Álgebra Linear I

Aula 3

Professora Kelly Karina

Determinantes

O determinante de uma matriz quadrada A_n é um número associado à mesma (que denotaremos por $detA$ ou $|A|$) da seguinte forma:

- $n = 1$
  Se $A = [a_{11}]$ então $|A| = a_{11}$.
- $n = 2$
  Se $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ então $|B| = b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}$.

Exemplo: $|10| = 10$, $B = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7$

- $n = 3$

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ então

$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$.

Exemplo:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 12 + 0 - 0 - 0 + 10 = 3$$

Observação:

Esta expressão para o determinante de uma matriz de ordem 3 pode ser encontrada da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Exemplo:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 5 & -2 & 0 \end{array}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 12 + 0 - 0 - 0 + 10 = 3$$

- Esta expressão pode ser escrita ainda da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
|A| &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
|A| &= a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}|
\end{aligned}
$$

onde A_{ij} é a submatriz da matriz inicial, de onde foram retiradas a $i-$ ésima linha e a $j-$ésima coluna.

Definição:

Definimos o **cofator** de A_{ij} e escrevemos Δ_{ij} da seguinte forma:

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$$

- $n \geq 4$
  Usaremos o desenvolvimento de Laplace para o cálculo de determinantes (fórmula de recorrência que permite calcular o determinante de uma matriz de ordem n, a partir dos determinantes das submatrizes quadradas de ordem $n - 1$).

  No caso $n = 4$, se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$ então

  $$|A| = a_{11}|\Delta_{11}| + a_{12}|\Delta_{12}| + a_{13}|\Delta_{13}| + a_{14}|\Delta_{14}|.$$

Observação:

Para a expressão acima escolhemos a linha 1 mas poderíamos ter escolhido qualquer linha ou coluna.

Exemplo:

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Se escolhermos a terceira linha, então teremos:

$$\begin{aligned}
|A| &= 3\Delta_{31} + 0\Delta_{32} + 4\Delta_{33} + 2\Delta_{34} \\
&= 3(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \\
& \quad 4(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 3 \cdot 1 \cdot 11 + 0 + 4 \cdot 1 \cdot (-8) + 2 \cdot (-1) \cdot 1 = -1
\end{aligned}$$

Propriedades:

- Se A é uma matriz quadrada, então $detA = detA^t$;
- O determinante é nulo se a matriz quadrada tiver:
  a) uma fila (linha ou coluna) nula;
  b) filas proporcionais;
  c) uma fila igual à soma de outras filas paralelas multiplicadas por constantes (uma para cada fila);
- O determinante de uma matriz quadrada não se altera se somarmos a uma fila uma outra fila paralela, previamente multiplicada por uma constante;
- Invertendo-se a posição de duas linhas paralelas de uma matriz quadrada, seu determinante muda de sinal;
- Multiplicando-se por uma constante k todos os elementos de qualquer fila de uma matriz quadrada, seu determinante fica multiplicado por k;
- $det(AB) = detA \cdot detB$.

Matriz Adjunta e Matriz Inversa

Já sabemos que o cofator de A_{ij} (Δ_{ij}) é dado por:

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$$

onde A_{ij} é a submatriz da matriz inicial, de onde foram retiradas a $i-$ ésima linha e a $j-$ésima coluna.

Notação:

A matriz dos cofatores de $A = [\Delta_{ij}]$ denotaremos por $cof(A)$.

Exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ então $cof(A) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{pmatrix}$

Calculemos os cofatores (entradas de $cof(A)$).

$$\begin{array}{lclcl} \Delta_{11} & = & (-1)^{1+1} \cdot |2| & = & 2 \\ \Delta_{12} & = & (-1)^{1+2} \cdot |1| & = & -1 \\ \Delta_{21} & = & (-1)^{2+1} \cdot |5| & = & -5 \\ \Delta_{22} & = & (-1)^{2+2} \cdot |3| & = & 3 \end{array}$$

Portanto

$$cof(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Definição:

Dada matriz quadrada A, chamaremos de **matriz adjunta de** A à transposta da matriz dos cofatores de A.

$$adj\ A = (cof(A))^t$$

Exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ então $adj\ A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Teorema:

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Temos então que $A \cdot adj\ A = (det\ A) \cdot I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

Dem: (Exercício)

Definição:
Dada uma matriz quadrada A de ordem n, chamamos de inversa de A uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$ onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Escrevemos A^{-1} para a inversa de A.

Exemplo:

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ então } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Se } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ então } B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Observação:

- Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, ambas inversíveis então AB é inversível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Nem toda matriz tem inversa;
- Se A_n tem inversa (ou seja existe A^{-1}) então

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= I_n \\ det\ (A \cdot A^{-1}) &= det(I_n) \\ det\ A\ detA^{-1} &= det\ I_n \\ det\ A\ detA^{-1} &= 1 \end{aligned}$$

  Segue que $det\ A \neq 0$ e $det\ A^{-1} = \frac{1}{det\ A}$.

- Se $det\ A \neq 0$ então temos:

$$A \cdot adj\ A = det\ A \cdot I_n$$

  Segue que $A^{-1} = \frac{1}{det\ A} adj\ A$

Observação:

No exemplo 1 a matriz inversa de A coincidiu com a adjunta de A, pois o determinante de A é 1.

No caso de matrizes de ordem 2 o cálculo da inversa desta forma (usando a matriz adjunta) é bem prático.

No entanto, para ordens maiores este método pode ser bem trabalhoso.

Obtenção da inversa

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} (L_1) \\ (L_2) \end{array}$$

Fazemos operações elementares com as linhas até transformar a matriz da esquerda na matriz identidade.

Operações elementares são:

- permutar duas linhas,
- multiplicar uma linha por um número não nulo ou
- somar uma linha com outra previamente multiplicada por um número.

$$\begin{array}{cc|cc l} 3 & 5 & 1 & 0 & (L_1) \\ 1 & 2 & 0 & 1 & (L_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc l} 1 & 2 & 0 & 1 & (L_1' = L_2) \\ 3 & 5 & 1 & 0 & (L_2' = L_1) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|rr l} 1 & 2 & 0 & 1 & (L_1'' = L_1') \\ 0 & 1 & -1 & 3 & (L_2'' = 3L_1' - L_2') \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|rr l} 1 & 0 & 2 & -5 & (L_1''' = L_1'' - 2L_2'') \\ 0 & 1 & -1 & 3 & (L_2''' = L_2'') \end{array}$$

A matriz à direita é a matriz inversa procurada.