Álgebra Linear I

Aula 4

Professora Kelly Karina

Definição:

Uma equação linear nas variáveis (ou incógnitas) $x_1, \cdots, x_n$ é uma equação do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b_1.$$

Denominamos $a_1, \cdots, a_n$ os coeficientes das incógnitas e b_1 é o termo independente.

Uma **solução** de tal equação linear é uma $n-$upla $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ para o qual a sentença $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = b_1$ é verdadeira.

Exemplo:

Dada a equação $2x + 3y - z = 1$ temos:

x, y e z são as variáveis;

$2, 3$ e -1 são os coeficientes (de x, y e Z respectivamente);

1 é o termo independente;

$(2, -1, 0)$ é solução da equação pois $2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) - 0 = 1$ é verdadeira;

$(1, 2, 3)$ não é solução da equação pois $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 3 = 1$ não é verdadeira.

Sistema de Equações Lineares

Definição:

Um sistema de equações lineares de m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo:

$$*\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Uma solução para o sistema $*$ é uma $n-$upla de números $x_1, x_2, \cdots, x_n$ que satisfaça as m equações simultaneamente.

Dizemos que dois sistemas são equivalentes quando a solução de um também é solução do outro.

Matriz associada a um Sistema

Dizemos que a matriz abaixo é a matriz ampliada do sistema $*$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Exemplo:

- A matriz ampliada do sistema $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 4y & - & 2z & = & 12 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$

  é a matriz: $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

- A matriz ampliada do sistema $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & y & - & 5z & = & 6 \\ & & & & 10z & = & -10 \end{array}\right.$

  é a matriz: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 10 & -10 \end{bmatrix}$

Observação:

- O sistema do exemplo 2 é facilmente resolvido;
- Os sistemas dos exemplos 1 e 2 são equivalentes, ou seja a solução de um também é solução do outro.
- Todas as vezes que obtemos uma matriz por meio de operações elementares em uma outra matriz então estas duas matrizes representam sistemas equivalentes.

As matrizes dos exemplos 1 e 2 são equivalentes:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 & 12 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (L'_1 = L_2) \\ (L'_2 = L_1) \\ (L'_3 = L_3) \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (L''_1 = L'_1) \\ (L''_2 = (-3)L'_1 + L'_2) \\ (L''_3 = L'_1 - L'_3) \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 10 & -10 \end{bmatrix} \begin{matrix} (L'''_1 = L''_1) \\ (L'''_2 = L''_2) \\ (L'''_3 = -2L''_2 + L''_3) \end{matrix}$$

que é a matriz do exemplo 2.

Definição:

Quando fazemos este procedimento para transformarmos um determinado sistema num sistema equivalente cuja matriz está na "forma escada" dizemos que estamos **escalonando** o sistema.

Tipos de sistemas de equações lineares

O sistema possui uma única solução	Sistema Possível e determinado (SPD)
O sistema possui infinitas soluções	Sistema Possível e Indeterminado (SPI)
O sistema não possui solução	Sistema Impossível (SI)

Exemplo:

Consideremos o sistema visto anteriormente:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 2z = 12 \\ x + y + z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Vimos que, ao escaloná-lo, encontramos:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ \quad y - 5z = 6 \\ \quad\quad 10z = -10 \end{cases}$$

Como existe apenas a solução $(2, 1, -1)$, então este sistema é possível e determinado (SPD).

Exemplo:

Agora, investiguemos que tipo de sistema é o seguinte:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 7 \\ x + 2y - 2z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} (L_1' = L_1) \\ (L_2' = (-2)L_1 + L_2) \\ (L_3' = L_1 - L_3) \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} (L_1'' = L_1') \\ (L_2'' = (\frac{1}{3})L_2') \\ (L_3'' = L_2' + L_3') \end{array}$$

Portanto o sistema inicial é equivalente ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ \qquad y - z = 1 \end{cases}$$

- O sistema tem três incógnitas e duas equações (1 variável livre);
- Da segunda equação obtemos $y = z + 1$. Substituindo esta expressão de y na primeira equação obtemos $x = 3$.
- O conjunto solução então é dado da seguinte forma $S = \{(3, z + 1, z); z \in \mathbb{R}\}$.
- Existem infinitas soluções. Segue que o sistema é possível e indeterminado.

Exemplo:

Finalmente, verifiquemos que tipo de sistema é este:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x + 9y + 5z = 4 \\ x + 5y + 7z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 9 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 4 \\ 0 & 3 & 8 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (L_1' = L_1) \\ (L_2' = (-3)L_1 + L_2) \\ (L_3' = L_3 - L_1) \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (L_1'' = L_1') \\ (L_2'' = L_2') \\ (L_3'' = L_3' - L_2') \end{matrix}$$

Portanto o sistema inicial é equivalente ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3y + 8z = 4 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Que é um sistema impossível, pois obtivemos $0 = 1$, que é uma sentença falsa.

Observação:

Um sistema linear é chamado de **homogêneo** quando todos os termos independentes são zero. Por exemplo, o sistema abaixo é homogêneo.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

- A solução trivial é sempre solução de um sistema linear homogêneo;
- Quando a única solução for a trivial então o sistema será SPD;
- Quando houverem outras soluções além da trivial, o sistema será SPI.

Exercícios