4.5 Recorrências Lineares de Segunda Ordem

Inicialmente, trataremos das recorrências lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes, isto é, recorrências da forma

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0.$$

Suporemos sempre $q \neq 0$, pois se $q = 0$, a recorrência seria, na realidade, uma recorrência de primeira ordem.

A cada recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, da forma acima, associaremos uma equação do segundo grau, $r^2 + pr + q = 0$, chamada *equação característica*. A nossa suposição preliminar de que $q \neq 0$ implica que 0 não é raiz da equação característica.

EXEMPLO 4.14

A recorrência $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ tem equação característica $r^2 = r + 1$. As raízes da equação característica são

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

O teorema a seguir mostra que se as raízes da equação característica são r_1 e r_2, então qualquer sequência da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

TEOREMA 4.2.

Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, então $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

DEMONSTRAÇÃO.

Substituindo $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, obtemos, agrupando convenientemente os termos,

$$C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q)$$

$$= C_1 r_1^n 0 + C_2 r_2^n 0 = 0.$$

EXEMPLO 4.15

A equação $x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n = 0$ tem $r^2 + 3r - 4 = 0$ como equação característica. As raízes da equação característica são 1 e -4. De acordo com o Teorema 1, todas as sequências da forma $a_n = C_1 1^n + C_2(-4)^n$ são soluções da recorrência.

O teorema a seguir mostra que, se $r_1 \neq r_2$, todas as soluções da recorrência têm a forma apontada no Teorema 1.

TEOREMA 4.3.

Se as raizes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, C_1 e C_2 constantes.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja y_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Determinemos constantes C_1 e C_2 que sejam soluções do sistemas de equações

$$\begin{cases} C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1 \\ C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2 \end{cases},$$

isto é,

$$C_1 = \frac{r_2^2 y_1 - r_2 y_2}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{r_1 y_2 - r_1^2 y_1}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}.$$

Isso é possível pois $r_1 \neq r_2$ e $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$.

Afirmamos que $y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ para todo n natural, o que provará o teorema. Com efeito, seja $z_n = y_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n$. Mostraremos que $z_n = 0$ para todo n. Temos

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) - C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q).$$

O primeiro parêntese é igual a zero porque y_n é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$; os dois últimos parênteses são iguais a zero porque r_1 e r_2 são raízes de $r^2 + pr + q = 0$. Então $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$.

Além disso, como $C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1$ e $C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2$, temos $z_1 = z_2 = 0$. Mas, se $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$, então $z_n = 0$ para todo n.

EXEMPLO 4.16

Vamos determinar as soluções da recorrência

$$x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n = 0.$$

A equação característica $r^2+3r-4=0$, tem raízes 1 e -4. De acordo com os Teoremas 1 e 2, as soluções da recorrência são as sequências da forma $a_n = C_1 1^n + C_2(-4)^n$, isto é, $a_n = C_1 + C_2(-4)^n$, onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

EXEMPLO 4.17

(Fibonacci revisitado.) Determinemos o número de Fibonacci F_n definido por

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad \text{com} \quad F_1 = F_2 = 1.$$

A equação característica é $r^2 = r + 1$ e as suas raízes são dadas por

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Então,

$$F_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Para determinar C_1 e C_2, podemos usar $F_1 = F_2 = 1$, mas é mais conveniente usar $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

Obtemos o sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ \\ C_1\frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, encontramos $C_1 = -C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Daí:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

isto é,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Se as raízes da equação característica forem complexas, a solução $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, C_1 e C_2 constantes arbitrárias pode ser escrita de modo a evitar cálculos com complexos. Pondo as raízes na forma trigonométrica, teremos:

$$r_1 = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta), \qquad r_2 = \rho(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)$$

$$r_1^n = \rho^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta), \quad r_2^n = \rho^n(\cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta).$$

Logo,

$$C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = \rho^n[(C_1 + C_2)\cos n\theta + i(C_1 - C_2)\,\mathrm{sen}\, n\theta].$$

É claro que $C_1' = C_1 + C_2$ e $C_2' = i(C_1 - C_2)$ são novas constantes e a solução pode ser escrita

$$a_n = \rho^n[C_1' \cos n\theta + C_2' \,\mathrm{sen}\, n\theta].$$

Exemplo 4.18

A recorrência $x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0$ tem equação característica $r^2 - r + 1 = 0$, cujas raízes são

$$r_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2},$$

que são complexas de módulo $\rho = 1$ e argumento principal $\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}$.

A solução é

$$x_n = \rho^n[C_1 \cos n\theta + C_2 \,\mathrm{sen}\, n\theta] = C_1 \cos\frac{n\pi}{3} + C_2 \,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{3}.$$

O que aconteceria se as raízes da equação característica fossem iguais? Os teoremas a seguir respondem essa pergunta.

Teorema 4.4.

Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então, $a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

Demonstração.

Se as raízes são iguais, então $r = -\dfrac{p}{2}$. Substituindo $a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$ na recorrência

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$$

obtemos, agrupando convenientemente os termos,

$$C_1 r^n(r^2 + pr + q) + C_2 n r^n(r^2 + pr + q) + C_2 r^n r(2r + p)$$

$$= C_1 r^n 0 + C_2 n r^n 0 + C_2 r^n r 0 = 0.$$

TEOREMA 4.5.

Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $C_1r^n + C_2nr^n$, C_1 e C_2 constantes.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja y_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Determine constantes C_1 e C_2 que sejam soluções do sistema de equações.

$$\begin{cases} C_1r + C_2r = y_1 \\ \\ C_1r^2 + 2C_2r^2 = y_2 \end{cases},$$

isto é,

$$C_1 = 2\frac{y_1}{r} - \frac{y_2}{r^2} \qquad \text{e} \qquad C_2 = \frac{y_2 - ry_1}{r^2}.$$

Isso é possível pois $r \neq 0$.

Afirmamos que $y_n = C_1r^n + C_2nr^n$ para todo n natural, o que provará o teorema. Com efeito, seja $z_n = y_n - C_1r^n - C_2nr^n$. Mostraremos que $z_n = 0$ para todo n. Temos

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) -$$
$$- C_1r^n(r^2 + pr + q) - C_2nr^n(r^2 + pr + q) - C_2r^nr(2r + p).$$

O primeiro parêntese é igual a zero porque y_n é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$; o segundo e o terceiro parênteses são iguais a zero porque r é raiz de $r^2 + pr + q = 0$; o quarto é igual a zero porque $2r + p = 0$ já que, quando $r_1 = r_2 = r$, tem-se $r = -\frac{p}{2}$. Então, $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$.

Além disso, como $C_1r + C_2r = y_1$ e $C_1r^2 + 2C_2r^2 = y_2$, temos $z_1 = z_2 = 0$. Mas, se $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$, então $z_n = 0$ para todo n.

EXEMPLO 4.19

A recorrência $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$ tem equação característica $r^2 - 4r + 4 = 0$. As raízes são $r_1 = r_2 = 2$ e a solução da recorrência é $x_n = C_12^n + C_2n2^n$.

O teorema a seguir mostra um processo para resolver algumas recorrências não homogêneas.

TEOREMA 4.6.

Se a_n é uma solução da equação

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n),$$

então a substituição $x_n = a_n + y_n$ transforma a equação em

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0.$$

Demonstração.

Substituindo x_n por $a_n + y_n$ na equação, obtemos

$$(a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n) + (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) = f(n).$$

Mas $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = f(n)$, pois a_n é a solução da equação original. Logo, a equação se transformou em

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0.$$

De acordo com o Teorema 4.6, a solução de uma recorrência não homogênea é constituída de duas parcelas: uma solução qualquer da não homogênea e a solução homogênea. A solução da homogênea, sabemos achar. Uma solução da não homogênea, procuraremos por tentativas.

Exemplo 4.20

A recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n$ tem equação característica $r^2 - 6r + 8 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$. Portanto, a solução da homogênea, isto é, de $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 0$ é $h_n = C_1 2^n + C_2 4^n$. Tentaremos agora descobrir uma solução particular, t_n, da recorrência

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n.$$

Ora, se substituirmos t_n em $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n$ devemos encontrar $n + 3^n$. Que tipo de função deve ser t_n? É bastante razoável imaginar que t_n seja a soma de um polinômio do primeiro grau com uma exponencial de base 3. Tentaremos $t_n = An + B + C3^n$. Substituindo em

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n,$$

obtemos $3An + 3B - 4A - C3^n = n + 3^n$. Logo, t_n será solução se $3A = 1$, $3B - 4A = 0$ e $-C = 1$. Logo,

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{4}{9} \quad \text{e} \quad C = -1.$$

Daí,

$$t_n = \frac{1}{3}n + \frac{4}{9} - 3^n.$$

Portanto, a solução da recorrência não homogênea é

$$x_n = C_1 2^n + C_2 4^n + \frac{1}{3}n + \frac{4}{9} - 3^n.$$

EXEMPLO 4.21

A recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 1 + 2^n$ tem equação característica $r^2 - 6r + 8 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$. Portanto, a solução da equação homogênea, isto é, de $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 0$ é $h_n = C_1 2^n + C_2 4^n$. Tentaremos agora descobrir uma solução particular, t_n da recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 1 + 2^n$. Ora, se substituirmos t_n em $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n$ devemos encontrar $1 + 2^n$. Que tipo de função deve ser t_n? é bastante razoável imaginar que t_n seja a soma de um polinômio constante com uma exponencial de base 2. Tentaremos $t_n = A + B2^n$. Substituindo em

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 1 + 2^n,$$

obtemos $3A = 1 + 2^n$. Essa igualdade é impossível. A recorrência não admite solução da forma $t_n = A + B2^n$.

Parando para pensar no que aconteceu, verificamos que era óbvio que a nossa tentativa não podia dar certo. O espírito da nossa tentativa era tentar uma constante A para que obtivéssemos uma constante que igualaríamos a 1 e tentar $B2^n$ para gerar uma exponencial que pudéssemos igualar a 2^n. É claro que o termo $B2^n$ não poderia cumprir o seu papel. $B2^n$ é solução da homogênea (é a solução da homogênea que é obtida pondo $C_1 = B$ e $C_2 = 0$) e, substituído da equação, daria zero e não uma exponencial que pudéssemos igualar a 2^n.

Vamos corrigir a nossa tentativa para $t_n = A + Bn2^n$. Sempre que na nossa tentativa em algum bloco não cumprir o seu papel, fazemos a correção "aumentando o grau", isto é, multiplicando o bloco por n. Agora, substituindo na recorrência, obtemos $3A - B4B2^n = 1 + 2^n$.

Se $3A = 1$ e $-4B = 1$, isto é,

$$A = \frac{1}{3} \qquad \text{e} \qquad B = -\frac{1}{4},$$

temos a solução

$$t_n = \frac{1}{3} - \frac{n2^n}{4}.$$

A solução da recorrência é a soma de h_n com t_n. Portanto,

$$x_n = C_1 2^n + C_2 4^n + \frac{1}{3} - \frac{n2^n}{4}.$$

OBSERVAÇÃO 4.7.

O teorema 4.6 pode ser utilizado para resolver uma recorrência linear não homogênea de qualquer grau, toda vez que se conheça a solução geral y_n da recorrência homogênea correspondente e uma solução particular $a(n)$: a solução geral da equação não homogênea é dada por $x_n = a_n + y_n$. Ilustramos este fato resolvendo, de um outro modo, a recorrência linear de primeira ordem vista no exemplo 4.13.