MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE
BACHARELADO/LICENCIATURA EM MATEMÁTICA NA
MODALIDADE PRESENCIAL

Princípios de contagem/ Combinações

Material didático
Bacharelado em Matemática na modalidade presencial

Autor: Prof. Dr. Elzimar de Oliveira Rufino

BOA VISTA - RR
2022

Conteúdo

1 Apresentação

Este texto é dedicado às ideias básicas da contagem,começando com o chamado Princípio Fundamental da Contagem

2 Objetivos

2.1 Objetivos gerais

Apresentar a teoria básica das combinações.

2.2 Objetivos específicos

- Apresentar o Princípio Fundamental da Contagem e aplicacções
- Estudar as permutações simples e com repetições.
- Estudar as Combinações simples e as circulares.
- Estudar o triângulo de Pascal;
- Estudar Identidades envolvendo números binomiais.

3 O princípio Fundamental da Contagem

O princípio Fundamental da contagem diz que ....(Em construção!).

4 Problemas de Permutações simples

Nosso objetivo nesta seção é responder a seguinte pergunta: de quandos modos podemos ordenar em fila (indiana) n objetos distintos?

Fixados n lugares, para fazer a contagem devemos realizar n escolhas. A primeira escolha E_1 =escolha do objeto que ocupará o primeiro lugar pode ser feita de n modos. A segunda escolha E_2 =escolha do objeto que ocupará o segundo lugar, pode ser feita de $n-1$ modos, a terceira escolha E_3 =escolha do objeto que ocupará o terceiro lugar, pode ser feita de $n-2$ modos e assim por diante, até chegar na escolha E_n = escolha do objeto que ocupará o $n-$ésimo lugar, que pode ser feita de 1 modo. Pelo PFC a resposta é $n(n-1)(n-2)...3.2.1 = n!$

Example 1 *Quantos números de 4 algarismos podemos formar com os dígitos do conjunto* $\{1, 3, 5, 7\}$?

Example 2 *Quantos são os anagramas da palavra DISCRETA?*

Example 3 *De quantos modos podemos arrumar em fila 5 livros diferentes de matemática, 3 livros diferentes de Estatística e 2 livros diferentes de Física, de modo que livros de uma mesma matéria permaneçam juntos?*

Solução: Temos 3! modos de escolher a ordem das matérias, 5! modos de dispor os livros de matemática nos lugares que lhes foram destinados, 3! modos para os de Estatística e $2! = 2$ modos para os de Física. Logo, a reposta é $3!5!3!2 = 8640$.

5 Problemas de Permutações com repetições

A permutação com repetição é um tipo de agrupamento estudado na Análise Combinatória. Calcular a permutação é calcular a quantidade de reordenamentos possíveis que podemos formar com um conjunto finito de elementos. Quando entre esses elementos existe uma repetição, ou seja, quando há elementos repetidos nesse conjunto, temos uma permutação com repetição.

Para calcular a quantidade de permutações com repetição de um conjunto com n elementos, calculamos a permutação de n e dividimos pelo produto do fatorial de quantas vezes cada um dos elementos se repete. Se α elementos são iguais a A, β elementos são iguais a B, γ elementos são iguais a C, etc, então o número de permutações dos n objetos com elementos repetidos é dado pela fórmula

$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma,\ldots} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots} \tag{5.1}$$

Example 4 *Quantos são os anagramas que podemos formar com a palavra JOGOS ?*

Example 5 *Quantos são os anagramas que podemos formar com a palavra $MATEMÁTICA$?*

Solução: Note que a letra m se repete duas vezes, a letra A se repete 3 vezes e a T se repete 2 vezes. Logo, a resposta é $P_{10}^{2,3,2} = \frac{10!}{2!3!2!} = 151200$.

Example 6 *De quantos modos podemos dividir 8 objetos em um grupo de 5 objetos e um de 3 objetos?*

Solução: Podemos colocar os objetos em fila e considerar os 5 primeiros elementos para formarem o primeiro grupo(de 5 objetos) e os 3 últimos para formarem o segundo grupo(de 3 objetos). Existem 8! modos de colocar esses objetos em fila. Fixado um desses modos temos uma divisão em grupos(do modo como foi solicitado no problema). No entanto, cada divisão em grupos foi contada 5!3! vezes. De modo que a resposta é $\frac{8!}{5!3!} = 56$.

6 Mais problemas arranjados

Começamos apresentando o seguinte problema: Uma turma do Ensino Fundamental tem 15 alunos e a professora pediu que eles se juntassem em duplas para criar uma chapa com representante e vice-representante. Quantas são as possibilidade totais de chapas?

Solução:

Mais um exmplo:

Example 7 *Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os elementos do conjunto* $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

7 Problemas das combinações simples

Vamos responder à seguinte pergunta: de quantos modos podemos selecionar p objetos distintos entre n objetos distintos dados?

Cada seleção de p objetos é chamada de uma combinação simples de classe p dos n objetos. Na verdade cada seleção de p objetos equivale a um subconjunto de p elementos do conjunto de n elementos. Por exmeplo, as combinações simples de classe 2 dos objetos a, b, c são $\{a,b\}, \{a,c\}$ e $\{b,c\}$.

Vamos usar a notação C_n^p para o número de combinações simples de classe p de n elementos. Para resolver o problema das combinações simples basta notar que selecionar p entre os n objetos equivale a dividir os n objetos em um grupo de p objetos, que são selecionados, e um grupo de $n-p$ objetos, que são os não selecionados. Então, a resposta é

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \tag{7.1}$$

Observação: Também são utilizadas as notações $C_{n,p}$ e $\binom{n}{p}$.

Example 8 *Com 6 pessoas, quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas?*

Solução: A quantidade de comissões é igual ao número de combinações simples de classe 3 de 6 elementos, isto é,

$$C_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!3!} = 20.$$

Example 9 *Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com exatamente 3 homens, podem ser formadas?*

Solução: Para formar as comissões devemos escolher 3 dos homens e 2 das mulheres. Temos C_5^3 modos de escolher os três homens e depois C_4^2 modos de escolher as mulheres. Pelo PFC podem ser formadas $C_5^3.C_4^2 = 60$ comissões.

Example 10 *Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com pelo menos 3 homens podem ser formadas?*

Solução: .... =81.

Example 11 *Tem-se 5 pontos sobre uma reta R e 8 pontos sobre uma reta R' paralela a R.*

a) Quantos triângulos com vértices nesses pontos podemos formar?
Solução: *Para formar um triângulo temos de escolher um vértice na reta R e dois na reta R' ou, um vértice na reta $R1$ e dois na reta R. Pelo PFC a resposta é:* $5.C_8^2 + 8.C_5^2 = 220$.

b) Quantos quadriláteros com vértices nesses pontos podemos formar?
Solução: *Para formar um quadrilátero convexo devemos escolher 2 pontos em R e 2 pontos em R'. Pelo PFC a resposta é* $C_5^2.C_8^2 = 10.28 = 280$ *quadriláteros.*

Exercícios