Nome: Eduardo Henrique de A. Izidorio
Gabriel Peixoto Menezes da Costa
Matrículas: 2020000315
2020022626

Disciplina: Lógica de Predicados
Professora: Thais Oliveira Almeida

Atividade 3

1. Demonstre que as fórmulas H e G a seguir são equivalentes.

a) $H = (\forall x)(\forall y)p(x,y,z)$, $G = (\forall y)(\forall x)p(x,y,z)$

$I[H] = I[G]$; Tomando $I[H] = T \leftrightarrow I[G] = T$

$I[H] = T = I[(\forall x)(\forall y)p(x,y,z)] = T$

$\Leftrightarrow \forall d \in U; <x \leftarrow d> I[(\forall y)p(x,y,z)] = T$

$\Leftrightarrow \forall d \in U, \forall c \in U; <y \leftarrow c><x \leftarrow d> I[p(x,y,z)] = T$

$\Leftrightarrow \forall d \in U, \forall c \in U; <y \leftarrow c><x \leftarrow d> I[p(d,c,z)] = T$

$I[G] = T = I[(\forall y)(\forall x)p(x,y,z)$

$\Leftrightarrow \forall c \in U; <y \leftarrow c> I[(\forall x)p(x,y,z)] = T$

$\Leftrightarrow \forall c \in U, \forall d \in U; <x \leftarrow d><y \leftarrow c> I[p(x,y,z)] = T$

$\Leftrightarrow \forall c \in U, \forall d \in U; <x \leftarrow d><y \leftarrow c> I[p(d,c,z)] = T$

$\Leftrightarrow I[H] = T$, $I[G] = T$, logo, H equivale a G.

b) $H = (\exists x)(\exists y)p(x,y,z)$, $G = (\exists y)(\exists x)p(x,y,z)$

$I[H] = I[G]$; Tomando $I[H] = T \leftrightarrow I[G] = T$

$\Leftrightarrow \exists d \in U; <x \leftarrow d> I[(\exists y)p(x,y,z)] = T$

$\Leftrightarrow \exists d \in U, \exists c \in U; <y \leftarrow c><x \leftarrow d> I[p(x,y,z)] = T$

$\Leftrightarrow \exists d \in U, \exists c \in U; <y \leftarrow c><x \leftarrow d> I[p(d,c,z)] = T$

$I[G] = T = I[(\exists y)(\exists x)p(x,y,z)$

$\Leftrightarrow \exists c \in U; <y \leftarrow c> I[(\exists x)p(x,y,z)] = T$

$\Leftrightarrow \exists c \in U, \exists d \in U; <x \leftarrow d><y \leftarrow c> I[p(x,y,z)] = T$

$\Leftrightarrow \exists c \in U, \exists d \in U; <x \leftarrow d><y \leftarrow c> I[p(d,c,z)] = T$

$\Leftrightarrow I[H] = T$, $I[G] = T$, logo, H equivale a G.

c) $H = \neg(\exists y)p(y)$, $G = (\forall y)\neg p(y)$

$I[H] = I[G]$; $\Leftrightarrow I[H] = T \leftrightarrow I[G] = T$

$I[H] = T \Leftrightarrow I[\neg(\exists y)p(y)] = T$ logo
$I[(\exists y)p(y)] = F$

$\Leftrightarrow \exists d \in U; <y \leftarrow d> I[p(y)] = F$

$\Leftrightarrow \exists d \in U; <y \leftarrow d> I[p(d)] = F$

$I[G] = T \Leftrightarrow I[(\forall y)\neg p(y)] = T$

$\Leftrightarrow \forall d \in U; <y \leftarrow d> I[\neg p(y)] = T$

$\Leftrightarrow \forall d \in U; <y \leftarrow d> I[\neg p(d)] = T$
$I[p(d)] = F$

$\Leftrightarrow I[G] = F$, logo, $I[G] = I[H]$ então H equivale a G.

d) $H = (\exists x)p(x)$, $G = (\exists y)p(y)$

$I[H] = I[G]$; $\Leftrightarrow I[H] = T \leftrightarrow I[G] = T$

$\Leftrightarrow \exists d \in U; <x \leftarrow d> I[p(x)] = T$

$\Leftrightarrow \exists d \in U; <x \leftarrow d> I[p(d)] = T$

$I[G] = I[(\exists y)p(y)]$

$\Leftrightarrow \exists d \in U; <y \leftarrow d> I[p(y)] = T$

$\Leftrightarrow \exists d \in U; <y \leftarrow d> I[p(d)] = T$

$\Leftrightarrow I[H] = T$, $I[G] = T$, logo, H equivale a G.

e) $H = (\forall x)p(x)$, $G = (\forall y)p(y)$

$I[H] = I[G]$; $\Leftrightarrow I[H] = T \leftrightarrow I[G] = T$

$I[H] = I[(\forall x)p(x)]$

$\Leftrightarrow \forall d \in U; <x \leftarrow d> I[p(x)] = T$

$\Leftrightarrow \forall d \in U; <x \leftarrow d> I[p(d)] = T$

$I[G] = I[(\forall y)p(y)]$

$\Leftrightarrow \forall d \in U; <y \leftarrow d> I[p(y)] = T$

$\Leftrightarrow \forall d \in U; <y \leftarrow d> I[p(d)] = T$

$\Leftrightarrow I[H] = T$, $I[G] = T$, logo, H equivale a G

f) $H = (\forall x)(\forall x)\, p(x)$, $G = (\forall x)\, p(x)$

$I[H] = I[G]; \Leftrightarrow I[H] = T \leftrightarrow I[G] = T$

$I[H] = I[(\forall x)(\forall x)\, p(x)] = T$

$\Leftrightarrow \forall d \in U; \langle x \leftarrow d \rangle I[(\forall x)\, p(x)] = T$

$\Leftrightarrow \forall d \in U; \forall c \in U; \langle x \leftarrow d \rangle \langle x \leftarrow c \rangle I[p(x)] = T$

$\Leftrightarrow \forall d \in U, \forall c \in U; p_I(c) = T$

$\Leftrightarrow \forall c \in U; p_I(c) = T$

$\Leftrightarrow \forall d \in U; \langle x \leftarrow d \rangle I[p(x)] = T$

$\Leftrightarrow I[(\forall x)\, p(x)] = T$

$\Leftrightarrow I[G] = T$, logo $I[G] = I[H]$

Então H equivale a G.

2. Considere as fórmulas:

$G = (\exists x)\, p(x)$

$H = q(x)$

Demonstre que os pares de fórmulas a seguir são equivalentes.

a) $(\exists x)(H \vee G)$ e $((\exists x)\, H \vee G)$

$S = (\exists x)(H \vee G)$

$M = ((\exists x)\, H \vee G)$

S equivale a M $\leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I[S] = I[M]$.

Mas, $I[S] = I[M] \leftrightarrow (I[S] = F \leftrightarrow I[M] = F)$

$I[S] = F \leftrightarrow I[(\exists x)(H \vee G)] = F$

$\Leftrightarrow \forall d \in U; \langle x \leftarrow d \rangle I[H \vee G] = F$

$\Leftrightarrow \forall d \in U; \langle x \leftarrow d \rangle I[H] = F$ e $\langle x \leftarrow d \rangle I[G] = F$

$\Leftrightarrow \forall d \in U; \langle x \leftarrow d \rangle I[H] = F$ e $I[G] = F$

(pois x não ocorre livre em G)

$\Leftrightarrow I[(\exists x)\, H] = F$ e $I[G] = F$

$\Leftrightarrow I[M] = F$

b) $(\forall x)(H \rightarrow G)$ e $((\exists x)\, H \rightarrow G)$

$S = (\forall x)(H \rightarrow G)$

$M = ((\exists x)\, H \rightarrow G)$

$S = (\forall x)(H \rightarrow G)$, $M = ((\exists x)\, H \rightarrow G)$ considerando que $\langle x \leftarrow d \rangle I[G] = T \leftrightarrow I[G] = T$

S equivale a M $\leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I[S] = F \leftrightarrow I[M] = F$

$I[S] = F$

$\Leftrightarrow I[(\forall x)(H \rightarrow G)] = F$

$\Leftrightarrow \exists d \in U; \langle x \leftarrow d \rangle I[H \rightarrow G] = F$

$\Leftrightarrow \exists d \in U; \langle x \leftarrow d \rangle I[H] = T$ e $\langle x \leftarrow d \rangle I[G] = F$

$\Leftrightarrow \exists d \in U; \langle x \leftarrow d \rangle I[H] = T$ e $I[G] = F$

$\Leftrightarrow I[(\exists x) H] = T$ e $I[G] = T$

$\Leftrightarrow I[M] = F$

3. Demonstre que as fórmulas a seguir não são válidas:

a) $(\forall x)(\neg(\forall y)\, q(x,y)) \rightarrow (\neg(\forall y)\, q(y,y))$

$I[(\forall x)(\neg(\forall y)\, q(x,y))] = T$

$\Leftrightarrow \forall d \in U; \langle x \leftarrow d \rangle I[\neg(\forall y)\, q(x,y)] = T$

$\Leftrightarrow \forall d \in U; \langle x \leftarrow d \rangle I[(\forall y)\, q(x,y)] = F$

$\Leftrightarrow \exists c \in U, \forall d \in U; \langle y \leftarrow c \rangle \langle x \leftarrow d \rangle I[q(x,y)] = F$

$\Leftrightarrow \exists c \in U, \forall d \in U; \langle y \leftarrow c \rangle \langle x \leftarrow d \rangle I[q(d,c)] = F$

$I[\neg(\forall y)\, q(y,y)] = T \Leftrightarrow I[(\forall y)\, q(y,y)] = F$

$\Leftrightarrow \exists c \in U; \langle y \leftarrow d \rangle I[q(y,y)] = F$

$\Leftrightarrow \exists c \in U; \langle y \leftarrow d \rangle I[q(c,c)] = F$

b) $(\forall x)(q(x,y) \wedge q(x,z)) \leftrightarrow ((\forall x)q(x,y) \wedge (\forall x)q(x,z))$

$I[(\forall x)(q(x,y) \wedge q(x,z))] = F$

$\Leftrightarrow \forall d \in U; \langle x \leftarrow d \rangle I[(q(x,y) \wedge q(x,z))] = F$

$\Leftrightarrow \forall d \in U; \langle x \leftarrow d \rangle q_i(d, y_i) \wedge q_i(d, z_i) = F$

$I[(\forall x)q(x,y) \wedge (\forall x)q(x,z))] = T$

$\Leftrightarrow \forall d \in U; \langle x \leftarrow d \rangle I[q(x,y) \wedge (\forall x)q(x,z)] = T$

$\Leftrightarrow \forall c \in U, \forall d \in U; \langle x \leftarrow c \rangle \langle x \leftarrow d \rangle I[q(x,y) \wedge (\forall x)q(x,z)] = T$

$\Leftrightarrow \forall c \in U, \forall d \in U; \langle x \leftarrow c \rangle \langle x \leftarrow d \rangle q(d,y) \wedge q(c,z) = T$

c) $(\exists x)(q(x,y) \rightarrow q(x,z)) \leftrightarrow (\exists x)(q(x,y) \rightarrow (\exists x)q(x,z)$

$I[(\exists x)(q(x,y) \rightarrow q(x,z))] = T$

$\Leftrightarrow \exists d \in U; \langle x \leftarrow d \rangle I[q(x,y) \rightarrow q(x,z)] = T$

$\Leftrightarrow \exists d \in U; \langle x \leftarrow d \rangle q(d,y) \rightarrow q(d,z)] = T$

$I[(\exists x)(q(x,y) \rightarrow (\exists x)q(x,z))] = F$

$\Leftrightarrow \exists d \in U; \langle x \leftarrow d \rangle I[q(x,y) \rightarrow q(x,z)] = F$

$\Leftrightarrow \exists d \in U; \langle x \leftarrow d \rangle q(x_i,y) \rightarrow q(x_i,z) = F$

$\Leftrightarrow \exists d \in U; \langle x \leftarrow d \rangle q(d,y) \rightarrow q(d,z) = F$

S/L | T/M | Q/M | Q/J | S/V | S/S | D/D

4. Formalize as sentenças a seguir usando a Lógica de Predicados.

a) Toda cobra é venenosa.

$(\forall x)[\text{cobra}(x) \rightarrow \text{Venenosa}(x))$

$(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$

b) Nenhuma bruxa é bela.

$(\forall x)(\text{bruxa}(x) \rightarrow \neg \text{bela}(x))$

$(\forall x)(p(x) \rightarrow \neg q(x))$

c) Algumas plantas são carnívoras.

$(\exists x)(\text{planta}(x) \land \text{carnívoras}(x))$

$(\exists x)(p(x) \land q(x))$

d) Há aves que não voam.

$(\exists x)(\text{aves}(x) \land \neg \text{Voa}(x))$

$(\exists x)(p(x) \land \neg q(x))$

e) Tudo que sobe, desce.

$(\forall x)(\text{sobe}(x) \rightarrow \text{desce}(x))$

$(\forall x)(p(x) \rightarrow \text{desce}(x))$

f) Existem políticos não são honestos.

$(\exists x)(\text{políticos}(x) \land \neg \text{honestos}(x))$

$(\exists x)(p(x) \land \neg q(x))$

S/L | T/M | Q/M | Q/J | S/V | S/S | D/D

g) não existe bêbado feliz

$(\forall x)(\text{bêbado}(x) \to \neg \text{feliz}(x))$

$(\forall x)(p(x) \to q(x))$

h) Pedras preciosas são caras.

$(\forall x)(\text{pedra preciosa}(x) \to \text{caras}(x))$

$(\forall x(p(x) \to q(x))$

i) Ninguém gosta de impostos.

$(\forall x)(\text{gosta}(x) \to \neg \text{impostos}(x))$

$(\forall x)(p(x) \to \neg q(x))$

j) Vegetarianos não gostam de açougueiros

$(\forall xy)(\text{Vegetarianos}(x) \wedge \text{açougueiros}(y) \to \neg \text{gosta}(x, y))$

$(\forall xy)(p(x) \wedge q(y) \to \neg r(x, y))$

K) Toda mãe ama seus filhos.

$(\forall xy)(\text{mãe}(x, y) \to \text{ama}(x, y))$

$(\forall xy)(p(x, y) \to q(x, y))$

5. Determine se as asserções a seguir são válidas:

a) Todo político é esperto. Nenhum cientista é esperto. Portanto, nenhum cientista é político.

$(\forall x)(c(x) \wedge \neg p(x)) \to ((\forall x)(p(x) \wedge e(x)) \wedge (\forall x)(c(x) \wedge \neg e(x)))$

Válida

b) Todo homem é mortal. Sócrates é homem. Portanto, Sócrates é mortal.

$((\forall x)(h(x) \to m(x) \wedge (h(a) \wedge h(x))) \to S(x) \to m(x)$

Válida

c) Todo político é esperto. Existe indivíduo esperto que é inteligente. Portanto, algum político é inteligente.

$((\forall x)((p(x) \wedge e(x)) \wedge ((\exists x)p(x) \wedge q(x))) \to (\exists x)(p(x) \wedge c(x)) \to q(x)$

Válida

d) Há político honesto. Há operários honestos. Portanto, há operários que são políticos.

$((\exists x)(p(x) \wedge h(x)) \wedge (\exists x)(o(x) \wedge h(x))) \to (\exists x)(o(x) \wedge p(x))$

Válida

6. Considere as sentenças a seguir.

H_1 = Toda mulher dócil tem um amado.

H_2 = Se existe mulher dócil, toda mulher tem um amado.

Demonstre se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas.

a) H_1 implica H_2. Falso

b) H_2 implica H_1. Verdadeira

$I(p(x)) = T \leftrightarrow x_1$ é mulher

$I(s(x)) = T \leftrightarrow x_1$ é dócil

$I(q(x)) = T \leftrightarrow x_1$ é homem

$I(r(x)) = T \leftrightarrow x_1$ ama y_1

$H_1 = (\forall x)((p(x) \wedge s(x)) \to (\exists y)(q(y) \wedge r(y, x))$

$H_2 = (\exists y)(p(y) \wedge s(y, x) \to (\forall x)(\exists y)((q(x) \wedge r(x))$