Lógica de Predicados, uma interpretação I é uma função total definida em todos os símbolos do seu domínio. Logo, dada uma função n-ária qualquer $\breve{f}$, então necessariamente existe $\breve{f}_I$ tal que $I[\breve{f}] = \breve{f}_I$, onde $\breve{f}_I$ é uma função de U^n em U. Da mesma forma, dado um predicado n-ário qualquer $\breve{p}$, então necessariamente existe $\breve{p}_I$ tal que $I[\breve{p}] = \breve{p}_I$, onde $\breve{p}_I$ é uma função de U^n em $\{T, F\}$. Portanto, a interpretação I possui uma opinião formada sobre todos os símbolos de função e de predicado da linguagem da Lógica de Predicados.[2]

Interpretação de constantes. Como sabemos, uma função zero-ária denota uma constante. Nesse caso, dada uma interpretação sobre U, para toda função zero-ária $\breve{b}$, se $I[\breve{b}] = \breve{b}_I$, então $\breve{b}_I \in U$ e $\breve{b}_I$ é uma constante. A constante $\breve{b}_I$ é uma função zero-ária em U que corresponde à função zero-ária $\breve{b}$ da sintaxe da linguagem.

[1] No contexto da Lógica é comum ter palavras com vários significados ou interpretações.

[2] Em lógicas não clássicas isso nem sempre ocorre. É possível ter $I[g]$ indefinido.

Interpretação de variáveis. A interpretação das variáveis tem como resultado algum elemento do domínio da interpretação. Dada uma interpretação sobre U, se $I[x] = \breve{x}_I$, então $\breve{x}_I \in U$. A exigência de que $\breve{b}_I \in U$ e $\breve{x}_I \in U$ é um princípio da Lógica Clássica e, portanto, válido na Lógica de Predicados. Por esse princípio, constantes e variáveis livres são necessariamente interpretadas como elementos do domínio da interpretação.

Interpretação de símbolos proposicionais. A interpretação de um predicado zero-ário é igual à interpretação de um símbolo proposicional. Para todo símbolo proposicional $\breve{P}$, se $I[\breve{P}] = \breve{P}_I$, então $\breve{P}_I \in \{T, F\}$. Observe que o caso dos símbolos proposicionais se reduz ao que ocorre na Lógica Proposicional.

Diferença entre função e predicado. Observe a diferença entre as interpretações de funções e predicados. Dada uma interpretação sobre U, se $\breve{f}$ é um símbolo para função n-ário, então:

$$\breve{f}_I : U^n \to U.$$

Nesse caso, o contradomínio de $\breve{f}_I$ é igual a U. Por outro lado, se $\breve{p}$ é um símbolo para predicado n-ário:

$$\breve{p}_I : U^n \to \{T, F\}.$$

Nesse caso, o contradomínio de $\breve{p}_I$ é igual a $\{T, F\}$. A diferença entre os contradomínios de $\breve{f}_I$ e $\breve{p}_I$ é um dos elementos que caracteriza funções e predicados.

Exemplo 7.7 (domínio da interpretação) Seja I uma interpretação sobre os naturais, tal que $I[a] = 25$, $I[b] = 5$ e $I[f(x, y)] = (x_I \div y_I)$. Observe que I interpreta a constante a como 25, a constante b como 5 e f como a função divisão. Dessa forma, $f(a, b)$ é interpretada como 5, isto é, $I[f(a, b)] = 5$. Conforme a Definição 7.1, devemos ter $I[f] = f_I$, onde:

$$f_I : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}.$$

Entretanto, se $I[c] = 0$, então $I[f(x, c)]$ não está definida. Logo, o domínio de f_I é igual a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Além disso, para $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, temos $f(x, y) \in \mathbb{Q}$, onde $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos racionais. Portanto, nesse caso:

$$f_I : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+ \to \mathbb{Q},$$

que é diferente da forma exigida pela definição de interpretação, dada por:

$$f_I : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}.$$

Portanto, se o domínio de I é igual ao conjunto dos números naturais, não podemos definir $I[f]$ como a função divisão. ■

7.4 Interpretação de fórmulas com estruturas iniciais simples

A seção anterior definiu a interpretação de termos e átomos. A seguir, damos mais um passo. São consideradas as regras semânticas básicas, que definem a interpretação de fórmulas que não se iniciam com quantificadores. Denominamos tais fórmulas como aquelas que possuem estruturas iniciais simples.

Definição 7.2 (fórmula com estrutura inicial simples) *Uma fórmula da Lógica de Predicados tem uma estrutura inicial simples se, e somente se, ela tem umas das formas* $(\neg H)$, $(H \lor G)$, $(H \land G)$, $(H \rightarrow G)$, *ou* $(H \leftrightarrow G)$.

Uma fórmula com estrutura inicial simples, conforme a Definição 7.2, é tal que se for escrita na notação polonesa, na forma prefixa, ela inicia com um conectivo diferente dos quantificadores. Além disso, em todos os casos nessa definição, H e G são fórmulas da Lógica de Predicados. Isto é, a fórmula com estrutura inicial simples pode conter alguma subfórmula com quantificador. Apenas observamos que o quantificador, se a fórmula o contiver, não é o conectivo principal.

Exemplo 7.8 (fórmula com estrutura inicial simples) A fórmula a seguir possui uma estrutura inicial simples. $((\forall x)p(x) \rightarrow (\exists y)q(y))$. Nesse caso, ela é do tipo $(H \rightarrow G)$ e escrita na notação polonesa, é denotada por $\rightarrow (\forall x)p(x)(\exists y)q(y)$, que inicia com o conectivo $\rightarrow$. ■

Observe que se uma fórmula tem estrutura inicial simples, isso não significa que ela seja simples, ou seja, com comprimento pequeno. Ter uma estrutura inicial simples, significa apenas que o conectivo principal da fórmula não é um quantificador. Analogamente ao que ocorre na Lógica Proposicional, a definição da interpretação das fórmulas com estrutura inicial simples é feita, inicialmente, a partir da definição da interpretação dos conectivos $\neg$, $\lor$, $\land$ $\rightarrow$, ou $\leftrightarrow$. E a interpretação desses símbolos é feita de forma inteiramente análoga às definições apresentadas na Lógica Proposicional.

Definição 7.3 (fórmulas com estrutura inicial simples) Seja E uma fórmula da Lógica de Predicados que possui uma estrutura inicial simples. Seja I uma interpretação sobre o domínio U. A interpretação de E conforme I, denotada por $I[E]$, é determinada pelas regras a seguir:

1. se $E = (\neg H)$, onde H é uma fórmula, então
   $I[E] = I[(\neg H)] = T$ se $I[H] = F$ e $I[E] = I[\neg H] = F$ se $I[H] = T$;
2. se $E = (H \lor G)$, onde H e G são duas fórmulas, então
   $I[E] = I[(H \lor G)] = T$ se $I[H] = T$ e/ou $I[G] = T$
   e $I[E] = I[(H \lor G)] = F$ se $I[H] = I[G] = F$;
3. se $E = (H \land G)$, onde H e G são duas fórmulas, então
   $I[E] = I[(H \land G)] = T$ se $I[H] = T$ e $I[G] = T$
   e $I[E] = I[(H \land G)] = F$ se $I[H] = F$ e/ou $I[G] = F$;
4. se $E = (H \rightarrow G)$, onde H e G são duas fórmulas, então
   $I[E] = I[(H \rightarrow G)] = T$ se $I[H] = F$ e/ou $I[G] = T$
   e $I[E] = I[(H \rightarrow G)] = F$ se $I[H] = T$ e $I[G] = F$;

5. se $E = (H \leftrightarrow G)$, onde H e G são duas fórmulas, então
$I[E] = I[(H \leftrightarrow G)] = T$ se $I[H] = I[G]$
e $I[E] = I[(H \leftrightarrow G)] = F$ se $I[H] \neq I[G]$.

A Definição 7.3 é análoga à Definição 2.6. Tais definições são análogas, porém não iguais. Isso, porque as fórmulas H e G que ocorrem na Definição 7.3 são fórmulas da Lógica de Predicados e podem conter quantificadores, predicados e funções. Por outro lado, as fórmulas H e G que ocorrem na Definição 2.6 contêm apenas símbolos proposicionais e não contêm quantificadores. Isso significa, por exemplo, que para interpretar $(\neg H)$, conforme o item 1 da Definição 7.3, devemos interpretar H. Por sua vez, para interpretar H, se ela contém quantificadores, devemos interpretar tais quantificadores. Além disso, como o conjunto de conectivos $\{\neg, \vee\}$ é completo, a Definição 7.3 poderia considerar apenas tais conectivos. Mas, para simplificar e ser mais didático, consideramos todos os conectivos.

Exemplo 7.9 (interpretação de expressões) Considere as fórmulas a seguir, que possuem estruturas iniciais simples:

$$H = (\neg p(x, y, a, b)) \rightarrow r(f(x), g(y))$$

$$G = p(x, y, a, b) \rightarrow (q(x, y) \wedge r(y, a)).$$

Considere também a interpretação I, sobre o domínio dos números inteiros $\mathbb{Z}$, tal que:
$I[x] = 3$, $I[y] = 2$, $I[a] = 0$, $I[b] = 1$, $I[f(x)] = (x_I + 1)$ e $I[g(x)] = (x_I - 2)$,
$I[p(x, y, z, w)] = T$, se, e somente se, $x_I.y_I > z_I.w_I$,
$I[q(x, y)] = T$, se, e somente se, $x_I < y_I$,
$I[r(x, y)] = T$, se, e somente se, $x_I > y_I$.

Observe nas definições anteriores, que estamos anotando o índice I nos resultados das interpretações. Isto é, $I[x] = x_I$. Lembre-se novamente de que x não é igual a x_I. O objeto x_I é a interpretação da variável x. Além disso, x_I pertence ao domínio $\mathbb{Z}$, que é igual ao conjunto dos números inteiros, e x é um elemento do alfabeto da Lógica de Predicados. A interpretação do átomo $p(x, y, z, w)$ tem como resultado o valor de verdade da expressão semântica $(x_I.y_I > z_I.w_I)$. Isso significa que $I[p(x, y, a, b)] = T$, pois $x_I = 3, y_I = 2, a_I = 0$ e $b_I = 1$. Portanto, $(x_I.y_I > a_I.b_I)$. Analogamente, a interpretação do termo $f(x)$ tem como resultado o valor 4. Ou seja, $I[f(x)] = 4$. Isso ocorre porque $I[f(x)] = (x_I + 1)$. Logo, $I[f(x)] = (3 + 1) = 4$. As interpretações dos outros átomos e termos seguem as mesmas convenções. Para determinar a interpretação de H e G conforme I, isto é, $I[H]$ e $I[G]$, considere a Tabela 7.9 a seguir, na qual indicamos a semântica na primeira linha e a sintaxe na segunda.

3	2	0	1	T	4	0	F	T	T	F
x	y	a	b	$p(x,y,a,b)$	$f(x)$	$g(y)$	$q(x,y)$	$r(y,a)$	H	G

Tabela 7.1: Tabela associada às fórmulas H e G.

Essa tabela indica que $I[x] = 3, I[y] = 2, \ldots, I[H] = T$ e $I[G] = F$. Observe que os resultados das interpretações dos termos $f(x)$ e $g(y)$ são números inteiros e, portanto, elementos do domínio de I. O resultado da interpretação das fórmulas H e G e dos átomos $p(x,y,a,b)$, $q(x,y)$ e $r(y,a)$ são valores de verdade. Lembre-se de que tais fatos caracterizam diferenças nas interpretações de termos e fórmulas. ■

7.5 Interpretação informal de fórmulas com quantificadores

Nas seções anteriores apresentamos, inicialmente, uma abordagem informal da interpretação de termos e átomos. E em seguida as definições formais. No caso das fórmulas, fazemos o mesmo. Começamos com uma visão informal da interpretação das fórmulas mais simples, e, somente depois, abordamos as definições formais.

Exemplo 7.10 (fórmula com um quantificador universal) Como deve ser, na Lógica de Predicados, a representação e interpretação da sentença "Todo número é par"? A representação pode ser obtida considerando uma interpretação I, cujo domínio é o conjunto dos números. Veja que estamos falando sobre números naturais $\mathbb{N}$. Nesse caso, dada uma variável qualquer x, então $I[x]$ deve ser igual a um número natural, ou seja, deve pertencer ao domínio da interpretação. Em seguida, considere q um símbolo de predicado tal que:

$I[q(x)] = T$, se, e somente se, $I[x]$ é número par.

Nesse caso, a sentença "Todo número é par" corresponde à interpretação, segundo I, da fórmula $(\forall x)q(x)$. E, por isso, dizemos que $(\forall x)q(x)$ é uma representação de "Todo número é par" conforme a interpretação I. Isto é:

$I[(\forall x)q(x)]$ = "Todo número é par" ■

Exemplo 7.11 (interpretação de fórmula com quantificadores) Nem sempre, necessariamente, falamos apenas sobre números. Suponha um caso, em que o universo do discurso é o conjunto das pessoas que estão cursando Lógica e que tal conjunto seja dado por:

$$U = \{\text{José, Maria, Ana, Rodrigo, João, Júlia}\}.$$

Nesse caso, digamos que U é igual ao conjunto dos alunos que estão cursando Lógica. Considere, então, uma interpretação I, cujo discurso tem como universo o conjunto U. Isso significa que podemos escolher, por exemplo, as constantes a, b, c, a_1, b_1, c_1, que pertencem à linguagem da Lógica de Predicados, e considerar as igualdades:

$I[a] =$ José, $I[b] =$ Maria, $I[c] =$ Ana, $I[a_1] =$ Rodrigo, $I[b_1] =$ João e $I[c_1] =$ Júlia.

Nesse caso, não há problema em escolher mais uma constante que tenha a mesma interpretação. Podemos ter $I[a] = I[a_2] =$ José, havendo, portanto, duas constantes com a mesma interpretação. Considere, agora, um predicado q tal que:

$I[q(x)] = T$ se, e somente se, $I[x]$ é inteligente.

Nesse caso, a sentença "todo aluno que está cursando Lógica é inteligente" corresponde à interpretação, segundo I, da fórmula $(\forall x)q(x)$. Então, dizemos que $(\forall x)q(x)$ é uma representação de "todo aluno que está cursando Lógica é inteligente" conforme a interpretação I. Nesse caso, temos:

$I[(\forall x)q(x)]$ = "todo aluno que está cursando Lógica é inteligente".

Além disso, observe também que, nesse caso:

$I[(\forall x)q(x)] = T$ se, e somente se:

$$I[q(a)] = I[q(b)] = I[q(c)] = I[q(a_1)] = I[q(b_1)] = I[q(c_1)] = T.$$

Considere, ainda, o predicados p e a função f, tais que:

$I[p(x, y)] = T$, se, e somente se, $I[x]$ gosta de $I[y]$,

$I[f(x)] = I[y]$, se, e somente se, $I[y]$ é o colega preferido de $I[x]$.

Nesse caso, se José gosta de Maria, então $I[p(a, b)] = T$. Se Ana é inteligente, então $I[q(c)] = T$, e se Rodrigo é o colega preferido de Júlia, então $I[f(c_1)] =$ Rodrigo, ou seja, $I[f(c_1)] = I[a_1]$.

Na fórmula $(\forall x)q(x)$, a variável x que ocorre em $q(x)$ pode ser substituída por qualquer elemento do domínio U e o resultado é interpretado como verdadeiro. É como se tal variável representasse, sintaticamente, um pronome e a sentença seria lida como: "Eles (os alunos que estão cursando Lógica) são inteligentes." As variáveis que aparecem nos argumentos dos predicados e das funções são como os pronomes que podem ser substituídos por substantivos, ou, nesse caso, por constantes. Tais constantes, por sua vez, representam os elementos do domínio. Nesse sentido, como é analisado em [Haak] e [Gabbay], a quantificação universal pode ser vista como uma conjunção sobre elementos do domínio. Isto é:

$I[(\forall x)q(x)] = T$, se, e somente se, $I[q(a)] = T$ e $I[q(b)] = T$ e $\ldots$ e $I[q(c_1)] = T$.

Analogamente, a quantificação existencial é uma disjunção sobre elementos do domínio. Ou seja,

$I[(\exists x)q(x)] = T$, se, e somente se, $I[q(a)] = T$ ou $I[q(b)] = T$ ou $\ldots$ ou $I[q(c_1)] = T$.

■

Considerando a análise dos Exemplos 7.10 e 7.11, em geral, para interpretar uma fórmula da Lógica de Predicados, é necessário seguir alguns passos para definir uma interpretação adequada. Entre tais passos, temos:

1. definir o domínio da interpretação, que corresponde ao universo do discurso;
2. selecionar constantes na linguagem para representar os nomes presentes no domínio do discurso;

3. selecionar símbolos de predicado e de função para representar relações de predicado e funcionais entre os elementos do domínio.

O ponto central aqui é como adequar a interpretação da fórmula à representação da sentença escrita em linguagem natural. Isto é, como fazer a correspondência entre o português e a linguagem formal da lógica. Evidentemente a tarefa não é fácil e a maneira de fazê-la é um problema filosófico relevante. Neste livro, apresentamos apenas algumas ideias iniciais e incompletas, que podem ser melhoradas com o estudo mais detalhado da linguagem e do significado dos elementos do discurso. O leitor interessado pode consultar [Gabbay], [Goldstein] e [Haak], para uma análise mais fundamentada.

Exemplo 7.12 (interpretação de fórmula com quantificadores universais) Considere a sentença da aritmética:

"Para quaisquer dois números x e y, temos que $x + y = y + x$".

Para representar essa sentença na Lógica de Predicados, seja I uma interpretação sobre o domínio dos números reais $\mathbb{R}$. Considere p e f símbolos de predicado e de função binários, tais que:

$I[p(x,y)] = T$ se, e somente se, $I[x] = I[y]$, $I[f(x,y)] = (I[x] + I[y])$.

Nesse caso, o predicado p é interpretado por I como a igualdade na aritmética e a função f como a função adição. No contexto da interpretação I, a sentença anterior pode ser representada pela fórmula $(\forall x)(\forall y)p(f(x,y), f(y,x))$. A representação dessa sentença não é única, podendo ser representada de formas diferentes. Considere q um predicado ternário, tal que:

$I[q(x,y,z)] = T$ se, e somente se, $(I[x] + I[y]) = I[z]$.

Utilizando o predicado q, no contexto da interpretação I, a sentença pode ser, também, representada por:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z_1)(\forall z_2)((q(x,y,z_1) \wedge q(y,x,z_2)) \rightarrow p(z_1,z_2)).$$

Nesse caso, a utilização das variáveis z_1 e z_2 é necessária para garantir a unicidade do resultado da soma de x e y. Caso tal unicidade não seja necessária, a sentença pode ainda ser representada por:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(q(x,y,z) \rightarrow q(y,x,z)).$$

■

São duas as conclusões da análise do Exemplo 7.12.

1. A representação de sentenças da linguagem natural não é única na Lógica de Predicados;
2. Os símbolos funcionais podem ser substituídos, equivalentemente, por símbolos de predicados.

Mas, mesmo que símbolos de funções sejam dispensáveis, o seu uso é importante, pois simplifica a representação de sentenças e a demonstração de inúmeros resultados em Lógica. E, por essa razão, eles são considerados nas definições deste livro.

Exemplo 7.13 (interpretação de fórmula com quantificadores) Dada uma fórmula H tal que $H = (\forall x)(\exists y)p(x, y)$, para interpretá-la é necessário estabelecer a interpretação do símbolo de predicado p. Suponha uma interpretação I, tal que $I[p] = <$, ou seja, $p_I = <$ e $I[p(x, y)] = T$, se, e somente se, $x_I < y_I$. O símbolo p é interpretado por I como o predicado semântico "menor que". Considerando também a interpretação canônica dos quantificadores $\forall$ e $\exists$, a interpretação I interpreta H como $I[H] \equiv$ "para todo x_I, existe y_I tal que $x_I < y_I$".

Ainda não é possível determinar se $I[H] = T$, ou $I[H] = F$. É necessário estabelecer que números x_I e y_I estão sendo considerados. Em outras palavras, é necessário determinar o domínio, ou universo U dos números x_I e y_I. Suponha, por exemplo, que o domínio U seja dado por $U = [0, \infty)$. Nesse caso, $I[H] = T$, pois é verdade que para todo x_I, $x_I \in [0, \infty)$, existe y_I, $y_I \in [0, \infty)$, tal que $x_I < y_I$.

Portanto, a interpretação I interpreta H como verdadeira, quando $U = [0, \infty)$. Poderia ser diferente, porém. Considere uma interpretação J, cujo domínio é $U = (-\infty, 0]$ e $J[p] = <$. Nesse caso, $J[H] = F$. Observe que a mudança do domínio faz com que a interpretação de H seja falsa. Isso ocorre porque é falso que:

"para todo x_J, $x_J \in (-\infty, 0]$, existe y_J, $y_J \in (-\infty, 0]$ tal que $x_J < y_J$".

Essa afirmação é falsa, pois se $x_J = 0$, não existe y_J tal que $y_J \in (-\infty, 0]$ e $x_J < y_J$. Finalmente, observe que não é necessário ter os resultados das interpretações de x e y para obtermos as interpretações $I[H]$ ou $J[H]$. Isso se deve ao fato de que x e y não são símbolos livres em H. Nesse caso, é necessário definir apenas a interpretação do símbolo livre p. ■

Exemplo 7.14 (interpretação de fórmula com quantificadores) Considere a fórmula G tal que $G = (\forall x)p(x, y)$. Aqui, os símbolos livres de G são p e y. Para determinar $J[G]$ é necessário definir $J[p]$ e $J[y]$. Considere a interpretação J sobre o domínio $U = (-\infty, 0]$, tal que $J[p] = \leq$ e $J[y] = -5$. Observe que $J[G] = F$. Isso ocorre porque é falso que:

para todo x_J, $x_J \in (-\infty, 0]$, então $x_J \leq -5$.

Nesse caso, a variável y é um símbolo livre de G, que é interpretado como -5. Entretanto, se $y_J = 0$, então $J[G] = T$, porque é verdadeiro que:

para todo x_J, $x_J \in (-\infty, 0]$, então $x_J \leq 0$. ■

Considerando a análise dos Exemplos 7.13 e 7.14, para interpretar uma fórmula qualquer H, com quantificadores, é necessário observar:

1. o domínio da interpretação; e

2. o valor da interpretação dos símbolos livres de H.

7.6 Interpretação de fórmulas com quantificadores

A linguagem da Lógica de Predicados contém predicados, funções, conectivos, quantificadores etc. Os conectivos, por exemplo, são idealizações com respeito a certas expressões do português. O conectivo $\vee$ é uma representação idealizada da palavra "ou", mas não a representa fielmente. O mesmo ocorre com os outros conectivos que representam aproximadamente os termos "não", "e", "se então" e "se e somente se". Os quantificadores também são representações idealizadas dos termos "para todo" e "existe" e definitivamente não representam fielmente a semântica de tais termos. Mas, se os elementos da linguagem da Lógica de Predicados são apenas representações idealizadas de termos do português, é possível representar adequadamente as sentenças do português na Lógica de Predicados? Várias coisas podem ocorrer. Pode ocorrer que um argumento intuitivamente válido se mostre, quando representado e analisado na Lógica de Predicados, como não válido. Isso pode ocorrer porque a intuição estava errada ou porque o argumento não foi adequadamente representado. Pode até mesmo ocorrer que não seja possível representá-lo adequadamente na Lógica de Predicados.[3] Não existe uma regra geral ou um algoritmo que ao ser seguido determine a representação de uma sentença na Lógica de Predicados. E, por ser controverso, difícil, como foi enfatizado anteriormente, esse é um tema de grande discussão filosófica [Gabbay], [Goldstein], [Haak]. O melhor a fazer, nesse caso, é exercitar, resolver exercícios. Assim, de forma simples, sem considerar implicações e reflexões filosóficas, esta seção define a interpretação de fórmulas com quantificadores universais e existenciais. E nessa definição é necessário o conceito de interpretação estendida, analisado a seguir [Manna].

7.6.1 Interpretação estendida

Considere, inicialmente, um paradigma que facilita a compreensão do conceito de interpretação estendida.

O paradigma. Suponha que cada indivíduo seja associado a uma interpretação que relaciona objetos sintáticos e semânticos. Seja então I uma interpretação associada a um indivíduo, que tem opinião formada sobre os elementos de seu mundo sintático. Dadas as variáveis x e y, então $I[x]$ e $I[y]$ estão definidas. Suponha, por exemplo, que $I[x] = 5$ e $I[y] = 1$. Isto é, o indivíduo interpreta x e y como os números 5 e 1, respectivamente. Uma outra pessoa pode convencer esse indivíduo que x deve ser interpretado como 7 e não como 5. O indivíduo, com essa nova opinião sobre o valor semântico de x, é associado a uma nova interpretação, que é indicada por: $< x \leftarrow 7 > I$. Nessa notação, temos a interpretação I mais a extensão

[3] Em geral, algumas sentenças que não podem ser representadas adequadamente na Lógica clássica podem ser representadas em Lógicas não clássicas.

$< x \leftarrow 7 >$. Dessa forma, mesmo tendo $I[x] = 5$, a interpretação estendida dá outro resultado para a interpretação de x. Porém, no caso da variável y, tudo continua como antes. Veja $< x \leftarrow 7 > I[x] = 7$ e $< x \leftarrow 7 > I[y] = 1$. Observe que o indivíduo continua interpretando y como 1. Em seguida, se o indivíduo se convencer de que a interpretação de x deve ser 8, a interpretação associada a ele se modifica novamente. A nova interpretação é dada por $< x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I$. Nesse caso, temos:

$< x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I[x] = 8$; e

$< x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I[y] = 1$.

Novamente, y continua sendo interpretada como 1. Finalmente, se a interpretação de y é modificada para 4, então a interpretação associada ao indivíduo se modifica para:

$< y \leftarrow 4 >< x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I$.

E, nesse caso:

$< y \leftarrow 4 >< x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I[x] = 8$ e

$< y \leftarrow 4 >< x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I[y] = 4$.

Seguindo esse raciocínio, concluímos que a extensão mais à esquerda tem precedência sobre as outras. Além disso, quando não há extensão sobre uma variável, o valor semântico original é considerado. A definição 7.4 é uma formalização desses conceitos.

Definição 7.4 (interpretação estendida) *Seja I uma interpretação sobre um domínio U. Considere x uma variável qualquer da Lógica de Predicados e d um elemento de U. Uma extensão de I, conforme x e d, é uma interpretação sobre U, denotada por $< x \leftarrow d > I$, tal que:*

$$< x \leftarrow d > I[\breve{y}] = \begin{cases} d & se \quad \breve{y} = x \\ I[\breve{y}] & se \quad \breve{y} \neq x \end{cases}$$

Lembre que $\breve{y}$ é uma variável qualquer.

Na Definição 7.4, se $\breve{y} = x$, então $< x \leftarrow d > I[\breve{y}] =< x \leftarrow d > I[x] = d$. Por outro lado, se $\breve{y} \neq x$, temos $< x \leftarrow d > I[\breve{y}] = I[\breve{y}]$. A interpretação estendida $< x \leftarrow d > I$ atribui a uma expressão ou a um símbolo do alfabeto diferente de x a valor originalmente atribuído por I. Isso significa que $< x \leftarrow d > I$ é idêntica a I, exceto para a variável x, que é interpretada como d. Isso porque a interpretação $< x \leftarrow d > I$ é igual a I mais a extensão $< x \leftarrow d >$. Observe que essa notação é análoga àquela que trata da composição de funções no cálculo.

Exemplo 7.15 (interpretação estendida) Este exemplo considera a extensão de uma interpretação I, sobre o domínio dos números naturais $\mathbb{N}$, tal que $I[x] = 4$, $I[a] = 5$, $I[y] = 4$, $I[f] = +$, e $I[p] = >$. Nesse caso:

$< x \leftarrow 2 > I[y] = 4$;

$< x \leftarrow 2 > I[f] = +$;

$< x \leftarrow 2 > I[x] = 2$;

$< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I[y] = 9$;
$< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I[x] = 2$;
$< x \leftarrow 7 >< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I[y] = 9$;
$< x \leftarrow 7 >< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I[x] = 7$; e
$< y \leftarrow 1 >< x \leftarrow 7 >< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I[y] = 1$.
Observe que na igualdade:

$$< x \leftarrow 7 >< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I[x] = 7,$$

a extensão $< x \leftarrow 7 >$ tem precedência sobre a extensão $< x \leftarrow 2 >$. Isso ocorre porque a interpretação:

$$< x \leftarrow 7 >< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I$$

é uma extensão da interpretação:

$$< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I.$$

O mesmo ocorre com a igualdade:

$$< y \leftarrow 1 >< x \leftarrow 7 >< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I[y] = 1,$$

na qual a extensão $< y \leftarrow 1 >$ tem precedência sobre a extensão $< y \leftarrow 9 >$. Novamente, isso ocorre porque a interpretação:

$$< y \leftarrow 1 >< x \leftarrow 7 >< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I$$

é uma extensão da interpretação:

$$< x \leftarrow 7 >< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I.$$

A extensão mais à esquerda tem precedência sobre cada extensão que ocorre mais à direita. ■

Portanto, dada uma interpretação I sobre um domínio U, as interpretações estendidas $< \breve{x} \leftarrow d >< \breve{y} \leftarrow e > I$ e $< \breve{y} \leftarrow e >< \breve{x} \leftarrow d > I$ são equivalentes quando $\breve{x} \neq \breve{y}$. No caso em que $x = y$, as interpretações são equivalentes somente quando $e = d$.

7.6.2 Regras semânticas para a interpretação de fórmulas com quantificadores

Consideramos, a seguir, a definição das regras semânticas para interpretação de fórmulas com quantificadores, utilizando interpretações estendidas, Definição 7.4. Mas, antes disso, apresentamos um conjunto de exemplos, que analisam de maneira informal a interpretação de fórmulas com quantificadores, usando interpretações estendidas.

Exemplo 7.16 (regra semântica para o quantificador universal) Considere I uma interpretação sobre o conjunto dos alunos de Ciência da Computação, $\mathbb{CC}$. Considere, também, um predicado p tal que

$I[p(x)] = T$, se, e somente se, $I[x]$ é um aluno inteligente.

Nesse caso, a sentença: "todo aluno de Ciência da Computação é inteligente" corresponde, segundo I, à fórmula H, tal que, $H = (\forall x)p(x)$. Então, dizemos que H é uma representação de "todo aluno de Ciência da Computação é inteligente" conforme I. Mas que condições devem ser satisfeitas para que a fórmula H seja verdadeira, segundo a interpretação I? Observe que já sabemos que H representa a sentença "todo aluno de Ciência da Computação é inteligente" conforme I. Agora estamos questionando outra coisa. Afinal, que condições devemos contemplar para que $I[H] = T$? Podemos fazer informalmente a seguinte sequência de raciocínio:

$$
\begin{aligned}
I[H] = T \Leftrightarrow\ & I[(\forall x)p(x)] = T, \\
\Leftrightarrow\ & I[\text{ “todo aluno de Ciência da Computação é inteligente” }] = T, \\
\Leftrightarrow\ & \text{para todo } d \text{ no conjunto dos alunos de Computação,} \\
& \text{temos que } d \text{ é inteligente,} \\
\Leftrightarrow\ & \text{para todo } d\ \in \mathbb{CC}, \text{ temos que } d \text{ é inteligente,} \\
\Leftrightarrow\ & \text{para todo } d\ \in \mathbb{CC}, \text{ temos que } p_I(d) = T, \\
\Leftrightarrow\ & \text{para todo } d\ \in \mathbb{CC}, \text{ se } x \text{ é interpretada como } d, \\
& \text{então } p(x) \text{ é interpretado como verdadeira,} \\
\Leftrightarrow\ & \text{para todo } d\ \in \mathbb{CC},\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T.
\end{aligned}
$$

Portanto, nesse caso, temos uma conclusão importante: as condições para se ter $I[(\forall x)p(x)] = T$.

$I[(\forall x)p(x)] = T \ \Leftrightarrow\ $ para todo $d\ \in \mathbb{CC},\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T$ ■

O Exemplo 7.16 interpreta, informalmente, uma fórmula com um quantificador no seu início. Apresentamos uma análise que estabelece as condições para que a fórmula seja interpretada como verdadeira. Segue, de forma imediata, a questão: quais são as condições para que tal fórmula seja interpretada como falsa? O próximo exemplo analisa essa questão.

Exemplo 7.17 (regra semântica para o quantificador universal) . Considere a mesma interpretação I do Exemplo 7.16 e, também, o predicado p com a mesma interpretação. Conforme é analisado no exemplo, a sentença: "todo aluno de Ciência da Computação é inteligente" corresponde, segundo I, à fórmula H, tal que, $H = (\forall x)p(x)$. Queremos identificar, agora, que condições devem ser satisfeitas para que a fórmula H seja falsa, segundo a interpretação I. Isto é, que condições devemos contemplar para se ter $I[H] = F$? A seguinte sequência de raciocínio estabelece informalmente essas condições:

$$
\begin{aligned}
I[H] = F \Leftrightarrow\ & I[(\forall x)p(x)] = F, \\
\Leftrightarrow\ & I[\text{ “todo aluno de Ciência da Computação é inteligente” }] = F, \\
\Leftrightarrow\ & \text{existe } d \text{ no conjunto dos alunos de Computação,}
\end{aligned}
$$

tal que d não é inteligente,
$\Leftrightarrow$ existe $d \in \mathbb{CC}$, tal que d não é inteligente,
$\Leftrightarrow$ existe $d \in \mathbb{CC}$, tal que $p_I(d) = F$,
$\Leftrightarrow$ existe $d \in \mathbb{CC}$, tal que se x é interpretada como d,
então $p(x)$ é interpretado como falso,
$\Leftrightarrow$ existe $d \in \mathbb{CC}$; $< x \leftarrow d > I[p(x)] = F$.

Temos outra conclusão importante: as condições para se ter $I[(\forall x)p(x)] = F$.
$I[(\forall x)p(x)] = F \Leftrightarrow$ existe $d \in \mathbb{CC}$, $< x \leftarrow d > I[p(x)] = F$ ■

As análises apresentadas nos Exemplos 7.16 e 7.17 podem ser repetidas, de forma análoga, considerando o quantificador existencial.

Exemplo 7.18 (regra semântica para o quantificador existencial) .
Considere a mesma interpretação I do Exemplo 7.16 e o predicado p com a mesma interpretação. De forma análoga à apresentação do Exemplo 7.16, a sentença "existe aluno de Ciência da Computação que é inteligente" corresponde, segundo I, à fórmula G, tal que, $G = (\exists x)p(x)$. Nesse caso, queremos identificar que condições devem ser satisfeitas para que a fórmula G seja verdadeira, segundo a interpretação I. Isto é, que condições devemos contemplar para se ter $I[G] = T$? Novamente, a seguinte sequência de raciocínio estabelece, informalmente, essas condições:

$I[G] = T \Leftrightarrow I[(\exists x)p(x)] = T$,
$\Leftrightarrow$ $I[$ "existe aluno de Ciência da Computação que é inteligente" $] = T$,
$\Leftrightarrow$ existe d no conjunto dos alunos de Computação,
tal que d é inteligente,
$\Leftrightarrow$ existe $d \in \mathbb{CC}$, tal que d é inteligente,
$\Leftrightarrow$ existe $d \in \mathbb{CC}$, tal que $p_I(d) = T$,
$\Leftrightarrow$ existe $d \in \mathbb{CC}$, tal que se x é interpretada como d,
então $p(x)$ é interpretado como verdadeiro,
$\Leftrightarrow$ existe $d \in \mathbb{CC}$; $< x \leftarrow d > I[p(x)] = T$;

Observe a conclusão importante:
$I[(\exists x)p(x)] = T \Leftrightarrow$ existe $d \in \mathbb{CC}$, $< x \leftarrow d > I[p(x)] = T$
Neste exemplo, queremos ainda identificar que condições devem ser satisfeitas para que a fórmula G seja falsa, ou seja, para se ter $I[G] = F$? Observe a sequência de deduções:

$I[G] = F \Leftrightarrow I[(\exists x)p(x)] = F$,
$\Leftrightarrow$ $I[$ "existe aluno de Ciência da Computação que é inteligente" $] = F$,
$\Leftrightarrow$ para todo d no conjunto dos alunos de Computação,
temos que d não é inteligente,
$\Leftrightarrow$ para todo $d \in \mathbb{CC}$, temos que d não é inteligente,
$\Leftrightarrow$ para todo $d \in \mathbb{CC}$, temos que $p_I(d) = F$,
$\Leftrightarrow$ para todo $d \in \mathbb{CC}$, temos que se x é interpretada como d,

então $p(x)$ é interpretado como falso,
$\Leftrightarrow$ para todo $d \in \mathbb{CC}$, $< x \leftarrow d > I[p(x)] = F$.

Estabelecemos a conclusão importante:
$I[(\exists x)p(x)] = F \Leftrightarrow$ para todo $d \in \mathbb{CC}$, $< x \leftarrow d > I[p(x)] = F$ ■

Os Exemplos 7.16, 7.17, e 7.18 estabelecem quatro conclusões, descritas, juntas, a seguir:

1. $I[(\forall x)p(x)] = T \Leftrightarrow$ para todo $d \in \mathbb{CC}$, $< x \leftarrow d > I[p(x)] = T$;
2. $I[(\forall x)p(x)] = F \Leftrightarrow$ existe $d \in \mathbb{CC}$, $< x \leftarrow d > I[p(x)] = F$;
3. $I[(\exists x)p(x)] = T \Leftrightarrow$ existe $d \in \mathbb{CC}$, $< x \leftarrow d > I[p(x)] = T$;
4. $I[(\exists x)p(x)] = F \Leftrightarrow$ para todo $d \in \mathbb{CC}$, $< x \leftarrow d > I[p(x)] = F$.

Essa lista estabelece condições, ou regras semânticas, para a interpretação do predicado p, segundo a interpretação I, cujo domínio é igual a $\mathbb{CC}$. Entretanto, observando os exemplos, verificamos que a análise não depende, especificamente, do predicado p e nem do domínio da interpretação. Nesse sentido, as condições acima podem ser generalizadas. Podemos considerar o domínio $\mathbb{CC}$ como um domínio U qualquer. Da mesma forma, $p(x)$ pode ser uma fórmula H qualquer. Fazendo tais generalizações, temos as regras semânticas para interpretação de fórmulas com quantificadores.

Definição 7.5 (regras semânticas para fórmulas com quantificadores) .
Sejam H uma fórmula da Lógica de Predicados, x uma variável qualquer e I uma interpretação sobre o domínio U. Os valores semânticos de $I[(\forall x)H]$ e $I[(\exists x)H]$ são definidos pelas regras:

1. $I[(\forall x)H] = T$ *se, e somente se,* $\forall\ d \in U$, $< x \leftarrow d > I[H] = T$;
2. $I[(\forall x)H] = F$ *se, e somente se,* $\exists\ d \in U$; $< x \leftarrow d > I[H] = F$;
3. $I[(\exists x)H] = T$ *se, e somente se,* $\exists\ d \in U$; $< x \leftarrow d > I[H] = T$;
4. $I[(\exists x)H] = F$ *se, e somente se,* $\forall\ d \in U$, $< x \leftarrow d > I[H] = F$.

Redundância da Definição 7.5. Como os quantificadores existenciais são definidos a partir dos quantificadores universais, é possível considerar apenas a definição de interpretação de fórmulas com quantificadores universais. Entretanto, para simplificar o estudo, são definidas as interpretações de fórmulas com os dois tipos de quantificadores. Por isso, a Definição 7.5 é redundante. Isto é, os itens 3 e 4 podem ser deduzidos dos itens 1 e 2.

Símbolos da metalinguagem. Nas regras semânticas, para interpretação de fórmulas com quantificadores, os símbolos $\forall$ e $\exists$ ocorrem na linguagem e na metalinguagem. Considere a sentença:
$I[(\forall_1 x)H] = T \Leftrightarrow \forall_2 d \in U$, $< x \leftarrow d > I[H] = T$.

Nela, os quantificadores estão indexados com os números 1 e 2. O primeiro quantificador, $\forall_1$, é um conectivo do alfabeto da Lógica de Predicados, sendo, portanto, um símbolo sintático. Por outro lado, o segundo quantificador, $\forall_2$, é um símbolo da metalinguagem e está quantificando sobre objetos do domínio da interpretação. O símbolo $\forall_2$ se refere a elementos do domínio U que são objetos semânticos. Da mesma forma, o quantificador $\exists$ também ocorre na linguagem e na metalinguagem. Na sentença:

$I[(\exists_1 x)H] = T \Leftrightarrow \exists_2 d \in U;\ < x \leftarrow d > I[H] = T,$

o símbolo $\exists_1$ é um conectivo do alfabeto da Lógica de Predicados, sendo, portanto, um símbolo sintático e $\exists_2$ é um símbolo da metalinguagem e está quantificando sobre objetos semânticos. No que se segue, os quantificadores $\forall$ e $\exists$ da linguagem da metalinguagem são indicados indistintamente. Entretanto, é necessário estar ciente de suas diferenças.

Formas diferentes de dizer a mesma coisa. Na Definição 7.5, $I[(\forall x)H] = T$ equivale a dizer que para qualquer interpretação da variável x em H, a fórmula H é interpretada como sendo verdadeira. Isso é expresso, considerando a extensão da interpretação I. Assim, quando d assume qualquer valor no domínio U, a interpretação $< x \leftarrow d > I$ interpreta x como sendo qualquer valor em U. Logo, as afirmações 1 e 2, a seguir expressam a mesma ideia.

1. Para qualquer interpretação da variável x em H, a fórmula H é interpretada como verdadeira.
2. $\forall d,\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[H] = T.$

Por outro lado, $I[(\exists x)H] = T$ equivale a dizer que existe um valor para a interpretação de x em H tal que H é interpretada como verdadeira. A existência desse valor é expressa por:

$\exists\ d\ ;\ d \in U$ tal que $< x \leftarrow d > I[H] = T.$

Observe que, nesse caso, $< x \leftarrow d > I[x] = d$, ou seja, x é interpretada como d.

Quando o "para todo" é falso. Na Definição 7.5, $I[(\forall x)H] = F$ equivale dizer que se a variável x, que ocorre em H, é interpretada como sendo qualquer elemento do domínio, então nem sempre temos que H é verdadeira. Ou seja, é falso que para toda interpretação de x em H, a fórmula H é interpretada como verdadeira. Em outras palavras, existe, pelo menos, uma interpretação de x, tal que H é interpretada por I como falsa. Tais fatos são expressos por:

$\exists\ d\ ;\ d \in U, < x \leftarrow d > I[H] = F.$

Nesse caso, quando x é interpretado por I como d, H é interpretado como F.

Quando o "existe" é falso. Conforme a Definição 7.5, $I[(\exists x)H] = F$ equivale dizer que é falso que existe alguma interpretação para x em H, tal que H possa ser interpretada como verdadeira. Isso significa que para toda interpretação de x em H, a fórmula H é interpretada como falsa, o que é expresso por:

$\forall\ d\ ;\ d \in U; < x \leftarrow d > I[H] = F.$

Exemplo 7.19 (interpretação de fórmula com quantificador) Seja I uma interpretação sobre o conjunto dos alunos de Ciência da Computação $\mathbb{CC}$. Suponha os predicados p e q tais que:

$I[p(x)] = T$ se, e somente se, x_I é inteligente;

$I[q(x,y)] = T$ se, e somente se, x_I gosta de y_I.

Suponha, também, uma constante a tal que $I[a]$ = Zé. Considere H_1 a fórmula a seguir: $H_1 = (\forall x)(q(x,a) \vee p(x))$. Nesse caso, conforme I, qual é o significado da fórmula H_1? Isto é, do ponto de vista semântico, como é a leitura de H_1 segundo a interpretação I? Como a fórmula H_1 é simples, não temos problemas para responder tal questão. Nesse caso, temos:

$$\begin{aligned} I[H_1] &= I[(\forall x)(q(x,a) \vee p(x))] \\ &= \text{“todo aluno de Ciência da Computação gosta do Zé, ou é inteligente.”} \end{aligned}$$

Mas este é o primeiro exemplo, após a definição da regras semânticas, Definição 7.5. Apresentamos, então, uma análise mais formal, que utiliza a Definição 7.5. No caso da fórmula H_1, como ela é bem simples, até pode parecer um preciosismo. Entretanto, para fórmulas mais elaboradas, tal análise pode ajudar a compreensão da semântica da fórmula.

$$\begin{aligned} I[H_1] = T \Leftrightarrow\ & I[(\forall x)(q(x,a) \vee p(x))] = T, \\ \Leftrightarrow\ & \forall\ d\ \in \mathbb{CC};\ < x \leftarrow d > I[q(x,a) \vee p(x)] = T, \\ \Leftrightarrow\ & \forall\ d\ \in \mathbb{CC};\ < x \leftarrow d > I[q(x,a)] = T \\ & \text{e/ou}\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T, \\ \Leftrightarrow\ & \forall\ d\ \in \mathbb{CC};\ q_I(d,\text{Zé}) = T\ \text{ e/ou }\ p_I(d) = T, \\ \Leftrightarrow\ & \forall\ d\ \in \mathbb{CC};\ \text{“}d \text{ gosta de Zé” e/ou “}d\text{ é inteligente”}, \\ \Leftrightarrow\ & \text{“todo aluno de Ciência da Computação gosta do Zé,} \\ & \text{ou é inteligente.”}\ \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 7.20 (interpretação de fórmula com quantificador) . Seja I uma interpretação, os predicados p e q e a constante a, como no Exemplo 7.19. Além disso, seja f uma função unária tal que:

$I[f(x)] =$ o colega preferido de x_I.

Nesse caso, é claro, estamos considerando colegas no contexto dos alunos de Computação. Considere H_2 a fórmula a seguir. $H_2 = (\forall x)q(x,a) \vee p(f(x))$. Observe como a fórmula H_2 é similar à fórmula H_1. A única diferença é a colocação dos parênteses e a presença da função f. Na fórmula H_1, o átomo $p(x)$ está no escopo do quantificador $(\forall x)$. Mas, na fórmula H_2, o átomo $p(f(x))$ não está no escopo do quatificador. E por isso, a interpretação de H_2 é diferente da interpretação de H_1. Observe:

$$\begin{aligned} I[H_2] = T \Leftrightarrow\ & I[(\forall x)q(x,a) \vee p(f(x))] = T, \\ \Leftrightarrow\ & I[(\forall x)q(x,a)] = T\ \text{ e/ou }\ I[p(f(x))] = T, \\ \Leftrightarrow\ & \forall\ d\ \in \mathbb{CC};\ < x \leftarrow d > I[q(x,a)] = T\ \text{ e/ou }\ I[p(f(x))] = T, \\ \Leftrightarrow\ & \forall\ d\ \in \mathbb{CC};\ q_I(d,\text{Zé}) = T\ \text{ e/ou }\ p_I(f_I(x_I)) = T, \\ \Leftrightarrow\ & \forall\ d\ \in \mathbb{CC};\ \text{“}d\text{ gosta de Zé” e/ou} \end{aligned}$$

"o colega preferido de x_I é inteligente."
$\Leftrightarrow$ "todo aluno de Ciência da Computação gosta do Zé, ou o colega preferido de x_I é inteligente."

Para interpretar H_2, ou seja, se a fórmula é verdadeira ou falsa, é necessário saber se todo aluno gosta do Zé e, também, se o colega preferido de x_I é inteligente. Mas, quem é x_I? É um aluno de Ciência da Computação. Então, nesse caso, para interpretar H_2 é necessário identificar o aluno x_I. Suponha, por exemplo, que $x_I =$ "Maria." E, sabendo disso, podemos olhar para o colega preferido de Maria e verificar se ele é, ou não, inteligente. ■

A necessidade de interpretar os símbolos livres. No Exemplo 7.19, para interpretar H_1 é necessário saber apenas a interpretação dos predicados p e q e da constante a. Por outro lado, para interpretar H_2 é necessário saber a interpretação dos predicados p e q, da constante a, da função f e da variável x. Mas, por que é necessário interpretar x, quando interpretamos H_2? Observe que para interpretar H_1 isso não é necessário, pois na fórmula H_1 a variável x em $p(x)$ ocorre ligada. Então, nesse caso, a semântica da variável x em $p(x)$ é dada pelo quantificador $(\forall x)$. Formalmente, isso ocorre no desenvolvimento da análise quando aparece a interpretação estendida $< x \leftarrow d > I$. Nesse caso, x é interpretada como d e não há necessidade de conhecer x_I. Por outro lado, na fórmula H_2 a variável x em $p(f(x))$ ocorre livre. E, nesse caso, a semântica da variável x em $p(f(x))$ não é dada pelo quantificador $(\forall x)$. Ou seja, é necessário interpretar a variável x em $p(f(x))$, pois ela não está no escopo do quantificador $(\forall x)$. Formalmente, nesse caso, no desenvolvimento da análise não aparece interpretação estendida do tipo $< x \leftarrow d > I$. Ou seja, é necessário conhecer x_I. E além disso, é claro, para interpretar H_2 devemos interpretar a função f. Conforme a Definição 6.13, dada uma fórmula E, os seus símbolos livres são as variáveis que ocorrem livres em E, os símbolos de função e os de predicado. Nesse caso, H_1 possui apenas o símbolo livre p. Por outro lado, H_2 possui os símbolos livres p, f e x. Concluímos, portanto:

1. que para interpretar H_1 e H_2 é necessário saber a interpretação de seus símbolos livres;
2. para interpretar uma fórmula H é necessário saber a interpretação dos seus símbolos livres.

Exemplo 7.21 (interpretação de fórmula com quantificador) Seja I uma interpretação sobre o domínio dos números naturais $\mathbb{N}$, tal que $I[x] = 3$, $I[a] = 5$, $I[y] = 4$, $I[f] = +$ e $I[p] = <$. Considere a fórmula H_3 tal que $H_3 = (\forall x)p(x, y)$. Queremos responder, neste exemplo, se $I[H_3] = T$, ou $I[H_3] = F$. Como H_3 é bem simples, podemos verificar que, conforme I, temos informalmente que:

$I[H_3]$ = "Para todo número natural x, $x < 4$".

Evidentemente, essa afirmação é falsa e, por isso, devemos ter $I[H_3] = F$. A demonstração desse fato é dada a seguir:

$$
\begin{aligned}
I[H_3] = F &\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x,y)] = F \\
&\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > I[p(x,y)] = F \\
&\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{N};\ d < 4 \ \text{ é falso.}
\end{aligned}
$$

A última afirmação: "$\exists\ d \in \mathbb{N};\ d < 4$ é falso" é verdadeira, pois existe número natural d, tal que $d < 4$ é falso. No caso em que $d = 7$, por exemplo, temos que $d < 4$ é falso. Logo, como a última afirmação é verdadeira, então a primeira afirmação, $I[H_3] = F$, também é verdadeira. Isso significa que a interpretação de H_3 segundo I é igual a F. Observe que na interpretação de H_3 não é necessário utilizar que $I[x] = 3$. Quando a fórmula $(\forall x)p(x,y)$ é interpretada, utilizamos a interpretação estendida $< x \leftarrow d > I$. E, nesse caso, o valor de $I[x]$ não é utilizado, pois $< x \leftarrow d > I[x] = d$. Isso significa que a semântica da variável x em H_3 é dada pelo quantificador. Observe que o mesmo não ocorre com a variável y, que ocorre livre em H_3. Mas e se imaginamos por engano que $I[H_3] = T$. Nesse caso, temos o desenvolvimento:

$$
\begin{aligned}
I[H_3] = T &\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x,y)] = T, \\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > I[p(x,y)] = T, \\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N};\ d < 4 \ \text{ é verdadeiro.}
\end{aligned}
$$

Nesse caso, a última afirmação "$\forall\ d \in \mathbb{N};\ d < 4$ é verdadeiro", é falsa. Observe que é falso dizer que todos os naturais são menores que 4. Logo, como a última afirmação é falsa, então a primeira afirmação, $I[H_3] = T$, também é falsa. Isso significa que o correto é $I[H_3] = F$. Isto é, a interpretação de H_3 segundo I é igual a F. Finalmente, observe que na interpretação de H_3, somente utilizamos a interpretação de y e não utilizamos os resultados, $I[x] = 3$, $I[a] = 5$, $I[f] = +$ e $I[p] = <$. E além desses resultados, a interpretação I interpreta todos os predicados, funções e fórmulas da Lógica de Predicados. E todas essas "opiniões" da interpretação I também não são utilizadas, fato que não faz diferença alguma no resultado $I[H_3] = F$. ■

Análise da afirmação final de uma sequência de equivalências. Dada uma fórmula H, o Exemplo 7.21 mostra como decidir se $I[H] = T$, ou $I[H] = F$. Há alguns casos a considerar. Suponha, inicialmente, que afirmamos $I[H] = T$. Em seguida, desenvolvemos um conjunto de equivalências como a seguir, até encontrar a última afirmação das equivalências.

$$
\begin{aligned}
I[H] = T &\Leftrightarrow \text{afirmação 1,} \\
&\Leftrightarrow \text{afirmação 2,} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\Leftrightarrow \text{afirmação final.}
\end{aligned}
$$

Se "afirmação final" é verdadeira, então $I[H] = T$. Caso contrário, se "afirmação final" é falsa, então é um absurdo ter $I[H] = T$. Logo, $I[H] = F$. Por outro lado, suponha que afirmamos, inicialmente, $I[H] = F$. E, em seguida, desenvolvemos um conjunto de equivalências:

$$\begin{aligned}I[H] = F &\Leftrightarrow \text{afirmação 1},\\ &\Leftrightarrow \text{afirmação 2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\Leftrightarrow \text{afirmação final}.\end{aligned}$$

Analogamente ao caso anterior, se "afirmação final" é verdadeira, então é o caso que $I[H] = F$. Mas, se "afirmação final" é falsa, então é um absurdo ter $I[H] = F$. Logo, $I[H] = T$.

Exemplo 7.22 (interpretação de fórmula com quantificadores) . Seja I uma interpretação sobre o domínio dos números naturais $\mathbb{N}$, definida, exatamente, como no Exemplo 7.21. Considere a fórmula H_4 tal que $H_4 = (\forall x)(\exists y)p(x,y)$. Afinal, $I[H_4] = T$, ou $I[H_4] = F$. Informalmente, $I[H_4]$ significa: "para todo número natural x, existe outro natural y tal que $x < y$". Essa afirmação é verdadeira, logo, informalmente, $I[H_4] = T$. A demonstração desse fato é dada a seguir:

$$\begin{aligned}I[H_4] = T &\Leftrightarrow I[(\forall x)(\exists y)p(x,y)] = T,\\ &\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N},\ < x \leftarrow d > I[(\exists y)p(x,y)] = T,\\ &\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N},\ \exists\ c \in \mathbb{N};\ < y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x,y)] = T,\\ &\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N},\ \exists\ c \in \mathbb{N};\ d < c\ \text{ é verdadeiro}.\end{aligned}$$

Nesse caso, a última afirmação "$\forall\ d \in \mathbb{N},\ \exists\ c \in \mathbb{N};\ d < c$ é verdadeiro" é verdadeira, pois, para todo número natural d, existe um outro número natural c tal que $d < c$ é verdadeiro. Isso ocorre porque não existe um número natural maior que todos os outros. Como a última afirmação é verdadeira, então a afirmação equivalente $I[H_4] = T$ também é verdadeira. Observe o que ocorre quando supomos que $I[H_4] = F$:

$$\begin{aligned}I[H_4] = F &\Leftrightarrow I[(\forall x)(\exists y)p(x,y)] = F,\\ &\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > I[(\exists y)p(x,y)] = F,\\ &\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{N};\ \forall\ c \in \mathbb{N};\ < y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x,y)] = F,\\ &\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{N};\ \forall\ c \in \mathbb{N};\ d < c\ \text{ é falso},\\ &\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{N};\ \forall\ c \in \mathbb{N};\ d \geq c\ \text{ é verdadeiro}.\end{aligned}$$

Nesse caso, a última afirmação "$\exists\ d \in \mathbb{N},\ \forall\ c \in \mathbb{N};\ d \geq c$ é verdadeiro," é falsa, pois é falso que existe um número natural d, que é maior que todos os outros naturais. Caso essa afirmação fosse verdadeira, então existiria o número natural d máximo. Portanto, como a última afirmação é falsa, então é falso que $I[H_4] = F$. Concluímos que $I[H_4] = T$. ■

A posição das extensões das interpretações. Observe a posição das extensões no desenvolvimento das equivalências apresentadas no Exemplo 7.22. Inicialmente, temos:

$$I[(\forall x)(\exists y)p(x,y)] = F \Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > I[(\exists y)p(x,y)] = F.$$

Nessa equivalência, é considerado o primeiro quantificador da fórmula $(\forall x)(\exists y)p(x,y)$ e o item 2 da Definição 7.5. Recorde como é a regra semântica estabelecida pelo item 2.

2. $I[(\forall x)H] = F$ se, e somente se, $\exists\ d \in U;\ < x \leftarrow d > I[H] = F$;

Nesse caso, para utilizar essa regra semântica na fórmula H_4, consideramos a fórmula H, que aparece na regra semântica, como igual a $(\exists y)p(x,y)$. Em seguida temos mais uma equivalência:

$$\exists\ d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > I[(\exists y)p(x,y)] = F$$
$$\Leftrightarrow\ \exists\ d \in \mathbb{N};\ \forall\ c \in \mathbb{N};\ < y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x,y)] = F.$$

Ou, equivalentemente:

$$< x \leftarrow d > I[(\exists y)p(x,y)] = F \ \Leftrightarrow\ \forall\ c \in \mathbb{N};\ < y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x,y)] = F.$$

Essa última equivalência é obtida considerando o item 4 da Definição 7.5. Recorde o item 4.

4. $I[(\exists x)H] = F$ se, e somente se, $\forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[H] = F$.

Para aplicar essa regra na fórmula $(\exists y)p(x,y)$, a interpretação I da regra 4, Definição 7.5, é substituída por $< x \leftarrow d > I$ e a fórmula H por $p(x,y)$. Assim, a extensão correspondente a $(\exists y)$ é colocada à esquerda da extensão $< x \leftarrow d >$, sendo obtida a interpretação $< y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I$. Observe que a ordem das extensões, obtidas no desenvolvimento das equivalências, é o inverso da ordem dos quantificadores sintáticos na fórmula. Por outro lado, a ordem dos quantificadores semânticos é a mesma dos quantificadores sintáticos. Além disso, na interpretação da fórmula H_4 não é necessário utilizar que $I[x] = 3$ e $I[y] = 4$, pois as ocorrências de x e y em H_4 são ligadas. Nesse caso, quando $(\forall x)(\exists y)p(x,y)$ é interpretada por I, é utilizada a interpretação estendida $< y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I$ e os valores de $I[x]$ e $I[y]$ não são utilizados, pois $< y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[x] = d$ e $< y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[y] = c$.

Exemplo 7.23 (interpretação de fórmula com quantificadores) . Considere a fórmula:

$$H_5 = H_4 \land H_3,$$

na qual H_4 e H_3 são as fórmulas apresentadas nos Exemplos 7.22 e 7.21, respectivamente. Suponha, também, I a interpretação do Exemplo 7.19. Nesse caso, utilizando a Definição 7.3, item 3, temos $I[H_5] = F$, pois $I[H_4] = T$ e $I[H_3] = F$. Parece simples a interpretação da fórmula H_5. Entretanto, observe que H_5 é uma fórmula da Lógica de Predicados, que contêm quantificadores. Na interpretação de H_5 é utilizada, inicialmente, a regra semântica do item 3 da Definição 7.3. Essa regra é análoga às regras da Lógica Proposicional. Entretanto, a analogia com a Lógica Proposicional para por aí. Pois, para interpretar H_4 e H_3 é necessário considerar as regras semânticas da Definição 7.5. ■

Exemplo 7.24 (quantificadores na mesma variável) Seja I uma interpretação sobre o domínio dos números racionais $\mathbb{Q}^*$, diferentes de zero, tal que $I[a] = 1$, $I[b] = 25$, $I[x] = 13$, $I[y] = 77$, $I[f] = \div$ e $I[p] = <$. Observe que o resultado da interpretação de f é a função divisão, $I[f] = \div$. E essa função é adequadamente definida no conjunto dos racionais diferentes de zero. Isso não ocorreria se o zero fosse incluído, pois não se define a divisão por zero. Além disso:

$$\div : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$$

Nesse sentido, a interpretação I está corretamente definida. Seja H_5 a fórmula $(\forall x)(\exists x)p(x, y)$. Nesse caso, na fórmula H_5, temos dois quantificadores na mesma variável x. Afinal, o x que ocorre em $p(x, y)$ está ligado ao quantificador $(\forall x)$, ou ao quantificador $(\exists x)$? O objetivo deste exemplo e do próximo é esclarecer essa questão. Considere a análise:

$$\begin{aligned}
I[H_5] = T \;&\Leftrightarrow\; I[(\forall x)(\exists x)p(x, y)] = T,\\
&\Leftrightarrow\; \forall\, d \in \mathbb{Q}^*,\ < x \leftarrow d > I[(\exists x)p(x, y)] = T,\\
&\Leftrightarrow\; \forall\, d \in \mathbb{Q}^*,\ \exists\, c \in \mathbb{Q}^*;\ < x \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x, y)] = T,\\
&\Leftrightarrow\; \forall\, d \in \mathbb{Q}^*,\ \exists\, c \in \mathbb{Q}^*;\ c < 77 \ \text{ é verdadeiro},\\
&\Leftrightarrow\; \exists\, c \in \mathbb{Q}^*;\ c < 77 \ \text{ é verdadeiro}.
\end{aligned}$$

Nesse caso, a afirmação: "$\exists\ c \in \mathbb{Q}^*;\ c < 77$ é verdadeiro" é verdadeira, pois é possível escolher $c = 10$ e, nesse caso, $c < 77$ é verdadeira. Uma outra forma de analisar essa afirmação é escrevê-la na forma equivalente "$c < 77$ é verdadeiro para algum $c \in \mathbb{Q}^*$" onde o quantificador semântico $\exists$ é escrito depois da desigualdade. Portanto, como a afirmação final é verdadeira, a suposição inicial $I[H_5] = T$ também é verdadeira. Concluímos que $I[H_5] = T$. ■

Exemplo 7.25 (dois quantificadores na mesma variável) Seja I a interpretação do Exemplo 7.24. Seja H_6 a fórmula $(\exists x)(\forall x)p(x, y)$. Nesse caso, como a fórmula H_5 do Exemplo 7.24, H_6 possui dois quantificadores na mesma variável x. Determinamos, a seguir, que $I[H_6] = F$:

$$\begin{aligned}
I[H_6] = T \;&\Leftrightarrow\; I[(\exists x)(\forall x)p(x, y)] = T,\\
&\Leftrightarrow\; \exists\, d \in \mathbb{Q}^*,\ < x \leftarrow d > I[(\forall x)p(x, y)] = T,\\
&\Leftrightarrow\; \exists\, d \in \mathbb{Q}^*;\ \forall\, c \in \mathbb{Q}^*,\ < x \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x, y)] = T,\\
&\Leftrightarrow\; \exists\, d \in \mathbb{Q}^*,\ \forall\, c \in \mathbb{Q}^*;\ c < 77 \ \text{ é verdadeiro},\\
&\Leftrightarrow\; \forall\, c \in \mathbb{Q}^*;\ c < 77 \ \text{ é verdadeiro}.
\end{aligned}$$

Nesse caso, a afirmação "$\forall\ c \in \mathbb{Q}^*;\ c < 77$ é verdadeiro" é falsa, pois, é claro, existem números racionais maiores que 77. Outra forma de analisar essa afirmação é escrevê-la na forma equivalente "$c < 77$ é verdadeiro para todo $c \in \mathbb{Q}^*$" que é uma afirmação falsa. Logo, como a afirmação final é falsa, a suposição inicial $I[H_6] = T$ também é falsa. Concluímos que $I[H_6] = F$. ■

O escopo dos quantificadores. No Exemplo 7.24, consideramos a fórmula H_5. Nessa fórmula, a variável x em $p(x,y)$ está ligada ao quantificador mais interno $(\exists x)$. Isso ocorre porque, no desenvolvimento da análise de $I[H_5] = T$, temos, no meio do desenvolvimento, o seguinte:

$$\begin{aligned} I[H_5] = T \ &\Leftrightarrow \ \ldots\ldots\ldots \\ &\Leftrightarrow \ \forall\ d\ \in\ \mathbb{Q}^*,\ \exists\ c\ \in\ \mathbb{Q}^*;\ <x \leftarrow c><x \leftarrow d> I[p(x,y)] = T. \end{aligned}$$

Na afirmação "$\forall\ d\ \in\ \mathbb{Q}^*,\ \exists\ c\ \in\ \mathbb{Q}^*;\ <x \leftarrow c><x \leftarrow d> I[p(x,y)] = T$", o átomo $p(x,y)$ é interpretado pela interpretação estendida $<x \leftarrow c><x \leftarrow d> I$. E, como a extensão $<x \leftarrow c>$ tem precedência sobre a extensão $<x \leftarrow d>$, então x é interpretada como c. Além disso, observe que c está ligada ao quantificador semântico $\exists$, que, por sua vez, corresponde ao quantificador sintático $\exists$, que ocorre na fórmula. Portanto, a variável x em $p(x,y)$ é interpretada conforme a semântica do quantificador mais interno da fórmula, que, nesse caso, é o quantificador $\exists$. Conclusão: a variável x em $p(x,y)$ está no escopo de dois quantificadores em x. Porém, essa variável é interpretada conforme a semântica do quantificador mais interno da fórmula. No Exemplo 7.25, temos a fórmula H_6. De forma análoga, a variável x em $p(x,y)$ está ligada ao quantificador mais interno. No caso de H_6, entretanto, esse quantificador é $(\forall x)$. Observe o desenvolvimento de $I[H_6] = T$.

$$\begin{aligned} I[H_6] = T \ &\Leftrightarrow \ \ldots\ldots\ldots \\ &\Leftrightarrow \ \exists\ d\ \in\ \mathbb{Q}^*;\ \forall\ c\ \in\ \mathbb{Q}^*,\ <x \leftarrow c><x \leftarrow d> I[p(x,y)] = T. \end{aligned}$$

Nesse caso, temos a afirmação:
"$\exists\ d\ \in\ \mathbb{Q}^*;\ \forall\ c\ \in\ \mathbb{Q}^*,\ <x \leftarrow c><x \leftarrow d> I[p(x,y)] = T$".
Nessa afirmação, $p(x,y)$ é interpretado por $<x \leftarrow c><x \leftarrow d> I$. Então, x é interpretada como c. Mas, de forma diferente do que acontece em H_5, c está ligada ao quantificador semântico $\forall$, que, por sua vez, corresponde ao quantificador sintático $\forall$, que ocorre na fórmula. Assim, a variável x em $p(x,y)$ é interpretada conforme a semântica do quantificador mais interno da fórmula, que, nesse caso, é o quantificador $\forall$. E, novamente, temos a mesma conclusão. A variável x em $p(x,y)$ está no escopo de dois quantificadores em x, sendo interpretada conforme a semântica do quantificador mais interno da fórmula.

Os quantificadores universal e existencial não são comutativos. De acordo com os Exemplos 7.24 e 7.25, temos que $I[H_5] = T$ e $I[H_6] = F$. Portanto, existe uma interpretação I que interpreta H_5 e H_6 de forma diferente. Logo, tais fórmulas não são equivalentes. Ou seja, a sequência dos quantificadores universal e existencial faz diferença. Em H_5 temos a sequência "$(\forall x)(\exists x)$" e em H_6 a sequência "$(\exists x)(\forall x)$". E, portanto, dizer "para todo x, existe x" não equivale dizer "existe x, para todo x". E essa análise se aplica também a quantificadores em variáveis diferentes. Isto é, "para todo x, existe y" não equivale a "existe x, para todo y", como é analisado no Exemplo 7.26 a seguir.

Exemplo 7.26 (interpretação de variáveis diferentes) Seja I a interpretação do Exemplo 7.24. Considere,

$H_7 = (\exists x)(\forall y)p(x,y)$ e
$H_8 = (\forall x)(\exists y)p(x,y)$.
Suponha, então $I[H_7] = T$. Logo:

$$\begin{aligned}
I[H_7] = T &\Leftrightarrow I[(\exists x)(\forall y)p(x,y)] = T, \\
&\Leftrightarrow \exists\ d\ \in\ \mathbb{Q}^*,\ < x \leftarrow d > I[(\forall y)p(x,y)] = T, \\
&\Leftrightarrow \exists\ d\ \in\ \mathbb{Q}^*;\ \forall\ c\ \in\ \mathbb{Q}^*,\ < y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x,y)] = T, \\
&\Leftrightarrow \exists\ d\ \in\ \mathbb{Q}^*,\ \forall\ c\ \in\ \mathbb{Q}^*;\ d < c \ \text{ é verdadeiro.}
\end{aligned}$$

Nesse caso, a afirmação: "$\exists\ d\ \in\ \mathbb{Q}^*,\ \forall\ c\ \in\ \mathbb{Q}^*;\ d < c$ é verdadeiro" é falsa, pois no conjunto dos racionais diferentes de zero, não existe o menor número. Isto é, não há um racional d que seja menor que todos os outros. Concluímos que $I[H_7] = F$. Suponha, agora, $I[H_8] = T$. Logo:

$$\begin{aligned}
I[H_8] = T &\Leftrightarrow I[(\forall x)(\exists y)p(x,y)] = T, \\
&\Leftrightarrow \forall\ d\ \in\ \mathbb{Q}^*,\ < x \leftarrow d > I[(\exists y)p(x,y)] = T, \\
&\Leftrightarrow \forall\ d\ \in\ \mathbb{Q}^*;\ \exists\ c\ \in\ \mathbb{Q}^*,\ < y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x,y)] = T, \\
&\Leftrightarrow \forall\ d\ \in\ \mathbb{Q}^*,\ \exists\ c\ \in\ \mathbb{Q}^*;\ d < c \ \text{ é verdadeiro.}
\end{aligned}$$

Nesse caso, a afirmação: "$\forall\ d\ \in\ \mathbb{Q}^*,\ \exists\ c\ \in\ \mathbb{Q}^*;\ d < c$ é verdadeiro." é verdadeira, pois no conjunto dos racionais diferentes de zero, para qualquer número d, sempre há outro número c maior. Logo, $I[H_8] = T$. Concluímos, então, que, segundo a interpretação I, temos $I[H_7] = F$ e $I[H_8] = T$. Logo, $(\exists x)(\forall y)p(x,y)$ e $(\forall x)(\exists y)p(x,y)$ são fórmulas com significados diferentes. Isto é, dizer "para todo x, existe y" não equivale dizer "existe x, para todo y". ■

Exemplo 7.27 (pequena mudança na interpretação) Seja I uma interpretação sobre o domínio dos números naturais $\mathbb{N}$, tal que $I[x] = 3$, $I[a] = 0$ e $I[p] = >$. Considere a fórmula H_9 tal que $H_9 = (\forall x)p(x,a)$. Logo, nesse caso, $I[H_9] = F$. Observe:

$$\begin{aligned}
I[H_9] = T &\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x,a)] = T, \\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > I[p(x,a)] = T, \\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N};\ d > 0 \ \text{ é verdadeiro.}
\end{aligned}$$

A última afirmação: "$\forall\ d \in \mathbb{N};\ d > 0$ é verdadeiro" é falsa, pois nem todo número natural d é tal que, $d > 0$ é verdadeiro. Basta fazer, $d = 0$. Logo, é falso que $I[H_9] = T$. Isto é, $I[H_9] = F$ Suponha agora, uma nova interpretação J, que é igual a I, exceto que $J[p] = \geqslant$, no lugar de $I[p] = >$. Essa é uma pequena mudança. Um tracinho a mais no símbolo $>$. Mas, em Lógica, até um pequeno tracinho muda tudo. Veja:

$$\begin{aligned}
J[H_9] = T &\Leftrightarrow J[(\forall x)p(x,a)] = T, \\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > J[p(x,a)] = T, \\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N};\ d \geqslant 0 \ \text{ é verdadeiro.}
\end{aligned}$$

Nesse caso, a última afirmação: "$\forall\ d \in \mathbb{N};\ d \geqq 0$ é verdadeiro" é verdadeira. Logo, $J[H_9] = T$. ■

Tenha cuidado com os detalhes das interpretações. Pequenos detalhes na definição de uma interpretação podem modificar todo o resultado da interpretação de uma fórmula. Conforme o Exemplo 7.27, a simples mudança da interpretação de p, de $I[p] = >$ para $J[p] = \geqslant$, modifica o resultado de $I[H_9] = F$ para $J[H_9] = T$.

Várias possibilidades de desenvolvimento de uma demonstração. No método da negação, ou redução ao absurdo, apresentado no Capítulo 4, observamos que o desenvolvimento de uma demonstração se apresenta com uma única possibilidade de desenvolvimento, quando:

1. interpretamos como falso os conectivos "$\rightarrow$", "$\vee$",
2. interpretamos como verdadeiro o conectivo "$\wedge$", e
3. interpretamos como verdadeiro, ou falso, o conectivo "$\neg$".

Analogamente, temos os mesmos princípios para fórmulas da Lógica de Predicados com estruturas iniciais simples, Definição 7.2. Isto é, dada uma fórmula H e uma interpretação I, desejamos saber se $I[H] = T$, ou $I[H] = F$. Se H é, por exemplo, do tipo $(A \rightarrow B)$, é melhor iniciar o desenvolvimento da prova, considerando $I[H] = F$. Pois nesse caso, temos apenas uma possibilidade no desenvolvimento da demonstração. O mesmo ocorre se H é do tipo $(\forall x)(A \rightarrow B)$. Nesse caso, novamente, se o desenvolvimento da demonstração é iniciado, considerando $I[H] = F$, temos apenas uma possibilidade. Observe:

$$\begin{aligned}
I[H] = F &\Leftrightarrow I[(\forall x)(A \rightarrow B)] = F, \\
&\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > I[(A \rightarrow B)] = F, \\
&\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > I[A] = T \ \text{ e } \ < x \leftarrow d > I[B] = F, \\
&\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Caso contrário, se o desenvolvimento é iniciado, considerando $I[H] = T$, temos mais de uma possibilidade:

$$\begin{aligned}
I[H] = T &\Leftrightarrow I[(\forall x)(A \rightarrow B)] = T, \\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > I[(A \rightarrow B)] = T, \\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > I[A] = T \ \text{ e/ou } \ < x \leftarrow d > I[B] = F, \\
&\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Isso porque temos três possibilidade para o desenvolvimento de:

$$\text{“}< x \leftarrow d > I[A] = T \ \text{ e/ou } \ < x \leftarrow d > I[B] = F\text{”}$$

Exemplo 7.28 (A posição dos quantificadores) Considere a interpretação I sobre o domínio dos números naturais $\mathbb{N}$, tal que $I[x] = 3$, $I[y] = 77$ e $I[p] = <$. Seja a fórmula H_{10}, tal que: $H_{10} = (\forall x)((\exists y)p(x, y) \rightarrow p(x, y))$. Antes de iniciar a análise de $I[H_{10}]$, identificamos os seus símbolos livres. Nesse caso, temos apenas dois símbolos livres: p e y. Observe que a variável y ocorre livre no consequente da implicação. Logo, para determinar $I[H_{10}]$ é necessário utilizar os valores das interpretações $I[p]$ e $I[y]$. Iniciamos a análise a seguir, a partir de $I[H_{10}] = F$. Por quê? A fórmula H_{10} é definida por uma implicação. E a interpretação de uma implicação como falsa determina apenas uma possibilidade de análise, que é o antecedente verdadeiro e o consequente falso. Logo:

$$
\begin{aligned}
I[H_{10}] = F \;&\Leftrightarrow\; I[(\forall x)((\exists y)p(x,y) \to p(x,y))] = F,\\
&\Leftrightarrow\; \exists\ d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > I[(\exists y)p(x,y) \to p(x,y)] = F,\\
&\Leftrightarrow\; \exists\ d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > I[(\exists y)p(x,y)] = T \ \text{ e}\\
&\qquad\qquad\quad < x \leftarrow d > I[p(x,y)] = F,\\
&\Leftrightarrow\; \exists\ d \in \mathbb{N};\ \exists\ c \in \mathbb{N};\ < y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x,y)] = T \ \text{ e}\\
&\qquad\qquad\quad < x \leftarrow d > I[p(x,y)] = F,\\
&\Leftrightarrow\; \exists\ d \in \mathbb{N};\ \exists\ c \in \mathbb{N};\ (d < c) \ \text{ é verdadeiro e } \ (d < 77) \ \text{ é falso.}
\end{aligned}
$$

Como a última afirmação: "$\exists\ d \in \mathbb{N};\ \exists\ c \in \mathbb{N};\ (d < c)$ é verdadeiro e $(d < 77)$ é falso", é verdadeira. Logo, $I[H_{10}] = F$. Considere agora a fórmula H_{11} obtida de H_{10} com uma ligeira modificação na posição dos parênteses. Seja, $H_{11} = (\forall x)(\exists y)(p(x,y) \to p(x,y))$. Observe que nesse caso não temos variáveis livres. Apresentamos, a seguir, a nova análise:

$$
\begin{aligned}
I[H_{11}] = F \;&\Leftrightarrow\; I[(\forall x)(\exists y)(p(x,y) \to p(x,y))] = F,\\
&\Leftrightarrow\; \exists\ d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > I[(\exists y)(p(x,y) \to p(x,y))] = F,\\
&\Leftrightarrow\; \exists\ d \in \mathbb{N}; \forall\ c \in \mathbb{N},\\
&\qquad\qquad\quad < y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x,y) \to p(x,y)] = F,\\
&\Leftrightarrow\; \exists\ d \in \mathbb{N}; \forall\ c \in \mathbb{N},\ \ < y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x,y)] = T \text{ e}\\
&\qquad\qquad\quad < y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x,y)] = F,\\
&\Leftrightarrow\; \exists\ d \in \mathbb{N}; \forall\ c \in \mathbb{N},\ \ (d < c) \ \text{ é verdadeiro e } \ (d < c) \text{ é falso.}
\end{aligned}
$$

A última afirmação "$\exists\ d \in \mathbb{N}; \forall\ c \in \mathbb{N},\ (d < c)$ é verdadeiro e $(d < c)$ é falso" é falsa. É claro que nos naturais não temos um número que seja estritamente menor que todos os outros e, além disso, é falso que tal número é menor que todos os outros. Logo, $I[H_{11}] = T$. Portanto, do ponto de vista semântico, H_{10} e H_{11} expressam conceitos diferentes, dada a mudança do escopo do quantificador $(\exists y)$. ■

Lema 7.1 (interpretação estendida e variável ligada) *Seja H uma fórmula na qual a variável x não ocorre livre. Dada uma interpretação I sobre um domínio U, então $\forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[H] = I[H]$.*

Esquema de demonstração. A demonstração do Lema 7.1 utiliza indução no comprimento das fórmulas e não é considerada neste livro. Entretanto, apresentamos a seguir um esquema informal de demonstração. Seja I uma interpretação qualquer, sobre o domínio U:

$$
\begin{aligned}
\forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[H] = T \;&\Leftrightarrow_1\; \forall\ d \in U,\ I[H] = T,\\
&\Leftrightarrow_2\; I[H] = T.
\end{aligned}
$$

Nesse desenvolvimento, temos duas equivalências: $\Leftrightarrow_1$ e $\Leftrightarrow_2$. A justificativa da primeira, $\Leftrightarrow_1$, é que x não ocorre livre em H. Logo, a extensão, em x, da interpretação I não modifica o resultados da interpretação de H. Isto é, $< x \leftarrow d > I[H] = I[H]$. A justificativa de $\Leftrightarrow_2$ é que a quantificação em d não quantifica nada, pois a constante d não ocorre em H. ■

Exemplo 7.29 (interpretação estendida e variável ligada) O Lema 7.1 diz, por exemplo, que:

$$\forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[(\forall x)p(x)] = I[(\forall x)p(x)].$$

Observe o desenvolvimento a seguir, nesse caso particular:

$$\begin{aligned} < x \leftarrow d > I[(\forall x)p(x)] = T &\Leftrightarrow \forall\ c \in U,\ < x \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x)] = T, \\ &\Leftrightarrow \forall\ c \in U,\ < x \leftarrow c > I[p(x)] = T, \\ &\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)] = T. \end{aligned}$$

Observe que nessas equivalências, é utilizado que
$< x \leftarrow c >< x \leftarrow d > I =< x \leftarrow c > I$. ■

7.7 Tradução de sentenças

Como na Lógica Proposicional, procuramos pela ligação entre a realidade semântica e a sintática. Pela correspondência entre as sentenças do nosso dia a dia e as fórmulas da Lógica de Predicados. Entretanto, como acontece na Lógica Proposicional, na Lógica de Predicados também nem todo conceito semântico pode ser traduzido adequadamente em uma fórmula. Entretanto, mesmo com as dificuldades de uma tradução fiel, vários tipos de sentenças do nosso uso possuem traduções para as fórmulas da Lógica de Predicados, o que tem várias aplicações em inúmeras áreas do conhecimento.

Exemplo 7.30 (tradução de sentenças) É comum dizer que a representação, na Lógica de Predicados, da sentença "Todo homem é mortal" é a fórmula $(\forall x)p(x)$. Entretanto, devemos ter cuidado. Isso porque essa mesma fórmula pode representar a sentença "Todo número é par". Assim, para dizer que $(\forall x)p(x)$ realmente representa "Todo homem é mortal", devemos fornecer mais informação. É necessário dizer em que contexto estamos comunicando e como estamos interpretando o predicado p. Isto é, devemos definir uma interpretação I_1 que faz a associação entre a sentença da língua portuguesa e a fórmula da Lógica de Predicados. Sem a necessária formalidade, a representação não se adequa. Seja, então, uma interpretação I_1 sobre o conjunto das pessoas, tal que:

$I_1[p(x)] = T$, se, e somente se, $I_1[x]$ é mortal.

Nesse caso, então, podemos dizer que a sentença "Todo homem é mortal" é representada, segundo a interpretação I_1, pela fórmula $(\forall x)p(x)$. Mas, a sentença "Todo homem é mortal" pode ser escrita, equivalentemente, em outras formas, como, por exemplo,

1. Qualquer homem é mortal;
2. Os homens são mortais;
3. Se alguma coisa é homem, é um mortal;
4. Qualquer coisa que é homem é mortal;
5. Se algo não é mortal, então não é homem;
6. Todos os não mortais não são homens;
7. Uma coisa é homem somente se é mortal;
8. Somente mortais são homens;
9. Nada é homem, a menos que seja mortal;
10. Nenhum homem é não mortal.

Isso significa que, segundo a interpretação I_1, todas essas sentenças têm a mesma tradução na Lógica de Predicados: $(\forall x)p(x)$. Portanto, para traduzir uma sentença, devemos dizer qual a interpretação estamos considerando. Além disso, como podemos ter sentenças equivalentes, a fórmula da Lógica de Predicados obtida, que traduz a sentença inicial, também pode representar outras sentenças. ■

Exemplo 7.31 (tradução de sentenças) Considere a fórmula $(\forall x)p(x)$. Conforme o Exemplo 7.30, segundo a interpretação I_1, essa fórmula representa a sentença "Todo homem é mortal". Mas, se a interpretação I_1 é modificada, a fórmula pode não representar mais essa sentença. Suponha, por exemplo, a interpretação I_2 sobre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, tal que:

$I_2[p(x)] = T$, se, e somente se, $I_2[x] \geqslant 0$.

Nesse caso, segundo a interpretação I_2, a fórmula $(\forall x)p(x)$ representa a sentença "Todo número natural é maior, ou igual a zero". Além disso, se modificamos a interpretação, uma mesma sentença pode ter mais de uma representação na Lógica de Predicados. Considere, novamente, a sentença "Todo número natural é maior, ou igual a zero" e seja I_3, uma interpretação sobre o domínio dos números reais, $\mathbb{R}$. Considere os predicados q e p tais que:

$I_3[p(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_3} é um número natural,

$I_3[q(x)] = T$ se, e somente se, $x_{I_3} \geqslant 0$.

Nesse caso, a sentença: "Todo número natural é maior, ou igual a zero" é representada pela fórmula $(\forall x)(p(x) \to q(x))$. Observe que a mudança da interpretação modifica a representação na Lógica de Predicados. Portanto, dada uma sentenças, podemos ter mais de uma fórmula que a representa. Por outro lado, dada uma fórmula H, ela pode representar diferentes sentenças. ■

Exemplo 7.32 (tradução de sentenças) Considere a sentença "Nenhuma aranha é um inseto". Para representar essa sentença na Lógica de Predicados, o primeiro passo é definir uma interpretação que a associe a uma fórmula. Seja, então, uma interpretação I_4 sobre o conjunto dos animais. Considere os predicados q e p tais que:

$I_4[p(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_4} é um inseto;
$I_4[q(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_3} é uma aranha.

Nesse caso, a sentença: "Nenhuma aranha é um inseto" é representada pela fórmula $H_1 = \neg(\exists x)(q(x) \wedge p(x))$. A sentença: "Nenhuma aranha é um inseto" pode ser escrita, equivalentemente, em outras formas, como, por exemplo:

1. Todas as aranhas são não insetos;
2. Todos os insetos são não aranhas;
3. Nada que seja inseto pode ser aranha;
4. Nada é aranha a menos que seja inseto;
5. Somente não aranhas é que são insetos;
6. Se algo é aranha, não é inseto;
7. Se algo é inseto, então não é aranha.

Isso significa que, segundo a interpretação I_4, todas essas sentenças têm a mesma tradução na Lógica de Predicados: $\neg(\exists x)(q(x) \wedge p(x))$. Considere, agora, a sentença "Se algo é aranha, não é inseto" e a interpretação I_4. Essa sentença é traduzida, segundo I_4, na fórmula $H_2 = (\forall x)(q(x) \rightarrow \neg p(x))$. Observe algo importante: as fórmulas H_1 e H_2 são diferentes mas representam, segundo I_4, a mesma sentença. Então, é claro, necessariamente, devemos ter que H_1 é equivalente a H_2. Caso contrário, tudo estaria perdido. Demonstramos no próximo capítulo que esse é o caso. Tais fórmulas são equivalentes. ■

7.8 A Aritmética

Nas seções anteriores, em vários exemplos, consideramos a representação de sentenças da Aritmética na Lógica de Predicados. Isso ocorre não por acaso, mas porque o estudo da Aritmética é um dos grandes objetivos da Lógica. Sendo a expressividade e o poder de dedução da Aritmética importantes características, buscadas pela maioria dos sistemas lógicos. Para representar as propriedades aritméticas na Lógica, o primeiro passo é começar por seus conceitos fundamentais. Entre esses conceitos fundamentais, que precedem todos os outros, temos o de número, depois aqueles que definem funções básicas como adição, subtração, multiplicação etc.

7.8.1 Representação dos números naturais

Quando consideramos uma interpretação I sobre os naturais $\mathbb{N}$ tal que $I[a] = 0$, estamos dizendo que o conceito semântico que corresponde ao número zero, corresponde ao símbolo sintático a, que pertence ao alfabeto da Lógica. Observe que não estamos dizendo que $a = 0$. Isso está errado, pois iguala o conceito sintático expresso em "a", ao conceito semântico expresso em "0". Estamos dizendo que a interpretação de a, segundo I, é igual a 0. Pode até existir outra interpretação J, sobre os naturais $\mathbb{N}$, tal que $J[a] = 3$. Nesse caso, o conceito sintático: a, não corresponde mais ao número 0. Ele corresponde ao símbolo semântico 3. Por isso, não podemos dizer que $a = 3$ e nem que $a = 0$. Pois tudo depende da interpretação considerada. Podemos, portanto, até ter um símbolo sintático que corresponde ao número 0. Devemos deixar claro, porém, qual interpretação estamos considerando. Para simplificar essa situação, podemos estabelecer um acordo: escolher uma constante do alfabeto da Lógica, tal que todas as interpretações a interpreta como o número 0. Essa constante poderia ser a, b, ou c, ou outra qualquer. Mas, para simplificar nossa notação, incluímos uma constante especial no alfabeto da Lógica e a denominamos de $\overline{0}$. Observe que o símbolo $\overline{0}$ não é o símbolo semântico 0. Por isso, $\overline{0}$ tem o tracinho em cima. Dessa forma, temos o primeiro passo para definir uma classe especial de interpretações, denominadas modelo padrão.

Seja I uma interpretação sobre $\mathbb{N}$. Se I é um modelo padrão, então:

1. $I[\ \overline{0}\ ] = 0$.

Seguindo essa linha de raciocínio, poderíamos fazer o mesmo para os outros números. Mas, isso exigiria infinitos acordos sobre infinitas constantes. Por isso, usualmente, utilizamos outra forma de representar os outros números. De novo, para simplificar nossa notação, adicionamos mais um símbolo ao alfabeto da Lógica. Tal símbolo é a função sucessor: S. A ideia é que o termo $S(\overline{0})$ seja interpretado, pelo modelo padrão, como o número 1, que $S(S(\overline{0}))$ seja interpretado como o número 2 e assim por diante. Portanto, em um modelo padrão temos:

2. $I[S(\overline{0})] = 1,\ I[S(S(\overline{0}))] = 2,\ I[S(S(S(\overline{0})))] = 3,$
   $I[S(S(S(S(\overline{0}))))] = 4, \ldots,$

Notação. Para denotar o termo $S(\overline{0})$, utilizamos o símbolo $\overline{1}$. Para denotar o termo $S(S(\overline{0}))$, utilizamos o símbolo $\overline{2}$ e assim por diante. Portanto, em geral, se temos n repetições do símbolo S, em $S(S \ldots (S(\overline{0})) \ldots)$, o termo é denotado por $\overline{n}$.

Observe que os símbolos $\overline{1}, \overline{2}, \ldots$ não pertencem ao alfabeto da Lógica. Eles denotam termos da Lógica de Predicados. Portanto, utilizando a notação acima, estamos supondo que para um modelo padrão I, temos: $I[\ \overline{1}\ ] = 1$, $I[\ \overline{2}\ ] = 2$, $I[\ \overline{3}\ ] = 3$, $I[\ \overline{4}\ ] = 4, \ldots,$ Isto é, os símbolos $\overline{1}, \overline{2}, \ldots$ são os numerais que denotam os números naturais $1, 2, \ldots$. Certamente, ao iniciar o estudo da aritmética, você aprendeu a diferença entre números, numerais e algarismos.

Número é a ideia de quantidade que nos vem à mente quando contamos, ordenamos e medimos. Assim, no mundo semântico da Lógica, estamos pensando em números. E, usando esses números, podemos contar quantidades, enumerar posições em uma fila, ou medir o peso de um corpo.

Numeral é a representação sintática de um número, que pode ser escrita, falada ou digitada.

Algarismo é símbolo numérico que usamos para formar os numerais escritos.

Por exemplo, o número 3, da semântica, pode ser representado pelo numeral $S(S(S(\overline{0})))$ da sintaxe. Mas pode também ser representado de muitas outras maneiras. No sistema binário, por exemplo, tem a representação: 11. Além disso, cada representação tem seus algarismos. Podemos usar 1 e 0, como no sistema binário, ou denotá-los por $\overline{1}, \overline{2}, \ldots$, conforme a notação que estamos seguindo.

7.8.2 Representação das operações básicas da aritmética

Já temos uma representação dos números semânticos por algarísmos da sintaxe. Mas, isso, certamente, não basta. Devemos, também, representar as operações básicas da aritmética como adição, multiplicação etc. E para fazer isso, seguimos a mesma estratégia da representação dos números. Ou seja, escolhemos dois símbolos de funções, por exemplo, f e g e fazemos um acordo no qual as interpretações interpretam tais símbolos como adição e multiplicação respectivamente. Supomos, portanto, que para todo modelo padrão I, $I[\ f\ ] = +$ e $I[\ g\ ] = \times$. Em seguida, para facilitar a nossa compreensão, utilizamos a notação a seguir.

Notação. Para denotar a função adição f, utilizamos o símbolo $\widehat{+}$ e para denotar a função multiplicação g, utilizamos o símbolo $\widehat{\times}$.

Novamente, observe que os símbolos $\widehat{+}$ e $\widehat{\times}$ não pertencem ao alfabeto da Lógica. Eles denotam, respectivamente, as funções adição e multiplicação. Assim, utilizando essa notação, temos a definição. Nesse sentido, um modelo padrão é tal que.

3. $I[\ \widehat{+}\ ] = +$;
4. $I[\ \widehat{\times}\ ] = \times$.

Além disso, as funções $\widehat{+}$ e $\widehat{\times}$ são utilizadas na notação infixa e não prefixa. Isto é, escrevemos, por exemplo, $(x \mathbin{\widehat{+}} y)$ e não $\widehat{+}(x, y)$. Da mesma forma, escrevemos, por exemplo, $(x \mathbin{\widehat{\times}} y)$ e não $\widehat{\times}(x, y)$. Dada essa representação da adição e multiplicação, temos a representação das operações semânticas de adição e multiplicação. Nesse sentido, a interpretação pelo modelo padrão é tal que:

5. $I[S(x)] = I[x] + 1$;
6. $I[(x \mathbin{\widehat{+}} y)] = I[x] + I[y]$;
7. $I[(x \mathbin{\widehat{\times}} y)] = I[x] \times I[y]$.

Os itens acima devem ser lidos com cuidado. Observe que $(x \mathbin{\widehat{+}} y)$ é um termo da sintaxe que é interpretado, por um modelo padrão I, como: $I[x] + I[y]$. Da mesma forma, $(x \mathbin{\widehat{\times}} y)$ é um termo da sintaxe que é interpretado por um modelo padrão I como: $I[x] \times I[y]$. E, para diferenciar, de forma clara, os símbolos da sintaxe e da semântica, utilizamos os símbolos $\widehat{+}$ e $\widehat{\times}$ para sintaxe e $+$ e $\times$ para semântica.

7.8.3 Representação de propriedades da aritmética

Para representar uma propriedade aritmética como, por exemplo, que todo número é divisível por 2, ou que os números primos não possuem divisores diferentes de 1 e dele próprio, em geral, temos que utilizar um predicado que representa a igualdade. Nesse sentido, o nosso próximo passo é um acordo entre as interpretações para interpretar um símbolo de predicado, específico, como a igualdade. O raciocínio utilizado é análogo aquele que define as operações adição e multiplicação. Isto é, escolhemos um símbolo de predicado, p por exemplo, e o interpretamos como a igualdade. Entretanto, para facilitar nossa compreensão, denotamos tal símbolo de predicado por $\widehat{=}$. E, nesse caso, supomos que o símbolo de igualdade é interpretado pelo modelo padrão I como:

8. se t_1 e t_2 são termos, então $I[(t_1 \mathrel{\widehat{=}} t_2)] = T \;\Leftrightarrow\; I[t_1] = I[t_2]$;
9. $I[(\forall x)(x \mathrel{\widehat{=}} x)] = T$;
10. para toda fórmula $H(x)$, $I[(x \mathrel{\widehat{=}} y) \rightarrow (H(x) \mathrel{\widehat{=}} H(y))] = T$.

Temos, portanto, mais dois itens na definição de modelo padrão. Isto é, todas as interpretações modelo padrão interpretam o predicado $\widehat{=}$ de forma especial. Juntando todas as partes que compõem a definição de um modelo padrão, temos.

Definição 7.6 (modelo padrão) *Seja I uma interpretação sobre $\mathbb{N}$. I é um modelo padrão se, e somente se:*

1. $I[\ \overline{0}\ ] = 0$;
2. $I[S(\overline{0})] = 1,\ I[S(S(\overline{0}))] = 2,\ I[S(S(S(\overline{0})))] = 3,$
   $I[S(S(S(S(\overline{0}))))] = 4, \ldots,$;
3. $I[\ \widehat{+}\ ] = +$;
4. $I[\ \widehat{\times}\ ] = \times$;
5. $I[S(x)] = I[x] + 1$;
6. $I[(x \mathbin{\widehat{+}} y)] = I[x] + I[y]$;
7. $I[(x \mathbin{\widehat{\times}} y)] = I[x] \times I[y]$;
8. *se t_1 e t_2 são termos, então* $I[(t_1 \mathrel{\widehat{=}} t_2)] = T \;\Leftrightarrow\; I[t_1] = I[t_2]$;
9. $I[(\forall x)(x \mathrel{\widehat{=}} x)] = T$;
10. *para toda fórmula $H(x)$,* $I[(x \mathrel{\widehat{=}} y) \rightarrow (H(x) \mathrel{\widehat{=}} H(y))] = T$.

Considerando essa interpretação do modelo padrão, podemos representar algumas propriedades da aritmética, como é indicado nos exemplos a seguir.

Exemplo 7.33 (números pares) Considere a fórmula H_{par}, tal que: $H_{par} = (\exists x)(\overline{2} \mathbin{\widehat{\times}} x \mathrel{\widehat{=}} y)$. Na fórmula H_{par}, a variável y ocorre livre e para enfatizar tal fato, usamos a notação $H_{par}(y)$. Temos, então, que para todo modelo padrão I, se $I[y] = n$, então $I[H_{par}(y)] = T, \;\Leftrightarrow\; n$ é um número par. Veja a demonstração desse fato:

$$
\begin{aligned}
I[H_{par}] = T &\Leftrightarrow I[(\exists x)(\overline{2} \mathbin{\widehat{\times}} x \mathrel{\widehat{=}} y)] = T, \\
&\Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > I[(\overline{2} \mathbin{\widehat{\times}} x \mathrel{\widehat{=}} y)] = T, \\
&\Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{N};\ (2 \times d = y_I) \text{ é verdadeiro}, \\
&\Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{N};\ (2 \times d = n) \text{ é verdadeiro}.
\end{aligned}
$$

Nesse caso, a última afirmação "$\exists\ d \in \mathbb{N};\ (2 \times d = n)$ é verdadeiro" é verdadeira se, e somente se, n é um número par. Portanto, se $I[y] = n$, então $I[H_{par}(y)] = T$, $\Leftrightarrow$ n é um número par. Conclusão: a fórmula $H_{par}(y)$ expressa a propriedade dos números pares. Ou, dito de outra forma, $H_{par}(y)$ possui o conjunto dos números pares como sua extensão. ■

Exemplo 7.34 (números ímpares) Se temos uma fórmula que expressa os números pares, a sua negação expressa os números ímpares. Considere a fórmula H_{impar}, tal que:

$$H_{impar} = \neg H_{par} = \neg(\exists x)(\overline{2} \mathbin{\widehat{\times}} x \mathbin{\widehat{=}} y).$$

Temos, então, que para todo modelo padrão I:

Se $I[y] = n$, então $I[H_{impar}(y)] = T$, $\Leftrightarrow$ n é um número ímpar. ■

Exemplo 7.35 (números primos) Considere a fórmula H_{primo}, tal que:

$$H_{primo} = \neg(x \mathbin{\widehat{=}} \overline{1}) \wedge (\forall y)(\forall z)(((y \mathbin{\widehat{\times}} z) \mathbin{\widehat{=}} x) \rightarrow ((y \mathbin{\widehat{=}} \overline{1}) \vee (z \mathbin{\widehat{=}} \overline{1})))$$

Na fórmula H_{primo}, a variável x ocorre livre e para enfatizar tal fato, como no Exemplo 7.33, usamos a notação $H_{primo}(x)$. Temos, então, que para todo modelo padrão I:

Se $I[x] = n$, então $I[H_{primo}(x)] = T$, $\Leftrightarrow$ n é um número primo.

Veja a demonstração desse fato:

$I[\ H_{primo}] = T$

$\Leftrightarrow$ $I[\neg(x \mathbin{\widehat{=}} \overline{1}) \wedge (\forall y)(\forall z)(((y \mathbin{\widehat{\times}} z) \mathbin{\widehat{=}} x) \rightarrow ((y \mathbin{\widehat{=}} \overline{1}) \vee (z \mathbin{\widehat{=}} \overline{1})))] = T$,

$\Leftrightarrow$ $I[\neg(x \mathbin{\widehat{=}} \overline{1})] = T$ e
$I[(\forall y)(\forall z)(((y \mathbin{\widehat{\times}} z) \mathbin{\widehat{=}} x) \rightarrow ((y \mathbin{\widehat{=}} \overline{1}) \vee (z \mathbin{\widehat{=}} \overline{1})))] = T$,

$\Leftrightarrow$ $I[\neg(x \mathbin{\widehat{=}} \overline{1})] = T$ e
$\forall\ d \in \mathbb{N};\ < y \leftarrow d > I[(\forall z)(((y \mathbin{\widehat{\times}} z) \mathbin{\widehat{=}} x) \rightarrow ((y \mathbin{\widehat{=}} \overline{1}) \vee (z \mathbin{\widehat{=}} \overline{1})))] = T$,

$\Leftrightarrow$ $I[\neg(x \mathbin{\widehat{=}} \overline{1})] = T$ e
$\forall\ d \in \mathbb{N},\ \forall\ c \in \mathbb{N};$
$< z \leftarrow c >< y \leftarrow d > I[((y \mathbin{\widehat{\times}} z) \mathbin{\widehat{=}} x) \rightarrow ((y \mathbin{\widehat{=}} \overline{1}) \vee (z \mathbin{\widehat{=}} \overline{1}))] = T$,

$\Leftrightarrow$ $(n \neq 1)$ e
$\forall\ d \in \mathbb{N},\ \forall\ c \in \mathbb{N};$ se $((d \times c) = n)$, então $((d = 1)$ ou $(c = 1))$.

A última afirmação:

"$(n \neq 1)$ e $\forall\ d \in \mathbb{N},\ \forall\ c \in \mathbb{N};$ se $((d \times c) = n)$, então $((d = 1)$ ou $(c = 1))$"

é verdadeira se, e somente se, n é um número primo. Portanto, se $I[x] = n$, então:

$I[H_{primo}(x)] = T$, $\Leftrightarrow$ n é um número primo.

Conclusão: a fórmula $H_{primo}(x)$ expressa a propriedade dos números primos. Dizemos que essa fórmula expressa o conjunto dos números primos como sua extensão.
■

Exemplo 7.36 (predicado $\leqq$) Considere a fórmula $H_{\leqq}$, tal que:
$H_{\leqq} = (\exists z)(z \mathbin{\widehat{+}} x \mathrel{\widehat{=}} y)$. Na fórmula $H_{\leqq}$, as variáveis x e y ocorrem livres. Usamos, então, para dar ênfase, a notação $H_{\leqq}(x, y)$. Nesse caso, para todo modelo padrão I:
Se $I[x] = n$ e $I[y] = m$, então $I[H_{\leqq}(x, y)] = T$, $\Leftrightarrow$ $(n \leqq m)$. ■

7.8.4 A Aritmética de Robinson

A Aritmética de Robinson, denominada Aritmética básica, tem como fundamento sintático a linguagem da Lógica de Predicados, tal que:

1. o alfabeto contém, além dos símbolos usuais, os símbolos $\overline{0}, S, \widehat{+}$ e $\widehat{\times}$, ou
2. o alfabeto contém apenas os símbolos usuais, mas existe nesse alfabeto os símbolos a, f, g, h e p tais que para todo modelo padrão I, temos: $I[a] = 0$, $I[f] =$ função sucessor, $I[g] = +$, $I[h] = \times$, e $I[p] =$ " $=$". Nesse caso, denotamos a por $\overline{0}$, f por S, g por $\widehat{+}$, h por $\widehat{\times}$ e p por $\widehat{=}$.

Isto é, o alfabeto dessa aritmética é igual ao alfabeto da Definição 6.1 do Capítulo 6, mais $\overline{0}$, ou a, que representa o número 0, S, ou f, que representa a função sucessor. Há também os símbolos para as operações aritméticas básicas: $\widehat{+}$, ou g, que representa a adição e $\widehat{\times}$, ou h, que representa a multiplicação. Além disso, temos um símbolo de predicados para representar a igualdade. Portanto, a Aritmética de Robinson é uma aritmética definida a partir da Lógica de Predicados, mas tendo a adição de alguns símbolos ao alfabeto, ou alguma restrição sobre suas interpretações dos símbolos já existentes. Para facilitar o entendimento da semântica de tais símbolos, conforme a Definição 7.6, há um acordo entre as interpretações sobre os naturais $\mathbb{N}$ e todas elas interpretam os símbolos aritméticos como gostaríamos que fosse. Isto é, $\overline{0}$ representa o número 0, S representa a função sucessor, $\widehat{+}$ a função de adição, $\widehat{\times}$ a multiplicação e $\widehat{=}$ a igualdade. Nesse sentido, podemos dizer que a Aritmética de Robinson é um sistema lógico com identidade, denotada pelo infixo "$\widehat{=}$". Além disso, nesse sistema temos várias constantes, que formam o conjunto dos números naturais. Em destaque especial, temos a constante $\overline{0}$, chamada de zero. Existe ainda três operações sobre o conjunto dos naturais. Uma operação unária chamada sucessor e denotada pelo prefixo S. E duas operações binárias, adição e multiplicação, denotadas pelos infixos $\widehat{+}$ e $\widehat{\times}$, respectivamente. Além dessas características, a Aritmética de Robinson tem também alguns princípios fundamentais, que expressam propriedades básicas dos números e das operações de adição e multiplicação. Os princípios fundamentais da Aritmética de Robinson são definidos a seguir:

1. $Bx_1 = (\forall x)\neg(\overline{0} \mathrel{\widehat{=}} S(x))$;
2. $Bx_2 = (\forall x)(\forall y)((S(x) \mathrel{\widehat{=}} S(y)) \rightarrow (x \mathrel{\widehat{=}} y)$;
3. $Bx_3 = (\forall x)(\neg(x \mathrel{\widehat{=}} \overline{0}) \rightarrow (\exists y)(x \mathrel{\widehat{=}} S(y))$;
4. $Bx_4 = (\forall x)((x \mathbin{\widehat{+}} \overline{0}) \mathrel{\widehat{=}} x)$;
5. $Bx_5 = (\forall x)(\forall y)((x \mathbin{\widehat{+}} S(y)) \mathrel{\widehat{=}} S(x \mathbin{\widehat{+}} y))$;

6. $Bx_6 = (\forall x)((x \mathbin{\widehat{\times}} \overline{1}) \mathrel{\widehat{=}} \overline{x})$;
7. $Bx_7 = (\forall x)(\forall y)((x \mathbin{\widehat{\times}} S(y)) \mathrel{\widehat{=}} ((x \mathbin{\widehat{\times}} y) \mathbin{\widehat{+}} x))$.

Observe que tais princípios definem algumas propriedades que aprendemos, bem cedo, na escola fundamental.

Propriedade 1. Essa propriedade diz que o número 0 é diferente de todos os outros números naturais.

Propriedade 2. Essa propriedade diz que se os sucessores de x e y são iguais, então x e y são iguais.

Propriedade 3. Essa propriedade diz que se um número não é zero, então ele é o sucessor de outro número.

Propriedade 4. Essa propriedade diz que o número $\overline{0}$ é o elemento neutro da adição.

Propriedade 5. Essa propriedade define uma forma recursiva de efetuar a adição. Conforme essa propriedade, a soma de x e Sy é efetuada primeiro somando x e y e depois determinando o sucessor de $x \widehat{+} y$. Veja um exemplo:

$$\begin{aligned}
\overline{3} \mathbin{\widehat{+}} \overline{3} &\mathrel{\widehat{=}} S(\overline{3} \mathbin{\widehat{+}} \overline{2}) \\
&\mathrel{\widehat{=}} S(S(\overline{3} \mathbin{\widehat{+}} \overline{1})) \\
&\mathrel{\widehat{=}} S(S(S(\overline{3} \mathbin{\widehat{+}} \overline{0}))) \\
&\mathrel{\widehat{=}} S(S(S(\overline{3}))) \\
&\mathrel{\widehat{=}} S(S(\overline{4})) \\
&\mathrel{\widehat{=}} S(\overline{5}) \\
&\mathrel{\widehat{=}} \overline{6}
\end{aligned}$$

Propriedade 6. Essa propriedade diz que o número $\overline{1}$ é o elemento neutro da adição.

Propriedade 7. Essa propriedade define uma forma recursiva de efetuar a multiplicação. Conforme essa propriedade, a multiplicação de x e Sy é efetuada primeiro multiplicando x e y e depois, somando o resultado com x. Veja um exemplo:

$$\begin{aligned}
\overline{3} \mathbin{\widehat{\times}} \overline{3} &\mathrel{\widehat{=}} (\overline{3} \mathbin{\widehat{\times}} \overline{2}) \mathbin{\widehat{+}} \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} ((\overline{3} \mathbin{\widehat{\times}} \overline{1}) \mathbin{\widehat{+}} \overline{3}) \mathbin{\widehat{+}} \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} (\overline{3} \mathbin{\widehat{+}} \overline{3}) \mathbin{\widehat{+}} \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} \overline{6} \mathbin{\widehat{+}} \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} \overline{9}
\end{aligned}$$

7.8.5 Definições recursivas na Aritmética de Robinson.

Nas propriedades 6 e 7, da Aritmética de Robinson, a multiplicação de dois números é definida recursivamente utilizando a adição. Em outras palavras, para efetuar a operação $(x \mathbin{\widehat{\times}} S(y))$, primeiro efetuamos a operação $(x \mathbin{\widehat{\times}} y)$ e em seguida adicionamos o resultado a x. Nesse caso, o nosso objetivo é $(x \mathbin{\widehat{\times}} S(y))$. Então, tal objetivo é reduzido a um mais simples $(x \mathbin{\widehat{\times}} y)$, dado que $S(y)$ é substituído por um número menor: y. E tendo o resultado $(x \mathbin{\widehat{\times}} y)$, utilizamos a definição da adição para calcular $(x \mathbin{\widehat{\times}} y) \mathbin{\widehat{+}} x$. Na sequência, para calcular $(x \mathbin{\widehat{\times}} y)$, o raciocínio se repete. Ou seja, reduzimos $(x \mathbin{\widehat{\times}} y)$ ao cálculo de $(x \mathbin{\widehat{\times}} z)$, tal que $S(z) = y$. E dado o resultado $(x \mathbin{\widehat{\times}} z)$, nós o adicionamos a x. Portanto, nesse sentido, a multiplicação por $(x \widehat{\times} y)$ é obtida fazendo a multiplicação de x por z e depois adicionando x ao resultado.

Exemplo 7.37 (função fatorial) No Exemplo 6.17, do Capítulo 6, apresentamos o programa lógico

1. $p(a, b) \leftarrow$

2. $p(f(x), y) \leftarrow p(x, z), q(g(f(x), z), y)$

O significado desse programa, evidentemente, depende da interpretação de seus símbolos livres. Considere, então, o modelo padrão da Aritmética, no qual temos: $I[a] = 0$, $I[b] = 1$, $I[g] = \times$, $I[f] =$ função sucessor e $I[q] =$ predicado de igualdade. Então, com a notação da Aritmética básica, temos o programa lógico:

1. $p(\overline{0}, \overline{1}) \leftarrow$

2. $p(S(x), y) \leftarrow p(x, z), (y \mathrel{\widehat{=}} (S(x) \mathbin{\widehat{\times}} z))$

Nesse caso, para todo modelo padrão I, $I[p(\overline{n}, \overline{m})] = T$ se, e somente se, $(m = n!)$. Isto é, m é igual ao fatorial de n. Em geral, para ficar mais clara a intenção semântica, escrevemos p_{fat} no lugar do símbolo p. Temos, portanto, o programa:

1. $p_{fat}(\overline{0}, \overline{1}) \leftarrow$

2. $p_{fat}(S(x), y) \leftarrow p_{fat}(x, z), (y \mathrel{\widehat{=}} (S(x) \mathbin{\widehat{\times}} z))$

A primeira linha desse programa diz que $0! = 1$. E a segunda linha diz que $(x + 1)! = x! \times x$. Observe que o predicado p_{fat} é definido recursivamente, pois $p_{fat}(S(x), y)$ é definido em função de um caso mais simples: $p_{fat}(x, y)$, no qual "'ser mais simples" significa considerar números menores. Analogamente, podemos definir a função fatorial utilizando o programa iterativo.

Function $fact(n)$

1. $fact = 1$
2. For $y = 0$ to $(n - 1)$
3. Do $fact = (fact \times S(y))$
4. Loop

Essa ideia pode ser generalizada. Isto é, dada a definição recursiva de uma função, como se segue:

1. $f(\overline{0}) \mathrel{\widehat{=}} a$

2. $f(S(x)) \widehat{=} h(y, f(x))$

ela pode ser programada na forma iterativa, utilizando a instrução "*for - to*":

1. $func = a$
2. For $x = 0$ to $(n-1)$
3. Do $func = h(x, func(x))$
4. Loop

■

Essa técnica de definições recursivas de funções e predicados pode ser usada para definir outras operações.

Exemplo 7.38 (função exponencial) A função exponencial é definida recursivamente a seguir. Nesse caso, utilizamos o símbolo $\uparrow$ para representar a função exponencial. Isto é, nessa notação temos, por exemplo, que $\overline{2}^{\overline{3}}$ é denotado por $\overline{2} \uparrow \overline{3}$.

1. $(\forall x)((x \uparrow \overline{0}) \widehat{=} \overline{1})$
2. $(\forall x)(\forall y)((x \uparrow S(y)) \widehat{=} ((x \uparrow y) \widehat{\times} x))$

Conforme essa definição, temos que, para todo x, $(x \uparrow \overline{0}) \widehat{=} \overline{1}$. Isto é, para qualquer x, x elevado a $\overline{0}$ é igual a $\overline{1}$. Veja, agora, um exemplo de cálculo utilizando a função exponencial.

$$\begin{aligned}
\overline{3} \uparrow \overline{3} &\widehat{=} (\overline{3} \uparrow \overline{2}) \widehat{\times} \overline{3} \\
&\widehat{=} ((\overline{3} \uparrow \overline{1}) \widehat{\times} \overline{3}) \widehat{\times} \overline{3} \\
&\widehat{=} (((\overline{3} \uparrow \overline{0}) \widehat{\times} \overline{3}) \widehat{\times} \overline{3}) \widehat{\times} \overline{3} \\
&\widehat{=} ((\overline{1} \widehat{\times} \overline{3}) \widehat{\times} \overline{3}) \widehat{\times} \overline{3} \\
&\widehat{=} (\overline{3} \widehat{\times} \overline{3}) \widehat{\times} \overline{3} \\
&\widehat{=} \overline{9} \widehat{\times} \overline{3} \\
&\widehat{=} \overline{27}
\end{aligned}$$

O programa lógico correspondente à exponenciação é dado a seguir.

1. $p_{\uparrow}(\overline{x}, \overline{0}, \overline{1}) \leftarrow$

2. $p_{\uparrow}(x, S(y), z) \leftarrow p_{\uparrow}(x, y, w), (z \widehat{=} (w \widehat{\times} x))$

Como no caso da função fatorial, podemos definir a função exponencial, utilizando o programa iterativo.

Function $exp(m, n)$

1. $exp = 1$
2. For $y = 1$ to n
3. Do $fact = (fact \times m)$

4. Loop

Logo, nesse caso, $exp(m, n) = m^n$. ■

Observe que o item 2 da definição recursiva da função exponencial $\uparrow$, dada por

2. $(\forall x)(\forall y)((x \uparrow S(y)) \widehat{=} ((x \uparrow y) \widehat{\times} x))$

pode ser obtida de Bx_7:

7. $Bx_7 = (\forall x)(\forall y)((x \widehat{\times} S(y)) \widehat{=} ((x \widehat{\times} y) \widehat{+} x))$,

substituindo, em Bx_7, a multiplicação $\widehat{\times}$ pela exponenciação $\uparrow$ e a adição $\widehat{+}$ pela multiplicação $\widehat{\times}$. Analogamente, Bx_7 pode ser obtida de Bx_5:

5. $Bx_5 = (\forall x)(\forall y)((x \widehat{+} S(y)) \widehat{=} S(x \widehat{+} y))$,

substituindo a adição $\widehat{+}$ pela multiplicação $\widehat{\times}$ e a função sucessor S pela adição $\widehat{+}$.

Nesse sentido, temos uma sequência de substituições que começam com os símbolos $\{S, \ \widehat{+}\}$ em Bx_5. Depois os símbolos $\{\widehat{+}, \ \widehat{\times}\}$ em Bx_6. Na sequência, os símbolos $\{\widehat{\times}, \ \uparrow\}$ na função Exp. Preste atenção na sequência:

1. Bx_5, símbolos $\{S, \ \widehat{+}\}$;
2. Bx_7, símbolos $\{\widehat{+}, \ \widehat{\times}\}$;
3. Exp, símbolos $\{\widehat{\times}, \ \uparrow\}$.

Essa sequência pode ser aumentada, considerando outras funções, que são definidas de forma análoga à função Exp. Considere, por exemplo, mais duas funções $Exp \Uparrow$ e $Exp \uparrow\uparrow$. Nesse caso, a sequência anterior continua como indicado a seguir:

1. Bx_5, símbolos $\{S, \ \widehat{+}\}$;
2. Bx_7, símbolos $\{\widehat{+}, \ \widehat{\times}\}$;
3. Exp, símbolos $\{\widehat{\times}, \ \uparrow\}$;
4. $Exp \Uparrow$, símbolos $\{\uparrow, \ \Uparrow\}$;
5. $Exp \uparrow\uparrow$, símbolos $\{\Uparrow, \ \uparrow\uparrow\}$.

Como a função exponencial $\uparrow$, as funções $Exp \Uparrow$ e $Exp \uparrow\uparrow$ podem ser definidas recursivamente.

Exemplo 7.39 (funções $Exp \Uparrow$ e $Exp \uparrow\uparrow$) A função $Exp \Uparrow$ é definida, recursivamente, por:

1. $(\forall x)((x \Uparrow \overline{0}) \widehat{=} x)$
2. $(\forall x)(\forall y)((x \Uparrow S(y)) \widehat{=} ((x \Uparrow y) \uparrow x))$

A função $Exp \uparrow\uparrow$ é definida, recursivamente, por:

1. $(\forall x)((x \uparrow\uparrow \overline{0}) \widehat{=} x)$
2. $(\forall x)(\forall y)((x \uparrow\uparrow S(y)) \widehat{=} ((x \uparrow\uparrow y) \Uparrow x))$

Considere, então, o cálculo $(\overline{3} \Uparrow \overline{3})$:

$$
\begin{aligned}
\overline{3} \Uparrow \overline{3} &\mathrel{\widehat{=}} (\overline{3} \Uparrow \overline{2}) \uparrow \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} ((\overline{3} \Uparrow \overline{1}) \uparrow \overline{3}) \uparrow \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} (((\overline{3} \Uparrow \overline{0}) \uparrow \overline{3}) \uparrow \overline{3}) \uparrow \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} ((\overline{3} \uparrow \overline{3}) \uparrow \overline{3}) \uparrow \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} (\overline{27} \uparrow \overline{3}) \uparrow \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} \overline{20.412} \uparrow \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} \overline{8,50365 \times 10^{12}}
\end{aligned}
$$

Sem dúvida, esse número é muito grande. Veja, agora, o cálculo $(\overline{3} \upuparrows \overline{3})$, a seguir.

$$
\begin{aligned}
\overline{3} \upuparrows \overline{3} &\mathrel{\widehat{=}} (\overline{3} \upuparrows \overline{2}) \Uparrow \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} ((\overline{3} \upuparrows \overline{1}) \Uparrow \overline{3}) \Uparrow \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} (((\overline{3} \upuparrows \overline{0}) \Uparrow \overline{3}) \Uparrow \overline{3}) \Uparrow \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} ((\overline{3} \Uparrow \overline{3}) \Uparrow \overline{3}) \Uparrow \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} (\overline{8,50365 \times 10^{12}} \Uparrow \overline{3}) \Uparrow \overline{3}
\end{aligned}
$$

O número $(\overline{3} \upuparrows \overline{3})$ é inacreditavelmente grande. É até difícil imaginar seu tamanho. ■

Podemos continuar com o raciocínio do Exemplo 7.39 e definir a função de Ackermann. Para defini-la, inicialmente, enumeramos as operações aritméticas $\widehat{+}$, $\widehat{\times}$, $\uparrow$, $\Uparrow$, $\upuparrows$ e assim por diante.

1. $\widehat{+}$: função número 1,
2. $\widehat{\times}$: função número 2,
3. $\uparrow$: função número 3,
4. $\Uparrow$: função número 4,
5. $\upuparrows$: função número 5,
6. $\uparrow_6$: função número 6,
7. $\uparrow_7$: função número 7,
8. ....,
9. $\uparrow_n$: função número n.

e assim por diante. Dessa forma, as funções $\uparrow_6$ e $\uparrow_7$, por exemplo, são definidas como no Exemplo 7.40.

Exemplo 7.40 (funções $\uparrow_6$ e $\uparrow_7$) A função $\uparrow_6$ é definida, recursivamente, por:

1. $(\forall x)((x \uparrow_6 \overline{0}) \mathrel{\widehat{=}} x)$
2. $(\forall x)(\forall y)((x \uparrow_6 S(y)) \mathrel{\widehat{=}} ((x \uparrow_6 y) \upuparrows x))$

A função $\uparrow_7$ é definida, recursivamente, por:

1. $(\forall x)((x \uparrow_7 \overline{0}) \mathrel{\widehat{=}} x)$

2. $(\forall x)(\forall y)((x \uparrow_7 S(y)) \hat{=} ((x \uparrow_7 y) \uparrow_6 x))$

. ■

Definição 7.7 (função de Ackermann) *A função de Ackermann, denotada por f_{ak}, é uma função ternária definida, recursivamente, como se segue:*

1. $(\forall x)(\forall z)(f_{ak}(x, \overline{0}, z) \hat{=} x)$;
2. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(f_{ak}(x, y, z) \hat{=} ((x \uparrow_z y)$.

Imagine agora, para efeito de raciocínio, por exemplo, o valor da função: $f_{ak}(\overline{100}, \overline{100}, \overline{100})$. Se o número $(\overline{3} \quad \Uparrow \quad \overline{3})$ já é muito grande, conceber a dimensão do número $f_{ak}(\overline{100}, \overline{100}, \overline{100})$ é algo muito mais difícil. Entretanto, isso nos mostra algo importante. A sentença aritmética $f_{ak}(\overline{100}, \overline{100}, \overline{100})$ expressa, de forma bem concisa, um número enorme. Isto é, a Aritmética básica tem uma alta capacidade expressiva o que é uma das suas principais propriedades.

7.8.6 A linguagem da Aritmética básica

Não há um consenso sobre o que é a linguagem da Aritmética básica, pois na literatura encontramos variações sobre o que poderia ser tal linguagem [Smith], [Barwise], [Dalen], [Marker], [Mendelson] e [Shoenfield]. Entretanto, considerando, neste livro, a linguagem a seguir.

Definição 7.8 (linguagem da Aritmética básica) *A linguagem da Aritmética básica, denotada por $\mathbb{L}_a$, é uma linguagem interpretada tal que:*

1. *A linguagem de $\mathbb{L}_a$ e a linguagem da Lógica de Predicados, na qual incluímos os símbolos aritméticos: $\overline{0}$, S, $\widehat{+}$ e $\widehat{\times}$;*
2. *A interpretação dos símbolos extras de $\mathbb{L}_a$ é dada por um modelo padrão, Definição 7.6.*

A linguagem da Aritmética básica é quase igual à linguagem da Lógica de Predicados mais alguns símbolos extras, utilizados para representar elementos fundamentais da Aritmética. Isto é, $\mathbb{L}_a$ contém todos os símbolos da linguagem da Lógica de Predicados, além dos símbolos aritméticos.

Símbolos lógicos. Os símbolos usuais da Lógica de Predicados são denominados símbolos lógicos.

Símbolos não lógicos. Os símbolos que não são usuais na Lógica de Predicados são denominados símbolos não lógicos. Entre esses símbolos temos, por exemplo, os símbolos aritméticos $\overline{0}$, S, $\widehat{+}$ e $\widehat{\times}$.

7.8.7 A interpretação da Aritmética básica

Conforme a Definição 7.8, a linguagem da Aritmética básica, denotada por $\mathbb{L}_a$, possui os símbolos não lógicos $\overline{0}$, S, $\widehat{+}$ e $\widehat{\times}$. Tais símbolos são interpretados por modelos padrão na forma usual. Isto é, em $\mathbb{L}_a$, supomos que para todo modelo padrão I, temos, por exemplo, que $I[(\overline{1} \mathrel{\widehat{+}} \overline{2}) \mathrel{\widehat{=}} \overline{3}] = T$. Em outras palavras, interpretamos $(\overline{1} \mathrel{\widehat{+}} \overline{2}) \mathrel{\widehat{=}} \overline{3}$ como deveria ser: $(2 + 3) = 5$. À primeira vista, isso parece apenas dizer a mesma coisa, com palavras diferentes. Poderia até dizer que, dessa forma, as sentenças em $\mathbb{L}_a$ não expressam nada de novo. Nesse sentido, veja o que é dito por [Smith]. A interpretação da Aritmética básica *"explicit defines what it takes for any $\mathbb{L}_a$-sentence, however complex, to be true in this humdrum sense."*[4] Isto é, a interpretação da Aritmética básica define explicitamente a interpretação das sentenças como elas deveriam ser. E nada de novo, ou interessante, parece acontecer. Além disso, observe que parece estranho falar de um acordo entre as interpretações. Um acordo tal que todas as interpretações, que são modelos padrão, interpretam os símbolos não lógicos da mesma forma. E isso é mesmo estranho, pois na Lógica não necessariamente existe tal acordo como indicado anteriormente. Em outras palavras, podemos interpretar os símbolos não lógicos de forma diferente da usual, como aquela definida por um modelo padrão, Definição 7.6. E, mesmo assim, todas as propriedades aritméticas podem ser interpretadas como verdadeiras por tais interpretações não usuais. Portanto, não necessariamente as interpretações sobre $\mathbb{N}$ devem interpretar os símbolos não lógicos de $\mathbb{L}_a$ na forma usual, dada por um modelo padrão. E, mesmo não interpretando na forma usual, tais interpretações podem interpretar todas as propriedades $Bx_1, Bx_2, ..., B_6$ e Bx_7 como verdadeiras. Como analisamos no Capítulo 10, tais interpretações, não necessariamente usuais, mas que interpretam as propriedades fundamentais da Aritmética como verdadeiras, são denominadas modelos da Aritmética. Isto é, dizemos que uma interpretação, mesmo sendo diferente do modelo padrão, é um modelo para a Aritmética, quanto ela interpreta as propriedades fundamentais da Aritmética como verdadeiras.

7.8.8 A expressividade da Aritmética básica

Podemos falar sobre várias propriedades aritméticas e pensar sobre suas representações na Aritmética básica. Os Exemplos 7.33, 7.34, 7.35 e 7.36 consideram alguns casos particulares. Mas, afinal, quais são as propriedades que podem ser expressas na Aritmética básica? Será que qualquer propriedade pode ser expressa na Aritmética básica? Essas são importantes questões da Lógica, que passamos a analisar, de forma introdutória, a seguir. Considere a propriedade da Aritmética, denominada Conjectura de Goldbach:

"Todo número par n, maior que 2, é igual a soma de dois primos. Se denominamos essa propriedade como $Gold(n)$,"

então

[4] Para uma discussão sobre esse tema, consulte [Field] e [Balaguer].

$Gold(n)$ é verdadeira se, e somente se, todo número par n, maior que 2, é igual a soma de dois primos.

Portanto, nesse caso, expressar $Gold(n)$ na Aritmética básica corresponde a encontrar uma fórmula $H_{gd}(x)$ da Aritmética básica, tal que para todo modelo padrão I,
se $I[x] = n$ e n é par maior que 2, então $I[H_{gd}(x)] = T$, $\Leftrightarrow$ n é a soma de dois números primos. O leitor é convidado, nos exercícios, a determinar a fórmula $H_{gd}(x)$.

Nota. A conjectura de Goldbach, proposta pelo matemático prussiano Christian Goldbach, é um dos problemas mais antigos não resolvidos da matemática, mais precisamente da Teoria dos Números. Ou seja, até hoje ninguém ainda demonstrou se a afirmação "para todo n, $Gold(n)$ é verdadeira" é verdadeira ou falsa. As ideias acima, são generalizadas na Definição 7.9, a seguir.

Definição 7.9 (expressividade na Aritmética básica) *Uma propriedade Prop sobre os números naturais $\mathbb{N}$ é expressa na linguagem $\mathbb{L}_a$, da Aritmética básica, por uma fórmula $H_{prop}(x)$, na qual x ocorre livre, se, e somente se, para todo número n em $\mathbb{N}$, temos:*

1. *se n tem a propriedade Prop, então para toda interpretação I,* $I[H_{prop}(\overline{n})] = T$;
2. *se n não tem a propriedade Prop, então para toda interpretação I,* $I[\neg H_{prop}(\overline{n})] = T$.

Nessa definição, temos o cuidado de escrever $H_{prop}(\overline{n})$, onde n aparece com um tracinho em cima. Observe que os objetos n e $\overline{n}$ são diferentes. O primeiro é um número natural e o segundo é sua representação na Aritmética básica. Além disso, a Definição 7.9 considera apenas o caso de propriedades unárias. Isto é, propriedades que caracterizam apenas um número e não pares de números, três números, ou mais. Entretanto, a Definição 7.9 pode ser estendida para o caso geral de propriedades n-árias. Uma Aritmética, na qual as propriedades podem ser expressas, certamente, tem especial interesse. Entretanto, observe que as propriedades que estamos interessados, neste livro, são aquelas que podem ser efetivamente calculadas. Isto é, propriedades decidíveis, conforme a Definição 4.11 do Capítulo 4. A linguagem aritmética que possui tal característica é definida a seguir, Definição 7.10.

Definição 7.10 (linguagem suficientemente expressiva) *Uma linguagem aritmética é suficientemente expressiva se as condições a seguir são satisfeitas.*

1. *A linguagem expressa toda propriedade aritmética decidível.*
2. *A linguagem contém a linguagem da Lógica de Predicados.*

Agora voltemos a nossa questão inicial. Quais as propriedades que podem ser expressas na Aritmética básica? Essa questão é respondida pelo teorema a seguir.

Teorema 7.1 (expressividade de $\mathbb{L}_a$) *A linguagem $\mathbb{L}_a$, da Aritmética básica, é suficientemente expressiva.*

Nota. A demonstração do Teorema 7.1 não pertence ao escopo deste livro. Ela pode ser encontrada em [Smith].

O Teorema 7.1 é um resultado importante, pois ele mostra que na Aritmética básica conseguimos expressar as propriedades decidíveis, que são importantes no contexto, por exemplo, da Computação.

7.9 Representação de argumentos lógicos

Conforme vimos no Capítulo 2, todo argumento tem a forma:

$$\textbf{premissas} \rightarrow \textbf{conclusão.}$$

E, nesse caso, as premissas e a conclusão podem ser representadas na Lógica de Predicados. Apresentamos alguns exemplos.[5]

Exemplo 7.41 (representação de argumento lógico) .
Considere o argumento:
"Todos os homens são mamíferos. Todos os mamíferos são animais. Portanto, todo homem é um animal." Para representar esse argumento na Lógica de Predicados, como sempre, o primeiro passo é definir uma interpretação que o associe a uma fórmula. Seja a interpretação I_5 sobre o conjunto dos seres vivos. Considere os predicados p, q e r tais que

$I_5[p(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_5} é um homem;
$I_5[q(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_5} é um mamífero;
$I_5[r(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_5} é um animal.

Nesse caso, segundo I_5, as premissas do argumento são representadas por: $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (\forall x)(q(x) \rightarrow r(x))$ e a conclusão por $(\forall x)(p(x) \rightarrow r(x))$. Portanto, o argumento é representado, segundo I_5, por:

$$((\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (\forall x)(q(x) \rightarrow r(x))) \rightarrow (\forall x)(p(x) \rightarrow r(x))$$

■

Exemplo 7.42 (representação de argumento lógico) .
Considere o argumento:
"Todo baterista é músico. Alguns vocalistas são músicos. Portanto, alguns vocalistas não são bateristas." Considere a interpretação I_6 sobre o conjunto dos homens e os predicados p, q e r tais que:

$I_6[p(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_6} é um baterista;
$I_6[q(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_6} é um músico;
$I_6[r(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_6} é um vocalista.

[5] Alguns desses argumentos são, também, apresentados em [Salmon].

Nesse caso, segundo I_6, as premissas do argumento são representadas por: $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (\exists x)(r(x) \wedge q(x))$ e a conclusão por $(\exists x)(r(x) \wedge \neg p(x))$. Portanto, o argumento é representado, segundo I_6, por:

$$((\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (\exists x)(r(x) \wedge q(x))) \rightarrow (\exists x)(r(x) \wedge \neg p(x))$$

■

Exemplo 7.43 (representação de argumento lógico) .
Considere o argumento:
"Todos os padres são pacifistas. Nenhum general é padre. Portanto, nenhum general é pacifista." Considere a interpretação I_7 sobre o conjunto dos homens e os predicados p, q e r tais que:

$I_7[p(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_7} é um padre;
$I_7[q(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_7} é um pacifista;
$I_7[r(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_7} é um general.

Segundo I_7, as premissas são representadas por: $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge \neg(\exists x)(r(x) \wedge p(x))$ e a conclusão por $\neg(\exists x)(r(x) \wedge q(x))$. O argumento é representado, segundo I_7, por:

$$((\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge \neg(\exists x)(r(x) \wedge p(x))) \rightarrow \neg(\exists x)(r(x) \wedge q(x))$$

■

Exemplo 7.44 (representação de argumento lógico) .
Considere o argumento:
"Todo político culpado de corrupção será preso ou multado. Alguns políticos culpados de corrupção serão multados. Nenhum político será preso e multado. Portanto, nem todos os culpados de corrupção serão presos." Considere a interpretação I_8 sobre o conjunto dos políticos e os predicados p, q e r tais que:

$I_8[p(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_8} é culpado de corrupção;
$I_8[q(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_8} é preso;
$I_8[r(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_8} é multado.

Segundo I_8, as premissas do argumento são representadas por: $(\forall x)(p(x) \rightarrow (q(x) \vee r(x)) \wedge (\exists x)(p(x) \wedge r(x)) \wedge \neg(\exists x)(q(x) \wedge r(x))$ e a conclusão por $\neg(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$. O argumento é representado, segundo I_8, por:

$$((\forall x)(p(x) \rightarrow (q(x) \vee r(x)) \wedge (\exists x)(p(x) \wedge r(x))) \wedge \neg(\exists x)(q(x) \wedge r(x)))$$

$$\rightarrow$$

$$\neg(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$$

■

Exemplo 7.45 (representação de argumento lógico) .
Considere o argumento:
"Cada sócio do Praia Clube gosta de outro sócio. Logo, há um sócio do Praia Clube do qual todos gostam." Considere a interpretação I_9 sobre o conjunto dos sócios do Praia Clube e o predicados p tal que:

$I_9[q(x,y)] = T$ se, e somente se, x_{I_9} gosta de y_{I_9}.

Segundo I_9, a premissa do argumento é representada por $(\forall x)(\exists y)(q(x,y)$ e a conclusão por $(\exists y)(\forall x)(q(x,y)$. O argumento é representado, segundo I_9, por:

$$(\forall x)(\exists y)q(x,y) \rightarrow (\exists y)(\forall x)q(x,y). \blacksquare$$

Traduzimos o argumento para Lógica de Predicados. Resta saber se ele é bom, forte ou fraco. No próximo capítulo tratamos desse tema.

7.10 Exercícios

1. Seja I uma interpretação sobre os números naturais $\mathbb{N}$, tal que $I[a] = 1$, $I[x] = 1$, $I[p] = <$, $I[f] = f_I$ onde $f_I(d) = d + 1$, $I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é par. Além disso, o valor de $I[y]$ é desconhecido.
   Seja J uma interpretação sobre os números inteiros $\mathbb{Z}$, tal que: $J[a] = 0$, $J[x] = -1$, $J[y] = 0$, $J[p] = <$ e $J[f] = f_J$ onde $f_J(d) = d + 1$.
   Determine, quando possível, as interpretações das fórmulas a seguir conforme I e J.
   (a) $p(x,a)$
   (b) $p(x,a) \wedge p(x, f(x))$
   (c) $(\exists y)p(y,x)$
   (d) $(\forall y)(p(y,a) \vee p(f(y),y))$
   (e) $(\forall x)(\exists y)p(x,y)$
   (f) $(\exists y)(\forall x)p(x,y)$
   (g) $(\forall x)(\exists x)q(x)$
   (h) $(\exists x)(\forall x)q(x)$
2. Seja I uma interpretação sobre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, tal que $I[a] = 5$, $I[b] = 3$, $I[x] = 7$, $I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I < 9$, $I[r(x)] = T \Leftrightarrow x_I > 4$, $I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I = 7$.
   Determine o resultado da interpretação de cada uma das fórmulas a seguir segundo I.
   (a) $(\exists x)(p(x) \rightarrow (\exists x)r(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)r(x))$

(b) $(\forall x)(p(x) \rightarrow (\forall z)r(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x))$

(c) $((\forall x)p(x) \vee (\forall z)(\forall x)r(x)) \rightarrow (\forall x)(p(x) \vee (\exists x)r(x))$

(d) $(\exists z)(p(x) \leftrightarrow r(x)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x) \leftrightarrow (\exists x)r(x))$

(e) $(\exists z)(p(x) \rightarrow (\exists x)p(a)) \vee (p(x) \rightarrow (\forall x)p(b))$

(f) $(p(x) \wedge q(x)) \leftrightarrow (\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$

(g) $(\exists x)(p(x) \rightarrow (\exists x)r(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)r(b))$

(h) $((\exists x)p(x) \rightarrow r(b)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \rightarrow r(b))$

3. Sejam H e G as duas fórmulas a seguir. Nessas fórmulas $x_1, \ldots, x_8$ são as únicas variáveis que ocorrem em H_1, ... ,H_8 respectivamente. Demonstre que se $I[H] = F$, então $I[G] = F$.

$$H = (\exists x_1)H_1 \rightarrow ((\exists x_2)H_2 \rightarrow ((\exists x_3)H_3 \rightarrow ((\exists x_4)H_4 \rightarrow ((\exists x_5)H_5 \rightarrow ((\exists x_6)H_6 \rightarrow ((\exists x_7)H_7 \rightarrow ((\exists x_8)H_8)))))))$$

$$G = (\forall *)((H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge H_4 \wedge H_5 \wedge H_6 \wedge H_7) \rightarrow H_8)$$

4. Sejam I e J interpretações sobre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, tais que: $I[p(x, y, z, w)] = T \Leftrightarrow x_I + y_I > z_I + w_I$, $I[z] = 5$, $I[a] = 2$, $I[b] = 7$, $I[w] = 9$, $J[p(x, y, z, w)] = T \Leftrightarrow x_I + y_I < z_I + w_I$, $J[z] = 5$, $J[a] = 2$, $J[b] = 7$, $J[w] = 9$, $J[y] = 8$
Considere a fórmula $E = (\forall x)(\exists y)p(x, y, z, w) \rightarrow (\forall z)p(z, b, y, x)$

   (a) Caso seja possível, determine $I[E]$ e $J[E]$. Justifique sua resposta.

   (b) No caso em que não é possível determinar o resultado da interpretação, defina uma extensão da interpretação a partir da qual é possível determinar o resultado pretendido.

5. Se possível, determine interpretações que interpretam as fórmulas a seguir como verdadeiras e como falsas. Justifique suas respostas.

   (a) $(\forall x)(\exists y)p(x, y, z) \rightarrow (\exists y)(\forall z)p(x, y, z)$

   (b) $(\forall x)p(x) \leftrightarrow (\exists y)q(y)$

   (c) $(\forall x)(\forall x)p(x, y) \rightarrow (\exists y)q(z)$

6. (a) Quais os resultados informais das interpretações de H_1, H_2 e H_3, nas quais I é uma interpretação sobre o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, tal que:
$I[a] = 0$, $I[q(x, y)] = T \Leftrightarrow x_I < y_I$, $I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é um número primo, $I[r] =$ " $=$ " (r é interpretado como a igualdade) e $I[f] = \times$ (f é interpretada como o produto).
$H_1 = (\forall x)(\exists y)(q(x, y) \wedge p(y))$
$H_2 = (\forall x)(q(a, x) \rightarrow (\exists z)r(f(z, z), x))$
$H_3 = (\forall x)(\forall y)((\neg r(x, a) \wedge r(x, y)) \rightarrow (\exists z)r(f(x, z), y))$

(b) Quais os resultados informais das interpretações de H_1, H_2 e H_3, onde I é uma interpretação sobre o domínio U dos alunos de Computação, tal que:
$I[p(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I$ ama y_I , $I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ morreu de AIDS.
$H_1 = (\exists y)(\forall x)p(x,y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)p(x,y)$
$H_2 = (\exists x)(\forall y)\neg p(x,y)$
$H_3 = (\forall *)(p(x,y) \rightarrow (p(y,z) \rightarrow (p(z,w) \rightarrow q(w))))$

(c) Quais os resultados informais das interpretações de H_1, H_2 e H_3, onde I é uma interpretação sobre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, tal que:
$I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é um número par, $I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é um número ímpar, $I[f(x,y)] = x_I + y_I$.
$H_1 = (\forall x)(\forall y)((p(x) \land p(y)) \rightarrow p(f(x,y)))$
$H_2 = (\forall x)(\forall y)((p(x) \land q(y)) \rightarrow q(f(x,y)))$
$H_3 = (\forall x)(\forall y)((p(x) \land q(y)) \rightarrow p(f(x,y)))$

(d) Qual o resultado informal da interpretação de H onde I é uma interpretação sobre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ tal que:
$I[p(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I = y_I$, $I[f] = +$, $I[a] = 1$.
$H = (\forall x)(\exists y)(p(x, f(y,y)) \lor p(x, f(f(y,y),a)))$

7. Utilize as regras semânticas para quantificadores e desenvolva as afirmações a seguir:

   (a) $I[(\forall x)(\forall y)H] = T$

   (b) $I[(\forall x)(\forall y)H] = F$

   (c) $I[(\forall x)(\exists y)H] = T$

   (d) $I[(\forall x)(\exists y)H] = F$

   (e) $I[(\exists x)(\forall y)H] = T$

   (f) $I[(\exists x)(\forall y)H] = F$

8. Sejam I e J duas interpretações sobre os naturais $\mathbb{N}$, tais que:
$I[p] = J[p] = \leq$, $I[y] = J[y] = 4$, $I[x] = 0$, $J[x] = 9$. Demonstre que:

   (a) $I[p(x,y)] \neq J[p(x,y)]$

   (b) $I[(\forall x)p(x,y)] = J[(\forall x)p(x,y)]$

   (c) $I[(\forall y)p(x,y)] \neq J[(\forall y)p(x,y)]$

9. Traduza as sentenças a seguir para fórmulas da Lógica de Predicados.

   (a) Uma condição necessária e suficiente para que um indivíduo seja produtivo é que ele seja esforçado, trabalhe muito e tenha inspirações.

   (b) Todo homem prefere mulheres bonitas, inteligentes e sensíveis como Maria. É por isso que Zé prefere sua Maria.

(c) As filhas de Pedro são lindas e meigas.

(d) As filhas de Zé são lindas e inteligentes e todos os rapazes da Computação querem namorá-las.

(e) Nem todo pássaro voa.

(f) Todo político é desonesto.

(g) Se toda panela tem seu "terço", toda pessoa tem seu amado (obs: essa é uma expressão nordestina).

(h) Toda pessoa ama alguém, mas não existe ninguém que ame todas.

(i) Se existe um barbeiro na cidade que não barbeia a quem se barbeia a si próprio, então não existe alguém para barbear o barbeiro.

(j) Não existe conjunto que contenha a si próprio.

(k) Todo macaco tem seu galho.

(l) Toda pessoa que com ferro fere com ferro será ferida.

(m) De nada vale a vida de um homem que vive a vida envolvida na vida de uma mulher da vida.

(n) Quem não se ama não ama ninguém.

(o) Toda Patricinha que vai ao shopping tem celular, pele lisa e cheiro de alface.

(p) Patricinha de Uberlândia não gosta de Patricinha de Uberaba.

(q) Nenhuma Patricinha no shopping usa tênis Kichute.

(r) Todo irmão do pai de Pedro é seu tio.

(s) Pedro tem um tio que é mais novo que seu irmão e mora em Israel.

(t) Zé admira a irmã do cunhado de seu tio, que mora no Líbano.

(u) Zé admira o neto de seu neto, mas nem conhece o neto de seu filho.

(v) Os irmãos de Zé são gaúchos e torcem pelo Grêmio como ele.

(w) Zé e Chico são amigos. Mas nem todo amigo de Zé é amigo de Chico e vice-versa.

(x) Zé é um bom pai e ama todos os seus filhos.

(y) Os filhos de Ana são os filhos de Nicolau. Ana ama seus filhos. Márcio é filho de Nicolau. Portanto, Ana ama Márcio.

(z) Os gatos e cachorros são animais domésticos.

10. Traduza as sentenças a seguir para fórmulas da Lógica de Predicados:

(a) Nenhum filho adolescente de Maria gosta de estudar.

(b) Há pelo menos um cavalo branco.

(c) Alguns cavalos não são brancos.

(d) Homens são mamíferos e tomates são vegetais.

(e) Alguns homens são felizes, outros não.

(f) Se alguém não ama ninguém, todos não amam todos.

(g) Se todos não amam todos, não existe alguém que não ame alguém.

11. Caso seja possível, escreva as sentenças a seguir utilizando a linguagem da Lógica de Predicados. Na impossibilidade, justifique. Observe que este exercício foi proposto no contexto da Lógica Proposicional.

    (a) Todo homem é mortal.

    (b) Possivelmente irei ao cinema.

    (c) Fui gordo, hoje sou magro.

    (d) Existe no curso de Ciência da Computação um aluno admirado por todos.

    (e) Existe um aluno em minha sala que não gosta de nenhum colega.

    (f) Existe aluno de Ciência da computação que é detestado por seus colegas.

    (g) Necessariamente algum político é desonesto.

    (h) Amanhã irei ao cinema e depois ao teatro.

    (i) Quase todo político é desonesto.

    (j) Zé sempre foi amigo de Chico.

    (k) Toda regra tem exceção.

    (l) Quase todo funcionário da Zé-Company é um talento.

    (m) Poucos funcionários da Zé-Company não são empreendedores.

    (n) O presidente da Zé-Company é admirado por seus colaboradores.

12. Represente na Aritmética básica a função fatorial f_{fat}, tal que $f_{fat}(n) = n!$.

13. Represente na Aritmética básica a função divisão $f_{\div}$, tal que $f_{\div}(m, n) = q$ e $q = (m \div n)$.

14. Represente na Aritmética básica a função máximo divisor comum de dois números f_{mdc}, tal que $f_{mdc}(m, n) = q$, tal que q é igual ao máximo divisor comum de m e n.

15. Represente na Aritmética básica, o predicado "maior-que" $p_{>}$, tal que $p_{>}(m, n)$ é verdadeiro se, e somente se, $(m > n)$.

16. Represente na Aritmética básica o predicado "primos-entre-si"p_{primo}, tal que $p_{primo}(m, n)$ é verdadeiro se, e somente se, o máximo divisor comum de m e n é igual a 1.

17. Represente na Aritmética básica, a conjectura de Goldbach. Isto é, determine a fórmula H_{gd}, conforme analisado na seção 7.8.8.

18. Represente na Aritmética básica as seguintes propriedades.
    (a) Todo número par é divizível por 2.
    (b) Dois números primos são gêmeos se, e somente se, diferem em duas unidades.
    (c) Dado um número k, existem dois números n e m, que são primos gêmeos.
    (d) todo número par n, maior que 0, é igual a soma de dois primos.

19. Traduza os argumentos a seguir para fórmulas da Lógica de Predicados.
    (a) Zé é dono de um grande chapéu. Os donos de grandes chapéus têm grandes cabeças. Pessoas com grandes cabeças têm cérebros grandes. Pessoas com cérebros grandes são intelectuais. Portanto, Zé é um intelectual.
    (b) Uma vez que todos os membros do júri eram eleitores cadastrados, então Zé devia ser um eleitor cadastrado, pois ele serviu no júri.
    (c) Zé tem coração, pois todo mamífero tem coração e Zé é um mamífero.
    (d) Todas as plantas verdes são coisas que contêm clorofila. Algumas coisas que contêm clorofila são comestíveis. Portanto, algumas plantas verdes são comestíveis.
    (e) Alguns neuróticos não são bem ajustados. Algumas pessoas ajustadas não são ambiciosas. Portanto, neuróticos não são ambiciosos.
    (f) Todas as pinturas de real valor artístico são abstratas. Isso, porque todas as pinturas de real valor artístico são puros estudos de formas. Além disso, sabemos que todas as pinturas abstratas são puros estudos de formas.
    (g) Todos os atos legítimos são atos que promovem o interesse geral. Nenhum ato que interfira na conduta motivada por interesse pessoal é um ato que promove o interesse geral. Portanto, nenhum ato que interfira na conduta motivada pelo interesse pessoal é legítimo.
    (h) Algumas pessoas com elevados salários são bons investidores. Todos os políticos têm elevados salários. Logo, alguns políticos são bons investidores.
    (i) Para cada coisa, houve momento que ela não existia. Portanto, há um momento em que todas as coisas não existiam.
    (j) Para cada mudança há algo que permanece constante durante essa mudança. Logo, há algo que permanece constante em todas as mudanças.