Álgebra Linear I

Aula 20

Professora Kelly Karina

Norma

Definição:

Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$. Definimos a *norma* de um vetor v em relação a este produto interno por $||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$

Observação:

- Se $||v|| = 1$, ou seja, $\langle v, v \rangle = 1$, dizemos que v é *unitário* ou que v está normalizado;
- Todo vetor não nulo $v \in V$ pode ser normalizado, tomando $\frac{v}{||v||}$;
- No $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, se $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ então $||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, que é o comprimento do vetor v.

Propriedades:

Seja V um espaço vetorial com produto interno. Para quaisquer v, w em V e $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) $||v|| \geq 0$ e $||v|| = 0$ se e somente se $v = 0$.

ii) $||\alpha v|| = |\alpha| \; ||v||$

iii) $|\langle v, w\rangle| \leq ||v|| \; ||w||$ (Desigualdade de Schwarz)

iv) $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ Desigualdade triangular

Definição:

Sejam V um espaço vetorial munido de produto interno $\langle , \rangle$ e $v, w \in V$ não nulos. Definimos o *ângulo θ entre v e w* como o ângulo entre 0 e π tal que

$$cos\theta = \frac{\langle v, w \rangle}{||v|| \ ||w||}$$

Note que esta definição é compatível com a noção de ortogonalidade pois se $\langle v, w \rangle = 0$ então $cos\theta = 0$, ou seja, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Definição:

Seja V um espaço vetorial com produto interno. Diz-se que $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ de V é **ortonormal** se for ortogonal e cada vetor for unitário, isto é,

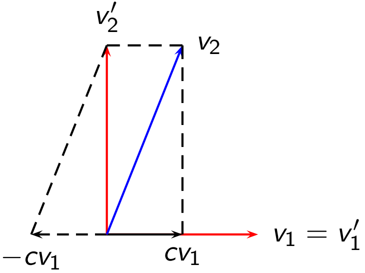
$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad i \neq j \\ 1 & \text{se} \quad i = j \end{cases}$$

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Inicialmente, descreveremos o processo para uma base $B = \{v_1, v_2\}$.
Seja $v_1' = v_1$. Tome $v_2' = v_2 - cv_1'$, onde c é um número escolhido de modo que $\langle v_2', v_1' \rangle = 0$, ou seja $\langle v_2 - cv_1', v_1' \rangle = 0$. Isto significa que $c = \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle}$.

Portanto

$$v_1' = v_1$$
$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'$$



Podemos então normalizá-los, $||u_1|| = \frac{v_1'}{||v_1'||}$ e $||u_2|| = \frac{v_2'}{||v_2'||}$, obtendo uma base $B' = \{u_1, u_2\}$ ortonormal.

O Processo de ortogonalização visto pode ser generalizado para uma base $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$.

$$\begin{aligned}
v_1' &= v_1 \\
v_2' &= v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' \\
v_3' &= v_3 - \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' - \frac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' \\
&\vdots \\
v_n' &= v_n - \frac{\langle v_n, v_{n-1}' \rangle}{\langle v_{n-1}', v_{n-1}' \rangle} v_{n-1}' - \cdots - \frac{\langle v_n, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'
\end{aligned}$$

Este procedimento é conhecido como:
"Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt".

Observação:

Se quisermos obter uma base ortonormal, basta normalizarmos os vetores v_i', ou seja, tomando $u_i = \frac{vi'}{||v_i'||}$, obtemos a base $\{u_1, \cdots, u_n\}$ de vetores ortonormais.

Exemplo:

Seja $B = \{(1,1,1),(0,2,1),(0,0,1)\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$. Obter a partir de B uma base ortonormal em relação ao produto interno usual.

Solução:

Sejam $v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,2,1), v_3 = (0,0,1)$.

$$
\begin{aligned}
v_1' &= v_1 = (1,1,1) \\
v_2' &= v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' \\
&= (0,2,1) - \frac{\langle (0,2,1),(1,1,1) \rangle}{\langle (1,1,1),(1,1,1) \rangle}(1,1,1) \\
&= (0,2,1) - \frac{3}{3}(1,1,1) \\
&= (-1,1,0).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_3' &= v_3 - \frac{\langle v_3, v_2'\rangle}{\langle v_2', v_2'\rangle} v_2' - \frac{\langle v_3, v_1'\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle} v_1' \\
&= (0,0,1) - \frac{\langle (0,0,1), (-1,1,0)\rangle}{\langle (-1,1,0), (-1,1,0)\rangle}(-1,1,0) - \frac{\langle (0,0,1), (1,1,1)\rangle}{\langle (1,1,1), (1,1,1)\rangle}(1,1,1) \\
&= (0,0,1) - 0 - \frac{1}{3}(1,1,1) \\
&= (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}).
\end{aligned}
$$

Então os vetores normalizados são:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1'}{||v_1'||} &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ u_2 &= \frac{v_2'}{||v_2'||} &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \\ u_3 &= \frac{v_3'}{||v_3'||} &= \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \end{aligned}$$

e $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortonormal.

Operadores Ortogonais

Definição:

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de produto interno. Um operador linear $T : V \to V$ é ortogonal se preserva a norma de cada vetor, ou seja, para qualquer $v \in V$

$$||T(v)|| = ||v||$$

Observação:

Nestes operadores serão consideradas somente bases ortonormais em V.

Exemplo:

1) No $\mathbb{R}^2$ com produto interno usual, o operador linear definido por:

$$T(x,y) = \left(\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y, \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y\right)$$

é ortogonal.

De fato,

$$\begin{aligned} |T(x,y)| &= \sqrt{\left(\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y\right)^2 + \left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16}{25}x^2 + \frac{24}{25}xy + \frac{9}{25}y^2 + \frac{9}{25}x^2 - \frac{24}{25}xy + \frac{16}{25}y^2} \\ &= \sqrt{\frac{25}{25}x^2 + \frac{25}{25}y^2} = |(x,y)| \end{aligned}$$

Exemplo:

2) Consideremos o $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual. A rotação do plano de um ângulo θ dada por

$$T(x, y) = (x\ cos\theta - y\ sen\theta, x\ sen\theta + y\ cos\theta)$$

é ortogonal.

3)
No $\mathbb{R}^3$, com o produto interno usual, o operador linear dado por

$$T(x, y, z) = (-y, x, -z)$$

é ortogonal.

Propriedades:

I) Seja $T : V \to V$ um operador ortogonal sobre o espaço euclidiano V. Então a inversa da matriz de T coincide com sua transposta, isto é $[T]^{-1} = [T]^t$;
A matriz T tal que $[T]^{-1} = [T]^t$ é chamada **matriz ortogonal**.

II) O determinante de uma amtriz ortogonal é 1 ou -1.
Note que disso concluímos que um operador ortogonal T é inversível.

III) Todo operador linear $T : V \to V$ preserva produto interno, ou seja, para quaisquer $u, v \in V$ temos que $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$.
Dessa propriedade temos que todo operador ortogonal preserva ângulo entre dois vetores. Deste fato e da definição de operador ortogonal temos que:

T transforma bases ortonormais em bases ortonormais.

IV) A composta de duas transformações ortogonais é uma transformação ortogonal ou, equivalentemente, o produto de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.

V) As colunas (ou linhas) de uma matriz ortogonal são vetores ortonormais.