Álgebra Linear I

Aula 2

Professora Kelly Karina

Matriz

Chamamos de matriz a uma tabela cujos elementos estão dispostos numa certa quantidade de linhas e de colunas.

Veja por exemplo esta tabela:

2016 Summer Olympics medal table

Rank	NOC	Gold	Silver	Bronze	Total
1	United States (USA)	46	37	38	121
2	Great Britain (GBR)	27	23	17	67
3	China (CHN)	26	18	26	70
4	Russia (RUS)	19	17	20	56
5	Germany (GER)	17	10	15	42
6	Japan (JPN)	12	8	21	41
7	France (FRA)	10	18	14	42
8	South Korea (KOR)	9	3	9	21
9	Italy (ITA)	8	12	8	28
10	Australia (AUS)	8	11	10	29
11	Netherlands (NED)	8	7	4	19
12	Hungary (HUN)	8	3	4	15
13	Brazil (BRA)*	7	6	6	19

$$\begin{pmatrix} 46 & 37 & 38 & 121 \\ 27 & 23 & 17 & 67 \\ 26 & 18 & 26 & 70 \\ 19 & 17 & 20 & 56 \\ 17 & 10 & 15 & 42 \\ 12 & 8 & 21 & 41 \\ 10 & 18 & 14 & 42 \\ 9 & 3 & 9 & 21 \\ 8 & 12 & 8 & 28 \\ 8 & 11 & 10 & 29 \\ 8 & 7 & 4 & 19 \\ 8 & 3 & 4 & 15 \\ 7 & 6 & 6 & 19 \end{pmatrix}$$

Notação:

- $M_{m\times n}(\mathbb{R})$: conjunto das matrizes de ordem $m \times n$, cujos elementos são números reais.
- Representaremos uma matriz por uma letra latina maiúscula.

  Exemplo:
  Se $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ então

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{mn} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}$$

- Para representar uma matriz podemos usar colchetes como acima, parêntesis ou até mesmo dois traços verticais de cada lado.

Matrizes iguais

Duas matrizes $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B_{k\times l} = [b_{ij}]_{k\times l}$ são iguais (e escrevemos $A = B$) se $m = k$, $n = l$ e $a_{ij} = b_{ij}$, ou seja se possuem a mesma ordem e se todos os elementos são iguais nas suas respectivas posições.

Tipos especiais de matrizes

Nome	Descrição
Matriz Quadrada	o número de linha é igual ao número de colunas
Matriz Nula	todos os seus elementos são zero
Matriz Coluna	possui apenas uma coluna
Matriz Linha	possui apeas uma linha
Matriz Diagonal	matriz quadrada tal que $a_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$
Matriz identidade	matriz quadrada tal que $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ se $i = j$
Matriz Triangular Superior	matriz quadrada tal que $a_{ij} = 0$ se $i > j$
Matriz Triangular Inferior	matriz quadrada tal que $a_{ij} = 0$ se $i < j$
Matriz Simétrica	matriz quadrada tal que $a_{ij} = a_{ji}$

Exemplo:

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ é uma matriz diagonal;
- $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ é uma matriz triangular superior;
- $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 8 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ é uma matriz simétrica.

Adição

Dadas duas matrizes de mesma ordem $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ e $B_{m\times n} = [b_{ij}]$, definimos a soma de A e B e denotamos por $A + B$ como a matriz de ordem $m \times n$ dada por:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Propriedades:

Dadas as matrizes A, B e C de mesma ordem $m \times n$, temos:

i) $A + B = B + A$ (comutatividade)

ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associatividade)

iii) $A + 0 = A,$ onde 0 denota a matriz nula de ordem $m \times n$

Multiplicação por escalar

Seja $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e K um escalar (ou seja, um número real ou complexo), então definimos o produto de k por A como sendo a matriz dada por:

$$kA = [ka_{ij}]_{m\times n}$$

Exemplo:

$$2\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 14 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Transposição

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ definimos A^t (e lemos "A transposta") da seguinte forma:

$$A^t = [b_{ij}]_{n\times m}, \text{ onde } b_{ij} = a_{ji}$$

Exemplo:

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 8 \end{bmatrix} \text{ então } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Propriedades:

i) Uma matriz é simétrica se e somente se ela é igual à sua transposta;

ii) $(A^t)^t = A$, ou seja, a transposta da transposta de uma matriz é ela mesma;

iii) $(A + B)^t = A^t + B^t$

iv) $(kA)^t = kA^t$, onde k é um escalar.

Multiplicação de matrizes

Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n\times p}$. O produto de A e B é a matriz $C = AB = [c_{ij}]_{m\times p}$ onde:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1\cdot(-2)+3\cdot 1+(-1)\cdot 3 & 1\cdot 2+3\cdot 0+(-1)\cdot 5 \\ 0\cdot(-2)+2\cdot 1+5\cdot 3 & 0\cdot 2+2\cdot 0+5\cdot 5 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 17 & 25 \end{bmatrix}$$

Propriedades:

i) Em geral $AB \neq BA$;

ii) $AI = IA = A$ onde I denota uma matriz identidade (onde I é uma matriz identidade com ordem tal que faça sentido a multiplicação);

iii) $A(B + C) = AB + AC$

iv) $(A + B)C = AC + BC$

v) $(AB)C = A(BC)$

vi) $(AB)^t = B^t A^t$

vii) $0 \cdot A = 0$ e $A \cdot 0 = 0$