CAPÍTULO 8

PROPRIEDADES SEMÂNTICAS DA LÓGICA DE PREDICADOS

8.1 Introdução

Este Capítulo analisa propriedades semânticas da Lógica de Predicados. Logo, no presente contexto, como consideramos fórmulas da Lógica de Predicados, temos que interpretar os quantificadores. O conjunto de propriedades semânticas da Lógica de Predicados, consideradas neste livro, é análogo àquele definido no Capítulo 3 para a Lógica Proposicional. Isto é, temos conceitos análogos à tautologia, satisfatibilidade, implicação, equivalência etc. Além disso, alguns resultados demonstrados na Lógica Proposicional têm correspondentes análogos na Lógica de Predicados, como, por exemplo: $(H \rightarrow G)$ é tautologia se, e somente se, H implica G e também $(H \leftrightarrow G)$ é tautologia se, e somente se, H equivale a G, onde H e G são fórmulas da Lógica Proposicional.

8.2 Satisfatibilidade

Esta seção considera a determinação da satisfatibilidade de fórmulas da Lógica de Predicados. Mas, antes de tudo, lembre que uma fórmula H é satisfatível quando existe pelo menos uma interpretação I tal que $I[H] = T$.

Exemplo 8.1 (satisfatibilidade) Seja $H_1 = p(x, y)$ e I_1 uma interpretação sobre os naturais $\mathbb{N}$, tal que $I_1[p] = <$, $I_1[x] = 5$ e $I_1[y] = 9$. Nesse caso temos, $I_1[H_1] = T$. Logo, H_1 é satisfatível. ■

Exemplo 8.2 (satisfatibilidade) Seja $H_2 = (\forall x)p(x, y)$ e I_2 uma interpretação sobre os naturais $\mathbb{N}$, tal que $I_2[p] = \geq$, $I_2[y] = 0$. Nesse caso temos, $I_2[H_2] = T$. Logo, H_2 é satisfatível. ■

Exemplo 8.3 (satisfatibilidade) Seja $H_3 = (\forall x)(\exists y)p(x, y)$ e I_3 uma interpretação sobre os naturais $\mathbb{N}$, tal que $I_3[p] = <$. Nesse caso temos, $I_3[H_3] = T$. Logo, H_3 é satisfatível. ■

Exemplo 8.4 (satisfatibilidade) Seja $H_4 = (\forall x)(\exists y)p(x, y) \rightarrow p(x, y)$ e I_4 uma interpretação sobre os naturais $\mathbb{N}$, tal que $I_4[p] = <$, $I_4[x] = 5$, e $I_4[y] = 9$. Observe que $I_4[H_4] = T$, pois:

$$\begin{aligned}
I[H_4] = F &\Leftrightarrow I[(\forall x)(\exists y)p(x, y) \rightarrow p(x, y)] = F, \\
&\Leftrightarrow I[(\forall x)(\exists y)p(x, y)] = T \text{ e } I[p(x, y)] = F, \\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > I[(\exists y)p(x, y)] = T \text{ e } I[p(x, y)] = F, \\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N}, \exists\ c \in \mathbb{N};\quad < y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x, y)] = T \text{ e} \\
&\qquad I[p(x, y)] = F, \\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N}, \exists\ c \in \mathbb{N};\quad (d < c) \text{ é verdadeiro e } (5 < 9) \text{ é falso.}
\end{aligned}$$

A última afirmação:

"$\forall\ d \in \mathbb{N}, \exists\ c \in \mathbb{N};\quad (d < c)$ é verdadeiro e $(5 < 9)$ é falso"

é falsa, pois é claro que é falso dizer que "$(5 < 9)$ é falso". Logo, $I[H_4] = T$ e H_4 é satisfatível. ■

Exemplo 8.5 (satisfatibilidade) Considere a fórmula:
$H = \neg((\forall x)p(x, y)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x, z))$. A fórmula H é satisfatível. Nem sempre é fácil identificar, imediatamente, se uma fórmula é ou não satisfatível. Para demonstrar esse fato, devemos definir uma interpretação I, tal que $I[H] = T$. Para que $I[H] = T$, uma possibilidade é ter $I[\neg((\forall x)p(x, y))] = T$ e $I[(\exists x)(\neg p(x, z))] = T$. Definimos, a seguir, uma interpretação que satisfaz essas igualdades. Seja I uma interpretação sobre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Definimos, agora, uma interpretação para o predicado p. Mas, deve ser uma interpretação que tenha como resultado $I[\neg((\forall x)p(x, y))] = T$. Isto é, informalmente, deve ser falso que para todo natural x se tenha $p(x, y)$. Como sabemos que é falso que para todo natural x, $x > 4$, então definimos:

$I[p(x, y)] = T$ se, e somente se, $x_I > y_I$ e $I[y] = 4$.

Além disso, devemos ter $I[(\exists x)(\neg p(x, z))] = T$. Isto é, informalmente, deve existir x tal que a afirmação "$x > z$" é falsa. Nesse caso basta definir, por exemplo, $I[z] = 6$. Formalmente, temos

$$\begin{aligned}
I[\neg((\forall x)p(x,y))] = T \Leftrightarrow \; & I[(\forall x)p(x,y)] = F, \\
\Leftrightarrow \; & \exists\, d \in \mathbb{N}; < x \leftarrow d > I[p(x,y)] = F, \\
\Leftrightarrow \; & \exists\, d \in \mathbb{N};\ (d > 4) \text{ é falso.}
\end{aligned}$$

Como a última afirmação é verdadeira, concluímos que $I[\neg((\forall x)p(x,y))] = T$. Por outro lado:

$$\begin{aligned}
I[(\exists x)(\neg p(x,z))] = T \; & \Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{N}; < x \leftarrow d > I[\neg p(x,z)] = T, \\
& \Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{N}; < x \leftarrow d > I[p(x,z)] = F, \\
& \Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{N};\ (d > 6) \text{ é falso.}
\end{aligned}$$

Como a última afirmação é verdadeira, concluímos que: $I[(\exists x)(\neg p(x,z))] = T$. Logo $I[\neg((\forall x)p(x,z))] = I[(\exists x)(\neg p(x,z))] = T$, isto é, $I[H] = T$ e H é satisfatível. ■

8.3 Validade

Na Lógica de Predicados, o conceito que corresponde ao de tautologia é o da validade. Antes de definir validade, considere o exemplo a seguir:

Exemplo 8.6 (validade) Seja H, tal que $H = (\forall x)p(x) \vee \neg(\forall x)p(x)$. Nesse caso, considerando $A = (\forall x)p(x)$, então $H = (A \vee \neg A)$. E, conforme os conceitos semânticos apresentados na Lógica Proposicional, H é uma tautologia, independentemente da interpretação da fórmula A. Isso significa que apesar de H ser uma fórmula da Lógica de Predicados, pois possui quantificadores e predicados, a sua interpretação segue os mesmos princípios apresentados na Lógica Proposicional. Isto é, mesmo contendo símbolos da Lógica de Predicados, é possível concluir que $I[H] = T$ para toda interpretação I, sem a análise semântica dos quantificadores e predicados. Quando tal fato ocorre, H é denominada fórmula tautologicamente válida. ■

Definição 8.1 (fórmula tautologicamente válida) *Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados. Então:*

H é tautologicamente válida se, e somente se,
para toda interpretação I, $I[H] = T$
e, além disso,
para determinar se $I[H] = T$
não é necessário interpretar os quantificadores de H.

Exemplo 8.7 (validade) Há casos nos quais a análise semântica da fórmula requer a interpretação dos quantificadores. Considere G, tal que $G = (\forall x)p(x) \rightarrow p(a)$. Nesse caso, seja I uma interpretação qualquer sobre um domínio U e suponha que $I[G] = F$. Mas,:

$$
\begin{aligned}
I[G] = F &\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x) \rightarrow p(a)] = F,\\
&\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)] = T \text{ e } I[p(a)] = F,\\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \text{ e } I[p(a)] = F,\\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in U,\ p_I(d) = T \text{ e } p_I(a_I) = F.
\end{aligned}
$$

A última afirmação é falsa, pois ela expressa que:
$\forall\ d \in U,\ p_I(d) = T$ e também que $p_I(a_I) = F$ para algum $a_I \in U$.

Portanto, a afirmação equivalente, $I[G] = F$, é falsa. Logo, $I[G] = T$ para qualquer interpretação I. Observe que nessa última análise, para concluir que $I[G] = T$, para qualquer interpretação I, é necessária a análise semântica do quantificador. Quando isso ocorre, dizemos que a fórmula G é válida. ■

Definição 8.2 (fórmula válida) *Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados. Então:*

H é válida, se, e somente se, para toda interpretação I, $I[H] = T$.

Observe a diferença entre as Definições 8.1 e 8.2. Na Definição 8.1, para determinar se $I[H] = T$, não há necessidade de interpretar os quantificadores de H. Caso contrário, se é necessário tal interpretação, então temos a Definição 8.2. Por isso, na Definição 8.2 não colocamos nenhuma condição adicional para determinar se $I[H] = T$. Portanto, se H é tautologicamente válida, então é, também, válida. O inverso não é verdadeiro. Se H é válida, não, necessariamente, é tautologicamente válida. Por exemplo, a fórmula H, do Exemplo 8.6, é tautologicamente válida e, também, válida. Mas, a fórmula G, do Exemplo 8.7, é válida, mas não é tautologicamente válida. Portanto, temos as conclusões:

- Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional, Se H é uma tautologia, então H é tautologicamente válida e portanto é também válida.
- Tautologia é um caso particular de validade.
- Existe fórmula válida, mas que não é tautologicamente válida.
- Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados. Se H é válida, então não necessariamente H também é tautologicamente válida.
- Os conceitos de validade e tautologicamente válida não são equivalentes.

Além dos princípios de contradição, do terceiro excluído e da bivalência, a Lógica Clássica também segue um outro princípio denominado princípio de identidade, que é analisado no exemplo a seguir.

Exemplo 8.8 (princípio da identidade) O princípio da identidade estabelece que todo objeto é igual a si próprio. Ou seja, dado um predicado $p(x, y)$ e uma interpretação I, sobre U, tal que:
$I[p(x, y)] = T$ se, e somente se, $I[x] = I[y]$,

então $I[(\forall x)p(x,x)] = T$. Isto é, para toda interpretação I, que interpreta p como a igualdade, temos que $I[(\forall x)p(x,x)] = T$. Nesse sentido, o princípio da identidade não estabelece que a fórmula $(\forall x)p(x,x)$ é válida. Ele apenas estabelece que, no contexto das interpretações que interpretam p como a igualdade, os modelos padrão, a fórmula $(\forall x)p(x,x)$ é verdadeira. Mas, se J é uma interpretação qualquer, observe o desenvolvimento:

$$
\begin{aligned}
J[(\forall x)p(x,x))] = T \; &\Leftrightarrow \; \forall\ d \in U, < x \leftarrow d > J[p(x,x)] = T, \\
&\Leftrightarrow \; \forall\ d \in U, d = d.
\end{aligned}
$$

Essa demonstração está incorreta, pois é falso que

$\forall\ d \in U, < x \leftarrow d > J[p(x,x)] = T \;\; \Leftrightarrow \;\; \forall\ d \in U, d = d.$

Isso porque nessa equivalência estamos admitindo explicitamente que J interpreta p como uma igualdade. Entretanto, não necessariamente todas as interpretações interpretam p dessa forma. Portanto, o princípio estabelece que se p é interpretado como a igualdade, então $(\forall x)p(x,x)$ é interpretada como verdadeira. Em outras palavras, para as interpretações que interpretam p como a igualdade, no domínio U todo objeto é idêntico a si mesmo.[1] Além disso, observe que $(\forall x)p(x,x)$ pode ser interpretada como sendo verdadeira em casos nos quais a interpretação de p não necessariamente é fixada na igualdade. De tudo isso, concluímos que o princípio da identidade tem uma natureza diferente dos princípios apresentados anteriormente, porque o princípio da igualdade é válido apenas em um contexto restrito, no qual temos um predicado com interpretação fixa igual à igualdade, conforme, por exemplo, uma interpretação modelo padrão. ■

Exemplo 8.9 (não validade) Considere, novamente, a fórmula H, tal que:

$$H = \neg((\forall x)p(x,y)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x,z)).$$

Observe que essa fórmula é analisada no Exemplo 8.5, no qual demonstramos que ela é satisfatível. Entretanto, a seguir, demonstramos que ela não é válida. Como já sabemos, uma fórmula H não é válida se existe uma interpretação que a interpreta como sendo falsa. Isto é, devemos encontrar uma interpretação J, tal que $J[H] = F$. Mas,

$J[H] = F$ se e somente se $\{J[\neg(\forall x)p(x,y)] \neq J[(\exists x)(\neg p(x,z))]\}$.

Observe que:

$$
\begin{aligned}
J[\neg((\forall x)p(x,y))] = T \; &\Leftrightarrow \; J[(\forall x)p(x,y)] = F, \\
&\Leftrightarrow \; \exists\ d \in U;\ < x \leftarrow d > J[p(x,y)] = F, \\
&\Leftrightarrow \; \exists\ d \in U;\ p_J(d, y_J) = F.
\end{aligned}
$$

Por outro lado:

[1] Há Lógicas não clássicas em que o princípio de identidade não é válido. Nesse caso, nem sempre um objeto é igual a si mesmo. No estudo de teorias com igualdade, o predicado p é denotado por $=$.

$$
\begin{aligned}
J[(\exists x)(\neg p(x,z))] = T \;&\Leftrightarrow \exists\ d \in U;\ < x \leftarrow d > J[\neg p(x,z)] = T, \\
&\Leftrightarrow\ \exists\ d \in U;\ < x \leftarrow d > J[p(x,z)] = F, \\
&\Leftrightarrow\ \exists\ d \in U;\ p_J(d, z_J) = F.
\end{aligned}
$$

A interpretação J deve ser tal que a afirmação "$\exists\ d \in U;\ p_J(d, y_J) = F''$ seja falsa e a afirmação "$\exists\ d \in U;\ p_J(d, z_J) = F''$ seja verdadeira. Daí, concluímos que $J[\neg((\forall x)p(x,y))] \neq J[(\exists x)(\neg p(x,z))]$. Seja então J uma interpretação sobre o domínio $U = \{A, B, C, D\}$ tal que $J[p]$ é definida pelo diagrama da Figura 8.1. Neste diagrama, convencionamos que:

$p_J(r,s)$ é verdadeiro, se, e somente se, há uma seta de r para s.

Nesse caso:

$$p_J(B,B) = p_J(A,B) = p_J(C,B) = p_J(D,B) = T$$

e entre os valores falsos há, por exemplo:

$$p_J(B,A) = p_J(B,C) = p_J(A,C) = p_J(C,C) = p_J(C,D) = F.$$

Além disso, definimos que $J[y] = B$ e $J[z] = A$.

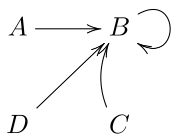

Figura 8.1: Interpretação do predicado p.

Para a interpretação J, a afirmação "$\exists\ d \in U;\ p_J(d, y_J) = F$" equivale a "$\exists\ d \in U;\ p_J(d, B) = F$", pois $J[y] = B$. A última afirmação é falsa, pois $\forall\ d \in U$, $p_J(d,B) = T$. Logo, $J[\neg((\forall x)p(x,y))] = T$. Por outro lado, a afirmação "$\exists\ d \in U$; $p_J(d, z_J) = F$" equivale a "$\exists\ d \in U;\ p_J(d, A) = F$". Isto é verdadeiro, pois para $d = A$, por exemplo, temos $p_J(d, A) = F$. Logo, $J[(\exists x)(\neg p(x,z))] = F$ e, portanto, $J[\neg((\forall x)p(x,y))] \neq J[(\exists x)(\neg p(x,z))]$. ■

Lema 8.1 (igualdade e interpretação) *Sejam H e G duas fórmulas da Lógica de Predicados e I uma interpretação:*

$$
\begin{aligned}
I[H] = I[G] \text{ se, e somente se, } \{I[H] = T \Leftrightarrow I[G] = T\}. \\
I[H] = I[G] \text{ se, e somente se, } \{I[H] = F \Leftrightarrow I[G] = F\}.
\end{aligned}
$$

Nota. Propomos a demonstração do Lema 8.1 como exercício.

O próximo exemplo determina a validade de uma fórmula e utiliza o Lema 8.1.

Exemplo 8.10 (validade) Considere a fórmula:

$$G = \neg((\forall x)p(x)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x)).$$

Observe que a fórmula G é semelhante à H do Exemplo 8.9. Como demonstrado naquele exemplo, a fórmula H não é válida. Entretanto, a fórmula G, acima, é válida, conforme é demonstrado a seguir. Por definição, G é válida se, e somente se, para toda interpretação J, $J[G] = T$. Mas,

$$J[G] = T \Leftrightarrow J[\neg((\forall x)p(x))] = J[(\exists x)(\neg p(x))].$$

Conforme o Lema 8.1:

$$J[\neg((\forall x)p(x))] = J[(\exists x)(\neg p(x))]$$
se, e somente se,
$$\{J[\neg((\forall x)p(x))] = T \Leftrightarrow J[(\exists x)(\neg p(x))] = T\}.$$

Mas:

$$\begin{aligned} J[\neg((\forall x)p(x))] = T \; &\Leftrightarrow J[(\forall x)p(x)] = F, \\ &\Leftrightarrow \; \exists \; d \in U; \; < x \leftarrow d > J[p(x)] = F, \\ &\Leftrightarrow \; \exists \; d \in U; \; < x \leftarrow d > J[\neg p(x)] = T, \\ &\Leftrightarrow J[(\exists x)(\neg p(x))] = T. \end{aligned}$$

Portanto:

$$J[\neg((\forall x)p(x))] = T \Leftrightarrow J[(\exists x)(\neg p(x))] = T.$$

Logo, $J[G] = T$. Como J é uma interpretação arbitrária, então G é válida. ■

Exemplo 8.11 (validade) Este exemplo demonstra a validade da fórmula:
$H = (\exists y)(\forall x)q(x, y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)q(x, y)$.
Suponha, por contradição, que H não é válida. Logo, por definição, existe uma interpretação I sobre um domínio U, tal que $I[H] = F$. Mas,

$$\begin{aligned} I[H] = F \; &\Leftrightarrow \; I[(\exists y)(\forall x)q(x, y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)q(x, y)] = F, \\ &\Leftrightarrow \; I[(\exists y)(\forall x)q(x, y)] = T \;\text{ e }\; I[(\forall x)(\exists y)q(x, y)] = F. \end{aligned}$$

Além disso:

$$\begin{aligned} I[(\exists y)(\forall x)q(x, y)] = T \; &\Leftrightarrow \; \exists \; d \in U; \; < y \leftarrow d > I[(\forall x)q(x, y)] = T, \\ &\Leftrightarrow \; \exists \; d \in U; \; \forall \text{ e } \in U, \; < x \leftarrow e >< y \leftarrow d > I[q(x, y)] = T, \\ &\Leftrightarrow \; \exists \; d \in U; \; \forall \text{ e } \in U, \; q_I(e, d) = T. \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} I[(\forall x)(\exists y)q(x, y)] = F \; &\Leftrightarrow \; \exists \; r \in U; \; < x \leftarrow r > I[(\exists y)q(x, y)] = F, \\ &\Leftrightarrow \; \exists \; r \in U; \; \forall s \in U, \; < y \leftarrow s >< x \leftarrow r > I[q(x, y)] = F, \\ &\Leftrightarrow \; \exists \; r \in U; \; \forall \; s \in U, \; q_I(r, s) = F. \end{aligned}$$

As afirmações:

"$\exists\ d \in U;\ \forall e \in U,\ q_I(e,d) = T$" e "$\exists\ r \in U;\ \forall\ s \in U,\ q_I(r,s) = F$"

são contraditórias entre si. Como ilustração, considere um caso particular em que essa contradição é identificada. Seja I uma interpretação sobre $U = \{A, B, C, D\}$, tal que $I[q]$ é definida pelo diagrama da Figura 8.2, conforme convenções indicadas no Exemplo 8.10.

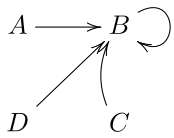

Figura 8.2: Interpretação do predicado q.

O diagrama da Figura 8.2 satisfaz a afirmação "$\exists\ d \in U;\ \forall\ e \in U, q_I(e,d) = T$". Nesse caso, fazendo $d = B$, então "$\forall\ e \in \{A, B, C, D\},\ q_I(e, B) = T$". Por outro lado, a afirmação: "$\exists\ r \in U;\ \forall\ s \in U,\ q_I(r,s) = F$" não é satisfeita. Essa afirmação diz que:

"$\exists\ r \in \{A, B, C, D\};\ \forall\ s \in \{A, B, C, D\},\ q_I(r,s) = F$".

Em outras palavras, existe um elemento r tal que não sai nenhuma seta a partir dele. Mas isso é impossível devido à existência do elemento $d = A$, como indicado anteriormente. Uma outra forma de fazer essa análise é considerar uma interpretação I sobre o domínio dos alunos de Computação tal que:

$I[q(x,y)] = T$ se, e somente se, x_I gosta de y_I.

Suponha então que exista um aluno de Computação que é amado por todos: "o bem-amado". Isso significa que "$\exists\ d \in U;\ \forall\ c \in U,\ c$ gosta de d". Ou seja, "$\exists\ d \in U;\ \forall\ c \in U,\ q_1(c,d) = T$". Mas se existe o "bem-amado", logo a afirmação "$\exists\ r \in U;\ \forall\ s \in U,\ r$ não gosta de s" é falsa, pois nesse caso, r deveria gostar pelo menos do "bem-amado". Portanto, se existe o "bem-amado", a afirmação "$\exists\ r \in U;\ \forall\ s \in U,\ q_1(r,s) = F$" é falsa. ■

Exemplo 8.12 (não validade) Considere a fórmula:
$E = (\forall x)(\exists y)q(x,y) \rightarrow (\exists y)(\forall x)q(x,y)$.
Observe que a fórmula E pode ser obtida de H, definida no Exemplo 8.11, invertendo a ordem dos quantificadores. Este exemplo demonstra que a fórmula E não é válida. Considere uma interpretação I sobre o domínio $U = \{A, B, C, D\}$, tal que $I[q]$ é dada pelo diagrama da Figura 8.3, conforme as convenções indicadas no Exemplo 8.10.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & B \arrow[d, bend left] \\
D \arrow[ur] & C \arrow[u, bend left]
\end{tikzcd}
$$

Figura 8.3: Interpretação do predicado q.

Observe que:

$$
\begin{aligned}
I[(\forall x)(\exists y)q(x,y)] = T \;&\Leftrightarrow \forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[(\exists y)q(x,y)] = T, \\
&\Leftrightarrow\ \forall\ d \in U,\ \exists\ e \in U; \\
&\qquad < y \leftarrow e >< x \leftarrow d > I[q(x,y)] = T, \\
&\Leftrightarrow\ \forall\ d \in U,\ \exists\ e \in U;\ q_I(d,e) = T.
\end{aligned}
$$

Por outro lado:

$$
\begin{aligned}
I[(\exists y)(\forall x)q(x,y)] = F \;&\Leftrightarrow\ \forall\ r \in U,\ < s \leftarrow r > I[(\forall x)q(x,y)] = F, \\
&\Leftrightarrow\ \forall\ r \in U,\ \exists\ s \in U; \\
&\qquad < x \leftarrow s >< y \leftarrow r > I[q(x,y)] = F, \\
&\Leftrightarrow\ \forall\ r \in U,\ \exists\ s \in U;\ q_I(s,r) = F.
\end{aligned}
$$

As afirmações "$\forall\ d \in U,\ \exists\ e \in U;\ q_I(d,e) = T$" e "$\forall\ r \in U,\ \exists\ s \in U;\ q_I(s,r) = F$" são satisfeitas pelo diagrama da Figura 8.3. A primeira afirmação diz que "para todo $d \in \{A,B,C,D\}$, existe $e \in \{A,B,C,D\}$ tal que há uma seta de d para e". O diagrama da Figura 8.3 satisfaz essa afirmação, pois se $d = A$, basta considerar $e = B$. Se $d = B$, então $e = C$ e assim por diante. Analogamente, a segunda afirmação diz que "para todo $r \in \{A,B,C,D\}$, existe $s \in \{A,B,C,D\}$ tal que não há seta de s para r". A segunda afirmação também é verdadeira. Nesse caso, se $r = A$, então $s = C$ e assim por diante. Portanto, como as afirmações anteriores são satisfeitas pelo diagrama da Figura 8.3, concluímos que $I[E] = F$. ■

Exemplo 8.13 (propriedades básicas da Aritmética de Robinson) Este exemplo considera as propriedades básicas da aritmética de Robinson. Tais propriedades são válidas no contexto dos modelos padrão, reescritas a seguir:

1. $Bx_1 = (\forall x)\neg(\overline{0} \mathrel{\widehat{=}} S(x))$;
2. $Bx_2 = (\forall x)(\forall y)((S(x) \mathrel{\widehat{=}} S(y)) \to (x \mathrel{\widehat{=}} y)$;
3. $Bx_3 = (\forall x)(\neg(x \mathrel{\widehat{=}} \overline{0}) \to (\exists y)(x \mathrel{\widehat{=}} S(y))$;
4. $Bx_4 = (\forall x)((x \mathbin{\widehat{+}} \overline{0}) \mathrel{\widehat{=}} x)$;
5. $Bx_5 = (\forall x)(\forall y)((x \mathbin{\widehat{+}} S(y)) \mathrel{\widehat{=}} S(x \mathbin{\widehat{+}} y))$;
6. $Bx_6 = (\forall x)((x \mathbin{\widehat{\times}} \overline{0}) \mathrel{\widehat{=}} \overline{0})$;
7. $Bx_7 = (\forall x)(\forall y)((x \mathbin{\widehat{\times}} S(y)) \mathrel{\widehat{=}} ((x \mathbin{\widehat{\times}} y) \mathbin{\widehat{+}} x))$.

Demonstramos, a seguir, a validade da última propriedade. A demonstração da validade das outras, deixamos como exercício.

$$\begin{aligned}
I[H] = T \;&\Leftrightarrow\; I[(\forall x)(\forall y)((x \mathbin{\hat{\times}} S(y)) \mathbin{\hat{=}} ((x \mathbin{\hat{\times}} y) \mathbin{\hat{+}} x))] = T, \\
&\Leftrightarrow\; \forall\, d \in \mathbb{N},\ <x \leftarrow d> I[(\forall y)((x \mathbin{\hat{\times}} S(y)) \mathbin{\hat{=}} ((x \mathbin{\hat{\times}} y) \mathbin{\hat{+}} x))] = T, \\
&\Leftrightarrow\; \forall\, d \in \mathbb{N},\ \forall\, c \in \mathbb{N}, \\
&\qquad <y \leftarrow c><x \leftarrow d> I[(x \mathbin{\hat{\times}} S(y)) \mathbin{\hat{=}} ((x \mathbin{\hat{\times}} y) \mathbin{\hat{+}} x)] = T, \\
&\Leftrightarrow\; \forall\, d \in \mathbb{N},\ \forall\, c \in \mathbb{N},\ (d \times (c+1)) = ((d \times c) + d).
\end{aligned}$$

Como a última afirmação é verdadeira, então, no contexto da interpretação padrão da aritmética, H é válida. Observe que fora desse contexto, H pode ser interpretada como sendo falsa. Veja os exercícios. ■

8.4 Contradição semântica

As contradições são aquelas fórmulas que são interpretadas como falsas para toda interpretação I. Isto é, por definição, dada uma fórmula H da Lógica de Predicados:

H é uma contradição semântica se, e somente se, para toda interpretação $I, I[H] = F$.

Veja um exemplo de contradição:

Exemplo 8.14 (contradição) Seja a fórmula: $H = (\forall x)p(x) \land (\exists x)\neg p(x)$. Essa fórmula é contraditória, pois suponha que exista uma interpretação I, sobre o domínio U, tal que $I[H] = T$. Então:

$$\begin{aligned}
I[H] = T \;&\Leftrightarrow\; I[(\forall x)p(x) \land (\exists x)\neg p(x)] = T, \\
&\Leftrightarrow\; I[(\forall x)p(x)] = T \ \text{ e } \ I[(\exists x)\neg p(x)] = T, \\
&\Leftrightarrow\; \forall\, d \in U,\ <x \leftarrow d> I[p(x)] = T \ \text{ e} \\
&\qquad \exists\, c \in U;\ <x \leftarrow c> I[\neg p(x)] = T, \\
&\Leftrightarrow\; \forall\, d \in U,\ <x \leftarrow d> I[p(x)] = T \ \text{ e} \\
&\qquad \exists\, c \in U;\ <x \leftarrow c> I[p(x)] = F, \\
&\Leftrightarrow\; \forall\, d \in U,\ p_I(d) = T \ \text{ e } \ \exists\, c \in U;\ p_I(c) = F.
\end{aligned}$$

Como a afirmação "$\forall\, d \in U,\ p_I(d)] = T$ e $\exists\, c \in U;\ p_I(c) = F$" é falsa, então, para toda interpretação, $I[H] = F$. Isto é, H é contraditória. ■

Notação. Para denotar que um termo t ocorre zero, uma, ou mais vezes em uma fórmula H, escrevemos: $H(t)$. Suponha, por exemplo, $H = (\forall x)p(x) \rightarrow q(f(x), y)$. Nesse caso, denotamos $H(x)$ para indicar que x ocorre em H. Observe que podemos ter ocorrências de x livres, ou ligadas. Essa notação somente dá ênfase ao fato de x ser uma variável que ocorre em H, pois $H(x) = H$. Analogamente, temos $H(f(x)) = H$. Nesse caso, $H(f(x))$ somente indica que o termo $f(x)$ ocorre em H. Da mesma forma, $H(x, f(x))$ denota que x e $f(x)$ ocorrem em H.

Proposição 8.1 (contradição) *Considere as fórmulas:*

$$H = (\forall x)(\exists y)E(x,y) \quad e \quad H_s = (\forall x)E(x, f(x)),$$

tais que E é uma fórmula que contém as variáveis livres x e y. Além disso, f é uma função qualquer.

Se H é contraditória então H_s é contraditória.

Esquema de demonstração. A fórmula H_s corresponde à *skolemização* de H [Shoenfield]. Observe que a demonstração a seguir é apenas uma ideia, pois a demonstração rigorosa desse resultado utiliza indução no comprimento das fórmulas. Suponha que para toda interpretação I sobre um domínio U, $I[H] = F$. Logo:

$$\begin{aligned} I[H] = F &\Leftrightarrow I[(\forall x)(\exists y)E(x,y)] = F, \\ &\Leftrightarrow \exists\ d \in U;\ < x \leftarrow d > I[(\exists y)E(x,y)] = F, \\ &\Leftrightarrow \exists\ d \in U;\ \forall\ b \in U < y \leftarrow b >< x \leftarrow d > I[E(x,y)] = F, \\ &\Leftrightarrow \exists\ d \in U;\ \forall\ b \in U \quad E_I(d,b) = F. \end{aligned}$$

Portanto, existe $d \in U$, tal que, para qualquer escolha de b, temos que $E_I(d,b) = F$. Dado b, seja f[2] uma função tal que $f_I(d) = b$, logo $E_I(d, f_I(d)) = F$. Continuando o desenvolvimento anterior:

$$\begin{aligned} I[H] = F &\Leftrightarrow \exists\ d \in U;\ \forall\ b \in U,\ E_I(d,b) = F, \\ &\Rightarrow \exists\ d \in U;\ E_I(d, f_I(d)) = F, \text{ onde } f \text{ é a função tal que} f_I(d) = b, \\ &\Leftrightarrow \exists\ d \in U;\ < x \leftarrow d > I[E(x, f(x))] = F \\ &\Leftrightarrow I[(\forall x)E(x, f(x))] = F, \\ &\Leftrightarrow I[H_s] = F. \end{aligned}$$

Portanto, para toda interpretação I, se $I[H] = F$, então $I[H_s] = F$. Isto é, concluímos que se H é contraditória, então H_s é contraditória. **cqd** ■

8.5 Implicação

Analisamos a seguir algumas implicações entre fórmulas da Lógica de Predicados. E, como sempre, na Lógica de Predicados, o conceito de implicação semântica, denominado simplesmente por implicação, é análogo ao mesmo conceito apresentado na Lógica Proposicional. Isto é:

H implica semanticamente G, se, e somente se, para toda interpretação I, se $I[H] = T$, então $I[G] = T$.

[2] Será que essa função f sempre existe? E se existe, como deve ser definida? A escolha dessa função deve ser feita com mais cuidado e rigor. Por isso, esta demonstração é apenas uma ideia. Ela não é rigorosa.

Exemplo 8.15 (não implicação) Considere as fórmulas:
$H_1 = (\forall x)(p(x) \lor q(x))$ e $H_2 = (\forall x)p(x) \lor (\forall x)q(x)$.
Demonstramos que H_1 não implica H_2. Isto é, demonstramos que:
$\exists\ I;\ I[H_1] = T,$ e $I[H_2] = F.$

Portanto, para demonstrar que H_1 não implica H_2, devemos definir uma interpretação I tal que $I[H_1] = T,$ e $I[H_2] = F$. Não é necessário pensar em interpretações fora do comum, muito diferentes. Considere uma interpretação I sobre os naturais $\mathbb{N}$. Assim, como $I[H_1] = T$, devemos ter $I[(\forall x)(p(x) \lor q(x))] = T$. Isto é, informalmente devemos considerar que para todo número natural, um dos predicados p ou q é verdadeiro. Pensar nos números pares e ímpares é uma boa opção, pois para todo natural x, temos que x é par ou ímpar. Seja, então:
$I[p(x)] = T$ se, e somente se, x_I é par;
$I[q(x)] = T$ se, e somente se, x_I é ímpar.

Nesse caso, temos:

$$\begin{aligned}
I[H_1] = T \ &\Leftrightarrow\ I[(\forall x)(p(x) \lor q(x))] = T,\\
&\Leftrightarrow\ \forall\ d \in \mathbb{N},\ <x \leftarrow d> I[p(x) \lor q(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow\ \forall\ d \in \mathbb{N},\ <x \leftarrow d> I[p(x)] = T \ \text{ ou } \ <x \leftarrow d> I[q(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow\ \forall\ d \in \mathbb{N},\ d \ \text{ é par, ou } \ d \ \text{ é ímpar.}
\end{aligned}$$

Como é verdade que "$\forall\ d \in \mathbb{N},\ d$ é par ou é ímpar", então $I[H_1] = T$. A interpretação I interpreta H_2 como falsa:

$$\begin{aligned}
I[H_2] = F \ &\Leftrightarrow\ I[(\forall x)p(x) \lor (\forall x)q(x)] = F,\\
&\Leftrightarrow\ I[(\forall x)p(x)] = F \ \text{ e } \ I[(\forall x)q(x)] = F,\\
&\Leftrightarrow\ \exists\ d \in \mathbb{N},\ <x \leftarrow d> I[p(x)] = F \ \text{ e}\\
&\qquad \exists\ c \in \mathbb{N},\ <x \leftarrow c> I[q(x)] = F,\\
&\Leftrightarrow\ \exists\ d \in \mathbb{N},\ d \ \text{ não é par, e } \ \exists\ c \in \mathbb{N},\ c \ \text{ não é ímpar.}
\end{aligned}$$

Como é verdade que "$\exists\ d \in \mathbb{N},\ d$ não é par, e $\exists\ c \in \mathbb{N},\ c$ não é ímpar", então $I[H_2] = F$. Conclusão: H_1 não implica H_2. ■

Exemplo 8.16 (implicação) Considere as fórmulas H_1 e H_2 do Exemplo 8.15. Demonstramos que H_2 implica H_1. Isto é, demonstramos que:
$\forall\ I,$ se $I[H_2] = T,$ então $I[H_1] = T,$

Portanto, ainda que H_1 não implica H_2, o inverso é verdadeiro. Suponha, então, que $\forall\ I,\ I[H_2] = T$. Mas,

$$\begin{aligned}
I[H_2] = T \ &\Leftrightarrow\ I[(\forall x)p(x) \lor (\forall x)q(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow\ I[(\forall x)p(x)] = T \ \text{ ou } \ I[(\forall x)q(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow\ \forall\ d \in U,\ <x \leftarrow d> I[p(x)] = T \ \text{ ou}\\
&\qquad \forall\ c \in U,\ <x \leftarrow c> I[q(x)] = T,\\
&\Rightarrow\ \forall\ d \in U,\ \{<x \leftarrow d> I[p(x)] = T \ \text{ ou}\\
&\qquad <x \leftarrow d> I[q(x)] = T\ \},\\
&\Leftrightarrow\ \forall\ d \in U,\ <x \leftarrow d> I[p(x) \lor q(x)] = T,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \ I[(\forall x)(p(x) \vee q(x))] = T, \ \} \\ &\Leftrightarrow \ I[H_1] = T. \end{aligned}$$

Na demonstração acima temos um símbolo de implicação semântica que denotamos, para chamar a atenção, por "$\Rrightarrow$". Preste atenção nesse símbolo. Ele diz que a afirmação 1 a seguir:

Afirmação 1.

"$\forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T$ ou $\forall\ c \in U,\ < x \leftarrow c > I[q(x)] = T$"

implica:

Afirmação 2.

"$\forall\ d \in U,\ \{< x \leftarrow d > I[p(x)] = T$ ou $< x \leftarrow d > I[q(x)] = T\ \}$".

Porém, o inverso não é verdade. Isto é, a afirmação 2 não implica a afirmação 1. Por que é assim? Porque na afirmação 1 estamos dizendo que para qualquer d, $p_I(d) = T$ e também que para qualquer c, $q_I(c) = T$. E, nesse caso, d pode não ter relação alguma com c. Por outro lado, na afirmação 2, estamos dizendo que para qualquer d, temos que $p_I(d) = T$ e também, para o mesmo d, que $q_I(d) = T$. Portanto, as afirmações falam coisas diferentes. Portatno, se a afirmação 1 é verdadeira, então o predicado p, ou o predicado q, é satisfeito para qualquer elemento do domínio. Logo, para qualquer elemento do domínio, pelo menos um dos predicados, p ou q, é verdadeiro. Daí, concluímos que a afirmação 2 é verdadeira. Para simplificar o raciocínio e verificar a diferença entre as afirmações, podemos considerar um caso particular. Seja a interpretação I do Exemplo 8.15. Nesse caso, a afirmação 1 diz que todo número natural é par, ou todo número natural é ímpar. Estamos, portanto, falando duas coisas distintas, que todo número é par, ou que todo número é ímpar. E, é claro, isso é falso, pois é falso que todo número é par, como também é falso que todo número é ímpar. Por outro lado, a afirmação 2 diz que para todo número natural temos que ele é par, ou é ímpar. E esse fato é verdadeiro. ■

Exemplo 8.17 (não implicação) Considere as fórmulas:
$H_3 = (\exists x)(p(x) \wedge q(x))$ e $H_4 = (\exists x)p(x) \wedge (\exists x)q(x)$.
Demonstramos, a seguir, que H_4 não implica H_3. Para demonstrar que H_4 não implica H_3, devemos definir uma interpretação I tal que $I[H_4] = T$ e $I[H_3] = F$. Considere a interpretação I definida no Exemplo 8.15. Nesse caso,

$$\begin{aligned} I[H_4] = T \ &\Leftrightarrow \ I[(\exists x)p(x) \wedge (\exists x)q(x))] = T, \\ &\Leftrightarrow \ I[(\exists x)p(x)] = T \text{ e } I[(\exists x)q(x))] = T, \\ &\Leftrightarrow \ \exists\ d \in \mathbb{N},\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \text{ e} \\ &\quad\ \ \exists\ c \in \mathbb{N},\ < x \leftarrow c > I[q(x)] = T, \\ &\Leftrightarrow \ \exists\ d \in \mathbb{N},\ d \text{ é par e } \exists\ c \in \mathbb{N},\ c \text{ é ímpar}. \end{aligned}$$

Como é verdade que "$\exists\ d \in \mathbb{N},\ d$ é par e $\exists\ c \in \mathbb{N},\ c$ é ímpar", então $I[H_4] = T$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} I[H_3] = T \ &\Leftrightarrow \ I[(\exists x)(p(x) \wedge q(x))] = T, \\ &\Leftrightarrow \ \exists\ d \in \mathbb{N},\ < x \leftarrow d > I[p(x) \wedge q(x)] = T, \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\ \exists\ d \in \mathbb{N},\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \ \text{ e } \ < x \leftarrow d > I[q(x)] = T,$$
$$\Leftrightarrow\ \exists\ d \in \mathbb{N},\ d \ \text{ é par e ímpar.}$$

Como é falso que "$\exists\ d \in \mathbb{N},\ d$ é par e ímpar", então $I[H_3] = F$. Conclusão: H_4 não implica H_3, pois verdadeiro não implica falso. ■

Exemplo 8.18 (implicação) Considere as fórmulas H_3 e H_4 do Exemplo 8.17. Naquele exemplo, demonstramos que H_4 não implica H_3. Vamos agora demonstrar que H_3 implica H_4. Temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
I[H_3] = T \ &\Leftrightarrow\ I[(\exists x)(p(x) \wedge q(x))] = T,\\
&\Leftrightarrow\ \exists\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x) \wedge q(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow\ \exists\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \ \text{ e } \ < x \leftarrow d > I[q(x)] = T,\\
&\Rrightarrow\ \exists\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \ \text{ e }\\
&\qquad \exists\ c \in U,\ < x \leftarrow c > I[q(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow\ I[(\exists x)p(x)] = T \ \text{ e } \ I[(\exists x)q(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow\ I[(\exists x)p(x) \wedge (\exists x)q(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow\ I[H_4] = T.
\end{aligned}$$

Como no Exemplo 8.16, a demonstração acima possui um símbolo de implicação semântica que denotamos, para chamar a atenção, por "$\Rrightarrow$." Preste atenção nesse símbolo. Ele diz que a afirmação 1, a seguir:

Afirmação 1. "$\exists\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T$ e $< x \leftarrow d > I[q(x)] = T$"
implica a afirmação 2, a seguir:

Afirmação 2. "$\exists\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T$ e $\exists\ c \in U,\ < x \leftarrow c > I[q(x)] = T$".

Portanto, H_3 implica H_4.

Porém, o inverso não é verdade. Isto é, a afirmação 2 não implica a afirmação 1. Isto é, H_4 não implica H_3, o que está de acordo com o Exemplo 8.17.

■

Proposição 8.2 (implicação) *Dada uma fórmula H e x uma variável qualquer da Lógica de Predicados, se H é válida, então $(\forall x)H$ é válida.*

Esquema de demonstração. Nesse caso, dizemos que $(\forall x)H$ é a generalização de H. Esta proposição diz, portanto, que se H é válida, a sua generalização também é válida. Seja I uma interpretação sobre um domínio U. Como H é válida, então para toda interpretação $I, I[H] = T$. Logo, temos também que:

$\forall\ I, \forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[H] = T.$

Mas como:

$\forall\ I, \forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[H] = T \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ I, I[(\forall x)H] = T,$

concluímos que:

se $\forall\ I, I[H] = T$, então $\forall\ I, I[(\forall x)H] = T.$

Portanto, se H é válida, então $(\forall x)H$ é válida. A demonstração rigorosa dessa implicação deve ser feita utilizando indução no comprimento da fórmula H. Nesse sentido, a demonstração apresentada é apenas um esboço. **cqd** ■

8.6 Equivalência

A seguir, consideramos exemplos de equivalências entre fórmulas da Lógica de Predicados, que, também, é análogo ao mesmo conceito apresentado na Lógica Proposicional. Lembre da definição.

H equivale semanticamente a G, se, e somente se, para toda interpretação I, $I[H] = I[G]$.

Exemplo 8.19 (equivalência) Considere:
$H_5 = (\forall x)((\exists x)p(x) \vee q(x))$ e $H_6 = (\forall x)(\exists x)p(x) \vee (\forall x)q(x)$.
Demonstramos, neste exemplo, que H_5 equivale a H_6. Mas, inicialmente, observe a semelhança dessas fórmulas com as fórmulas H_1 e H_2 do Exemplo 8.15, no qual demonstramos que H_1 não implica H_2. Nesse sentido, a colocação do quantificador $(\exists x)$ antes do predicado $p(x)$ muda tudo. Temos que H_1 não equivale H_2, mas H_5 equivale H_6. Seja, então, uma interpretação, qualquer, sobre o domínio U.

$$
\begin{aligned}
I[H_5] = T \;&\Leftrightarrow\; I[(\forall x)((\exists x)p(x) \vee q(x))] = T,\\
&\Leftrightarrow\; \forall\, d \in\, U,\; <x \leftarrow d> I[(\exists x)p(x) \vee q(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow\; \forall\, d \in\, U,\; <x \leftarrow d> I[(\exists x)p(x)] = T,\;\text{ ou}\\
&\qquad <x \leftarrow d> I[q(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow\; \forall\, d \in\, U,\; \exists c \in U;\; <x \leftarrow c><x \leftarrow d> I[p(x)] = T,\;\text{ ou}\\
&\qquad <x \leftarrow d> I[q(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow\; \forall\, d \in\, U,\; \exists c \in U;\; <x \leftarrow c><x \leftarrow d> I[p(x)] = T,\;\text{ ou}\\
&\qquad \forall\, d \in\, U,\; <x \leftarrow d> I[q(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow\; \forall\, d \in\, U,\; <x \leftarrow d> I[(\exists x)p(x)] = T,\;\text{ ou}\\
&\qquad \forall\, d \in\, U,\; <x \leftarrow d> I[q(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow\; I[(\forall x)(\exists x)p(x)] = T,\;\text{ ou }\; I[(\forall x)q(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow\; I[(\forall x)(\exists x)p(x) \vee (\forall x)q(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow\; I[H_6] = T.
\end{aligned}
$$

Portanto, $I[H_5] = T \Leftrightarrow I[H_6] = T$. Então, para toda interpretação I, $I[H_5] = I[H_6]$. Isto é, H_5 equivale a H_6. ■

Exemplo 8.20 (equivalência) Considere:
$H_7 = (\forall x)(p(x) \wedge q(x))$ e $H_8 = (\forall x)p(x) \wedge (\forall x)q(x)$.
Demonstramos, neste exemplo, que H_7 equivale a H_8. Observe a semelhança dessas fórmulas com H_1 e H_2 do Exemplo 8.15. Como sabemos, H_1 não equivale a H_2. Mas, a substituição do conectivo $\vee$ por $\wedge$ nas fórmulas H_1 e H_2 muda tudo. Isso, porque H_7 equivale a H_8. Seja, então, uma interpretação qualquer sobre o domínio U.

$$
\begin{aligned}
I[H_7]=T &\Leftrightarrow I[(\forall x)(p(x)\wedge q(x))]=T,\\
&\Leftrightarrow \forall\, d\in\ U,\ <x\leftarrow d>I[p(x)\wedge q(x)]=T,\\
&\Leftrightarrow \forall\, d\in\ U,\ <x\leftarrow d>I[p(x)]=T\ \text{ e }\ <x\leftarrow d>I[q(x)]=T,\\
&\Leftrightarrow \forall\, d\in\ U,\ <x\leftarrow d>I[p(x)]=T\ \text{ e}\\
&\quad\ \forall\, d\in\ U,\ <x\leftarrow d>I[q(x)]=T,\\
&\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)]=T\ \text{ e }\ I[(\forall x)q(x)]=T,\\
&\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)\wedge(\forall x)q(x)]=T,\\
&\Leftrightarrow I[H_8]=T.
\end{aligned}
$$

Portanto, $I[H_7]=T \Leftrightarrow I[H_8]=T$. Então, para toda interpretação I, $I[H_7]=I[H_8]$. Isto é, H_7 equivale a H_8.

Neste exemplo, para demonstrar que $I[H_7]=I[H_8]$, demonstramos que

$$I[H_7]=T \Leftrightarrow I[H_8]=T.$$

De forma análoga, podemos demonstrar que

$$I[H_7]=F \Leftrightarrow I[H_8]=F$$

e obter a mesma conclusão. Veja a demonstração de $I[H_7]=F \Leftrightarrow I[H_8]=F$:

$$
\begin{aligned}
I[H_7]=F &\Leftrightarrow I[(\forall x)(p(x)\wedge q(x))]=F,\\
&\Leftrightarrow \exists\, d\in\ U;\ <x\leftarrow d>I[p(x)\wedge q(x)]=F,\\
&\Leftrightarrow \exists\, d\in\ U;\ <x\leftarrow d>I[p(x)]=F,\ \text{ ou }\ <x\leftarrow d>I[q(x)]=F,\\
&\Leftrightarrow \exists\, d\in\ U,\ <x\leftarrow d>I[p(x)]=F,\ \text{ ou}\\
&\quad\ \exists\, d\in\ U,\ <x\leftarrow d>I[q(x)]=F,\\
&\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)]=F,\ \text{ ou }\ I[(\forall x)q(x)]=F,\\
&\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)\wedge(\forall x)q(x)]=F,\\
&\Leftrightarrow I[H_8]=F.
\end{aligned}
$$

■

Exemplo 8.21 (equivalência) Considere:
$H_9=(\exists x)(p(x)\rightarrow r(x))$,
$H_{10}=(\forall x)p(x)\rightarrow(\exists x)r(x)$ e $H_{11}=(\exists x)p(x)\rightarrow(\exists x)r(x)$.
Demonstramos a seguir, que H_9 equivale a H_{10}, mas H_9 não equivale a H_{11}. Seja I uma interpretação sobre um domínio U. Temos que:

$$
\begin{aligned}
I[H_9]=F &\Leftrightarrow I[(\exists x)(p(x)\rightarrow r(x))]=F,\\
&\Leftrightarrow \forall\, d\in U,\ <x\leftarrow d>I[p(x)\rightarrow r(x)]=F,\\
&\Leftrightarrow \forall\, d\in U,\ <x\leftarrow d>I[p(x)]=T\ \text{ e }\ <x\leftarrow d>I[r(x)]=F,\\
&\Leftrightarrow \forall\, d\in U,\ <x\leftarrow d>I[p(x)]=T\ \text{ e}\\
&\quad\ \forall\, d\in U,\ <x\leftarrow d>I[r(x)]=F,\\
&\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)]=T\ \text{ e }\ I[(\exists x)r(x)]=F,\\
&\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)\rightarrow(\exists x)r(x)]=F,\\
&\Leftrightarrow I[H_{10}]=F.
\end{aligned}
$$

Portanto, $I[H_9] = F \Leftrightarrow I[H_{10}] = F$. Logo, para toda interpretação, $I[H_9] = I[H_{10}]$. Concluímos que H_9 equivale a H_{10}.

Agora, provamos que H_9 não implica H_{11}. Para isso, definimos uma interpretação sobre o conjunto dos naturais, $\mathbb{N}$, tal que $I[H_9] = T$ e $I[H_{11}] = F$. Considere que:

$I[p(x)] = T$ se, e somente se, x_I é par;

$I[r(x)] = T$ se, e somente se, x_I é ímpar.

Nesse caso, temos:

$$\begin{aligned}
I[H_9] = F &\Leftrightarrow I[(\exists x)(p(x) \rightarrow r(x))] = F, \\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N},\ < x \leftarrow d > I[p(x) \rightarrow r(x)] = F, \\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N},\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \ \text{ e } \ < x \leftarrow d > I[r(x)] = F, \\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N},\ p_I(d) = T \ \text{ e } \ r_I(d) = F, \\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N},\ \{d \ \text{ é par e é falso que } \ d \ \text{ é ímpar}\}, \\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N},\ \{d \ \text{ é par e é verdadeiro que } \ d \ \text{ é par}\}, \\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N},\ \{d \ \text{ é par}\}.
\end{aligned}$$

Como a última afirmação é falsa, então $I[H_9] = T$. Por outro lado:

$$\begin{aligned}
I[H_{11}] = F &\Leftrightarrow I[(\exists x)p(x) \rightarrow (\exists x)r(x)] = F, \\
&\Leftrightarrow I[(\exists x)p(x)] = T \ \text{ e } \ I[(\exists x)r(x)] = F, \\
&\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \ \text{ e } \ \forall\ c \in \mathbb{N} \ < x \leftarrow c > I[r(x)] = F, \\
&\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{N};\ p_I(d) = T \ \text{ e } \\
&\quad\ \ \forall\ c \in \mathbb{N},\ r_I(c) = F, \\
&\Leftrightarrow \{\exists\ d \in \mathbb{N};\ d \ \text{ é par}\} \text{ e } \{ \text{ é falso que } \ \forall\ c \in \mathbb{N},\ c \ \text{ é ímpar}\}.
\end{aligned}$$

No final da demonstração acima, temos duas afirmações: "$\exists\ d \in \mathbb{N};\ d$ é par" e "é falso que $\forall\ c \in \mathbb{N},\ c$ é ímpar". As duas afirmações, olhadas individualmente, são, cada uma, verdadeiras. Logo, sua conjunção também é verdadeira. Portanto, $I[H_{11}] = F$. Conclusão: H_9 não equivale a H_{11}, pois existe uma interpretação I, tal que $I[H_9] = T$ e $I[H_{11}] = F$. ■

8.6.1 Classificação dos argumentos lógicos

No Capítulo 3, consideramos a classificação de argumentos lógicos representados na Lógica Proposicional. A seguir, analisamos tal classificação para argumentos representados na Lógica de Predicados. E, como sempre, o a introdução de quantificadores, predicados e funções determina uma análise mais complexa que aquela considerada na Lógica Proposicional. Em alguns casos os diagramas de Venn, analisados a seguir, auxiliam essa análise.

Diagramas de Venn. Dada uma interpretação I sobre um domínio U e um predicado unário p, um diagrama de Venn é uma representação gráfica dos elementos do domínio que satisfazem o predicado. Em um diagrama de Venn, conforme a Figura 8.4, os elementos do domínio da interpretação I que satisfazem p são os elementos no interior do círculo p e os que não satisfazem estão no exterior. Então, escrevemos no interior do círculo o símbolo p e no seu exterior $\neg p$. Além disso, observe que o círculo está no interior de um retângulo, que representa todo o domínio U da interpretação I.

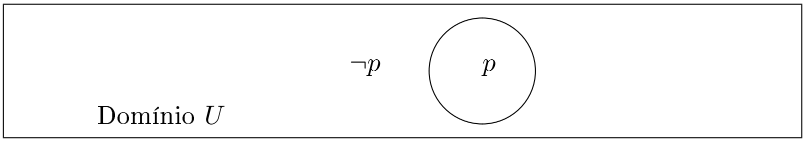

Figura 8.4: Elementos que satisfazem o predicado p.

Seguindo esse raciocínio, se temos mais predicados, eles são representados da mesma forma. Suponha, por exemplo, os predicados p, q e r, conforme a Figura 8.5.

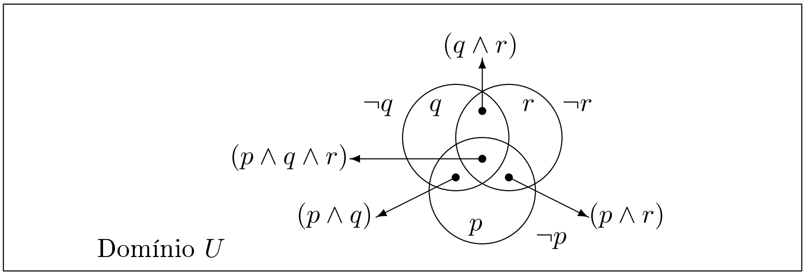

Figura 8.5: Elementos que satisfazem os predicados p, q e r.

Operações sobre os círculos. No diagrama de Venn da Figura 8.5, a interseção dos círculos p e q, por exemplo, é nomeada $(p \wedge q)$. Analogamente, a interseção dos três círculos é nomeada por $(p \wedge q \wedge r)$. Além disso, para denotar o complemento de um conjunto p, escrevemos $\neg p$. A união dos círculos p e q, por exemplo, é $p \vee q$. Nesse sentido, denotamos por $(\neg p \wedge q \wedge \neg r)$, por exemplo, os elementos do domínio que não pertencem aos círculos p e r, mas que pertencem ao círculo q. Analogamente, $p \vee \neg r$ denota os elementos de p ou $\neg r$.

Para iniciar nossa análise sobre a classificação de argumentos lógicos, lembre das definições.

1. **Argumento bom.** Um argumento é bom quando suas premissas são verdadeiras e justificam a conclusão.
2. **Argumento correto.** Um argumento é correto quando suas premissas justificam a conclusão.
3. **Argumento forte.** Um argumento incorreto é forte se são raras as situações em que as premissas são verdadeiras e a conclusão falsa.
4. **Argumento fraco.** Um argumento incorreto é fraco se são frequentes as situações em que as premissas são verdadeiras e a conclusão falsa.

Exemplo 8.22 (classificação de argumento lógico) Considere o argumento do Exemplo 7.41. "Todos os homens são mamíferos. Todos os mamíferos são animais. Portanto, todo homem é um animal." Conforme o Exemplo, 7.41, esse argumento pode ser representado na Lógica de Predicados, segundo I_5, por:

$$H_{12} = ((\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (\forall x)(q(x) \rightarrow r(x))) \rightarrow (\forall x)(p(x) \rightarrow r(x))$$

A fórmula H_{12} é válida. Isto é, para toda interpretação I, temos que $I[H_{12}] = T$. Portanto, não só a interpretação I_5 interpreta H_{12} como verdadeira, como assim o fazem todas as outras interpretações. Temos, então, um argumento válido e a demonstração é a seguinte. Suponha que existe uma interpretação I tal que $I[H_{12}] = F$. Logo:

$$\begin{aligned}
& I\ [H_{12}] = F \\
& \quad \Leftrightarrow\ I[((\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (\forall x)(q(x) \rightarrow r(x))) \rightarrow (\forall x)(p(x) \rightarrow r(x))] = F, \\
& \quad \Leftrightarrow\ I[((\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (\forall x)(q(x) \rightarrow r(x)))] = T \ \text{ e} \\
& \quad\ I[(\forall x)(p(x) \rightarrow r(x))] = F, \\
& \quad \Leftrightarrow\ I[(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))] = T \ \text{ e} \\
& \quad\ I[(\forall x)(q(x) \rightarrow r(x))] = T \ \text{ e} \\
& \quad\ I[(\forall x)(p(x) \rightarrow r(x))] = F, \\
& \quad \Leftrightarrow\ \forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x) \rightarrow q(x)] = T \ \text{ e} \\
& \quad\ \forall\ c \in U,\ < x \leftarrow c > I[q(x) \rightarrow r(x)] = T \ \text{ e} \\
& \quad\ \exists\ e \in U,\ < x \leftarrow e > I[(p(x) \rightarrow r(x)] = F, \\
& \quad \Leftrightarrow\ \forall\ d \in U,\ \text{ se } \ p_I(d) = T,\ \text{ então } \ q_I(d) = T \ \text{ e} \\
& \quad\ \forall\ c \in U,\ \text{ se } \ q_I(c) = T,\ \text{ então } \ r_I(c) = T \ \text{ e} \\
& \quad\ \exists\ e \in U,\ p_I(e) = T \ \text{ e } \ r_I(e) = F.
\end{aligned}$$

E agora! Afinal, a última afirmação da dedução acima é, ou não, verdadeira? Uma forma de analisar esse tipo de afirmação é utilizando diagramas de Venn. Primeiro, observe que a última afirmação é composta pelas três afirmações:

1. "$\forall\ d \in U$, se $p_I(d) = T$, então $q_I(d) = T$";
2. "$\forall\ c \in U$, se $q_I(c) = T$, então $r_I(c) = T$";
3. "$\exists\ e \in U$; $p_I(e) = T$ e $r_I(e) = F$".

Para que a afirmação 1 seja verdadeira para todo elemento do domínio, se ele estiver no interior do círculo p, então deve estar, também, no interior do círculo q. Analogamente, para que a afirmação 2 seja verdadeira para todo elemento do domínio, se ele estiver no interior do círculo q, então deve estar, também, no interior do círculo r. Portanto, o diagrama da Figura 8.6 satisfaz as afirmações 1 e 2. Por outro lado, para que a afirmação 3 seja verdadeira, deve existir algum elemento e do domínio que esteja no interior de p e também no exterior de r. Entretanto, isso é impossível, pois conforme a Figura 8.6, o círculo p está contido em q, que por sua vez está contido em r. Conclui-se, então, que a afirmação final da dedução é falsa. Logo, $I[H_{12}] = T$ para toda interpretação I. Portanto, H_{12} é válida. Isto é, o argumento é válido.

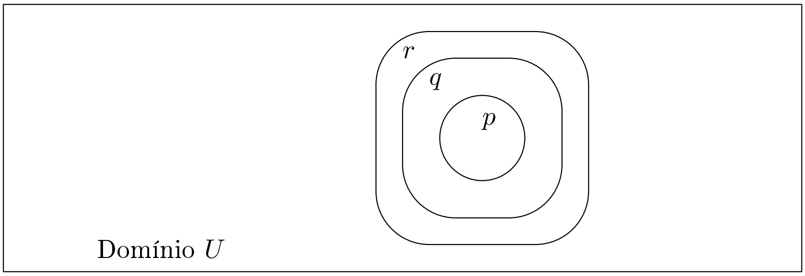

Figura 8.6: Elementos que satisfazem os predicados p, q e r.

Observe que dado que o argumento é válido, não necessariamente, ele é correto. Pois para ser correto, além de válido, suas premissas devem justificar a conclusão. Mas, dado que todos os homens são mamíferos e que os mamíferos são animais, isso justifica que todo homem é um animal. Portanto, o argumento é correto. Além disso, para o argumento ser bom, suas premissas devem ser verdadeiras. Parece claro que todos os homens são mamíferos e que todos os mamíferos são animais. Logo, temos também um bom argumento. ■

Exemplo 8.23 (classificação de argumento lógico) Considere o argumento do Exemplo 7.42. “Todo baterista é músico. Alguns vocalistas são músicos. Portanto, alguns vocalistas não são bateristas.” Conforme o Exemplo, 7.42, esse argumento pode ser representado na Lógica de Predicados, segundo I_6, pela fórmula H_{13}, tal que:

$$H_{13} = ((\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (\exists x)(r(x) \wedge q(x))) \rightarrow (\exists x)(r(x) \wedge \neg p(x))$$

Ainda não sabemos se a fórmula H_{13} é válida. Suponha que existe uma interpretação I tal que $I[H_{13}] = F$. Logo:

$$\begin{aligned}
& I\ [H_{13}] = F \\
& \quad \Leftrightarrow\ I[((\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (\exists x)(r(x) \wedge q(x))) \rightarrow (\exists x)(r(x) \wedge \neg p(x))] = F, \\
& \quad \Leftrightarrow\ I[(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (\exists x)(r(x) \wedge q(x))] = T \ \text{ e} \\
& \qquad\ I[(\exists x)(r(x) \wedge \neg p(x))] = F, \\
& \quad \Leftrightarrow\ I[(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))] = T \ \text{ e} \\
& \qquad\ I[(\exists x)(r(x) \wedge q(x))] = T \ \text{ e} \\
& \qquad\ I[(\exists x)(r(x) \wedge \neg p(x))] = F, \\
& \quad \Leftrightarrow\ \forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x) \rightarrow q(x)] = T \ \text{ e} \\
& \qquad\ \exists\ c \in U,\ < x \leftarrow c > I[r(x) \wedge q(x)] = T \ \text{ e} \\
& \qquad\ \forall\ e \in U,\ < x \leftarrow e > I[r(x) \wedge \neg p(x)] = F, \\
& \quad \Leftrightarrow\ \forall\ d \in U,\ \text{ se }\ p_I(d) = T,\ \text{ então }\ q_I(d) = T \ \text{ e} \\
& \qquad\ \exists\ c \in U;\ r_I(c) = T,\ \text{ e }\ q_I(c) = T \ \text{ e} \\
& \qquad\ \forall\ e \in U,\ r_I(e) = F\ \text{ ou }\ p_I(e) = T.
\end{aligned}$$

Analisamos, a seguir, a última afirmação da dedução acima, utilizando um diagrama de Venn. A última afirmação é composta pelas três afirmações:

1. "$\forall\ d \in U$, se $p_I(d) = T$, então $q_I(d) = T$";
2. "$\exists\ c \in U$; $r_I(c) = T$, e $q_I(c) = T$";
3. "$\forall\ e \in U$, $r_I(e) = F$ ou $p_I(e) = T$".

Para que a afirmação 1 seja verdadeira, para todo elemento do domínio, se ele estiver no interior do círculo p, então deve estar também no interior do círculo q. Para que a afirmação 2 seja verdadeira, deve existir um elemento c, do domínio U, tal que c pertença aos círculos r e q. Finalmente, para que a afirmação 3 seja verdadeira, todo elemento e, do domínio, deve estar no lado exterior do círculo q ou no interior de p. O diagrama de Venn da Figura 8.7 não satisfaz todas essas condições. Observe nessa figura, que a afirmação 3 só é satisfeita se $p = q$. Mas, nesse caso, não existe elemento c. Conclui-se, então, que a afirmação final da dedução não é verdadeira. Isto é, não existe uma interpretação I tal que $I[H_{12}] = F$. Logo, H_{12} é válida. Isto é, o argumento é válido.

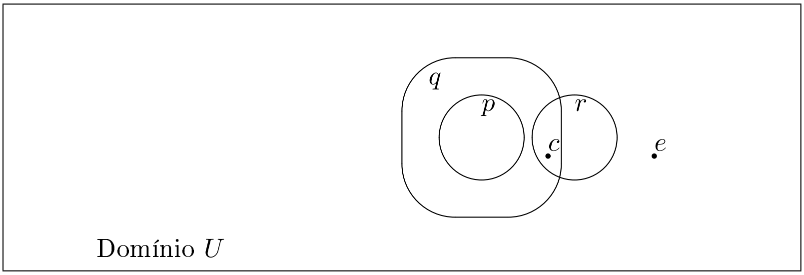

Figura 8.7: Elementos que satisfazem os predicados p, q e r.

Dado que o argumento é válido, resta descobrir se ele é bom, ou não. Como sabemos, um argumento válido é bom se as premissas são aceitas como verdadeiras e suportam a conclusão. Supondo, então, como verdadeira a premissa de que todo baterista é músico, resta saber se tal fato suporta a existência de algum vocalista que é músico, mas que não é baterista. ■

Exemplo 8.24 (classificação de argumento lógico) Considere o argumento do Exemplo 7.43. "Todos os padres são pacifistas. Nenhum general é padre. Portanto, nenhum general é pacifista." Esse argumento é representado, segundo a interpretação I_7, Exemplo 7.43 do Capítulo 7, por H_{14}, tal que:

$$H_{14} = ((\forall x)(p(x) \to q(x)) \land \neg(\exists x)(r(x) \land p(x))) \to \neg(\exists x)(r(x) \land q(x)).$$

Como não sabemos se a fórmula H_{14} é válida, vamos supor que existe uma interpretação I tal que $I[H_{14}] = F$ e ver o que acontece. Então:

$$
\begin{aligned}
& I\ [H_{14}] = F \\
& \quad \Leftrightarrow \ I[((\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge \neg(\exists x)(r(x) \wedge p(x))) \rightarrow \neg(\exists x)(r(x) \wedge q(x))] = F, \\
& \quad \Leftrightarrow \ I[(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge \neg(\exists x)(r(x) \wedge p(x))] = T \ \text{ e} \\
& \qquad I[\neg(\exists x)(r(x) \wedge q(x))] = F, \\
& \quad \Leftrightarrow \ I[(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))] = T \ \text{ e} \\
& \qquad I[\neg(\exists x)(r(x) \wedge p(x))] = T \ \text{ e} \\
& \qquad I[\neg(\exists x)(r(x) \wedge q(x))] = F, \\
& \quad \Leftrightarrow \ I[(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))] = T \ \text{ e} \\
& \qquad I[(\exists x)(r(x) \wedge p(x))] = F \ \text{ e} \\
& \qquad I[(\exists x)(r(x) \wedge q(x))] = T, \\
& \quad \Leftrightarrow \ \forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x) \rightarrow q(x)] = T \ \text{ e} \\
& \qquad \forall\ c \in U,\ < x \leftarrow c > I[r(x) \wedge p(x)] = F \ \text{ e} \\
& \qquad \exists\ e \in U,\ < x \leftarrow e > I[r(x) \wedge q(x)] = T, \\
& \quad \Leftrightarrow \ \forall\ d \in U,\ \text{ se } \ p_I(d) = T,\ \text{ então } \ q_I(d) = T \ \text{ e} \\
& \qquad \forall\ c \in U,\ r_I(c) = F,\ \text{ ou } \ p_I(c) = F \ \text{ e} \\
& \qquad \exists\ e \in U;\ r_I(e) = T \ \text{ e } \ q_I(e) = T.
\end{aligned}
$$

A última afirmação é formada de três afirmações:

1. "$\forall\ d \in U,$ se $p_I(d) = T,$ então $q_I(d) = T$";

2. "$\forall\ c \in U,\ r_I(c) = F,$ ou $p_I(c) = F$";

3. "$\exists\ e \in U;\ r_I(e) = T$ e $q_I(e) = T$".

Para que a afirmação 1 seja verdadeira, para todo elemento do domínio, se ele estiver no interior do círculo p, então deve estar também no interior do círculo q. Para que a afirmação 2 seja verdadeira para todo elemento do domínio, ou ele está fora do círculo r, ou fora do círculo p. Isso significa que não existe elemento do domínio que esteja, ao mesmo tempo, no interior de r e de p. Isto é, a interseção $(r \wedge q)$ deve ser vazia. Finalmente, para que a afirmação 3 seja verdadeira, deve existir algum elemento e, do domínio, que esteja no círculo r e também no interior de q. O diagrama de Venn da Figura 8.8 localiza o elemento e na interseção de r e de q, como também satisfaz as afirmações 1 e 2. Conclui-se que a afirmação final da dedução é verdadeira. Isto é, existe uma interpretação I tal que $I[H_{14}] = F$. Logo, H_{14} não é válida. Isto é, o argumento não é válido.

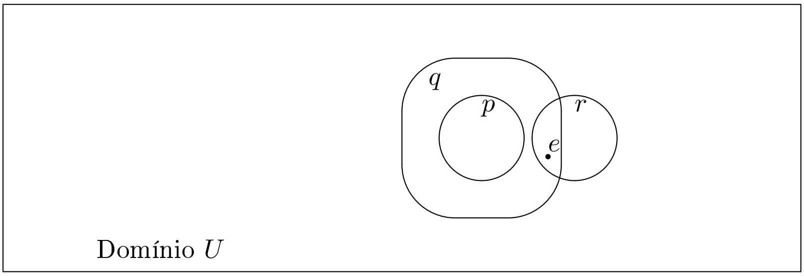

Figura 8.8: Elementos que satisfazem os predicados p, q e r.

Mas o argumento que não é válido é forte ou fraco? Devemos responder se são raras ou frequentes as situações e se temos premissas verdadeiras e conclusão falsa. Nesse caso, uma premissa é: todos os padres são pacifistas. Sabemos que é raro ter um padre que não é pacifista. Logo, tal premissa é frequentemente verdadeira. Outra premissa é: nenhum general é padre. Afinal, existe general que é padre. Pelo que sabemos, são poucos, bem poucos, os casos de generais que são padres. Logo, essa premissa também é frequentemente verdadeira. Mas, então, será que é possível concluir que nenhum general é pacifista? É claro que pode existir general pacifista. Se são muitos, isso significa que a interseção $(r \land q)$ possui muitos elementos. Nesse caso o argumento é fraco. Por outro lado, se há poucos generais pacifistas, então a interseção $(r \land q)$ possui poucos elementos e o argumento é forte. Isso ocorre porque o tamanho de $(r \land q)$ independe das premissas. ■

Exemplo 8.25 (classificação de argumento lógico) Considere o argumento do Exemplo 7.44. "Todo político culpado de corrupção será preso ou multado. Alguns políticos culpados de corrupção serão multados. Nenhum político será preso e multado. Portanto, nem todos os culpados de corrupção serão presos." Esse argumento é representado segundo a interpretação I_8, Exemplo 7.44, por H_{15} tal que:

$$H_{15} = ((\forall x)(p(x) \to (q(x) \lor r(x)) \land (\exists x)(p(x) \land r(x)) \land \neg(\exists x)(q(x) \land r(x)))$$
$$\to$$
$$\neg(\forall x)(p(x) \to q(x))$$

Considere que existe uma interpretação I, tal que $I[H_{15}] = F$ e a dedução a seguir:

$I\ [H_{15}] = F$
$\Leftrightarrow\ I[((\forall x)(p(x) \to (q(x) \lor r(x)) \land (\exists x)(p(x) \land r(x))) \land \neg(\exists x)(q(x) \land r(x)))$
$\quad \to \neg(\forall x)(p(x) \to q(x))] = F$,
$\Leftrightarrow\ I[(\forall x)(p(x) \to (q(x) \lor r(x)) \land (\exists x)(p(x) \land r(x))) \land \neg(\exists x)(q(x) \land r(x))] = T$
$\quad$ e $I[\neg(\forall x)(p(x) \to q(x))] = F$,
$\Leftrightarrow\ I[(\forall x)(p(x) \to (q(x) \lor r(x)))] = T$ e

$$
\begin{aligned}
& I[(\exists x)(p(x) \wedge r(x))] = T \;\text{ e} \\
& I[\neg(\exists x)(q(x) \wedge r(x))] = T \;\text{ e} \\
& I[\neg(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))] = F, \\
\Leftrightarrow\; & I[(\forall x)(p(x) \rightarrow (q(x) \vee r(x)))] = T \;\text{ e} \\
& I[(\exists x)(p(x) \wedge r(x))] = T \;\text{ e} \\
& I[(\exists x)(q(x) \wedge r(x))] = F \;\text{ e} \\
& I[(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))] = T, \\
\Leftrightarrow\; & \forall\, d \in U,\; <x \leftarrow d> I[p(x) \rightarrow (q(x) \vee r(x))] = T \;\text{ e} \\
& \exists\, c \in U;\; <x \leftarrow c> I[p(x) \wedge r(x)] = T \;\text{ e} \\
& \forall\, e \in U,\; <x \leftarrow e> I[q(x) \wedge r(x)] = F \;\text{ e} \\
& \forall\, s \in U;\; <x \leftarrow s> I[p(x) \rightarrow q(x)] = T, \\
\Leftrightarrow\; & \forall\, d \in U, \;\text{ se }\; p_I(d) = T, \;\text{ então }\; q_I(d) = T \;\text{ ou }\; r_I(d) = T \;\text{ e} \\
& \exists\, c \in U;\; p_I(c) = T \;\text{ e }\; r_I(c) = T \;\text{ e} \\
& \forall\, e \in U,\; q_I(e) = F \;\text{ ou }\; r_I(x) = F \;\text{ e} \\
& \forall\, s \in U, \;\text{ se }\; p_I(s) = T \;\text{ então }\; r_I(s) = T.
\end{aligned}
$$

A última afirmação é composta por quatro afirmações:

1. "$\forall\, d \in U$, se $p_I(d) = T$, então $q_I(d) = T$ ou $r_I(d) = T$";

2. "$\exists\, c \in U$; $p_I(c) = T$ e $r_I(c) = T$";

3. "$\forall\, e \in U$, $q_I(e) = F$ ou $r_I(x) = F$";

4. "$\forall\, s \in U$, se $p_I(s) = T$ então $r_I(s) = T$".

A análise das afirmações segue. Confira tal análise na Figura 8.9, que satisfaz as condições para que algumas afirmações sejam verdadeiras.

1. A afirmação 1 diz que o círculo p está contido na união $q \vee r$. Isto é, os elementos de p estão em q, ou em r.

2. A afirmação 2 diz existe um elemento c do domínio U que pertence aos círculos p e r. Veja na Figura 8.9, a localização do elemento c.

3. A afirmação 3 diz que a interseção $q \wedge r$ é vazia. Isto é, os círculos q e r são disjuntos.

4. A afirmação 4 diz que o círculo p está contido no círculo r. Nesse caso, o diagrama da Figura 8.9 não satisfaz essa condição, pois nesse diagrama há elementos de p que estão em q. Para adequar a figura, eliminamos os elementos de p que estão em q e obtemos a Figura 8.10.

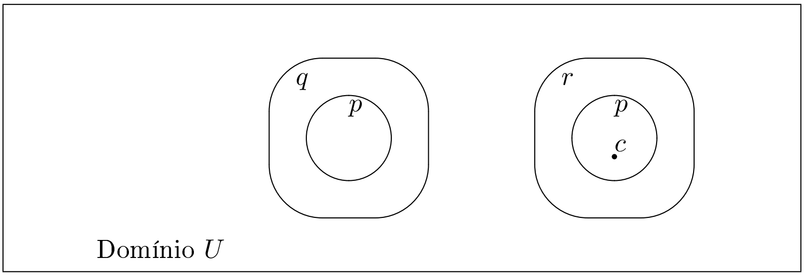

Figura 8.9: Elementos que satisfazem os predicados p, q e r.

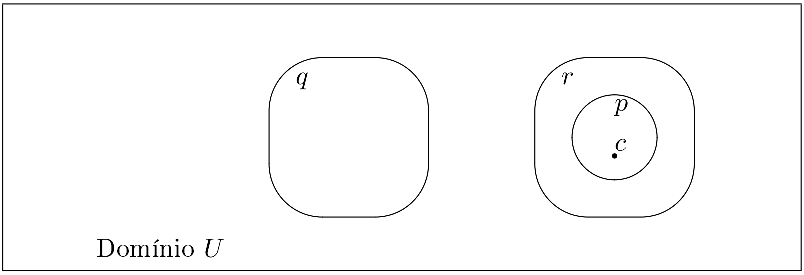

Figura 8.10: Elementos que satisfazem os predicados p, q e r.

Conclusão. A afirmação final da dedução é verdadeira. Isto é, existe uma interpretação que interpreta H_{15} como falsa. Logo, H_{15} não é válida. Isto é, o argumento não é válido. Dado que o argumento não é válido, podemos classificá-lo como forte ou fraco. Suponha que as premissas do argumento sejam, frequentemente, verdadeiras, pois, caso contrário, com premissas que são, na maioria das vezes, falsas, o argumento não pode ser forte. Lembre, novamente, um argumento incorreto é forte, se são raras as situações em que as premissas são verdadeiras e a conclusão, falsa. Então, supondo que as premissas são frequentemente verdadeiras, devemos responder se são raras ou frequentes as situações nas quais tais premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa. Nesse contexto, se a possibilidade de escolha do elemento c é reduzida, isto é, existem poucos políticos corruptos que são multados, então o argumento raramente é falso. Portanto, nesse caso, o argumento é forte. Caso contrário, se existem muitos políticos corruptos que não são multados, ele é fraco. ■

Exemplo 8.26 (classificação de argumento lógico) Considere o argumento do Exemplo 7.45. "Cada sócio do Praia Clube gosta de outro sócio. Logo, há um sócio do Praia Clube do qual todos gostam." Conforme a interpretação I_9, do Exemplo 7.45 do Capítulo 7, esse argumento é representado pela fórmula H_{16}, a seguir:

$$H_{16} = (\forall x)(\exists y)q(x,y) \rightarrow (\exists y)(\forall x)q(x,y)$$

Observe que a fórmula H_{16} é igual à E do Exemplo 8.12, onde é demonstrado que tal fórmula não é válida. Portanto, o argumento não é válido. O argumento é fraco, pois não é verdade que cada sócio do clube gosta de outro sócio. Sempre temos aqueles que se isolam e não gostam de ninguém. Além disso, mesmo que fosse verdade que cada sócio gostasse de outro sócio, não necessariamente, teríamos um sócio do qual todos gostariam. ■

Exemplo 8.27 (classificação de argumento lógico) Considere o argumento: "Algum aluno de Computação é inteligente. Todos os alunos inteligentes são estudiosos. Portanto, há aluno de Computação que é estudioso." Seja I uma interpretação sobre o conjunto dos alunos, tal que:

$I[p(x)] = T$, se, e somente se, $I[x]$ é aluno de Computação;
$I[r(x)] = T$, se, e somente se, $I[x]$ é inteligente;
$I[q(x)] = T$, se, e somente se, $I[x]$ é estudioso.

Nesse caso, segundo I, o argumento é representado pela fórmula H_{17}, tal que:

$$H_{17} = ((\exists x)(p(x) \land r(x)) \land (\forall x)(r(x) \to q(x))) \to (\exists x)(p(x) \land q(x))$$

Esse argumento é válido, pois suponha que existe uma interpretação I, qualquer, tal que $I[H_{17}] = F$. Logo:

$$\begin{aligned}
I[H_{17}] = F \Leftrightarrow\ & I[((\exists x)(p(x) \land r(x)) \land (\forall x)(r(x) \to q(x))) \to (\exists x)(p(x) \land q(x))] = F, \\
\Leftrightarrow\ & I[(\exists x)(p(x) \land r(x)) \land (\forall x)(r(x) \to q(x))] = T \ \text{ e} \\
& I[(\exists x)(p(x) \land q(x))] = F, \\
\Leftrightarrow\ & I[(\exists x)(p(x) \land r(x))] = T \ \text{ e} \\
& I[(\forall x)(r(x) \to q(x))] = T \ \text{ e} \\
& I[(\exists x)(p(x) \land q(x))] = F, \\
\Leftrightarrow\ & \exists\, d \in U;\ < x \leftarrow d > I[p(x) \land r(x)] = T \ \text{ e} \\
& \forall\, c \in U,\ < x \leftarrow c > I[r(x) \to q(x)] = T \ \text{ e} \\
& \forall\, s \in U;\ < x \leftarrow s > I[p(x) \land q(x)] = F, \\
\Leftrightarrow\ & \exists\, d \in U;\ p_I(d) = T \ \text{ e } \ r_I(d) = T \ \text{ e} \\
& \forall\, c \in U,\ \text{ se } \ r_I(c) = T,\ \text{ então } \ q_I(c) = T \ \text{ e} \\
& \forall\, s \in U;\ p_I(s) = F,\ \text{ ou } \ q_I(s) = F.
\end{aligned}$$

A última afirmação é formada pelas afirmações:

1. "$\exists\, d \in U;\ p_I(d) = T$ e $r_I(d) = T$";
2. "$\forall\, c \in U,$ se $r_I(c) = T,$ então $q_I(c) = T$";
3. "$\forall\, s \in U;\ p_I(s) = F,$ ou $q_I(s) = F$".

Nesse caso, não é possível construir um diagrama de Venn que satisfaça as três afirmações. Para mostrar tal fato, suponha, inicialmente, um diagrama de Venn, Figura 8.11, que satisfaz as duas primeiras afirmações.

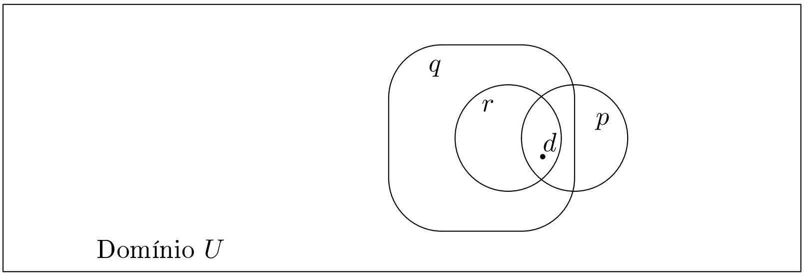

Figura 8.11: Elementos que satisfazem os predicados p, q e r.

Mas, para satisfazer a afirmação 3, os círculos p e q devem ser disjuntos. Somente nesse caso, temos que para todo elemento s do domínio, s está fora de p, ou fora de q. Entretanto, como existe d que pertence à interseção $p \wedge r$ e, além disso, r está contido em q, então, necessariamente, se as duas afirmações iniciais são satisfeitas, não tem como satisfazer a terceira. Conclui-se que a afirmação final da dedução é falsa. Logo, $I[H_{17}] = T$ para toda interpretação I. Portanto, H_{17} é válida. Isto é, o argumento é válido. Nesse caso, se premissas do argumento justificam sua conclusão, então ele é correto. "Acreditamos" que esse argumento é correto. Mas, além disso, para o argumento ser bom, suas premissas devem ser verdadeiras. Com certeza esse não é o caso. Não necessariamente é verdadeiro que existe aluno de Computação que é inteligente e, também, que todos os alunos inteligentes são estudiosos, apesar de tais fatos serem frequentemente verdadeiros. Por isso, o argumento não pode ser considerado "finamente" bom. Ele é, digamos, "quase" bom. ■

8.7 Exercícios

1. Demonstre o Lema 8.1.
2. Demonstre que as fórmulas H e G a seguir são equivalentes.
   (a) $H = (\forall x)(\forall y)p(x, y, z),\ G = (\forall y)(\forall x)p(x, y, z)$
   (b) $H = (\exists x)(\exists y)p(x, y, z),\ G = (\exists y)(\exists x)p(x, y, z)$
   (c) $H = \neg(\exists y)p(y),\ G = (\forall y)\neg p(y)$
   (d) $H = (\exists x)p(x),\ G = (\exists y)p(y)$
   (e) $H = (\forall x)p(x),\ G = (\forall y)p(y)$
   (f) $H = (\forall x)(\forall x)p(x),\ G = (\forall x)p(x)$
3. Demonstre que as fórmulas a seguir são válidas.
   (a) $H = (\forall x)p(x) \to p(a)$
   (b) $H = p(a) \to (\exists x)p(x)$

4. Considere interpretações, conforme o Seção 7.8 do Capítulo 7, que interpretem os números, a adição, a multiplicação e a igualdade da forma usual. Demonstre que as propriedades básicas da aritmética de Robinson, dadas a seguir, são válidas, no contexto dessas interpretações.

    (a) $Bx_1 = (\forall x)\neg(\overline{0} \mathrel{\widehat{=}} S(x))$

    (b) $Bx_2 = (\forall x)(\forall y)((S(x) \mathrel{\widehat{=}} S(y)) \to (x \mathrel{\widehat{=}} y)$

    (c) $Bx_3 = (\forall x)(\neg(x \mathrel{\widehat{=}} \overline{0}) \to (\exists y)(x \mathrel{\widehat{=}} S(y))$

    (d) $Bx_4 = (\forall x)((x \mathbin{\widehat{+}} \overline{0}) \mathrel{\widehat{=}} x)$

    (e) $Bx_5 = (\forall x)(\forall y)((x \mathbin{\widehat{+}} S(y)) \mathrel{\widehat{=}} S(x \mathbin{\widehat{+}} y))$

    (f) $Bx_6 = (\forall x)((x \mathbin{\widehat{\times}} \overline{0}) \mathrel{\widehat{=}} \overline{0})$

5. Determine interpretações diferentes daquelas definidas na Seção 7.8 do Capítulo 7, mas que interpretam tais propriedades como falsas.

    (a) $Bx_1 = (\forall x)\neg(\overline{0} \mathrel{\widehat{=}} S(x))$

    (b) $Bx_2 = (\forall x)(\forall y)((S(x) \mathrel{\widehat{=}} S(y)) \to (x \mathrel{\widehat{=}} y)$

    (c) $Bx_3 = (\forall x)(\neg(x \mathrel{\widehat{=}} \overline{0}) \to (\exists y)(x \mathrel{\widehat{=}} S(y))$

    (d) $Bx_4 = (\forall x)((x \mathbin{\widehat{+}} \overline{0}) \mathrel{\widehat{=}} x)$

    (e) $Bx_5 = (\forall x)(\forall y)((x \mathbin{\widehat{+}} S(y)) \mathrel{\widehat{=}} S(x \mathbin{\widehat{+}} y))$

    (f) $Bx_6 = (\forall x)((x \mathbin{\widehat{\times}} \overline{0}) \mathrel{\widehat{=}} \overline{0})$

    (g) $Bx_7 = (\forall x)(\forall y)((x \mathbin{\widehat{\times}} S(y)) \mathrel{\widehat{=}} ((x \mathbin{\widehat{\times}} y) \mathbin{\widehat{+}} x))$

6. Algumas das fórmulas a seguir são válidas, outras não. Para cada fórmula, demonstre se ela é válida ou defina uma interpretação que a interprete como sendo falsa.

    (a) $p(x) \to (\forall x)p(x)$

    (b) $(\forall x)p(x) \to (\exists x)p(x)$

    (c) $(\exists x)(p(x) \to q(x)) \to ((\exists x)p(x) \to (\exists x)q(x))$

    (d) $(\forall x)(\exists y)p(x,y) \to (\exists y)p(y,y)$

    (e) $(\exists x)(\exists y)p(x,y) \to (\exists y)p(y,y)$

    (f) $(\exists x)(p(x) \to r(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \to (\exists x)r(x))$

    (g) $(\forall x)(p(x) \lor r(x)) \to ((\forall x)p(x) \lor (\forall x)r(x))$

    (h) $((\forall x)p(x) \lor (\forall x)r(x)) \to (\forall x)(p(x) \lor r(x))$

    (i) $(\exists x)(p(x) \leftrightarrow r(x)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x) \leftrightarrow (\exists x)r(x))$

    (j) $(\exists x)((p(x) \to p(a)) \land (p(x) \to p(b)))$

    (k) $(\exists x)(\forall y)((q(x,y) \land q(y,x)) \to (q(x,x) \leftrightarrow q(y,y)))$

(l) $(\forall x)(p(x) \wedge q(x)) \leftrightarrow (\forall x)(p(x) \rightarrow \neg q(x))$

(m) $(\forall x)(p(x,a) \rightarrow (\forall x)q(x,b)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x,b) \rightarrow (\forall x)q(x,a))$

(n) $(\forall x)(p(x,a) \rightarrow (\forall x)q(x,b)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x,a) \rightarrow (\forall x)q(x,b))$

(o) $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x))$

(p) $(\forall y)p(y) \rightarrow (\forall x)p(x)$

(q) $(\exists x)p(x) \rightarrow p(x)$

(r) $(\forall x)p(x) \rightarrow p(x)$

(s) $p(x) \rightarrow (\exists x)p(x)$

7. Considere a fórmula $E = (\forall x)(H \rightarrow G) \leftrightarrow (\exists x)(H \rightarrow G)$, onde H e G são fórmulas quaisquer. Responda se as questões a seguir são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas como se segue: Se a questão é verdadeira, então demonstre-a, caso contrário, dê um contraexemplo.

   (a) É possível definir duas fórmulas H e G, tais que E seja válida?

   (b) É possível definir duas fórmulas H e G, tais que E não seja válida?

8. Demonstre que:

   (a) $\forall\ d \in D,\ < x \leftarrow d > I[(\exists y)(\forall x)p(x,y)] = I[(\exists y)(\forall x)p(x,y)]$

   (b) $\forall\ d \in D,\ < x \leftarrow d > I[(\forall x)p(x,y)] = I[(\forall x)p(x,y)]$

   (c) $\forall\ d \in D,\ < x \leftarrow d > I[q(y)] = I[q(y)]$

9. Considere as fórmulas:

$$G = (\exists x)p(x),$$
$$H = q(x)$$

   Demonstre que os pares de fórmulas a seguir são equivalentes.

   (a) $(\forall x)G$ e G

   (b) $(\exists x)G$ e G

   (c) $(\forall x)(H \wedge G)$ e $((\forall x)H \wedge G)$

   (d) $(\exists x)(H \wedge G)$ e $((\exists x)H \wedge G)$

   (e) $(\forall x)(H \vee G)$ e $((\forall x)H \vee G)$

   (f) $(\exists x)(H \vee G)$ e $((\exists x)H \vee G)$

   (g) $(\forall x)(H \rightarrow G)$ e $((\exists x)H \rightarrow G)$

   (h) $(\forall x)(G \rightarrow H)$ e $(G \rightarrow (\forall x)H)$

   (i) $(\exists x)(H \rightarrow G)$ e $((\forall x)H \rightarrow G)$

   (j) $(\exists x)(G \rightarrow H)$ e $(G \rightarrow (\exists x)H)$

10. Demonstre que:
    (a) Se $E_1 = (\exists x)(p(x) \vee q(x))$ e $E_2 = (\exists x)p(x) \vee (\exists x)q(x)$, então E_1 equivale a E_2.
    (b) Se $E_1 = (\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$ e $E_2 = (\exists x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x)$, então E_2 implica E_1, mas E_1 não implica E_2.
11. Demonstre que as fórmulas a seguir não são válidas:
    (a) $(\forall x)(\neg(\forall y)q(x,y)) \rightarrow (\neg(\forall y)q(y,y))$.
    (b) $(\forall x)(q(x,y) \wedge q(x,z)) \leftrightarrow ((\forall x)q(x,y) \wedge (\forall x)q(x,z))$.
    (c) $(\exists x)(q(x,y) \rightarrow q(x,z)) \leftrightarrow (\exists x)(q(x,y) \rightarrow (\exists x)q(x,z)$.
12. (a) Considere a fórmula $H = p(x) \wedge \neg(\forall x)p(x)$. Demonstre que H é satisfatível e $(\forall x)H$ é contraditória.
    (b) Defina uma fórmula G não válida, mas tal que $(\exists *)G$ seja válida.
13. (a) Considere as fórmulas:
    $H = (\forall x)(\exists z)(\exists y)p(x,z,y)$ e
    $H_s = (\forall x)p(x, g(x), f(x))$,
    onde f e g são funções quaisquer, mas diferentes entre si. Demonstre que H é insatisfatível se, e somente se, H_s é insatisfatível.
    (b) Generalize esse resultado.
14. (a) Defina uma fórmula H, tal que H seja satisfatível e $(\exists *)H$ seja válida.
    (b) Defina uma fórmula G, tal que G seja satisfatível e $(\exists *)G$ não seja válida.
    (c) Responda, justificando sua resposta, se a afirmação a seguir é verdadeira ou não:
    Dada uma fórmula H, então H é satisfatível se, e somente se, $(\exists *)H$ é válida.
15. Sejam H e G duas fórmulas. Demonstre que:
    (a) $\neg(\forall *)H$ equivale a $(\exists *)\neg H$.
    (b) $\neg(\exists *)H$ equivale a $(\forall *)\neg H$.
    (c) $(\forall *)H$ é válida se, e somente se, H é válida.
    (d) $(\exists *)H$ é satisfatível se, e somente se, H é satisfatível.
    (e) H implica G se, e somente se, $(\forall *)(H \rightarrow G)$ é válida.
    (f) H equivale a G se, e somente se, $(\forall *)(H \leftrightarrow G)$ é válida.
16. Responda se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas. Justifique suas respostas.
    (a) Se $(\exists *)H$ é válida, então H é válida.

(b) Se H é válida, então $(\exists *)H$ é válida.

(c) Se H é satisfatível, então $(\exists *)H$ é satisfatível.

(d) Se $(\forall *)H$ é satisfatível, então H é satisfatível.

17. (a) Dê exemplo de uma fórmula que contenha variável livre e seja válida.

    (b) Dê exemplo de uma fórmula sem variáveis e símbolos de verdade e que seja válida.

    (c) Existe fórmula que não é válida, mas cujo fecho universal seja válido?

    (d) Existe fórmula que é válida, mas cujo fecho universal não seja válido?

18. (a) Determine uma fórmula H tal que as condições a seguir sejam satisfeitas:

    i) $I[H] = T$ para toda interpretação I sobre U, onde $|U| = 2$.
    ii) Existe interpretação J sobre U_1, onde $|U_1| = 3$ e $J[H] = F$.

    (b) Determine uma fórmula H tal que as condições a seguir sejam satisfeitas:

    i) $I[H] = T$ para toda interpretação I sobre U, onde $|U| = 2$ ou $|U| = 3$.
    ii) Existe interpretação J sobre U_1, onde $|U_1| = 4$ e $J[H] = F$.

    (c) Generalize os resultados dos itens a e b.

19. Determine se os conjuntos de fórmulas a seguir são satisfatíveis:

    (a) $\{(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \to \neg p(y,x)), (\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x,y) \wedge p(y,z)) \to p(x,z))\}$

    (b) $\{(\exists x)(\forall y)p(x,y), (\forall x)(\exists y)p(x,y)\}$

    (c) $\{(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \to \neg p(x,y)), (\forall x)p(x,x),$
    $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x,y) \wedge p(y,z)) \to p(x,z))\}$

    (d) $\{(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \to \neg p(y,x)), (\exists x)(\exists y)(p(x,y) \wedge \neg p(y,x))\}$

20. Determine se as asserções a seguir são válidas:

    (a) Todo político é esperto. Nenhum cientista é esperto. Portanto, nenhum cientista é político.

    (b) Todo homem é mortal. Sócrates é homem. Portanto, Sócrates é mortal.

    (c) Todo político é esperto. Existe indivíduo esperto que é inteligente. Portanto, algum político é inteligente.

    (d) Há político honesto. Há operários honestos. Portanto, há operários que são políticos.

    (e) Se existe um barbeiro em Coromandel que não barbeia a quem barbeia a si próprio, então não existe ninguém para barbear o barbeiro.

    (f) Todo aluno de Ciência da Computação é mais inteligente que algum aluno de Engenharia. Logo, não existe aluno de Engenharia que seja mais inteligente que todos os alunos de Ciência da Computação.

(g) Toda mulher bonita, inteligente e sensível é observada. Nenhuma filha de Sr. Arnaldo é observada. Mulher que não é observada não se casa, portanto, as filhas de Sr. Arnaldo não se casarão.

(h) Tudo que existe tem uma causa, logo é preciso existir uma causa primordial. Essa causa primordial é Deus.

(i) Existem mais pessoas no mundo do que fios de cabelos na cabeça de uma pessoa. Ninguém é careca. Portanto, pelo menos duas pessoas têm um mesmo número de fios de cabelos.

(j) Quem não se ama, não ama ninguém.

(k) Uma condição necessária e suficiente para que um indivíduo seja produtivo é que ele seja esforçado, trabalhe muito e tenha inspirações.

21. Considere as sentenças a seguir.

H_1 = Toda mulher dócil tem um amado.

H_2 = Se existe mulher dócil, toda mulher tem um amado.

Demonstre se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas.

(a) H_1 implica H_2.

(b) H_2 implica H_1.

22. Considere uma interpretação sobre o conjunto das pessoas tal que $I[p(x)] = T$ se, e somente se, x_I é estudante, $I[p_1(x)] = T$ se, e somente se, x_I é monitor, $I[q(x)] = T$ se, e somente se, x_I é artista, $I[r(x)] = T$ se, e somente se, x_I é inteligente, $I[r_1(x)] = T$ se, e somente se, x_I é comunicativo. Traduza o argumento a seguir para a lógica de predicados.

Há monitor que é inteligente, mas não é comunicativo.
Apenas estudantes inteligentes são monitores.
Todo artista é comunicativo.
Portanto, nem todo estudante inteligente é um artista.

23. Classifique os argumentos do Exercício 19 do Capítulo 7.