



AULA 6:

SÍMBOLOS LIVRE E FECHO DE FÓRMULA

Símbolos Livres

- ❖ Símbolos livres de uma fórmula são suas variáveis livres, símbolos de função e de predicado;
 - Tudo menos os conectivos, variáveis dos quantificadores, símbolos de verdade e de pontuação.

- ❖ Retornando ao exemplo anterior, quais são os símbolos livres?

- ❖ $G = (\forall x) (\exists y) ((\forall z) p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y) q(z, y, x, z_1))$
 $G = (\forall \mathbf{x}) (\exists \mathbf{y}) ((\forall \mathbf{z}) p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}, \mathbf{z}) \rightarrow (\forall \mathbf{y}) q(\mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}_1))$
 - O conjunto $\{w, z_1, p, q\}$, representa os símbolos livres da fórmula G .

Símbolos Livres

❖ Indique os símbolos livres da fórmula abaixo.

❖ $((\exists x)p(x) \rightarrow r(b)) \leftrightarrow ((\forall x) p(x) \rightarrow r(b))$

❖ $((\exists \mathbf{x})p(\mathbf{x}) \rightarrow r(b)) \leftrightarrow ((\forall \mathbf{x}) p(\mathbf{x}) \rightarrow r(b))$

❖ $\{\mathbf{p}, \mathbf{r}\}$

Símbolos Livres

❖ Indique os símbolos livres da fórmula abaixo.

❖ $((\exists x)p(x,y) \rightarrow f(z)) \leftrightarrow ((\forall x) p(x) \rightarrow r(b))$

❖ $((\exists x)\textcolor{red}{p}(x,\textcolor{red}{y}) \rightarrow \textcolor{red}{f}(\textcolor{red}{z})) \leftrightarrow ((\forall x) p(x) \rightarrow \textcolor{red}{r}(b))$

❖ $\{p, r, f, y, z\}$

Símbolos Livres

❖ Indique os símbolos livres da fórmula abaixo.

❖ $((\exists x)p(x,y) \rightarrow f(z)) \leftrightarrow ((\forall x) p(x) \rightarrow r(b))$

❖ $((\exists x)\textcolor{red}{p}(x,\textcolor{red}{y}) \rightarrow \textcolor{red}{f}(\textcolor{red}{z})) \leftrightarrow ((\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow \textcolor{red}{r}(b))$

❖ $\{p, r, f, z\}$

Fórmulas Fechadas

❖ Fórmulas ditas fechadas **não** possuem variáveis livres;

- $G = (\forall x) (\exists y) ((\forall z) p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y) q(z, y, x, z_1))$

- Não é fechada.

- $G = (\forall x) (\exists y) ((\forall z) p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y) q(z, y, x, z_1))$

❖ $H = (\forall w) (\exists z) (\forall z_1) (\forall x) (\exists y) ((\forall x) p(x, y, w, z) \rightarrow (\exists y) q(z, y, x, z_1))$

- É fechada.

Fecho de uma Fórmula

- ❖ Se H é fórmula da Lógica de Predicados e $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é o conjunto das variáveis livres em H :
- O fecho universal de H , $(\forall^*)H$, é $(\forall x_1)(\forall x_2)\dots(\forall x_n)$;
 - O fecho existencial de H , $(\exists^*)H$, é $(\exists x_1)(\exists x_2)\dots(\exists x_n)$.

Fecho de uma Fórmula

❖ Indique o fecho universal e existencial das fórmulas abaixo.

❖ $((\exists x)p(x) \rightarrow r(b)) \leftrightarrow ((\forall x) p(x) \rightarrow r(b))$

❖ $((\exists \mathbf{x})p(\mathbf{x}) \rightarrow r(b)) \leftrightarrow ((\forall \mathbf{x}) p(\mathbf{x}) \rightarrow r(b))$

❖ $\{\}$

❖ $((\exists x)p(x,y) \rightarrow f(z)) \leftrightarrow ((\forall x) p(x) \rightarrow r(b))$

❖ Conjunto das variáveis livres: $\{\mathbf{y}, z\}$

❖ $(\forall^*)H = (\forall \mathbf{y}), (\forall z)$

❖ $(\exists^*)H = (\exists \mathbf{y}), (\exists z)$

Ordem de Precedência de Quantificadores

❖ Os parênteses das fórmulas são omitidos quando não há problemas sobre suas interpretações;

❖ Da ordem maior para a menor:

\neg

\forall, \exists

$\rightarrow, \leftrightarrow$

\wedge, \vee

Exercício

❖ Insira os parênteses na fórmula a seguir, conforme a ordem de precedência de quantificadores.

- $G = (\forall x) (\exists y) p(x,y) \rightarrow (\exists z) \neg q(z) \wedge r(y)$
- $(\forall x) (\exists y) p(x,y) \rightarrow (\exists z) (\neg q(z)) \wedge r(y)$
- $((\forall x) (\exists y) p(x,y) \rightarrow (\exists z) (\neg q(z))) \wedge r(y)$
- $((\forall x) (\exists y) p(x,y) \rightarrow (\exists z) (\neg q(z))) \wedge r(y)$

Escopo de Quantificador

- ❖ Abrangência de seu uso nas sub-fórmulas;

- ❖ Se E é uma fórmula na Lógica de Predicados:
 - Se $(\forall x)H$ é subfórmula de E ;
 - O escopo de $(\forall x)$ é H .
 - Se $(\exists x)H$ é subfórmula de E ;
 - O escopo de $(\exists x)$ é H .

Exercício

- ❖ Defina o escopo dos quantificadores da fórmula G .

$$G = (\forall x) (\exists y) ((\forall z) p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y) q(z, y, x, z_1))$$

- ❖ O escopo de $(\forall x)$ é:

- $(\exists y) ((\forall z) p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y) q(z, y, x, z_1))$

- ❖ O escopo de $(\exists y)$ é:

- $((\forall z) p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y) q(z, y, x, z_1))$

- ❖ O escopo de $(\forall z)$ é:

- $p(x, y, w, z)$

- ❖ O escopo de $(\forall y)$ é:

- $q(z, y, x, z_1)$