CAPÍTULO 9

MÉTODOS SEMÂNTICOS DE DEDUÇÃO NA LÓGICA DE PREDICADOS

9.1 Introdução

No Capítulo 8, apresentamos algumas propriedades semânticas de fórmulas da Lógica de Predicados. Na sequência, consideramos neste capítulo a análise de alguns métodos semânticos de dedução que, também, identificam propriedades semânticas. No presente contexto, consideramos fórmulas da Lógica de Predicados e, por isso, os métodos de dedução apresentados no Capítulo 4 nem sempre se aplicam adequadamente. Logo, é necessário modificar os métodos utilizados na Lógica Proposicional.

9.2 Método da tabela-verdade

Em geral, os iniciantes no estudo da Lógica imaginam que é possível resolver qualquer coisa, utilizando tabelas-verdade. E, nessa direção, há cursos de Lógica que ensinam somente tabelas-verdade. Esse é um engano básico. Considere, por exemplo, a fórmula G. $G = (\forall x)p(x) \rightarrow p(a)$. Como é demonstrado no Exemplo 8.7, sem o uso de tabela-verdade, é claro, essa fórmula é válida. Entretanto, imagine que se queira tentar a mesma demonstração, utilizando tabela-verdade. Nesse caso, o primeiro passo seria identificar as subfórmulas de G e escrevê-las na tabela-verdade, como indicado a seguir:

$(\forall x)p(x)$	$p(a)$	$(\forall x)p(x) \rightarrow p(a)$
?	?	?
?	?	?
?	?	?
?	?	?

Tabela 9.1: Tabela-verdade associada a G.

A questão óbvia é: como preencher a Tabela 9.1? Na coluna de $p(a)$, não é possível preenchê-la com símbolos T, ou F, pois, como sabemos,

$$I[p] = \ p_I : U \rightarrow \{T, F\}.$$

Isto é, $I[p]$ é uma função e, nesse sentido, $I[p(a)]$ é um elemento do domínio U e não um símbolo do tipo T, ou F. Pior ainda é o caso de $(\forall x)p(x)$. Isso, porque para identificar se tal subfórmula é verdadeira, ou falsa, devemos analisar a aplicação de p em todos os elementos do domínio U. E, como esse domínio pode ser infinito, nem sempre essa tarefa é simples. Conclusão: nem sempre é possível usar tabelas-verdade no contexto da Lógica de Predicados. Por isso, devemos considerar outros métodos.

9.3 Método da negação, ou redução ao absurdo

Como observamos no Capítulo 4, o método da negação, ou redução ao absurdo, é um método geral de demonstração. Isso, porque seus princípios podem ser utilizados em diferentes tipos de demonstração, como aquelas por refutação. Entretanto, no contexto da Lógica de Predicados ele é utilizado de forma diferente daquela considerada no Capítulo 4, isso porque, pelas mesmas razões que, em geral, não utilizamos tabelas-verdade na Lógica de Predicados, não é possível distribuir os valores de verdade T e F ao longo de uma fórmula, como fazemos na Lógica Proposicional. O exemplo a seguir utiliza o método da negação na Lógica de Predicados.

Exemplo 9.1 (equivalência) Considere as fórmulas $H_1 = \neg(\exists x)p(x) \vee (\forall x)r(x)$ e $H_2 = (\forall x)(p(x) \rightarrow r(x))$. Demonstramos, utilizando o método da negação, que H_1 implica H_2. Suponha, por absurdo, que H_1 não implica H_2. Então, existe uma interpretação I, tal que $I[H_1] = T$ e $I[H_2] = F$. Porém, temos que

$I[H_1] = T \;\Leftrightarrow\; I[\neg(\exists x)p(x) \vee (\forall x)r(x)] = T,$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ I[\neg(\exists x)p(x)] = T, \text{ ou } I[(\forall x)r(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow\ I[(\exists x)p(x)] = F, \text{ ou } I[(\forall x)r(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow\ \forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = F \text{ ou}\\
&\quad\ \ \forall\ c \in U,\ < x \leftarrow c > I[r(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow\ \forall\ d \in U,\ p_I(d) = F \text{ ou } \forall\ c \in U,\ r_I(c) = T.
\end{aligned}
$$

Por outro lado:

$$
\begin{aligned}
I[H_2] = F\ &\Leftrightarrow\ I[(\forall x)(p(x) \rightarrow r(x))] = F,\\
&\Leftrightarrow\ \exists\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x) \rightarrow r(x)] = F,\\
&\Leftrightarrow\ \exists\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \text{ e } < x \leftarrow d > I[r(x)] = F,\\
&\Leftrightarrow\ \forall\ d \in U,\ p_I(d) = T \text{ e } r_I(d)] = F.
\end{aligned}
$$

Preste atenção nas últimas afirmações dos desenvolvimentos anteriores:
"$\forall\ d \in U,\ p_I(d) = F$ ou $\forall\ c \in U,\ r_I(c) = T$" e
"$\forall\ d \in U,\ p_I(d) = T$ e $r_I(d)] = F$".

Essas afirmações são contraditórias, ou seja, é um absurdo tê-las como verdadeiras ao mesmo tempo. Logo, não existe interpretação I, tal que $I[H_1] = T$ e $I[H_2] = F$. Portanto, H_1 implica H_2. ■

Nota. No Capítulo 8 obtemos nas demonstrações, em inúmeros exemplos, uma afirmação final contraditória, ou um absurdo. E, então, concluímos o oposto da afirmação inicial. O Exemplo 8.7 é um caso típico. Iniciamos a demonstração, supondo $I[G] = F$. E, ao final, concluímos uma afirmação que é um absurdo. Então, concluímos que $I[G] = T$. Observe que esse é o legítimo raciocínio da redução ao absurdo. Portanto, muito mais que você imagina, já estamos utilizando o método da negação, ou redução ao absurdo, há muito tempo. Só que de uma forma diferente daquela que usamos no Capítulo 4.

9.4 Método dos *tableaux* semânticos

No Capítulo 4, analisamos os *tableaux* semânticos na Lógica Proposicional e, neste capítulo, consideramos sua extensão para a Lógica de Predicados. Como na Lógica Proposicional, um *tableau* semântico na Lógica de Predicados é uma sequência de fórmulas, que se apresenta sob a forma de uma árvore. Seus elementos básicos são:

Definição 9.1 (elementos básicos do método dos *tableaux* semânticos) .
Os elementos básicos do método dos tableaux semânticos na Lógica de Predicados são:

- *o alfabeto da Lógica de Predicados, Definição 6.1;*
- *o conjunto das fórmulas da Lógica de Predicados;*
- *um conjunto de regras de dedução.*

O *tableau* semântico na Lógica de Predicados utiliza a linguagem da Lógica de Predicados, sendo uma extensão do *tableau* semântico da Lógica Proposicional. Nesse sentido, as regras do *tableau* semântico da Lógica de Predicados contêm as regras do *tableau* semântico da Lógica Proposicional. Adicionamos a estas, mais duas regras, definidas a seguir:

Definição 9.2 (regras de inferência do método dos *tableaux* semânticos) . *Sejam A e B duas fórmulas da Lógica de Predicados. As regras de inferência do tableau semântico na Lógica de Predicados são as regras $R_1, \ldots, R_9$, conforme a Definição 4.2, mais as regras $R_{10}, \ldots, R_{13}$, assim definidas:*

$$R_{10} = \frac{\neg(\forall x)A}{(\exists x)\neg A} \qquad\qquad R_{11} = \frac{\neg(\exists x)A}{(\forall x)\neg A}$$

$$R_{12} = \frac{(\exists x)A}{A(t)} \quad \text{onde } t \text{ é novo} \qquad\qquad R_{13} = \frac{(\forall x)A}{A(t)} \quad \text{onde } t \text{ é qualquer.}$$

9.4.1 Os significados das regras dos *tableaux* semânticos

Devemos entender o que cada regra diz, do ponto de vista semântico. Esse é o primeiro passo para o entendimento do método.

O significado das regras R_{10} e R_{11}. As regras R_{10} e R_{11} trocam as posições da negação $\neg$ e dos quantificadores. Na regra R_{10}, tendo que $\neg(\forall x)A$ é deduzido $(\exists x)\neg A$. Neste caso, o quantificador universal é transformado em um quantificador existencial. Analogamente, em R_{11}, tendo que $\neg(\exists x)A$ é deduzido $(\forall x)\neg A$. Neste caso, o quantificador existencial é transformado em um quantificador universal. A regra R_{10} diz que podemos deduzir $((\exists x)\neg A)$ a partir de $(\neg(\forall x)A)$. Do ponto de vista semântico, isso está correto, pois sabemos que $(\neg(\forall x)A)$ equivale a $((\exists x)\neg A)$. Por isso, se $(\neg(\forall x)A)$ é verdadeira, então $((\exists x)\neg A)$ é verdadeira. A regra R_{11} diz que podemos deduzir $((\exists x)\neg A)$ a partir de $(\neg(\forall x)A)$. Com já sabemos que $(\neg(\forall x)A)$ equivale a $((\exists x)\neg A)$, então, por isso, se $(\neg(\exists x)A)$ é verdadeira, então $((\forall x)\neg A)$ é verdadeira. Mas, qual é o objetivo dessas regras? Nas duas regras, os resultados têm os quantificadores no início das fórmulas. Isso é importante no método, pois as regras R_{12} e R_{13} são aplicadas apenas em fórmulas com quantificadores em seu início. Portanto, em geral, antes de aplicar as regras R_{12} e R_{13} é necessário aplicar R_{12}, ou R_{13}.

O significado da regra R_{12}. Na regra R_{12}, tendo que $(\exists x)A$ é deduzido $A(t)$, onde t é um termo novo, que ainda não apareceu na prova. Observe que estamos utilizando a notação $A(t)$, que indica que o termo t ocorre zero, uma, ou mais vezes na fórmula A. A regra R_{12} diz que podemos deduzir $A(t)$, para algum t, a partir de $((\exists x)A)$. Do ponto de vista semântico, isso está correto, pois sabemos que $((\exists x)A)$ implica $A(t)$, para algum t. Por isso, se $((\exists x)A)$ é verdadeira, então $A(t)$ é verdadeira para algum t. Veja um exemplo:

Exemplo 9.2 (implicação) Considere a fórmula $(\exists x)p(x)$. Demonstramos, mais ou menos, a seguir, que $(\exists x)p(x)$ implica $p(t)$ para algum termo t. Seja I uma interpretação qualquer. Temos:

$$\begin{aligned} I[(\exists x)p(x)] = T &\Leftrightarrow \exists\ d \in U;\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T, \\ &\Leftrightarrow \exists\ d \in U;\ p_I(d) = T. \\ &\Rightarrow_1 \text{ existe algum termo } t;\ p_I(t_I) = T, \\ &\Leftrightarrow I[p(t)] = T \text{ para algum termo } t. \end{aligned}$$

Portanto, $(\exists x)p(x)$ implica $p(t)$, para algum t. Na demonstração acima, a implicação $\Rightarrow_1$ pode ser problemática, pois estamos considerando uma interpretação I, qualquer. Isto é, estamos concluindo, para uma interpretação qualquer, que:

se existe $d \in U$; $p_I(d) = T$, então $I[p(t)] = T$ para algum t.

Esse é um grande salto. E, por isso, essa demonstração não é rigorosa. Ela é apenas uma ideia e não vamos considerar os detalhes técnicos. Além disso, observe a semelhança desse argumento com o apresentado na Proposição 8.4. ■

O termo t deve ser novo. Por que na regra R_{12} o termo em $A(t)$ deve ser um termo novo, que ainda não apareceu na prova? É claro que não estamos em posição para demonstrar, de forma rigorosa, esse fato. E esse tema, na verdade, não está no escopo deste livro. Entretanto, veja uma justificativa informal. Considere a fórmula $H_1 = (\exists x)(\exists y)p(x, y)$ e uma interpretação sobre o conjunto das pessoas, tal que:

$I[p(x, y)] = T$ se, e somente se, x_I é o marido de y_I.

Suponha, então, a aplicação da regra R_{12} em H_1. Nesse caso, a partir de $(\exists x)(\exists y)p(x, y)$, deduzimos $(\exists y)p(t_1, y)$, onde t_1 é um termo novo. Suponha que $I[t_1] =$ Zé. Então, $(\exists y)p(t_1, y)$ significa que Zé é o marido de alguém. Aplicando a regra R_{12} novamente, deduzimos $p(t_1, u_1)$, onde u_1 é um termo novo e, portanto, diferente de t_1. Nesse caso, devemos ter $I[u_1] =$ Maria, pois Maria é a esposa de Zé. O método dos *tableaux* semânticos presta atenção nesse tipo de coisa. Na sequência do *tableau*, suponha que apareça de novo a fórmula H_1 e que R_{12} seja aplicada. Deduzimos, então, $(\exists y)p(t_2, y)$, onde t_2 deve ser diferente de t_1 e u_1. Suponha, então, que $I[t_1] =$ Chico. Aplicando a regra R_{12}, novamente, deduzimos $p(t_2, u_2)$, onde u_2 é um termo novo e, portanto, diferente de t_1, t_2 e u_1. Nesse caso, u_2 deve ser diferente e não queremos que $I[u_2] =$ Maria, pois Maria é a esposa de Zé. E o método dos *tableaux* semânticos é um sistema monogâmico. Ele é conservador, do tipo um para um.

O significado da regra R_{13}. Na regra R_{13}, tendo $(\forall x)A$ é deduzido $A(t)$, para qualquer t. Do ponto de vista semântico, R_{13} diz que podemos deduzir $A(t)$, para qualquer t, a partir de $((\forall x)A)$. Isto é, seguimos a implicação: $((\forall x)A)$ implica $A(t)$, para qualquer t. Ou seja, se $((\forall x)A)$ é verdadeira, então $A(t)$ é verdadeira para qualquer t. O exemplo a seguir segue o raciocínio do Exemplo 9.2.

Exemplo 9.3 (implicação) Considere a fórmula $(\forall x)p(x)$. Demonstramos, também aproximadamente, que $(\forall x)p(x)$ implica $p(t)$, para qualquer termo t. Seja I uma interpretação qualquer. Temos:

$$\begin{aligned} I[(\forall x)p(x)] = T \;&\Leftrightarrow\; \forall\, d \in U,\; < x \leftarrow d > I[p(x)] = T, \\ &\Leftrightarrow\; \forall\, d \in U,\; p_I(d) = T, \\ &\Rightarrow_1\; \text{para qualquer termo } \; t,\; p_I(t_I) = T, \\ &\Leftrightarrow\; I[p(t)] = T,\; \text{ para qualquer } t. \end{aligned}$$

Portanto, $(\forall x)p(x)$ implica $p(t)$, para qualquer t. Como no Exemplo 9.2, na demonstração acima, a implicação $\Rightarrow_1$ também pode ser problemática, pois estamos considerando uma interpretação I, qualquer. Isto é, estamos concluindo, para uma interpretação qualquer, que se para qualquer $d \in U$; $p_I(d) = T$, então $I[p(t)] = T$ para qualquer t. De novo, esse é o grande salto, o que faz da demonstração apenas uma ideia não rigorosa. ■

O termo t pode ser qualquer. Por que na regra R_{13} o termo em $A(t)$ pode ser um termo qualquer? Veja uma justificativa informal. Considere a fórmula $H_2 = (\forall x)(\forall y)p(x, y)$ e uma interpretação sobre o conjunto das pessoas tal que $I[p(x, y)] = T$ se, e somente se, x_I é amigo de y_I. Suponha, então, a aplicação da regra R_{13} em H_2. Nesse caso, a partir de $(\forall x)(\forall y)p(x, y)$, deduzimos $(\forall y)p(t_1, y)$, onde t_1 é um termo qualquer. Suponha que $I[t_1] =$ Zé. Então, $(\forall y)p(t_1, y)$ significa que Zé é amigo de todo mundo. Aplicando a regra R_{13}, deduzimos novamente $p(t_1, u_1)$, onde u_1 é um termo qualquer, que pode até ser igual a t_1. Pois, todos sabemos que Zé é amigo dele próprio.

Nota. A aplicação das regras do *tableau*, como também suas propriedades fundamentais seguem, de forma análoga, a análise apresentada no Capítulo 4. Por exemplo, a construção de um *tableau* semântico, o significado de *tableaux* fechados, abertos etc. são os mesmos no contexto da Lógica de Predicados.

Agora, vamos esquentar a máquina, observando alguns exemplos de aplicação do método dos *tableaux* semânticos na Lógica de Predicados.

Exemplo 9.4 (*tableau* semântico) Considere a fórmula:
$H = (\forall x)(\forall y)p(x, y) \rightarrow p(a, a)$. O *tableau* semântico associado a $\neg H$, indicado na Figura 9.1, é uma prova de H. A construção de um *tableau* semântico na Lógica de Predicados é análoga à construção na Lógica Proposicional. No *tableau* acima, R_{13} é aplicada duas vezes substituindo as variáveis pelo termo "a". Observe que este termo é escolhido livremente, mas com o objetivo de fechar o *tableau*. ■

Exemplo 9.5 (*tableau* semântico) Considere a fórmula:
$H = (\forall x)p(x) \rightarrow (\exists y)p(y)$. O *tableau* semântico associado a $\neg H$, indicado na Figura 9.2, é uma prova de H.
■

9.4.2 Os teoremas da correção e da completude

O método dos *tableaux* semânticos na Lógica de Predicados é uma extensão do mesmo método na Lógica Proposicional. Esses métodos definem uma estrutura para

1.	$\neg((\forall x)(\forall y)p(x,y) \rightarrow p(a,a))$	$\neg H$
2.	$(\forall x)(\forall y)p(x,y)$	$R_8, 1.$
3.	$\neg p(a,a)$	$R_8, 1.$
4.	$(\forall y)p(a,y)$	$R_{13}, 2.,$
		t é qualquer, faça $t = a$.
5.	$p(a,a)$	$R_{13}, 4.,$
		t é qualquer, faça $t = a$.
	ramo fechado	

Figura 9.1: *Tableau* semântico associado a $\neg H$.

1.	$\neg((\forall x)p(x) \rightarrow (\exists y)p(y))$	$\neg H$
2.	$(\forall x)p(x)$	$R_8, 1.$
3.	$\neg(\exists y)p(y)$	$R_8, 1.$
4.	$(\forall y)\neg p(y)$	$R_{11}, 3.$
5.	$\neg p(a)$	$R_{13}, 4.,$
		t é qualquer, faça $t = a$.
6.	$p(a)$	$R_{13}, 2.,$
		t é qualquer, faça $t = a$.
	ramo fechado	

Figura 9.2: *Tableau* semântico associado a $\neg H$.

1.	$\neg((\exists x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow p(a,a))$	$\neg H$
2.	$(\exists x)(\exists y)p(x,y)$	$R_8, 1.$
3.	$\neg p(a,a)$	$R_8, 1.$
4.	$(\exists y)p(t_1,y)$	$R_{12}, 2.$, t_1 é novo.
5.	$p(t_1,t_2)$	$R_{12}, 4.$, t_2 é novo.
	ramo aberto	

Figura 9.3: *Tableau* semântico associado a $\neg H$.

dedução semântica e apesar de serem similares, a uma primeira vista, eles possuem grandes diferenças. Entretanto, os conceitos básicos continuam os mesmos como, por exemplo, prova e teorema. Nesse sentido, os *tableaux* semânticos apresentados nos Exemplos 9.4 e 9.5 são provas de H. Analogamente, os teoremas da correção e da completude também são válidos no contexto do método dos *tableaux* semânticos na Lógica de Predicados.

Teorema 9.1 (correção dos *tableaux* semânticos) *Dada uma fórmula H, da Lógica de Predicados:*

Se existe um tableau semântico fechado associado a $\neg H$, então H é válida.

Teorema 9.2 (completude dos *tableaux* semânticos) *Dada uma fórmula H, da Lógica de Predicados:*

Se não existe um tableau semântico fechado associado a $\neg H$,
então H não é válida.

ou, equivalentemente:

Se H é válida, então existe um tableau semântico fechado associado a $\neg H$.

Nota. As demonstrações desses teoremas não são consideradas neste livro. As demonstrações podem ser encontradas em [Fitting].

Exemplo 9.6 (*tableau* semântico) Considere a fórmula:
$H = (\exists x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow p(a,a)$. O *tableau* semântico associado a $\neg H$ é indicado na Figura 9.3, não é uma prova de H. Isso, porque o *tableau* não é fechado. No *tableau* da Figura 9.3, na linha 3 temos o literal $\neg p(a,a)$. Assim, o objetivo do desenvolvimento desse *tableau* é a obtenção do átomo $p(a,a)$, o que fecha o ramo. Nesse sentido, a regra R_{12} é aplicada duas vezes. Na primeira vez, na linha 4, obtemos

1.	$\neg((\forall x)(p(x) \wedge q(x)) \rightarrow (\forall x)p(x))$	$\neg H$
2.	$(\forall x)(p(x) \wedge q(x))$	$R_8, 1.$
3.	$\neg(\forall x)p(x)$	$R_8, 1.$
4.	$(\exists x)\neg p(x)$	$R_{10}, 3.$
5.	$\neg p(a)$	$R_{12}, 4.,$ t é novo, faça $t = a$.
6.	$p(a) \wedge q(a)$	$R_{13}, 2.,$ t é qualquer, faça $t = a$.
7.	$p(a)$	$R_1, 6.$
8.	$q(a)$ ramo fechado	$R_1, 6.$

Figura 9.4: *Tableau* semântico associado a $\neg H$.

$(\exists y)p(t_1, y)$. Neste caso, x é substituído por t_1, que deve ser um termo novo. Logo, $t_1 \neq a$. Na segunda aplicação de R_{12} temos algo similar. Devemos ter $t_2 \neq a$ e $t_2 \neq t_1$. Portanto, o *tableau* não se fecha, pois não se tem fórmulas complementares em um mesmo ramo da árvore. Caso a regra R_{12} seja aplicada, incorretamente, fazendo $t_1 = a$ e $t_2 = a$, o *tableau* se torna fechado. Mas, nesse caso, temos uma prova incorreta de H. Finalmente, observe que H não é válida. Logo, não é possível encontrar uma prova de H, utilizando *tableaux* semânticos na Lógica de Predicados. Esta conclusão utiliza o teorema da correção, Teorema 9.1. ■

Exemplo 9.7 (*tableau* semântico) Considere a fórmula:
$H = (\forall x)(p(x) \wedge q(x)) \rightarrow (\forall x)p(x)$.
O *tableau* semântico associado a $\neg H$ é indicado na Figura 9.4, é uma prova de H. Isso ocorre porque o *tableau* é fechado.

No *tableau* da Figura 9.4, a regra R_{12} é utilizada antes da regra R_{13}. Além disso, na aplicação de R_{13} fazemos $t = a$. Desta forma, é obtido um *tableau* fechado. Portanto, H é válida. Entretanto, considere o *tableau* da Figura 9.5, onde a ordem de aplicação das regras é invertida. Nesse caso, na aplicação de R_{13}, o termo t_1 é qualquer e, nesse caso, consideramos $t_1 = a$. Em seguida, na aplicação de R_{12}, o termo t_2 deve ser um termo novo, que não pertence ao *tableau*. Logo, devemos ter $t_1 \neq a$. Portanto, nesse caso, o *tableau* obtido não é fechado. Conclui-se que considerando os dois *tableaux* anteriores, dada uma fórmula válida H, nem todo *tableau* associado a $\neg H$ é fechado. Mas, lembre-se, se H é válida, então, pelo teorema da completude, necessariamente, existe um *tableau* fechado associado a $\neg H$. ■

A ordem de aplicação das regras. No método dos *tableaux* semânticos na Lógica Proposicional, a ordem de aplicação das regras não influi no resultado do

1.	$\neg((\forall x)(p(x) \wedge q(x)) \rightarrow (\forall x)p(x))$	$\neg H$
2.	$(\forall x)(p(x) \wedge q(x))$	$R_8, 1.$
3.	$\neg(\forall x)p(x)$	$R_8, 1.$
4.	$(\exists x)\neg p(x)$	$R_{10}, 3.$
5.	$p(a) \wedge q(a)$	$R_{13}, 2.$, t_1 é qualquer, faça $t_1 = a$.
6.	$p(a)$	$R_1, 5.$
7.	$q(a)$	$R_1, 5.$
8.	$\neg p(t_2)$	$R_{12}, 4.$, t_2 é novo, faça $t \neq a$.
	ramo aberto	

Figura 9.5: *Tableau* semântico associado a $\neg H$.

tableau. Ou seja, independentemente da ordem de aplicação das regras, se H é uma tautologia, então, no final, sempre obtemos um *tableau* fechado associado a $\neg H$. Por outro lado, como é visto no Exemplo 9.7, na Lógica de Predicados, essa ordem é importante e pode influir no resultado do *tableau*. Na Lógica de Predicados, se H é válida, pode existir *tableau* associado a $\neg H$ que não é fechado. Isto é, nem todos os *tableaux* associados a $\neg H$ são, necessariamente, fechados.

Exemplo 9.8 (*tableau* semântico)) Considere a fórmula $H = (\exists x)\neg p(x)$. O *tableau* semântico associado a $\neg H$ é indicado na Figura 9.6.

■

Ramo infinito. Algo novo no *tableau* da Figura 9.6. No desenvolvimento de um *tableaux* semântico, na Lógica de Predicados, podemos obter um ramo infinito. Observe que tal fato não ocorre na Lógica Proposicional, na qual os *tableaux* obtidos nunca possuem ramos infinitos.

Exemplo 9.9 (*tableau* semântico) Considere novamente as fórmulas H_1 e H_2 do Exemplo 8.16. $H_1 = (\forall x)(p(x) \vee q(x))$ e $H_2 = (\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x)$.
Neste exemplo, demonstramos, utilizando *tableaux* semânticos, o mesmo resultado demonstrado no Exemplo 8.16, isto é, que H_2 implica H_1. Para demonstrar esse resultado, utilizamos outro resultado, dado por:
H_2 implica H_1 se, e somente se, $H_2 \rightarrow H_1$ é válida.
Portanto, utilizando *tableaux* semânticos, provamos a seguir que $H_2 \rightarrow H_1$ é válida. O *tableau* da Figura 9.7 é a prova. Este *tableau* é fechado, sebdi uma prova de que

1.	$\neg(\exists x)p(x)$	$\neg H$
2.	$(\forall x)\neg p(x)$	$R_{11}, 1.$
3.	$\neg(\exists x)p(x)$	$R_{10}, 2.$
4.	$(\forall x)\neg p(x)$	$R_{11}, 3.$
5.	$\neg(\exists x)p(x)$	$R_{10}, 4.$
6.	$(\forall x)\neg p(x)$	$R_{11}, 5.$
7.	$\neg(\exists x)p(x)$	$R_{10}, 6.$
	......	
	......	
	ramo infinito	

Figura 9.6: *Tableau* semântico associado a $\neg H$.

$H_2 \rightarrow H_1$ é válida. Logo, H_2 implica H_1. No *tableau* da Figura 9.7 tudo ocorre muito bem, pois o resultado é um *tableau* fechado. Entretanto, se a ordem de aplicação das regras R_{12} e R_{13} for invertida, não é possível fechar o *tableau*. Veja o *tableau* a seguir, Figura 9.8.

O método dos *tableaux* semânticos na Lógica de Predicados é diferente do método dos *tableaux* semânticos na Lógica Proposicional. As Figuras 9.7 e 9.8 mostram *tableaux* associados à mesma fórmula $\neg(H_2 \rightarrow H_1)$. Um deles é fechado e o outro não. Surge, então, uma questão: quando encontramos um *tableau* aberto, associado a uma fórmula H, será que existe algum outro *tableau* associado a H que é fechado? A princípio, nada podemos concluir. Isto é, dado um *tableau* aberto, associado a H, pode, ou não, existir outro *tableau* fechado associado a H. Da mesma forma, dado um *tableau* fechado, associado a H, pode, ou não, existir outro *tableau* fechado associado a H. Observe que isso é diferente do que ocorre na Lógica Proposicional, na qual, se encontramos um *tableau* aberto, associado a uma fórmula H, então todos os outros também são abertos. Analogamente, na Lógica Proposicional, se encontramos um *tableau* fechado, associado a H, então todos os outros também são fechados.

■

Exemplo 9.10 (*tableau* semântico) Considere, novamente, as fórmulas H_1 e H_2 do Exemplo 8.15. $H_1 = (\forall x)(p(x) \vee q(x))$ e $H_2 = (\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x)$. Neste exemplo, demonstramos, utilizando *tableaux* semânticos, o mesmo resultado demonstrado no Exemplo 8.15, isto é, que H_1 não implica H_2. Suponha, por absurdo, que H_1 implica H_2. Logo, $H_1 \rightarrow H_2$ é válida. Mas, se $H_1 \rightarrow H_2$ é válida, então, pelo teorema da completude, existe um *tableau* fechado associado a $\neg(H_1 \rightarrow H_2)$. Vejamos se é possível construir um *tableau* fechado associado a $\neg(H_1 \rightarrow H_2)$.

O *tableau* da Figura 9.9 não é fechado, pois seus ramos são abertos. Além disso,

$$
\begin{array}{lccl}
1. & \multicolumn{2}{c}{\neg(((\forall x)p(x) \lor (\forall x)q(x)) \to (\forall x)(p(x) \lor q(x)))} & \neg(H_2 \to H_1) \\
2. & \multicolumn{2}{c}{(\forall x)p(x) \lor (\forall x)q(x)} & R_8, 1. \\
3. & \multicolumn{2}{c}{\neg(\forall x)(p(x) \lor q(x))} & R_8, 1. \\
4. & \multicolumn{2}{c}{(\exists x)\neg(p(x) \lor q(x))} & R_{10}, 3. \\
5. & \multicolumn{2}{c}{\neg(p(a) \lor q(a))} & R_{12}, 4. \\
 & & & t \text{ é novo,} \\
 & & & \text{faça } t = a. \\
6. & \multicolumn{2}{c}{\neg p(a)} & R_7, 5. \\
7. & \multicolumn{2}{c}{\neg q(a)} & R_7, 5. \\
 & \swarrow & \searrow & \\
8. & (\forall x)p(x) & (\forall x)q(x) & R_2,\ 2. \\
9. & p(a) & q(a) & R_{13},\ 8. \\
 & & & t \text{ é qualquer,} \\
 & & & \text{faça } t = a. \\
 & \text{fechado} & \text{fechado} &
\end{array}
$$

Figura 9.7: *Tableau* semântico associado a $\neg(H_2 \to H_1)$.

$$
\begin{array}{lccl}
1. & \multicolumn{2}{c}{\neg(((\forall x)p(x) \lor (\forall x)q(x)) \to (\forall x)(p(x) \lor q(x)))} & \neg(H_2 \to H_1) \\
2. & \multicolumn{2}{c}{(\forall x)p(x) \lor (\forall x)q(x)} & R_8, 1. \\
3. & \multicolumn{2}{c}{\neg(\forall x)(p(x) \lor q(x))} & R_8, 1. \\
4. & \multicolumn{2}{c}{(\exists x)\neg(p(x) \lor q(x))} & R_{10}, 3. \\
 & \swarrow & \searrow & \\
8. & (\forall x)p(x) & (\forall x)q(x) & R_2,\ 2. \\
9. & p(a) & q(a) & R_{13},\ 8. \\
 & & & t \text{ é qualquer,} \\
 & & & \text{faça } t = a. \\
10. & \neg(p(t) \lor q(t)) & \neg(p(t) \lor q(t)) & R_{12}, 4. \\
 & & & t \text{ é novo,} \\
 & & & \text{faça } t \neq a. \\
11. & \neg p(t) & \neg p(t) & R_7, 10. \\
12. & \neg q(t) & \neg q(t) & R_7, 10. \\
 & \text{aberto} & \text{aberto} &
\end{array}
$$

Figura 9.8: *Tableau* semântico associado a $\neg(H_2 \to H_1)$.

1.	$\neg((\forall x)(p(x) \vee q(x)) \rightarrow ((\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x)))$	$\neg(H_1 \rightarrow H_2)$
2.	$(\forall x)(p(x) \vee q(x))$	$R_8, 1.$
3.	$\neg((\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x))$	$R_8, 1.$
4.	$\neg(\forall x)p(x)$	$R_7, 3.$
5.	$\neg(\forall x)q(x)$	$R_7, 3.$
6.	$(\exists x)\neg p(x)$	$R_{10}, 4.$
7.	$(\exists x)\neg q(x)$	$R_{10}, 5.$
8.	$\neg p(a)$	$R_{12}, 6.$ t é novo, faça $t = a$.
9.	$\neg q(b)$	$R_{12}, 7.$ t é novo, faça $t = b$.
10.	$p(t) \vee q(t)$	R_{13}, 2. t é qualquer.
	$\swarrow \quad \searrow$	
11.	$p(t)$ $\quad$ $q(t)$ ramo 1 $\quad$ ramo 2	R_2, 10.

Figura 9.9: *Tableau* semântico associado a $\neg(H_1 \rightarrow H_2)$.

não é possível fechar esse *tableau*? Na linha 8, aplicamos, pela primeira vez, a regra R_{12}, substituindo a variável x pela constante "a", obtendo $p(a)$. Neste ponto do tableau, "a" é um termo novo, que não aparece no *tableau*, nas linhas 1 até 7. Na linha 8, a regra R_{12} é aplicada novamente. Na nova aplicação de R_{12}, a variável x não pode mais ser substituída por "a", pois o termo a ser substituído deve ser novo. É feita, então, sua substituição pela constante "b", obtendo $q(b)$. Em seguida, quando a regra R_{13} é aplicada na linha 2, o termo x pode ser substituído por qualquer outro. Isto é, podemos substituir x por "a" ou por "b". No *tableau* da Figura 9.9, qualquer que seja a substituição escolhida, o ramo do *tableau* não fecha. Portanto, nesse caso, não é possível escolher uma substituição conveniente para fechar o *tableau*. Observe que mesmo modificando a ordem de aplicação das regras, não é possível fechar o *tableau*. Logo, não existe *tableau* fechado associado $\neg(H_1 \rightarrow H_2)$. Isto é H_1 não implica H_2. ■

Cuidado com generalizações apressadas. O *tableau* da Figura 9.9 não é fechado. No caso desse *tableau* isso é verificado, considerando todas as suas possibilidades de desenvolvimento. Em geral, a partir de um *tableau*, fixo, pode ser possível saber se dá para fechá-lo, ou não. Isso ocorre quando é possível considerar todas as possibilidades de aplicações das regras, mesmo considerando fórmulas com comprimento muito grande. Entretanto, no caso geral, não é possível construir um algoritmo, ou definir um método, que para qualquer fórmula determine se o *tableau* associado à fórmula pode, ou não, ser fechado. Observe o salto. Para uma fórmula fixa, pode até ser possível determinar que não existe um *tableau* associado à fórmula que é fechado. Porém, para fórmulas quaisquer não é possível executar tal tarefa. Ou seja, determinar a não existência de tal *tableau* fechado. E no caso da fórmula do Exemplo 9.10? Será que é possível fechar o *tableau*? Sabemos que no caso da fórmula $\neg(H_1 \rightarrow H_2)$ isso não é possível, pois conforme Exemplo 8.15, já sabemos que H_1 não implica H_2. Logo, $(H_1 \rightarrow H_2)$ não é válida. Então, pelo teorema da correção, não existe prova de $(H_1 \rightarrow H_2)$, utilizando *tableaux* semânticos. Isto é, não existe *tableau* semântico fechado associado a $\neg(H_1 \rightarrow H_2)$. Além disso, como a fórmula $\neg(H_1 \rightarrow H_2)$ tem um comprimento reduzido, uma análise das possibilidades de desenvolvimento alternativo do *tableau* da Figura 9.9 nos mostra que não é possível, nesse caso particular, obter um *tableau* fechado associado a $\neg(H_1 \rightarrow H_2)$. Entretanto, devemos ter cuidado com esse tipo de análise, na qual devemos levar em consideração todas as possibilidade de desenvolvimento de um *tableau* para qualquer fórmula. Isso pode ser bem complexo. Imagine uma fórmula, cujo comprimento é muito grande. A nossa tarefa, nesse caso, certamente, pode ser muito maior. Finalmente, observe que sabemos que não é possível definir um algoritmo que decida sobre tal questão. Isto é, que decida quais fórmulas H possuem algum *tableau* semântico fechado associado a $\neg H$.

9.4.3 Algumas observações sobre o método dos *tableaux* semânticos

Se temos como premissas os teoremas da completude e da correção para os *tableaux* semânticos na Lógica de Predicados, Teoremas 9.1 e 9.2, seguem algumas conclusões:

1. Se H é válida, então existe *tableau* fechado associado a H;
2. Se H é válida, então pode existir *tableau* aberto associado a H;
3. Se H não é válida, então não existe *tableau* fechado associado a H;
4. Se H não é válida, então todo *tableau* associado a H é aberto;
5. Se um *tableau* associado a H é fechado, então H é válida;
6. Se um *tableau* associado a H é aberto, então não necessariamente H não é válida;
7. Se todo *tableau* associado a H é aberto, então H não é válida.

Observe que na Lógica Proposicional tais relações são mais simples, pois naquele contexto temos: H é tautologia se, e somente se, existe *tableau* fechado associado a H. Isso significa que na Lógica Proposicional, se existe um *tableau* fechado associado a H, então todos os outros também são fechados. Além disso, na Lógica Proposicional, H não é tautologia se, e somente se, existe *tableau* aberto associado a H. Logo, na Lógica Proposicional, se existe um *tableau* aberto associado a H, então todos os outros também são abertos.

9.4.4 Indecidibilidade

Os métodos de dedução semântica da Lógica Proposicional, como analisados no Capítulo 4, são mecanismos de decisão. Isto é, dada uma fórmula H, utilizando, por exemplo, o *tableau* semântico da Lógica Proposicional, é possível decidir se H é, ou não satisfatível. Lembre-se: dizer que um método decide significa dizer que ele responde a questão sobre a satisfatibilidade de H, sem entrar em loop, ou entrar por um conjunto sem fim de operações. Nesse sentido, o método dos *tableaux* semânticos na Lógica Proposicional sempre fornece uma decisão quanto à pergunta: H é ou não satisfatível? E nesse caso, a resposta é dada sem que o sistema entre em loop ou por um conjunto sem fim de operações. Entretanto, na Lógica de Predicados, as coisas não são tão simples. Isso, porque temos o teorema da indecidibilidade, a seguir.

Teorema 9.3 (indecidibilidade na Lógica Proposicional) *O conjunto das fórmulas da Lógica de Predicados que são satisfatíveis é indecidível.*

Nota. Infelizmente, a demonstração do Teorema 9.3 não pertence ao escopo deste livro. Entretanto, mesmo não apresentando sua demonstração, vale a pena entendê-lo. Sobre sua demonstração, aqueles mais animados podem consultar, por exemplo, [Cooper], [Smith], [Sipser] e [Shoenfield].

O significado do teorema da indecidibilidade. O teorema da indecidibilidade, Teorema 9.3, diz que não existe um algoritmo que identifica as fórmulas da Lógica de Predicados que são satisfatíveis, sem possivelmente entrar em loop, ou entrar por um conjunto sem fim de operações. Isto é, podemos até definir algum algoritmo, ou método, que determina se alguns tipos de fórmulas são satisfatíveis. Mas, inevitavelmente, para algumas fórmulas, o algoritmo pode entrar em loop ou por um conjunto sem fim de operações.

O teorema da indecidibilidade e o método dos *tableaux* semânticos. Devido o teorema da indecidibilidade, Teorema 9.3, dada uma fórmula H da Lógica de Predicados, não é possível decidir se existe um *tableau* semântico fechado associado a $\neg H$. Pois se fosse possível essa decisão, então o conjunto das fórmulas satisfatíveis seria decidível, o que contraria o teorema da indecidibilidade. Então, ao iniciar um *tableau* com a fórmula $\neg H$, podemos possivelmente entrar em loop, ou por uma sequência sem fim de aplicações de regras e não decidir se existe um *tableau* fechado. Mas, no caso dos *tableaux* semânticos, o que significa entrar em loop, ou entrar por uma sequência infinita de aplicações de regras? Pode significar, por exemplo, seguir um ramo infinito da árvore. Mas, também, pode significar outras coisas, que dependem da estrutura sintática de H. Entretanto, como estamos falando apenas informalmente, basta essa ideia primária. Mas, não é só o conjunto das fórmulas satisfatíveis que é indecidível. O conjunto das fórmula válidas da Lógica de Predicados é, também, indecidível. Isso porque, para identificar o conjunto das fórmulas válidas, devemos inicialmente identificar as fórmulas satisfatíveis e, em seguida, num trabalho maior ainda, nomear aquelas que são válidas. Portanto, não existe algoritmo que identifica, de forma efetiva, as fórmulas válidas, sem que, possivelmente, entre em loop, ou entre por um conjunto sem fim de operações. Aqui, estamos novamente apenas com ideias informais. Observe que o teorema da indecidibilidade não implica, de forma imediata, que o conjunto das fórmulas válidas também é indecidível. Isso, porque a inexistência de um algoritmo que decide o conjunto das fórmulas satisfatíveis, não significa a inexistência de um algoritmo que decide, diretamente, o conjunto das fórmulas válidas. Além disso, dada uma fórmula H, da Lógica de Predicados, ainda não conhecemos um método eficiente, de complexidade polinomial,[1] que determine, caso exista, uma interpretação I, tal que $I[H] = T$. Tais fatos são importantes resultados da Lógica que têm consequências em várias áreas, como Computação, Matemática e Filosofia [Andrews], [Barwise], [Enderton], [Mendelson], [Dalen] e [Shoenfield].

Prova do sim e do não. Dada uma fórmula da Lógica Proposicional, o método dos *tableaux* semânticos decide o "sim", caso a fórmula seja uma tautologia, ou decide o "não", caso ela não seja uma tautologia. Porém, na Lógica de Predicados é diferente. Dada uma fórmula da Lógica de Predicados, o método dos *tableaux* semânticos não decide nem o "sim", caso a fórmula seja satisfatível, e nem o "não", caso ela não seja satisfatível. Tudo isso, devido ao teorema da indecidibilidade, Teorema 9.3.

9.5 Exercícios

1. Considere as regras R_{10} e R_{11} do *tableau* semântico. Utilize as equivalências:
   $(\exists x)A$ equivale a $\neg(\forall x)\neg A$
   $(\forall x)A$ equivale a $\neg(\exists x)\neg A$
   e demonstre que R_5, R_{10} equivale a R_5, R_{11}.

2. Demonstre, utilizando *tableaux* semânticos, se as fórmulas, a seguir, são válidas:

   (a) $(\forall x)q(y)$ e $q(y)$

   (b) $(\exists x)q(y)$ e $q(y)$

   (c) $(\forall x)(p(x) \wedge q(y)) \rightarrow ((\forall x)p(x) \wedge q(y))$

   (d) $((\forall x)p(x) \wedge q(y)) \rightarrow (\forall x)(p(x) \wedge q(y))$

   (e) $(\exists x)(p(x) \wedge q(y)) \rightarrow ((\exists x)p(x) \wedge q(y))$

   (f) $((\exists x)p(x) \wedge q(y)) \rightarrow (\exists x)(p(x) \wedge q(y))$

   (g) $((\exists x)p(x) \vee q(y)) \rightarrow (\exists x)(p(x) \vee q(y))$

[1] Consulte [Sipser], [Cooper], para a definição de complexidade polinomial.

(h) $(\exists x)(p(x) \lor q(y)) \to ((\exists x)p(x) \lor q(y))$

(i) $(\forall x)(p(x) \to q(y)) \to ((\exists x)p(x) \to q(y))$

(j) $((\exists x)p(x) \to q(y)) \to (\forall x)(p(x) \to q(y))$

(k) $(\forall x)(q(y) \to p(x)) \to (q(y) \to (\forall x)p(x))$

(l) $(q(y) \to (\forall x)p(x)) \to (\forall x)(q(y) \to p(x))$

(m) $(\exists x)(p(x) \to q(y)) \to ((\forall x)p(x) \to q(y))$

(n) $((\forall x)p(x) \to q(y)) \to (\exists x)(p(x) \to q(y))$

(o) $(\exists x)(q(y) \to p(x)) \to (q(y) \to (\exists x)p(x))$

(p) $(q(y) \to (\exists x)p(x)) \to (\exists x)(q(y) \to p(x))$

3. Demonstre, utilizando *tableaux* semânticos, se as seguintes fórmulas são válidas:

   (a) $(\forall x)(p(x) \to (q(x) \to r(x)) \to ((p(x) \to q(x)) \to (p(x) \to r(x))))$

   (b) $(\forall x)((p(x) \to q(x)) \to (\neg q(x) \to \neg p(x)))$

   (c) $(\forall x)((p(x) \to q(x)) \to (\neg q(x) \to \neg p(x))$

   (d) $(\forall x)p(x) \leftrightarrow (\forall y)p(y)$

   (e) $(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \to (q(x,y) \to p(x,y)))$

4. Algumas das fórmulas a seguir são válidas, outras não. Para cada fórmula demonstre, utilizando *tableaux* semânticos, se ela é válida.

   (a) $(\forall x)p(x) \to p(a)$

   (b) $p(a) \to (\exists x)p(x)$

   (c) $(\forall x)(\neg(\forall y)q(x,y)) \to (\neg(\forall y)q(y,y))$

   (d) $p(x) \to (\forall x)p(x)$

   (e) $(\forall x)p(x) \to (\exists x)p(x)$

   (f) $(\exists x)(p(x) \to q(x)) \to ((\exists x)p(x) \to (\exists x)q(x))$

   (g) $(\forall x)(\exists y)p(x,y) \to (\exists y)p(y,y)$

   (h) $(\exists x)(\exists y)p(x,y) \to (\exists y)p(y,y)$

   (i) $(\exists x)(p(x) \to r(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \to (\exists x)r(x))$

   (j) $(\forall x)(p(x) \lor r(x)) \to ((\forall x)p(x) \lor \forall x)r(x))$

   (k) $((\forall x)p(x) \lor (\forall x)r(x)) \to (\forall x)(p(x) \lor r(x))$

   (l) $(\exists x)(p(x) \leftrightarrow r(x)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x) \leftrightarrow (\exists x)r(x))$

   (m) $(\exists x)((p(x) \to p(a)) \land (p(x) \to p(b)))$

   (n) $(\exists x)(\forall y)((q(x,y) \land q(y,x)) \to (q(x,x) \leftrightarrow q(y,y)))$

(o) $(\forall x)(p(x) \wedge q(x)) \leftrightarrow (\forall x)(p(x) \to \neg q(x))$

(p) $(\forall x)(p(x, a) \to (\forall x)q(x, b)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x, a) \to (\forall x)q(x, b))$

(q) $(\forall x)(\exists y)(p(x, y) \to q(x, y)) \to ((\forall x)(\exists y)p(x, y) \to (\forall x)(\exists y)q(x, y))$

(r) $(\forall x)(\exists y)(p(x, y) \to q(x, y)) \to ((\exists x)(\forall y)p(x, y) \to (\forall x)(\exists y)q(x, y))$

5. Demonstre, utilizando *tableaux* semânticos, que as fórmulas H e G a seguir são equivalentes:

   (a) $H = (\forall x)(\forall y)p(x, y, z),\ G = (\forall y)(\forall x)p(x, y, z)$

   (b) $H = (\exists x)(\exists y)p(x, y, z),\ G = (\exists y)(\exists x)p(x, y, z)$

   (c) $H = \neg(\exists y)A,\ G = (\forall y)\neg A$

   (d) $H = (\exists x)p(x),\ G = (\exists y)p(y)$

   (e) $H = (\forall x)p(x),\ G = (\forall y)p(y)$

   (f) $H = (\forall x)(\forall x)p(x),\ G = (\forall x)p(x)$

6. Justifique porque todos os *tableaux* associados a:

$$H = (\forall x)(p(x) \to (\exists y)(q(y) \wedge r(x, y))) \wedge \neg(\exists y)(q(y) \wedge (\forall x)r(y, x))$$

   são abertos e conclua que H não é válida.

7. Demonstre, utilizando *tableaux* semânticos, se os argumentos do Exercício 19 do Capítulo 7 são válidos.

8. Demonstre, utilizando *tableaux* semânticos, se os conjuntos são satisfatíveis:

   (a) $\{(\forall x)(\forall y)(p(x, y) \to \neg p(y, x)), (\forall x)p(x, x),$
   $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x, z) \wedge p(y, z)) \to p(y, z))\}$

   (b) $\{\neg(\forall x)(\forall y)(p(x, y) \to \neg p(y, x)), (\forall x)p(x, x),$
   $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x, z) \wedge p(y, z)) \to p(y, z))\}$

   (c) $\{(\forall x)(\forall y)(p(x, y) \to \neg p(y, x)), \neg(\forall x)p(x, x),$
   $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x, z) \wedge p(y, z)) \to p(y, z))\}$

   (d) $\{(\forall x)(\forall y)(p(x, y) \to \neg p(y, x)), (\forall x)p(x, x),$
   $\neg(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x, z) \wedge p(y, z)) \to p(y, z))\}$

9. Demonstre, utilizando *tableaux* semânticos, quando as afirmações podem ser verdadeiras ao mesmo tempo.

   (a) Toda aluna de Ciência da Computação é mais bonita que alguma aluna de Engenharia. Toda aluna de Engenharia é mais bonita que alguma aluna de Ciência da Computação.

(b) Toda aluna de Ciência da Computação é mais bonita que alguma aluna de Engenharia. Existe aluna de Engenharia que é mais bonita que alguma aluna de Ciência da Computação.

(c) Existe aluna de Ciência da Computação que é mais bonita que toda aluna de Engenharia. Existe aluna de Engenharia que é mais bonita que alguma aluna de Ciência da Computação.

(d) Toda aluna de Ciência da Computação é mais bonita que toda aluna de Engenharia. Existe aluna de Engenharia que é mais bonita que alguma aluna de Ciência da Computação.

10. Demonstre, utilizando *tableaux* semânticos, se o conjunto de afirmações a seguir é satisfatível:

   - Toda aluna de Ciência da Computação é mais bonita que alguma aluna de Engenharia.
   - Toda aluna de Engenharia é mais bonita que alguma aluna de Ciência da Computação.
   - Existe aluna de Ciência da Computação que é mais bonita que toda a aluna de Engenharia.

11. Maria estava conversando com sua amiga Ana e disse:

    - Há mulheres na Universidade que têm ciúmes de todos os homens.

    Ana pensou e disse:

    - Toda mulher ciumenta tem uma paixão. Entretanto, elas nunca se casam.

    Zé estava ouvindo o diálogo e concluiu:

    - Nenhuma mulher da Universidade se casará.

    Demonstre, utilizando *tableaux* semânticos, se a conclusão de Zé é válida ou não.

12. Considere o argumento:

    Todo atleta é determinado. Toda pessoa determinada e inteligente não é uma perdedora. Guga é um atleta e amante do tênis. Toda pessoa é amante do tênis se é inteligente. Portanto, Guga não é um perdedor.

    Utilize o método dos *tableaux* semânticos para responder se o argumento acima é válido.

13. Demonstre, utilizando *tableaux*, semânticos se os argumentos a seguir são válidos:

    a) Maria ama a todos e somente aqueles que amam seu filho. Seu filho ama a todos e somente aqueles que não amam Maria. Maria ama a si própria. Portanto, seu filho ama a si próprio.

b) Há monitor que é bom estudante, mas não é comunicativo. Apenas bons estudantes são monitores. Todo artista é comunicativo. Portanto, nem todo bom estudante é um artista.

14. Considere as afirmações a seguir.

Afirmação 1. Toda mulher dócil tem um amado.

Afirmação 2. Se existe mulher dócil, toda pessoa tem um amado.

Demonstre se a s afirmações a seguir são válidas:

a) afirmação 1 implica na afirmação 2.

b) afirmação 2 implica na afirmação 1.

15. Demonstre, utilizando os teoremas da completude, da correção e da indecidibilidade, se as afirmações são verdadeiras:

(a) Se H é válida, então existe *tableau* fechado associado a $\neg H$.

(b) Se H é válida, então pode existir *tableau* aberto associado a $\neg H$.

(c) Se H não é válida, então não existe *tableau* fechado associado a $\neg H$.

(d) Se H não é válida, então todo *tableau* associado a $\neg H$ é aberto.

(e) Se existe *tableau* associado a $\neg H$ fechado, então H é válida.

(f) Se existe *tableau* associado a $\neg H$ que é aberto, então H não é válida.

(g) Se todo *tableau* associado a $\neg H$ é aberto, então H não é válida.

(h) É possível definir uma fórmula válida H, da lógica de predicados, com um *tableau* aberto associado a $\neg H$.

16. Mostre a validade do teorema da correção, na Lógica de Predicados, em um caso particular, como é feito no Capítulo 4.