AULA 13:

TABLEAUX SEMÂNTICO

Tableaux Semântico

- É uma sequência de fórmulas, construída de acordo com algumas regras, que se apresenta sob a forma de uma árvore.
- Elementos Básicos de um Tableau Semântico:
  - O alfabeto da Lógica de Predicados;
  - O conjunto das fórmulas da Lógica de Predicados;
  - Um conjunto de regras de dedução (ou regras de inferência).

Tableaux Semântico

- Utiliza Linguagem da Lógica de Predicados;
- Construção do tableau semântico e os conceitos de tableau aberto e fechado são análogos;
- Método de prova: método da negação ou absurdo;
- Também chamado de sistema de refutação.

Característica

- Extensão do Tableaux Proposicional;
- Baseado em árvores:
  - Ramos são decomposições de H em subfórmulas;
  - Ou seja, possibilidades de interpretações da fórmula;
  - Cada ramo representa uma ou mais interpretações.

Regras de Inferência

- Sejam A e B duas fórmulas da Lógica de Predicados. As regras de inferência do tableau semântico na Lógica de Predicados são R1, ..., R13. As regras R1, ..., R9 são as mesmas do tableau semântico da Lógica Proposicional.

$R_1 = A \wedge B$
A
B

$R_2 = A \vee B$
$A \quad B$

$R_3 = A \rightarrow B$
$\neg A \quad B$

$R_4 = A \leftrightarrow B$
$A \wedge B \quad \neg A \wedge \neg B$

$R_5 = \neg\neg A$
A

$R_6 = \neg(A \wedge B)$
$\neg A \quad \neg B$

$R_7 = \neg(A \vee B)$
$\neg A$
$\neg B$

$R_8 = \neg(A \rightarrow B)$
A
$\neg B$

$R_9 = \neg(A \leftrightarrow B)$
$\neg A \wedge B \quad A \wedge \neg B$

Regras Novas para Quantificadores

$R10 = \dfrac{\neg(\forall x)H}{(\exists x)\neg H}$

$R11 = \dfrac{\neg(\exists x)H}{(\forall x)\neg H}$

$R12 = \dfrac{(\exists x)H}{A(t)}$

Onde t é novo.

$R13 = \dfrac{(\forall x)H}{A(t)}$

Onde t é qualquer.

R12 e R13 devem ter preferência. Por que?

R12 – Termo Novo

- Se H=p(x) e I = interpretação sobre o domínio dos alunos de Ciência da Computação;
- $I[p(x)]=T \leftrightarrows x_I$ é inteligente;
- Se $I[(\exists x)p(x)]=T \leftrightarrows$ pela R12 $I[p(t)]=T \leftrightarrows p_I(t_I)=T$;
- t_I **DEVE** que ser um aluno inteligente;
  - Não pode ser qualquer aluno.

R13 – Termo Qualquer

- Se $I[(\forall x)p(x)]=T \leftrightarrows$ pela R13 $I[p(t)]=T \leftrightarrows p_I(t_I)=T$
- t_I pode ser qualquer aluno:
  - Todos são inteligentes;
  - A escolha de um t é livre.

Ideia Básica

- Sistema de refutação;
- Prova por negação ou absurdo;
- Para provar H supõe-se inicialmente, por absurdo, ¬H;
- As deduções desta fórmula levam a um fato contraditório (ou absurdo);
- Então H é verdade!

Ramo Aberto e Fechado

- Ramo fechado: contém uma fórmula B e sua negação ¬B, ou o símbolo de verdade false.
  - Um ramo é aberto quando não é fechado.

- Tableau fechado: quando todos os seus ramos são fechados.

Prova e Teorema

- Uma prova de H usando tableaux semânticos é:
  - Um tableau fechado associado **a;**
  - ¬H.

- Neste caso, H é um **teorema** do sistema de tableaux semânticos.

Exemplo 1

- $H=(\forall x)(\forall y)p(x,y) \rightarrow p(a,a)$ é tautologia?
- Tableau sobre $\neg H$:

1. $\neg((\forall x)(\forall y)p(x,y) \rightarrow p(a,a))$ — $\neg H$
2. $(\forall x)(\forall y)p(x,y)$ — R8, .1
3. $\neg p(a,a)$ — R8, .1
4. $(\forall y)p(a,y)$ — R13 com t=a, .2
5. $p(a,a)$

Exemplo 1

- H=(∀x)(∀y)p(x,y) → p(a,a) é tautologia?
- Tableau sobre ¬H:

1.	¬((∀x)(∀y)p(x,y) → p(a,a))	¬H
2.	(∀x)(∀y)p(x,y)	R8, .1
3.	**¬p(a,a)**	R8, .1
4.	(∀y)p(a,y)	R13 com t=a, .2
5.	**p(a,a)**	

Fechado!

Exemplo 2

- $H = (\forall x)p(x) \rightarrow (\exists y)p(y)$ é tautologia?
- Tableau sobre $\neg H$:

1.	$\neg((\forall x)p(x) \rightarrow (\exists y)p(y))$	$\neg H$
2.	$(\forall x)p(x)$	R8, .1
3.	$\neg(\exists y)p(y)$	R8, .1
4.	$(\forall y)\neg p(y)$	R11, .3
5.	$\neg p(a)$	R13, .4 com t=a
6.	$p(a)$	R13, .2 com t=a

Exemplo 2

- $H = (\forall x)p(x) \rightarrow (\exists y)p(y)$ é tautologia?
- Tableau sobre $\neg H$:

1.	$\neg((\forall x)p(x) \rightarrow (\exists y)p(y))$	$\neg H$
2.	$(\forall x)p(x)$	R8, .1
3.	$\neg(\exists y)p(y)$	R8, .1
4.	$(\forall y)\neg p(y)$	R11, .3
5.	$\mathbf{\neg p(a)}$	R13, .4 com t=a
6.	$\mathbf{p(a)}$	R13, .2 com t=a

Fechado!

Exemplo 3

- H = $(\exists x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow p(a,a)$
- Tableau sobre ¬H

1.	$\neg((\exists x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow p(a,a))$	¬H
2.	$(\exists x)(\exists y)p(x,y)$	R8, .1
3.	$\boldsymbol{\neg p(a,a)}$	R8, .1
4.	$(\exists y)p(t1,y)$	R12, .2, t1 novo, t1≠a
5.	$\boldsymbol{p(t1,t2)}$	R12, .4, t2 novo, t2≠a e t1

- Fechado?

- Se R12 fosse usada com t1 e t2=a (errado!), o tableau seria fechado.

Exemplo 4

- H=(∀x)(p(x)^q(x)) → (∀x)p(x) é tautologia?
- Tableau sobre ¬H

1.	¬((∀x)(p(x)^q(x))→ (∀x)p(x))	¬H	
2.	(∀x)(p(x)^q(x))		R8, .1
3.	¬(∀x)p(x)		R8, .1
4.	(∃x)¬p(x)		R10, .3
5.	p(t)^q(t)		R13, .2 t qualquer
6.	**p(t)**	R1, .5	
7.	q(t)	R1, .5	
8.	**¬p(t1)**		R12, .4 t1 novo, t1¬=t

- *Aberto*

Exemplo 4 - 2

- H=(∀x)p(x)^q(x) → (∀x)p(x)

1. ¬((∀x)p(x)^q(x) → (∀x)p(x)) ¬H
2. (∀x)p(x)^q(x) R8, .1
3. ¬(∀x)p(x) R8, .1
4. (∃x)¬p(x) R10, .3
5. **¬p(t)** R12, .4 t novo
6. p(t)^q(t) R13, .2 t qualquer
7. **p(t)** R1
8. q(t) R1

- Fechado

Cuidado

- Sobre uma tautologia, é possível gerar tableaux abertos e fechados associados à sua negação!
- E se uma fórmula for tautologia, é possível gerar um tableau fechado associado à sua negação?
  - Teorema da correção e o Teorema da Completude são válidos para tableaux semânticos de 1ª. Ordem.