

Nome: Eduardo Henrique de Almeida Izidório

Matrícula: 2020000315

Semestre: 2020.2

Disciplina: Lógica Proposicional

Data: 08/03/2020

## Lista de Exercícios

1. Considere as concatenações de símbolos do alfabeto da lógica Proposicional dadas a seguir. Identifique aquelas que são fórmulas da lógica Proposicional. Considere a forma simplificada de representação de fórmulas, em que os símbolos de pontuação podem ser omitidos.

a)  $(PQ \vee P_{10.000})$

Não é fórmula

b)  $(P \wedge Q) \rightarrow ((Q \leftrightarrow P) \vee \neg \neg R)$

É fórmula

c)  $\neg \neg P$

É fórmula

d)  $\vee Q$

Não é fórmula

e)  $(P \wedge Q) \rightarrow ((Q \leftrightarrow \neg R))$

É fórmula

2. Responda as questões a seguir, justificando suas respostas.

a) Existe fórmula sem símbolos de pontuação? Sim existe, as fórmulas mais simples apresentam os símbolos proposicionais ou símbolos de verdade.

b) Quantos tipos de símbolos possui o alfabeto da lógica proposicional? Quais são esses símbolos?

São 4. São eles, os símbolos de pontuação, símbolos de verdade, símbolos proposicionais e conectivos proposicionais.

c) Existe fórmula da lógica Proposicional com algum conectivo, mas sem símbolo de Pontuação?

Sim,  $\neg P, P \vee Q$ .

3. Determine o comprimento e as subfórmulas das fórmulas a seguir.

a)  $((\neg \neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)) \wedge P_{10.000}$

$\text{Comp}[P] + 1 + 1 + \text{Comp}[Q] + 1 + \text{Comp}[P] + \text{Comp}[Q] + 1 + 1 + \text{Comp}[P_{10.000}] + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 = \text{Comp} = 11$

Subfórmulas:  $((\neg \neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)) \wedge P_{10.000}$ ,  $((\neg \neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q))$ ,  $(\neg \neg P \vee Q)$ ,  $(P \rightarrow Q)$ ,  $P, Q, P_{10.000}$ ,  ~~$\neg$~~ .

b)  $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))) = \text{Comp}[P] + 1 + \text{Comp}[Q] + \text{Comp}[R] + 1 + 1 + \text{Comp}[P] + \text{Comp}[R] + 1 + 1 + \text{Comp}[P] + \text{Comp}[R] + 1 = 6 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = \text{Comp} = 13$

Subfórmulas:  $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))$ ,  $P, Q, R, (Q \rightarrow R), (P \rightarrow R), ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)), ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))$

c)  $((P \rightarrow \neg P) \leftrightarrow \neg P) \vee Q$   
 $\text{Comp}[P] + 1 + 1 + \text{Comp}[P] + 1 + 1 + \text{Comp}[P] + 1 + \text{Comp}[Q] = 5 + 4 = \text{Comp} = 9$

Subfórmulas:  $((P \rightarrow \neg P) \leftrightarrow \neg P) \vee Q$ ,  $(P \rightarrow \neg P)$ ,  $(P \rightarrow \neg P) \leftrightarrow \neg P$ ,  $P, \neg P, Q$ .

d)  $\neg (P \rightarrow \neg P)$

$1 + \text{Comp}[P] + 1 + 1 + \text{Comp}[P] = 3 + 2 = \text{Comp} = 5$

Subfórmulas:  $\neg (P \rightarrow \neg P)$ ,  $P, \neg P, (P \rightarrow \neg P)$ .

4. Elimine o maior número possível de símbolos de pontuação das fórmulas a seguir, mantendo a representação da fórmula.



Original.

$$a) ((\neg(\neg P)) \leftrightarrow ((\neg(\neg(\neg(P \vee Q))) \rightarrow R)) \wedge P))$$

$$\neg\neg P \leftrightarrow (\neg(\neg\neg(P \vee Q) \rightarrow R) \wedge P)$$

$$b) (\neg P \rightarrow (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg\neg R \vee \neg P))$$

Não tira nada

$$c) ((P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow (\neg Q)))$$

$$(P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$$

5. Considere as concatenações de símbolos a seguir. A partir da introdução de símbolos de pontuação, identifique quais fórmulas da lógica Proposicional é possível obter.

$$a) P \vee \neg Q \rightarrow R \leftrightarrow \neg R$$

$$(P \vee \neg Q) \rightarrow R \leftrightarrow \neg R$$

$$(P \vee \neg Q) \rightarrow (R \leftrightarrow \neg R)$$

$$(P \vee (\neg Q \rightarrow R)) \leftrightarrow \neg R$$

$$P \vee (\neg Q \rightarrow (R \leftrightarrow \neg R))$$

$$P \vee \neg(Q \rightarrow R \leftrightarrow \neg R),$$

$$b) Q \rightarrow \neg P \wedge Q$$

$$Q \rightarrow (\neg P \wedge Q)$$

$$Q \rightarrow \neg(P \wedge Q),$$

$$c) \neg P \vee Q \leftrightarrow Q$$

$$(\neg P \vee Q) \leftrightarrow Q$$

$$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow Q$$

$$\neg(P \vee Q \leftrightarrow Q),$$

$$d) \neg\neg P \rightarrow Q \leftrightarrow P \wedge P \rightarrow R$$

Não é possível fazer, pois, falta um conectivo proposicional.

6. a) Escreva as fórmulas dos exercícios 3 e 4 utilizando a notação polonesa.

$$3. a) ((\neg\neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)) \wedge P_{10.000}$$

$$(V \neg\neg P Q \leftrightarrow \rightarrow P Q) \wedge P_{10.000}$$

$$\leftrightarrow V \neg\neg P Q \rightarrow P Q \wedge P_{10.000}$$

$$\wedge \leftrightarrow V \neg\neg P Q \rightarrow P Q P_{10.000},$$

$$b) P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))$$

$$P \rightarrow (\rightarrow Q R \rightarrow (\rightarrow P R \rightarrow \rightarrow P R))$$

$$P \rightarrow (\rightarrow Q R \rightarrow \rightarrow \rightarrow P R \rightarrow P R)$$

$$P \rightarrow \rightarrow \rightarrow Q R \rightarrow \rightarrow P R \rightarrow P R$$

$$\rightarrow P \rightarrow \rightarrow Q R \rightarrow \rightarrow P R \rightarrow P R,$$

$$c) ((P \rightarrow \neg P) \leftrightarrow \neg P) \vee Q$$

$$(\rightarrow P \neg P \leftrightarrow \neg P) \vee Q$$

$$\leftrightarrow \rightarrow P \neg P \neg P \vee Q$$

$$\vee \leftrightarrow \rightarrow P \neg P \neg P Q,$$

$$d) \neg(P \rightarrow \neg P)$$

$$\neg \rightarrow P \neg P,$$

$$4. a) ((\neg(\neg P)) \leftrightarrow ((\neg(\neg(\neg(P \vee Q))) \rightarrow R)) \wedge P))$$

$$(\neg\neg P) \leftrightarrow ((\neg(\neg(\neg(P \vee Q))) \rightarrow R) \wedge P)$$

$$(\neg\neg P \leftrightarrow ((\neg(\neg\neg(P \vee Q)) \rightarrow R) \wedge P))$$

$$(\neg\neg P \leftrightarrow ((\neg\neg\neg(P \vee Q) \rightarrow R) \wedge P))$$

$$(\neg\neg P \leftrightarrow (\neg \rightarrow \neg\neg(P \vee Q) R \wedge P))$$

$$\neg\neg P \leftrightarrow \wedge \neg \rightarrow \neg\neg(P \vee Q) R P$$

$$\leftrightarrow \neg\neg P \wedge \neg \rightarrow \neg\neg(P \vee Q) R P,$$

$$b) (\neg P \rightarrow (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg\neg R \vee \neg P))$$

$$(\neg P \rightarrow \vee Q R) \leftrightarrow (\wedge P Q \leftrightarrow \vee \neg\neg R \neg P)$$

$$\rightarrow \neg P \vee Q R \leftrightarrow \leftrightarrow \wedge P Q \vee \neg\neg R \neg P$$

$$\leftrightarrow \rightarrow \neg P \vee Q R \leftrightarrow \wedge P Q \vee \neg\neg R \neg P,$$

$$c) ((P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow (\neg Q)))$$

$$(V P Q \rightarrow (P \rightarrow \neg Q))$$

$$(V P Q \rightarrow \rightarrow P \neg Q)$$

$$\rightarrow V P Q \rightarrow P \neg Q,$$

6. b) Determine quais sequências de símbolos, indicadas a seguir, são fórmulas da lógica Proposicional que utilizam a notação polonesa. No caso em que a sequência de símbolos é uma fórmula, reescreva-a utilizando a notação convencional.

$$1. V \rightarrow P Q \leftrightarrow R \rightarrow V P Q \neg S$$

$$V(P \rightarrow Q) \leftrightarrow R \rightarrow (P \vee Q) (\neg S)$$

$$V(P \rightarrow Q) \leftrightarrow R ((P \vee Q) \rightarrow (\neg S))$$

$$((P \rightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (\neg S)))),$$



$$b) 2. \rightarrow \leftrightarrow PQV \rightarrow PQ \rightarrow \neg RR \\ \rightarrow (P \leftrightarrow Q) \vee (P \rightarrow Q) (\neg R \rightarrow R) \\ ((P \leftrightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \vee (\neg R \rightarrow R)))$$

$$b) 3. \rightarrow \neg P \neg QR \vee VPQ \vee \neg R \neg P \\ \rightarrow \neg P \neg QR \vee (PVQ)(\neg RV \neg P) \\ (\rightarrow \neg P \neg QR) ((PVQ) \vee (\neg RV \neg P)) \\ \text{Não tem como fazer faltando conclusões}$$

$$b) 4. \leftrightarrow \rightarrow \neg P \vee QR \leftrightarrow \neg P \vee \neg R \neg P \\ \leftrightarrow \rightarrow \neg P (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) (\neg R \vee \neg P) \\ \leftrightarrow (\neg P \rightarrow (Q \vee R)) ((P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg R \vee \neg P)) \\ (\neg P \rightarrow (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg R \vee \neg P))$$

8. Faça os exercícios 5 e 6 considerando a notação pós-fixa, indicada pelas correspondências.

$$5. a) ((P \vee (\neg Q)) \rightarrow (R \leftrightarrow (\neg R))) \\ ((P \vee \neg Q) \rightarrow (R \leftrightarrow \neg R)) \\ (Q \neg P \vee \rightarrow R \neg R \leftrightarrow) \\ Q \neg P \vee R \neg R \leftrightarrow \neg$$

$$b) (Q \rightarrow ((\neg P) \wedge Q)) \\ (Q \rightarrow (P \neg \wedge Q)) \\ (Q \rightarrow P \neg Q \wedge) \\ P \neg Q \wedge Q \rightarrow$$

$$c) (((\neg P) \vee Q) \leftrightarrow Q) \\ ((P \neg \vee Q) \leftrightarrow Q) \\ (P \neg Q \vee \leftrightarrow Q) \\ P \neg Q \vee Q \leftrightarrow$$

$$d) \neg \neg P \rightarrow Q \leftrightarrow P \wedge P \neg \neg R \\ \text{não é possível fazer}$$

$$6. a) 3. a) ((\neg \neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)) \wedge P_{10.000} \\ (P \neg \neg Q \vee \leftrightarrow PQ \rightarrow) P_{10.000} \wedge \\ P \neg \neg Q \vee PQ \rightarrow \leftrightarrow P_{10.000} \wedge$$

$$b) P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))) \\ P \rightarrow (QR \rightarrow \rightarrow (PR \rightarrow \rightarrow PR \rightarrow)) \\ P \rightarrow (QR \rightarrow \rightarrow PR \rightarrow PR \rightarrow \rightarrow)$$

$$P \rightarrow QR \rightarrow PR \rightarrow PR \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ PQR \rightarrow PR \rightarrow PR \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow$$

$$c) ((P \rightarrow \neg P) \leftrightarrow \neg P) \vee Q \\ (PP \neg \rightarrow \leftrightarrow \neg P) \vee Q \\ PP \neg \rightarrow P \neg \leftrightarrow \vee Q \\ PP \neg \rightarrow P \neg \leftrightarrow Q \vee$$

$$d) \neg (P \rightarrow \neg P) \\ \neg PP \neg \rightarrow \\ PP \neg \rightarrow \neg$$

$$4. a) ((\neg(\neg P)) \leftrightarrow ((\neg(\neg(\neg(P \vee Q))) \rightarrow R)) \wedge P)) \\ (P \neg \neg) \leftrightarrow ((\neg(\neg(\neg(P \vee Q)) \rightarrow R)) \wedge P)) \\ (P \neg \neg) \leftrightarrow ((\neg(\neg(\neg(P \vee \neg) \rightarrow R)) \wedge P)) \\ (P \neg \neg) \leftrightarrow ((\neg(P \vee \neg \neg \rightarrow R)) \wedge P)) \\ (P \neg \neg) \leftrightarrow ((\neg(P \vee \neg \neg R \rightarrow) \wedge P)) \\ (P \neg \neg) \leftrightarrow (P \vee \neg \neg R \rightarrow \neg \wedge P) \\ (P \neg \neg) \leftrightarrow (P \vee \neg \neg R \rightarrow \neg \wedge P) \\ (P \neg \neg) \leftrightarrow P \vee \neg \neg R \rightarrow \neg \wedge P \\ P \neg \neg P \vee \neg \neg R \rightarrow \neg \wedge \leftrightarrow$$

$$b) (\neg P \rightarrow (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \leftrightarrow \neg R \vee \neg P) \\ (P \neg \rightarrow Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q \leftrightarrow R \neg \neg P \neg \vee) \\ P \neg Q \vee R \leftrightarrow P \wedge R \neg \neg P \neg \vee \leftrightarrow \\ P \neg Q \vee R \rightarrow P \wedge R \neg \neg P \neg \vee \leftrightarrow \leftrightarrow$$

$$c) ((P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow (\neg Q))) \\ (P \vee Q \rightarrow (P \rightarrow Q \neg)) \\ (P \vee Q \rightarrow P \neg \rightarrow) \\ P \vee Q \neg \rightarrow \rightarrow$$

$$6. b) 1. ((P \rightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (S \neg)))) \\ (P \rightarrow \vee (R \leftrightarrow (P \vee Q) \rightarrow S \neg)) \\ (P \rightarrow \vee (R \leftrightarrow (P \vee Q \rightarrow S \neg))) \\ (P \rightarrow \vee (R \leftrightarrow P \vee Q \rightarrow S \neg)) \\ (P \rightarrow \vee R P \vee Q \rightarrow S \neg \leftrightarrow) \\ P \rightarrow R P \vee Q \rightarrow S \neg \leftrightarrow \vee$$

$$2. ((P \leftrightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \vee (\neg R \rightarrow R))) \\ (P \leftrightarrow \rightarrow (P \rightarrow \vee R \neg R \rightarrow)) \\ (P \leftrightarrow \rightarrow P \rightarrow R \neg R \rightarrow \vee) \\ P \leftrightarrow P \rightarrow R \neg R \rightarrow \vee \rightarrow$$

3.  $\rightarrow \neg P \neg Q R \vee \vee P Q \vee \neg R \neg P$   
Não tem como transformar

$$\begin{aligned} 4. & ((\neg P \rightarrow (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg \neg R \vee \neg P))) \\ & ((P \neg \rightarrow Q R \vee) \leftrightarrow (P Q \wedge \leftrightarrow R \neg \neg P \neg \vee)) \\ & (P \neg Q R \vee \rightarrow \leftrightarrow P Q \wedge R \neg \neg P \neg \vee \leftrightarrow) \\ & P \neg Q R \vee \rightarrow P Q \wedge R \neg \neg P \neg \vee \leftrightarrow \leftrightarrow \end{aligned}$$

9. Qual a paridade do número de símbolos de pontuação de uma fórmula da lógica Proposicional?

A paridade é par, pois sempre abre "(" e fecha ")" por definição de símbolos de pontuação.

10. Seja  $H$  uma fórmula que não contém o conectivo  $\neg$ .

a) Qual a paridade de  $\text{comp}[H]$ ?

$\text{comp}[H]$  é um número ímpar.

b) Qual a relação entre  $\text{comp}[H]$  e o número de conectivos de  $H$ ?

$\text{comp}[H]$  é o dobro do número de conectivos de  $H$  mais um.