Aula 13: Grafos – Conceitos Iniciais

UFRR

DCC405-Estrutura de Dados II

Prof. Me. Acauan C. Ribeiro

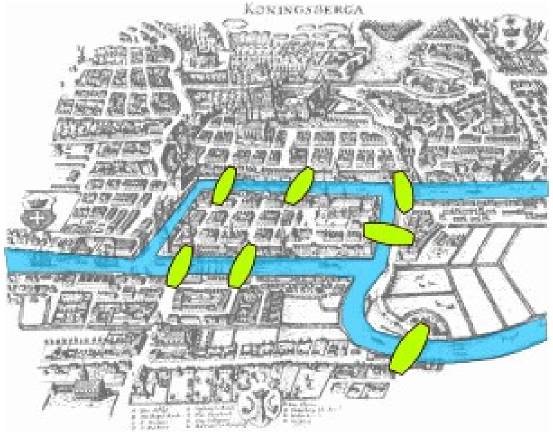
Roteiro

- Introdução a Grafos Teoria dos Grafos
- Representação
- Algumas aplicações

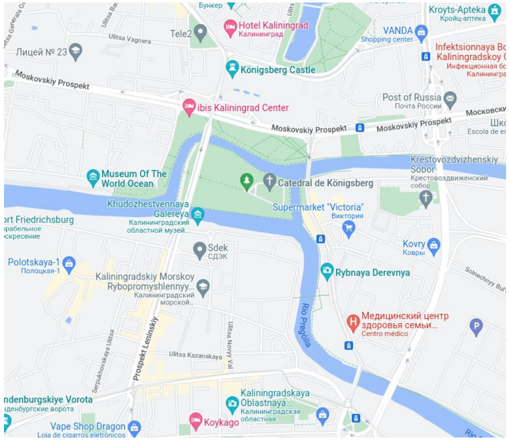
Introdução Teoria dos Grafos

A antiga cidade de **Königsberg**, que hoje é **Kaliningrado na Rússia**, possui uma geografia interessante: o rio Prególia, que atravessa a cidade, bifurca e forma duas ilhas, Kneiphof e Lomse.

Havia sete pontes interligando as ilhas e as cidades; quatro que ligavam Kneiphof ao resto da cidade, duas conectando Lomse e uma entre as duas ilhas.



Königsberg, Alemanha até a Segunda Guerra Mundial

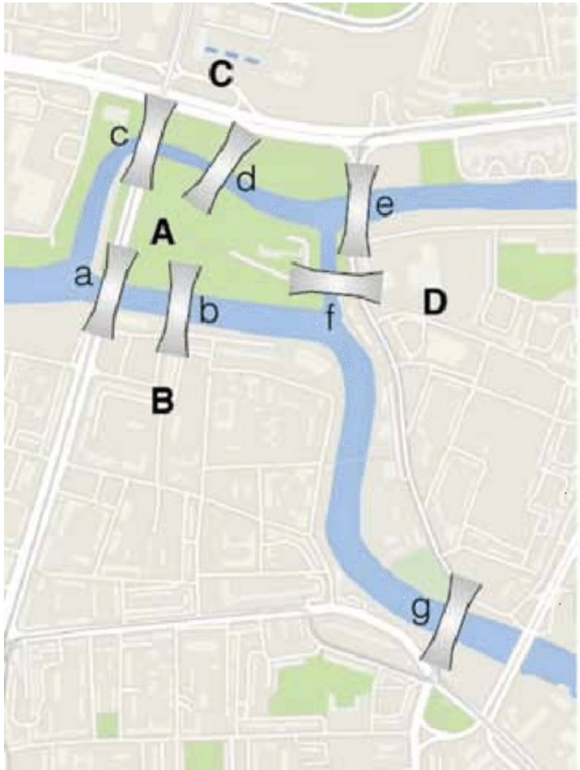


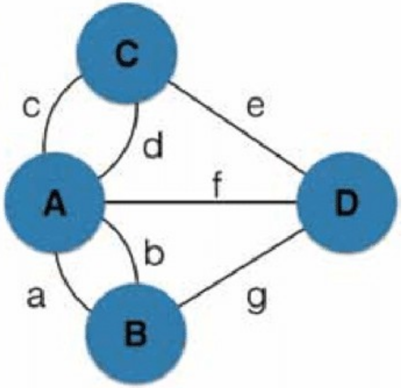
Kaliningrado – Rússia

Problema 1: Qual caminho passa por todas as pontes, mas apenas uma vez em cada?

Introdução Teoria dos Grafos

Problema 1: Qual caminho passa por todas as pontes, mas apenas uma vez em cada? **Será que você consegue responder?**





Grafo contruído por Euler para solucionar o problema das 7 pontes de Königsberg, trazendo a importância da teoria dos grafos.

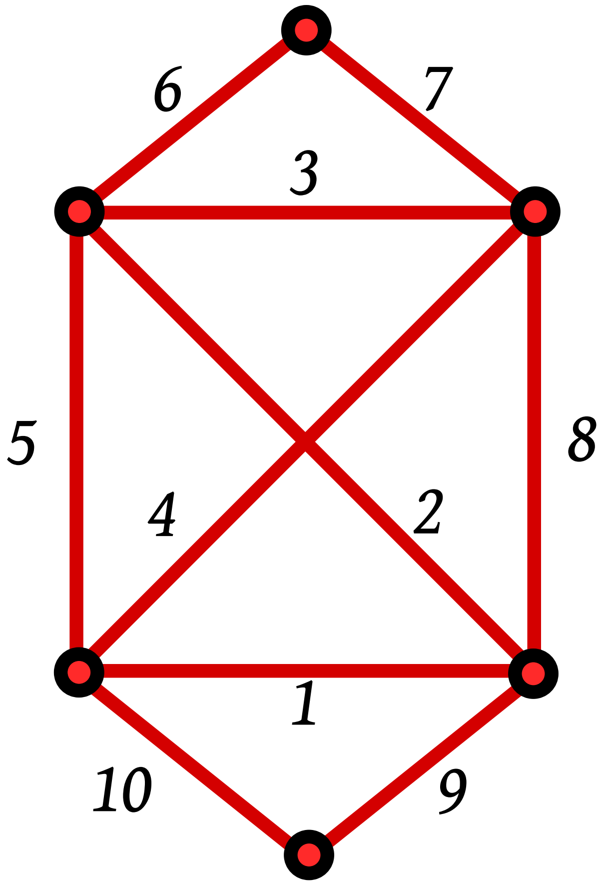
Introdução Teoria dos Grafos

- O primeiro a resolver o problema foi o ilustre matemático **Leonhard Euler**, em 1736, que **provou não haver uma solução.**
- Um pensamento simples do matemático foi capaz de resolver o problema: para passar apenas uma vez por cada aresta, cada vértice do caminho deve estar conectado a um número **par de arestas**, pois para cada aresta de entrada, devemos ter uma de saída. Já o primeiro e último vértice devem ter um número ímpar, já que o vértice que iniciamos não precisa ter uma entrada e o último não precisa de uma saída. A conclusão de **Euler para Königsberg é que não existe o caminho desejado, pois todos os vértices possuem um número ímpar de arestas.**
- É importante notar que a **abstração** é uma ferramenta poderosa: Euler não só resolveu o problema das pontes de Königsberg, como também nos deu uma maneira de resolver qualquer problema semelhante de existência de caminhos, a partir da representação em um grafo.

Caminho Euleriano

- Um **Caminho Euleriano** é um **caminho** em um grafo que visita toda aresta exatamente uma vez. Com caso especial, um **Circuito Euleriano** é um caminho Euleriano **que começa e termina no mesmo vértice**.
- Grafos que possuem um **circuito Euleriano são chamados Grafos Eulerianos**. Uma das principais condições para um grafo ser Euleriano é que todos os vértices precisam ser de grau par. Entretanto, essa condição não é suficiente, pois também é necessário que o grafo seja conexo.
- Há, ainda, grafos com caminhos Eulerianos se houver 2 vértices de grau ímpar. Nesse caso, ao se acrescentar uma aresta ligando estes dois vértices, o novo grafo passa a ser um circuito Euleriano.

Circuito Euleriano



O que é um Grafo?

→ **Definições informais:**

"É uma representação gráfica de elementos de dados e das conexões entre alguns desses elementos." (GERSTING, 2004)

"Conjunto de **pontos (vértices)** e **linhas (arestas)** que podem modelar aspectos do mundo real. (CUNHA, 2020)"

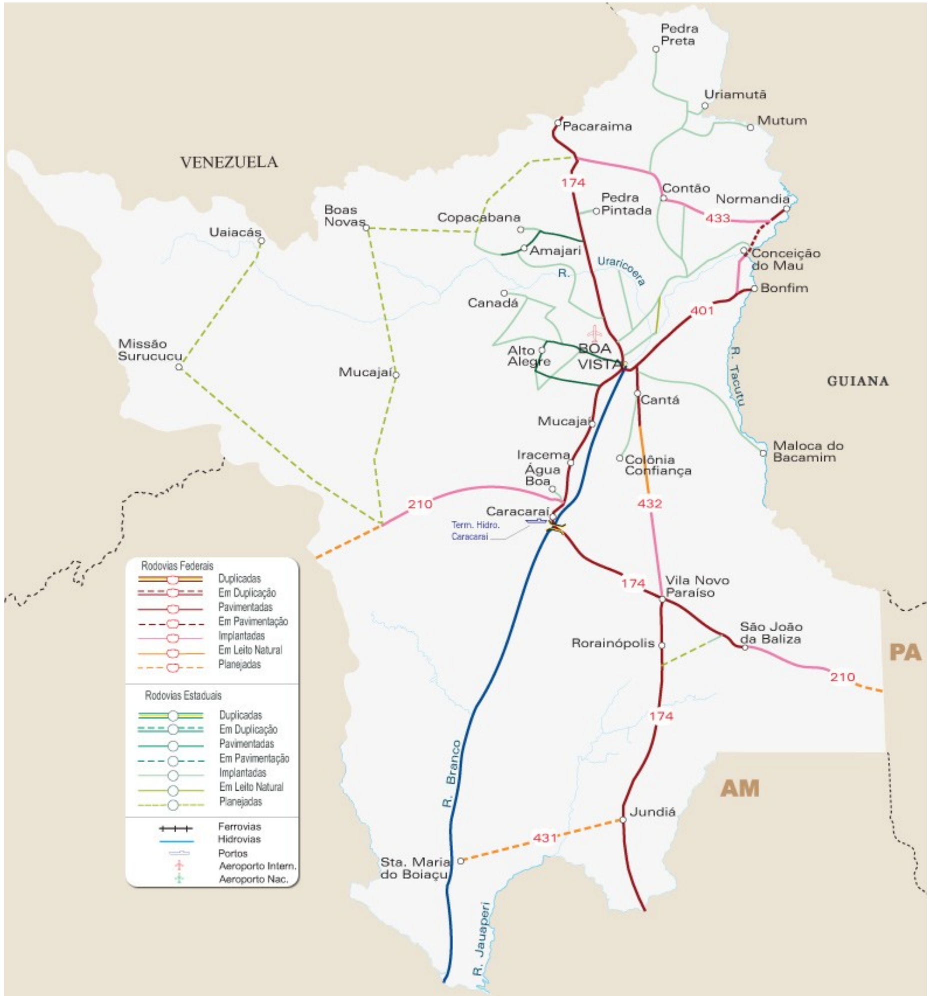
Exemplo: https://news-explorer.mybluemix.net/

O que é um Grafo?

- Grafos são modelos matemáticos
- Ajudam a representar vários problemas do mundo real de uma maneira mais formal, "materializada".
- Por que modelar é importante?

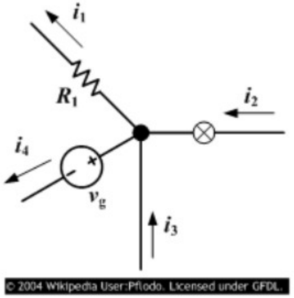
A ideia da construção de modelos é **abstrair a complexidade** para que o problema seja representado de uma maneira mais simples. E para poder observar de uma maneira programática.

Grafos - Exemplos

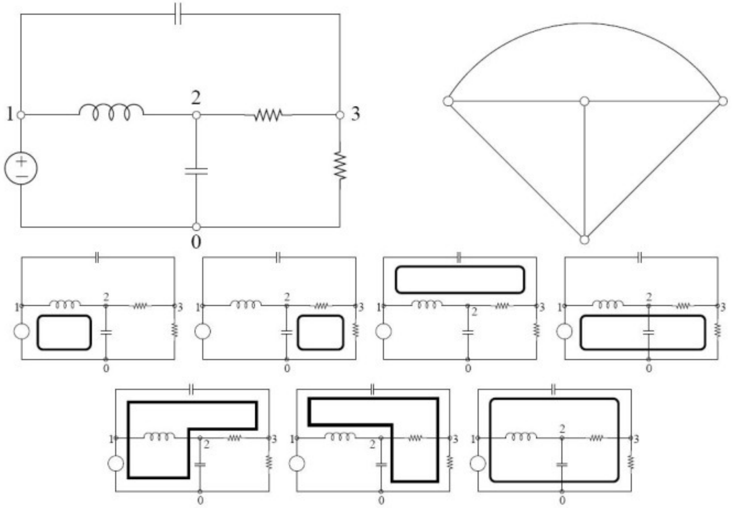


Circuito elétrico: Leis de Kirchoff

Gustav Kirchoff (1824–1887), físico alemão. Foi o primeiro a analisar o comportamento de “árvores matemáticas” com a investigação de circuitos elétricos.

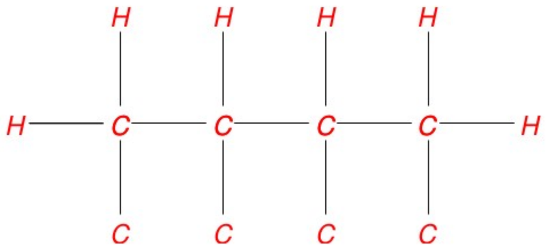


$$i_1 + i_4 = i_2 + i_3$$

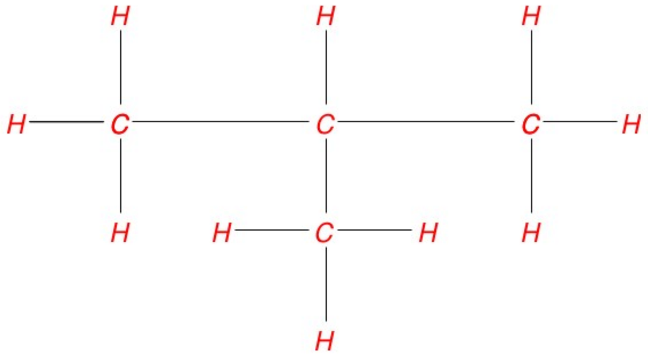


Estruturas de moléculas de hidrocarboneto

Arthur Cayley (1821–1895), matemático inglês. Logo após o trabalho de Kirchoff, Cayley usou "árvores matemáticas" para enumerar todos os isômeros para certos hidro-carbonetos.



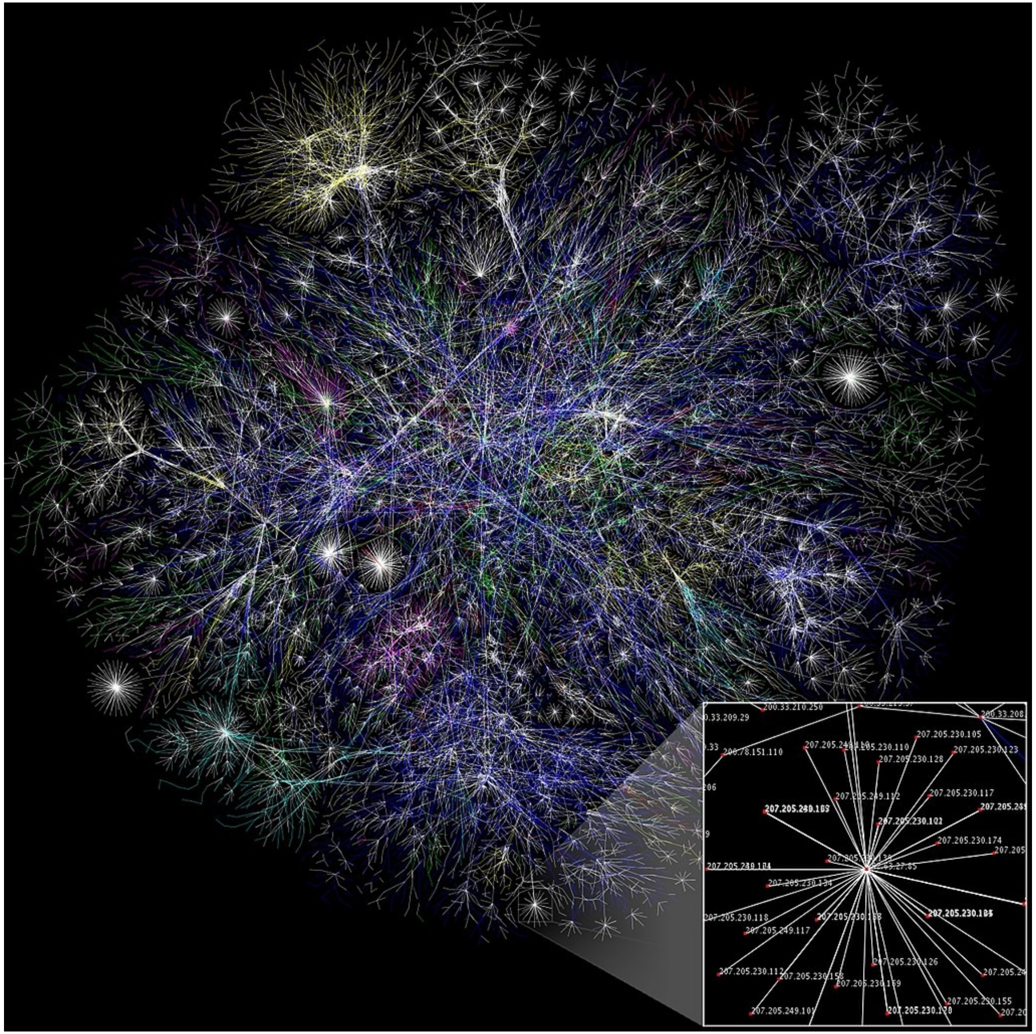
Butano



Isobutano

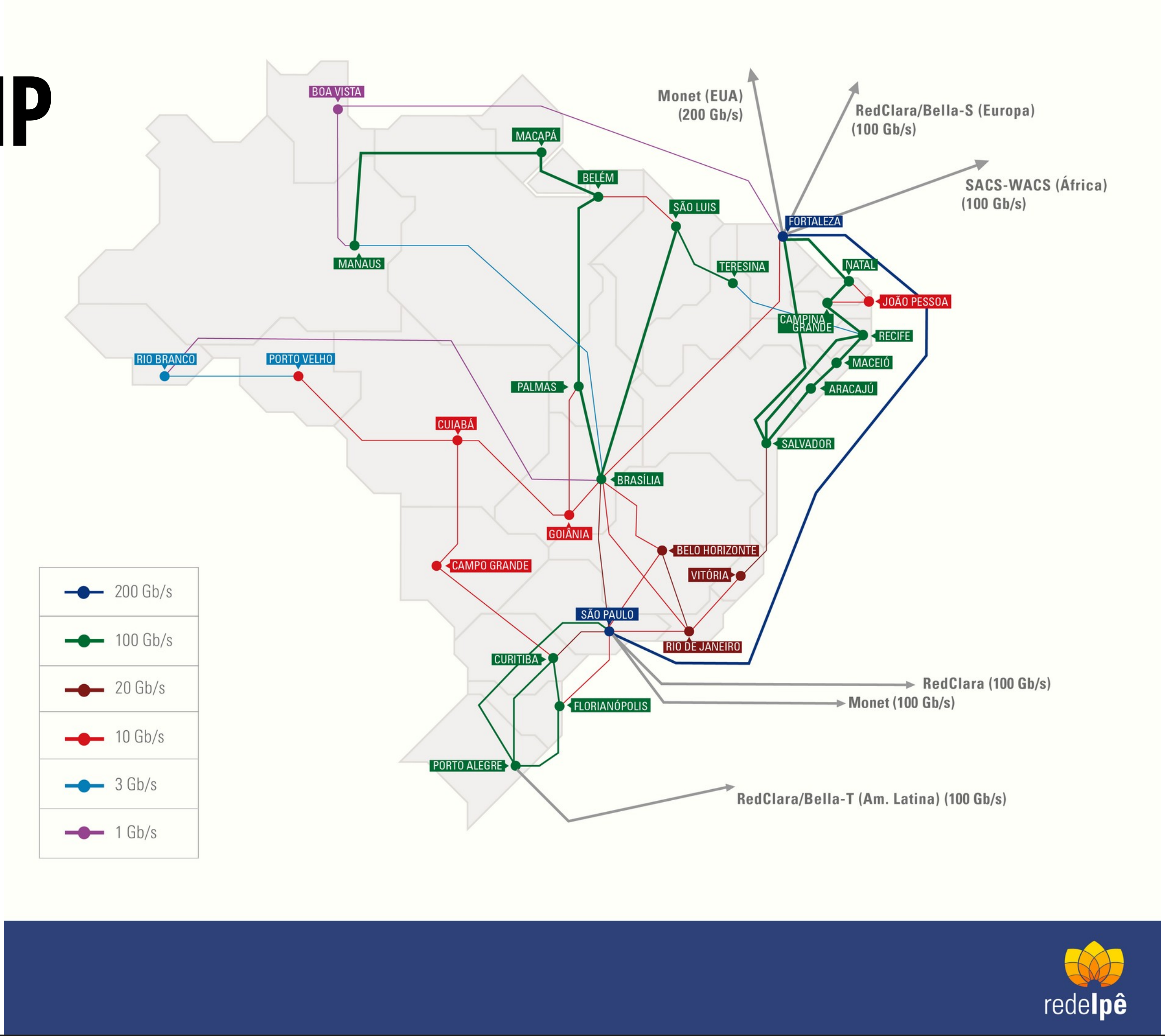
Conectividade na internet

- Este grafo mostra a **conectividade entre roteadores na Internet**, resultado do trabalho "Internet Mapping Project" de Hal Burch e Bill Cheswick.
- Atualmente o trabalho está sendo desenvolvido comercialmente pela empresa Lumeta (www.lumeta.com).



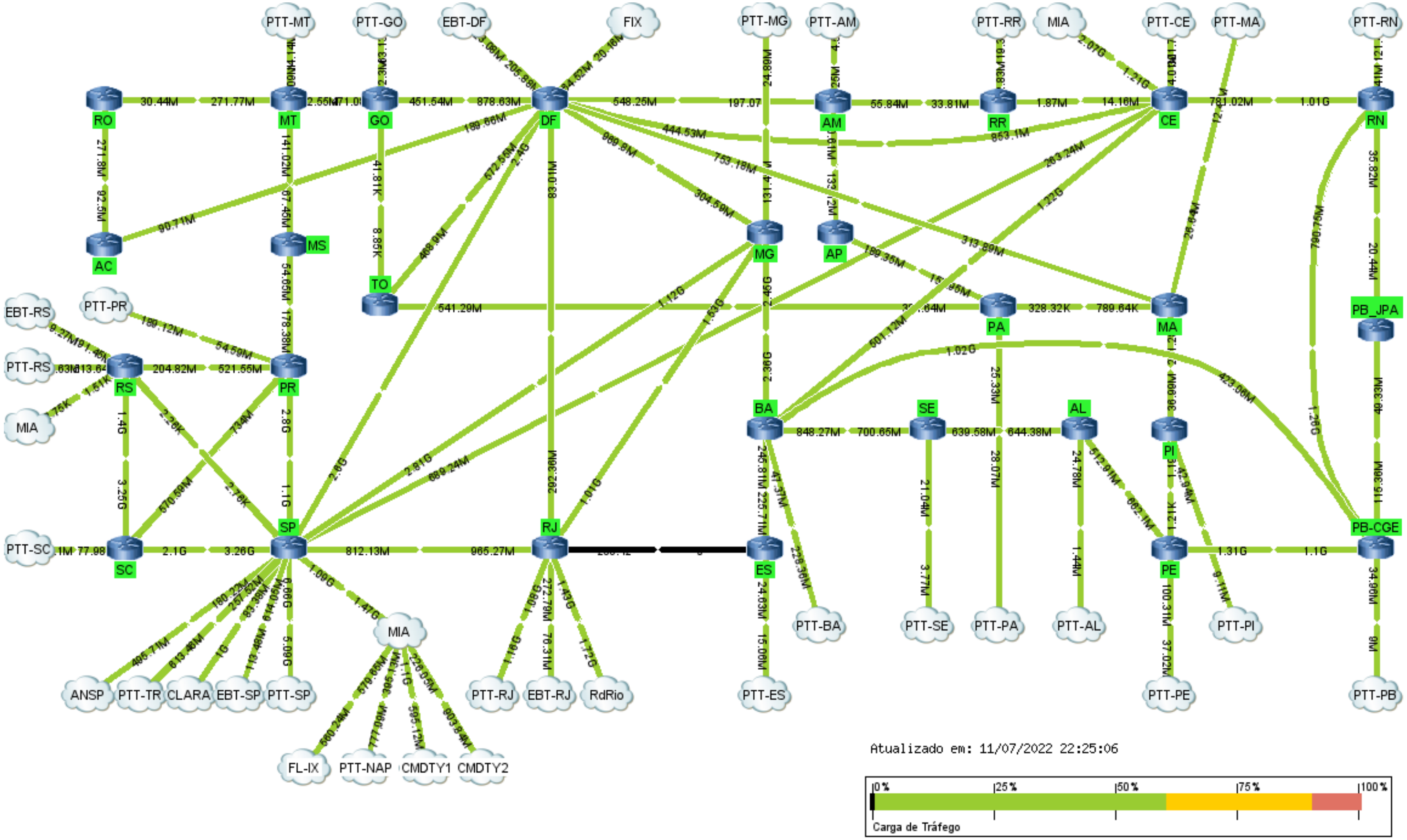
Conectividade da RNP

https://www.rnp.br/sistema-rnp/rede-ipe



Conectividade da RNP

https://www.rnp.br/sistema-rnp/ferramentas/panorama-de-trafego



Exemplo – Aplicação

Vegetarianos e Canibais

- Seja uma região formada por vegetarianos e canibais.
- Inicialmente, dois vegetarianos e dois canibais estão na **margem esquerda (ME)** de um rio.
- Existe um **barco** que pode transportar **no máximo duas pessoas** e **sempre atravessa o rio com pelo menos uma pessoa**.
- O objetivo é achar uma forma de transportar os dois vegetarianos e os dois canibais para a margem direita (MD) do rio.
- Em nenhum momento, o número de canibais numa margem do rio pode ser maior que o número de vegetarianos, caso contrário, . . .

Canibais versus vegetarianos no Don Juan de Lord Byron

Fonte: http://www.mallarmargens.com/2016/03/canibais-versus-vegetarianos-no-don.html

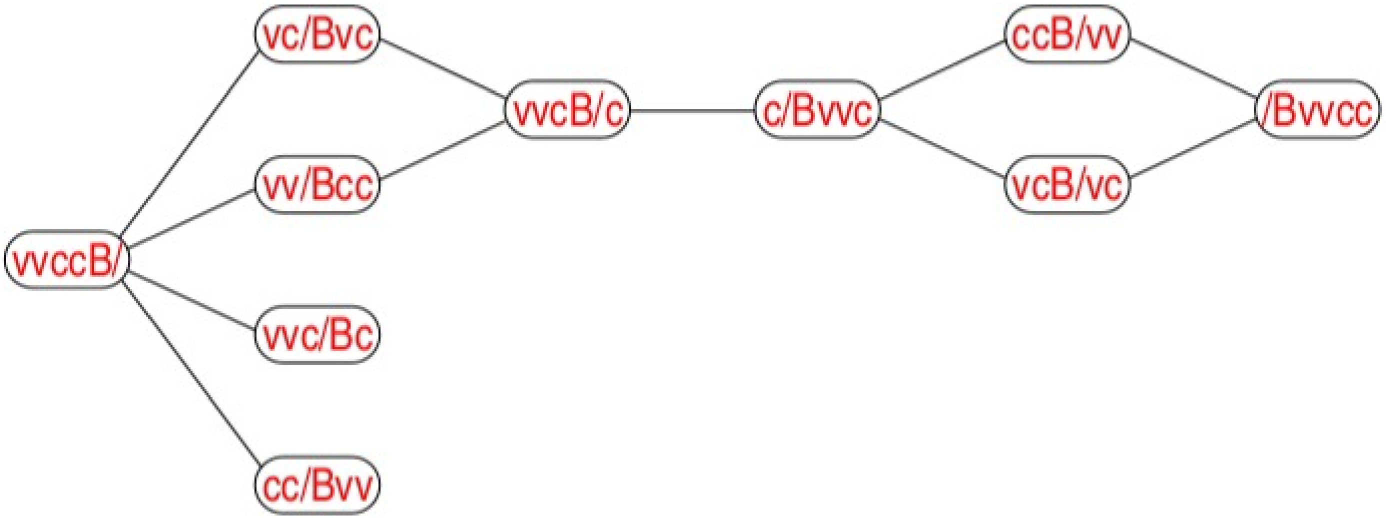
Exemplo – Aplicação

Vegetarianos e Canibais

- **Solução:**
  - Notação para representar cada cenário possível.
  - Modelo para representar a mudança de um cenário em outro válido.
- **Notação: ME/MD**
  - vvccB/ → ME: 2v, 2c e o barco (B); MD: –.
  - vc/Bvc → ME: 1v, 1c; MD: B, 1v e 1c.
- **Modelo: grafo**
  - Vértice: cenário válido.
  - Aresta: transição válida de um dado cenário em outro.

Exemplo – Aplicação

Vegetarianos e Canibais



- Ver segunda parte **(Conceitos formais)**