Álgebra Linear I

Aula 7

Professora Kelly Karina

Definição:

Seja V um espaço vetorial e sejam S_1 e S_2 subespaços vetoriais de V. A soma de S_1 e S_2 (que denotaremos por $S = S_1 + S_2$) é o conjunto de todos os vetores de V que são a soma de um vetor de S_1 e um vetor de S_2. Em símbolos:

$$S = S_1 + S_2 = \{v \in V; v = v_1 + v_2 \text{ onde } v_1 \in S_1 \text{ e } v_2 \in S_2\}$$

Teorema:

A soma de dois subespaços vetoriais S_1 e S_2 de V é um subespaço vetorial de V.

Ideia da dem:

$$u, v \in S = S_1 + S_2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u = u_1 + u_2;\ u_1 \in S_1, u_2 \in S_2 \\ v = v_1 + v_2;\ v_1 \in S_1, v_2 \in S_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad u + v = u_1 + u_2 + v_1 + v_2$$
$$= (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)$$

Como $\begin{matrix} u_1 + u_2 \in S_1 \\ v_1 + v_2 \in S_2 \end{matrix}$

Segue que $u + v \in S_1 + S_2 = S$

$u \in S = S_1 + S_2, k \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad u = u_1 + u_2;\ u_1 \in S_1, u_2 \in S_2$

$$ku = k(u_1 + u_2) = ku_1 + ku_2$$

Como $\begin{array}{l} ku_1 \in S_1 \\ kv_1 \in S_2 \end{array}$

Segue que $ku \in S_1 + S_2 = S$

Exemplo:

Consideremos os mesmos espaços com seus respectivos subespaços vetoriais do exemplo anterior e verifiquemos qual será o subespaço $S = S_1 + S_2$.

- O espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$ com as operações usuais e os subespaços vetoriais:

$$S_1 = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$S_2 = \{(x, 0, z); x, z \in \mathbb{R}\}$$

Temos então que $S_1 + S_2 = \{(x, y, z); x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

- Seja $V = M_2(\mathbb{R})$ com as operações usuais e os seguintes subespaços vetoriais:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}; a, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Temos então que $S_1 + S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R} \right\}$.

Soma Direta de dois subespaços vetoriais

Definição:

Seja V um espaço vetorial e sejam S_1 e S_2 subespaços vetoriais de V. Dizemos que V é a soma direta de S_1 e S_2 (e representamos por $V = S_1 \oplus S_2$ se:

1. $V = S_1 + S_2$;
2. $S_1 \cap S_2 = \{0\}$.

Exemplo:

- Consideremos o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$ com as operações usuais e os subespaços vetoriais:

$$S_1 = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$S_2 = \{(x, 0, z); x, z \in \mathbb{R}\}$$

Já sabemos que $S_1 + S_2 = \{(x, y, z); x, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3 = V$;

Se $(x, y, z) \in S_1 \cap S_2$ então $z = 0$ e $y = 0$, ou seja, ele é do tipo $(x, 0, 0)$. Neste caso não podemos dizer que V é soma direta de S_1 e S_2.

Exemplo:

- Consideremos, mais uma vez, o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$ com as operações usuais mas agora consideremos os seguintes subespaços vetoriais:

$$S_1 = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$S_2 = \{(0, 0, z); x, z \in \mathbb{R}\}$$

Temos que $S_1 + S_2 = \{(x, y, z); x, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3 = V$.
Se $(x, y, z) \in S_1 \cap S_2$ então $z = 0$ e $x = y = 0$, ou seja, ele é necessariamente o elemento $(0, 0, 0)$. Neste caso $V = S_1 \oplus S_2$.

Teorema:

Se V é a soma direta de S_1 e S_2 então todo vetor $v \in V$ se escreve, de modo único, na forma $u = u_1 + u_2$ onde $u_1 \in S_1$ e $u_2 \in S_2$.

Demonstração:

Suponha que $u = u_1 + u_2$ e que $u = v_1 + v_2$ onde $u_1, v_1 \in S_1$ e $u_2, v_2 \in S_2$. Então temos:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= v_1 + v_2 \\ u_1 - v_1 &= v_2 - u_2 \end{aligned}$$

Note que $u_1 - v_1 \in S_1$ e $v_2 - u_2 \in S_2$, além disso, estas expressões são iguais, então ambas estão em $S_1 \cap S_2$. Como $S_1 \cap S_2 = \{0\}$ (pois a soma é direta) então

$$u_1 - v_1 = v_2 - u_2 = 0$$

Ou seja, $u_1 = v_1$ e $u_2 = v_2$. $\blacksquare$

Exemplo:

No exemplo anterior vimos que $V = \mathbb{R}^3$ é a soma direta de:

$$S_1 = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\} \text{ e}$$
$$S_2 = \{(0, 0, z); x, z \in \mathbb{R}\}$$

Pelo Teorema sabemos que se $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ então se escreve como soma de um elemento de S_1 e um de S_2 de maneiro única. De fato, $(x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z)$.