Álgebra Linear I

Aula 5

Professora Kelly Karina

Definição:

Um espaço vetorial (real) é um conjunto V, não vazio, munido de duas operações:

$$\text{soma: } V \times V \to V, \text{ e}$$

$$\text{multiplicação por escalar, } \mathbb{R} \times V \to V,$$

tais que para quaisquer $u, v, w \in V$ e $a, b, \in \mathbb{R}$ as seguintes propriedades são satisfeitas:

- $(u+v)+w = u+(v+w)$ (propriedade associativa da soma);
- $u+v = v+u$ (propriedade comutativa da soma);
- $\exists\, 0 \in V;\ u+0 = u$ (este elemento 0 será chamado vetor nulo);
- $\exists -u \in V; u+(-u) = 0$. (existência do oposto ou simétrico);

- $a(u+v) = au + av$ (propriedade distributiva em relação à soma de vetores);
- $(a+b)v = av + bv$ (propriedade distributiva em relação à soma de escalares);
- $(ab)v = a(bv)$
- $1u = u$

Observações:

Podemos usar o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ no lugar de $\mathbb{R}$ para o conjunto dos escalares.

Se $u \in V$ onde V é um espaço vetorial então diremos que u é um **vetor** de V.

Exemplo:

Conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$ com as operações

$$\begin{array}{rcl} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) & = & (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ a(x, y) & = & (ax, ay) \end{array}$$

é um espaço vetorial.

Demonstração: Exercício.

Exemplo:

Conjunto $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n); x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$ com as seguintes operações.

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ k(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n) \end{aligned}$$

é um espaço vetorial.

Demonstração:

Como devemos proceder para demostrar esta afirmação?

Devemos verificar que as oito propriedades da definição são satisfeitas para este conjunto munido destas duas operações.

- Sejam $u = (x_1, \ldots, x_n)$, $v = (y_1, \ldots, y_n)$ e $w = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
(u + v) + w &= ((x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)) + (z_1, \ldots, z_n) \\
&= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) + (z_1, \ldots, z_n) \\
&= ((x_1 + y_1) + z_1, \ldots, (x_n + y_n) + z_n) \\
&= (x_1 + (y_1 + z_1), \ldots, x_n + (y_n + z_n)) \\
&= (x_1, \ldots, x_n) + (y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n) \\
&= (x_1, \ldots, x_n) + ((y_1, \ldots, y_n) + (z_1, \ldots, z_n)) \\
&= u + (v + w)
\end{aligned}
$$

;

- Mostremos que $u+v=v+u$.

$$\begin{aligned} u+v &= (x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n) \\ &= (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n) \\ &= (y_1+x_1,\ldots,y_n+x_n) \\ &= (y_1,\ldots,y_n)+(x_1,\ldots,x_n) \\ &= v+u \end{aligned}$$

- Agora precisamos mostrar que existe um elemento $0\in V$ tal que $u+0=u$.

  Basta tomar $0=(0,\ldots,0)$ (com n entradas com o número real 0). De fato,

$$\begin{aligned} u+0 &= (x_1,\ldots,x_n)+(0,\ldots,0) \\ &= (x_1+0,\ldots,x_n+0) \\ &= (x_1,\ldots,x_n) \\ &= u \end{aligned}$$

- Mostremos agora que para todo $u \in V$ existe um elemento de V que denotamos por $-u$ tal que $u + (-u) = 0$.

  De fato, se $u = (x_1, \ldots, x_n)$ basta tomarmos $-u = (-x_1, \ldots, -x_n)$. Neste caso temos:

$$\begin{aligned} u + (-u) &= (x_1, \ldots, x_n) + (-x_1, \ldots, -x_n) \\ &= (x_1 + (-x_1), \ldots, x_n + (-x_n)) \\ &= (0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

- Mostraremos agora que $a(u + v) = au + av$.

$$\begin{aligned} a(u+v) &= a((x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)) \\ &= a(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ &= (a(x_1 + y_1), \ldots, a(x_n + y_n)) \\ &= (ax_1 + ay_1, \ldots, ax_n + ay_n) \\ &= (ax_1, \ldots, ax_n) + (ay_1, \ldots, ay_n) \\ &= a(x_1, \ldots, x_n) + a(y_1, \ldots, y_n) \\ &= au + av \end{aligned}$$

- De maneira similar (mas agora com dois escalares e não dois vetores) mostraremos que $(a+b)u = au + bu$.

$$\begin{aligned}
(a+b)u &= (a+b)(x_1, \dots, x_n)\\
&= ((a+b)x_1, \dots, (a+b)x_n)\\
&= (ax_1 + bx_1, \dots, ax_n + bx_n)\\
&= (ax_1, \dots, ax_n) + (bx_1, \dots, bx_n)\\
&= a(x_1, \dots, x_n) + b(x_1, \dots, x_n)\\
&= au + bu
\end{aligned}$$

- Mostremos agora que $(ab)u = a(bu)$.

$$\begin{aligned}
(ab)u &= (ab)(x_1, \dots, x_n)\\
&= ((ab)x_1, \dots, (ab)x_n)\\
&= (a(bx_1), \dots, a(bx_n))\\
&= a(bx_1, \dots, bx_n)\\
&= a(bu)
\end{aligned}$$

- Finalmente mostremos que $1u = u$.

$$\begin{aligned} 1u &= 1(x_1, \dots, x_n) \\ &= (1x_1, \dots, 1x_n) \\ &= (x_1, \dots, x_n) \\ &= u \end{aligned}$$

Como mostramos que as oito propriedades são satisfeitas então o conjunto $\mathbb{R}^n$ com as operações usuais é um espaço vetorial. ∎

Observações:

Note que o exemplo anterior é um caso particular deste.

Exemplo:

$M(m,n)(\mathbb{R})$ com as operações usuais é um espaço vetorial.

Em particular:

$$V = M(2,2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

com as operações usuais é um espaço vetorial.

Exemplo:

Seja P_n o conjunto dos polinômios com coeficientes reais e grau menor ou igual a n.

Se $p(x) \in P_n$ então $p(x) = anx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$. Neste conjunto as operações de soma e multiplicação por escalar usuais são dadas por:

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (an + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + \\ &\quad (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) \\ cp(x) &= cnx^n + ca_{n-1}x^{n-1} + \ldots + ca_1x + ca_0 \end{aligned}$$

onde aqui $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$,
$q(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0$ e $c \in \mathbb{R}$.

Este conjunto munido destas operações é um espaço vetorial.