UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
DCC511 – Lógica de Predicados (2022.2)
Prof. Msc. Thais Oliveira Almeida

AULA 7:

SEMÂNTICA NA LÓGICA DE PREDICADOS

Semântica na Lógica de Predicados

- Associa significados semânticos aos símbolos sintáticos;
- Interpretações são mais elaboradas;
  - Devido à presença de quantificadores, variáveis, funções e predicados.
- $H=(\forall x)(\exists y)p(x,y)$
  - De que depende a interpretação da fórmula acima?
    - Em 1º lugar, do significado do símbolo de predicado p.
- Suposição: se I[p]= < (“menor que”)
- Então: $I[p(x,y)] = T \leftrightarrows I[x]<I[y] \leftrightarrows x_i < y_i$

Interpretações em Lógica de Predicados

- Interpretando informalmente os quantificadores, temos que:
  - I[H] = “para todo x_i”, “existe um y_i”, tal que $x_i<y_i$
- I[H] é verdadeira ou falsa??
  - Depende dos valores das variáveis.
- Ainda não dá pra determinar...
  - Que números x_i e y_i estão sendo considerados?
  - Ou seja, qual o domínio U dos números x_i e y_i?

Interpretações em Lógica de Predicados

- Se $U = [0,\infty)$
  - Então I[H]=T.
  - "Para todo x_i", $x_i \in U$, "existe um y_i", $y_i \in U$, tal que $x_i < y_i$.

- E a interpretação J, com $U=(-\infty,0]$, $J[p] = <$.
  - J[H]=???
  - Falsa!
  - Porque se $x_J=0$, não existe y_J tal que $y_J \in U$ e $x_J < y_J$;

Interpretações em Lógica de Predicados

- Não é preciso ter as interpretações de x_J e y_J para se ter I[H] ou J[H];

- Por que?
  - Porque x e y não são símbolos livres em H;
  - Neste caso, é necessário definir apenas a interpretação do símbolo livre p.

Interpretações em Lógica de Predicados

- $G=(\forall x)p(x,y)$
  - $J[G]=???$
- Para determinar J[G]:
  - Quais os valores de J[p] e J[y]?
  - y é um símbolo livre;
  - $U=(-\infty,0]$
    - Se $J[p] = \leq$ e $J[y]=-5$:
      - "para todo x_J", $x_J \in U$, então ($x_J \leq -5$)
      - $J[G]= F$
    - Porém, se $y_J=0$
    - Então $J[G]=T$.

Interpretações em Lógica de Predicados

- Para interpretar uma fórmula H com quantificadores, é necessário observar:
  - Domínio de interpretação;
  - Valor das interpretações dos símbolos livres.

Formalização

- Extensão da interpretação proposicional;
- Há interpretações para termos e expressões;
- Se U é um conjunto não-vazio, uma interpretação I na Lógica de Predicados é uma função tal que:
  - O domínio de I é o conjunto de símbolos de função, predicados e expressões;
  - Para toda variável x, se $I[x]=x_I$, então $x_I \in U$;
  - Para todo símbolo de função n-ário f, se $I[f]=f_I$, então f_I é uma função n-ária em U:
    - f_I: U**n → U.

Interpretação de Fórmulas – Não Quantificadas

- Se E é uma expressão, I uma interpretação sobre o domínio U. I[E] é dada por:
  - Se E = *false*, I[E] = I[*false*] = F (o mesmo com *true*);
  - Se E = $f(t_1, \ldots, t_n)$, um termo, então:
    - $I[E] = I[f(t_1, \ldots, t_n)] = f_I(t_{1I}, \ldots, t_{nI})$, onde $I[f] = f_I$ e para todo termo t_i, $I[t_i] = t_{iI.}$
  - Se E = $p(t_1, \ldots, t_n)$, um átomo, então:
    - $I[E] = I[p(t_1, \ldots, t_n)] = p_I(t_{1I}, \ldots, t_{nI})$, onde $I[p] = p_I$ e para todo termo t_i, $I[t_i] = t_{iI.}$

Interpretação de Fórmulas – Não Quantificadas

- Se H é uma fórmula e E = $\neg$H, então:
  - I[E]=I[$\neg$H]=T se I[H]=F e
  - I[E]=I[$\neg$H]=F se I[H]=T

- Se H e G são fórmulas, e E = (H v G), então:
  - I[E]=I[H ˆ G]=T se I[H]=T e/ou I[G]=T e
  - I[E]=I[H v G]=F se I[H]=F e I[G]=F

Domínio de Interpretação

- Seja I uma interpretação sobre N onde:
  - $I[a]=25$, $I[b]=5$, $I[f(x,y)]=x_I/y_I$;
  - I interpreta a constante “a” como 25, “b” como 5;
  - I interpreta “f” como a função divisão;
  - Desta forma, $f(a, b)=5$. Então $I[f(a,b)]=5$, pois $I[f]=f_I$, onde $fI: U*U \rightarrow U$.

- Porém, se $I[c]=0$, $I[f(x,c)]$ não está definida! Então o domínio de f é $NxN^* \rightarrow Q$ (racionais);

- Se o domínio de I for N, não se pode definir I[f] como a função divisão.

Exercício

- Dados:
  - **$H = \neg p(x,y,a,b) \rightarrow r(f(x), g(y))$**
  - $G = p(x,y,a,b) \rightarrow (q(x,y) \wedge r(y,a))$
  - A interpretação I, onde $U=[0,\infty)$, tal que:
    - $I[x]=3$, $I[y]=2$, $I[a]=0$, $I[b]=1$
    - $I[p(x,y,a,b)] = T \leftrightarrows x_I * y_I > a_I * b_I$
    - $I[q(x,y)] = T \leftrightarrows x_I < y_I$
    - $I[r(y,a)] = T \leftrightarrows y_I > a_I$
    - $I[f(x)] = x_I + 1$
    - $I[g(x)] = x_I - 2$
    - $I[g(y)] = y_I - 2$

Exercício

- **H = $\neg$p(x,y,a,b) $\rightarrow$ r(f(x), g(y))**
  - A interpretação I, onde U=[0,∞), tal que:
    - I[x]=3, I[y]=2, I[a]=0, I[b]=1
    - I[p(x,y,a,b)] = T $\leftrightarrows$ $x_I * y_I > a_I * b_I$
    - I[p(x,y,a,b)] = T $\leftrightarrows$ 3*2 > 0*1 = 6 > 0 = T
    - **$\neg$p(x,y,a,b) = $\neg$ T = F**

Exercício

- **$H = \neg p(x,y,a,b) \rightarrow r(f(x), g(y))$**
  - A interpretação I, onde $U=[0,\infty)$, tal que:
    - $I[x]=3, I[y]=2, I[a]=0, I[b]=1$
    - $I[q(x,y)] = T \leftrightarrows x_I < y_I$
    - $I[r(y,a)] = T \leftrightarrows y_I > a_I$
    - $I[f(x)] = x_I + 1 = 3 + 1 = 4$
    - $I[g(x)] = x_I - 2$
    - $I[g(y)] = y_I - 2 = 2 - 2 = 0$
    - $r(f(x), g(y)) = r(4, 0) = 4 > 0 = T$

Exercício

- **$H = \neg p(x,y,a,b) \rightarrow r(f(x), g(y))$**
- **$\neg p(x,y,a,b) = \neg T = F$**
- $r(f(x), g(y)) = r(4, 0) = 4 > 0 =$ **T**
- $I[H] = F \rightarrow$ **$T = T$**

Exercício

- Dados:
  - **G = p(x,y,a,b) → (q(x,y) ^ r(y,a))**
  - A interpretação I, onde U=[0,∞), tal que:
    - I[x]=3, I[y]=2, I[a]=0, I[b]=1
    - I[p(x,y,a,b)] = T ⇆ $x_I * y_I > a_I * b_I$
    - I[q(x,y)] = T ⇆ $x_I < y_I$
    - I[r(y,a)] = T ⇆ $y_I > a_I$
    - I[f(x)] = $x_I + 1$
    - I[g(x)] = $x_I - 2$
    - I[g(y)] = $y_I - 2$

Exercício

- Observe que I[x]=3, I[y]=2,..., I[H]=T, I[G]=F;
- As interpretações de f e g são elementos do domínio de I (N);
- As interpretações de H e G e dos átomos p(x,y,a,b), q(x,y) e r(y,a) são valores de verdade.

Sintaxe	x	y	a	b	p(x,y,a,b)	f(x)	g(y)	q(x,y)	r(y,a)	H	G
Semântica	3	2	0	1	T	4	0	F	T	T	F