Nome: Eduardo Henrique de Almeida Izidoro 09/08/21
Matrícula: 2020000315
Disciplina: Geometria Analítica

Presença referente ao dia 09/08/2021

2. (Processo de ortonormalização de Gram-Schmidt.) Dada base $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ ache uma base ortonormal $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ tal que $\vec{e_1} \parallel \vec{f_1}$ e $\vec{e_2}$ seja combinação linear de $\vec{f_1}$ e $\vec{f_2}$.
Aplicação $\vec{f_1} = (1,2,2)$, $\vec{f_2} = (1,0,1)$, $\vec{f_3} = (1,1,1)$.
Sugestão: $\vec{e_1} = \frac{\vec{f_1}}{\|\vec{f_1}\|}$; use o Exercício Resolvido nº 7 para escrever diretamente $\vec{e_2}$; use o Exercício Resolvido nº 8 para escrever diretamente $\vec{e_3}$.

Resposta: Seja $\vec{g_1} = \vec{f_1}$ e considere $\vec{g_2} = \vec{f_2} - \frac{\vec{f_2}\cdot\vec{f_1}}{\|\vec{f_1}\|^2}\vec{f_1}$. Então

$$\vec{g_2}\cdot\vec{g_1} = \left(\vec{f_2} - \frac{\vec{f_2}\cdot\vec{f_1}}{\|\vec{f_1}\|^2}\cdot\vec{f_1}\right)\cdot\vec{f_1} = \vec{f_2}\cdot\vec{f_1} - \frac{\vec{f_2}\cdot\vec{f_1}}{\|\vec{f_1}\|^2}(\vec{f_1}\cdot\vec{f_1}) = \vec{f_2}\cdot\vec{f_1} - \vec{f_2}\cdot\vec{f_1}$$
$= 0$

e assim $\vec{g_2}$ é ortogonal a $\vec{g_1}$.

Consideramos $\vec{g_3} = \vec{f_3} - \frac{\vec{f_3}\cdot\vec{g_1}}{\|\vec{g_1}\|^2}\cdot\vec{g_1} - \frac{\vec{f_3}\cdot\vec{g_2}}{\|\vec{g_2}\|^2}\vec{g_2}$

$$\vec{g_3}\cdot\vec{g_1} = \left(\vec{f_3} - \frac{\vec{f_3}\cdot\vec{g_1}}{\|\vec{g_1}\|^2}\vec{g_1} - \frac{\vec{f_3}\cdot\vec{g_2}}{\|\vec{g_2}\|^2}\vec{g_2}\right)\cdot\vec{g_1}$$
$$= \vec{f_3}\cdot\vec{g_1} - \frac{\vec{f_3}\cdot\vec{g_1}}{\|\vec{g_1}\|^2}(\vec{g_1}\cdot\vec{g_1}) - \frac{\vec{f_3}\cdot\vec{g_2}}{\|\vec{g_2}\|^2}(\vec{g_2}\cdot\vec{g_1})$$
$$= \vec{f_3}\cdot\vec{g_1} - \vec{f_3}\cdot\vec{g_1} = 0$$

$$\vec{g_3}\cdot\vec{g_2} = \left(\vec{f_3} - \frac{\vec{f_3}\cdot\vec{g_1}}{\|\vec{g_1}\|^2}\vec{g_1} - \frac{\vec{f_3}\cdot\vec{g_2}}{\|\vec{g_2}\|^2}\vec{g_2}\right)\cdot\vec{g_2}$$
$$= \vec{f_3}\cdot\vec{g_2} - \frac{\vec{f_3}\cdot\vec{g_1}}{\|\vec{g_1}\|^2}(\vec{g_1}\cdot\vec{g_2}) - \frac{\vec{f_3}\cdot\vec{g_2}}{\|\vec{g_2}\|^2}(\vec{g_2}\cdot\vec{g_2})$$
$$= \vec{f_3}\cdot\vec{g_2} - \vec{f_3}\cdot\vec{g_2} = 0.$$

e assim $\vec{g}_3$ é ortogonal a $\vec{g}_1$ e $\vec{g}_2$.

Considerando $\vec{e}_i = \dfrac{\vec{g}_i}{\|\vec{g}_i\|}$, $i = 1, 2, 3$, temos que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ é uma base ortonormal tal que $\vec{e}_1 \parallel \vec{f}_1$, $\vec{e}_2$ é combinação linear de $\vec{e}_1$ e $\vec{f}_2$ e $\vec{e}_3$ é combinação linear de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{f}_3$.