UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
DCC511 – Lógica de Predicados (2022.2)
Prof. Msc. Thais Oliveira Almeida

AULA 5:
CONSTRUÇÃO DE FÓRMULAS

Fórmulas

- A construção das fórmulas é feita a partir da concatenação de átomos e conectivos;
- São construídas a partir destas regras:
  - Todo átomo é uma fórmula da Lógica de Predicados;
    - Porque os átomos sempre retornam um símbolo de verdade.
  - Se H é fórmula, então $(\neg H)$ também é;
  - Se H e G são fórmulas, então $(H \vee G)$ também é;
  - Se H e G são fórmulas, então $(H \wedge G)$ também é;
  - Se H e G são fórmulas, então $(H \rightarrow G)$ também é;
  - Se H e G são fórmulas, então $(H \leftrightarrow G)$ também é;
  - Se H é fórmula e x variável, então: $(\forall x)H$ e $(\exists x)H$ são fórmulas.

Equivalência Lógica

- Duas proposições H e G são logicamente equivalentes ($H \equiv G$), se ambas possuem **tabelas-verdade idênticas**.

- Relembrando:
  - $H \rightarrow G$
    - *Denota* $(\neg H \vee G)$
  - $(H \rightarrow \textit{false})$
    - *Denota* $\neg H$
  - $(H \leftrightarrow G)$
    - *Denota* $(H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H)$
  - $(H \wedge G)$
    - *Denota* $\neg(\neg H \vee \neg G)$

Construção de Fórmulas

- Átomos: p(x), R e *false* são fórmulas;
- $\neg$p(x) v R;
  - Que equivale a (p(x) $\rightarrow$ R)
    - Também fórmula
- ($\forall$x) p(x) $\rightarrow$ R;

- **Uma expressão na lógica de predicados é** uma concatenação válida de símbolos do alfabeto, podendo ser **um termo ou uma fórmula.**

Correspondência Entre Quantificadores

- Lógica Proposicional:
  - Os conectivos $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ e ^ podem ser definidos a partir dos conectivos $\neg$ e v;

- Lógica de Predicados:
  - É possível definir $\exists$ a partir de $\forall$ e vice-versa;
    - **$(\forall x)\ H = \neg(\exists x)\neg H$**
    - **$(\exists x)\ H = \neg(\forall x)\neg H$**

- Qualquer quantificador pode ser definido a partir do outro.

Subfórmula

- Se H é fórmula:
  - H é uma sub-fórmula;
  - Se H=($\neg$G), então ($\neg$G) é sub-fórmula de H;
  - Se H é do tipo (E v G), (E ^ G), (E$\rightarrow$G) ou (E$\leftrightarrow$G), então H, G e E são sub-fórmulas de H;
  - Se x é uma variável e Q um quantificador ($\forall$ ou $\exists$), H=(Qx)G, então G e (Qx)G são sub-fórmulas de H;
  - Se G é sub-fórmula de H, então toda sub-fórmula de G também é sub-fórmula de H.

Exercício

- Deseja-se saber as subfórmulas da fórmula H.

$$H = (\forall x)\ p(x) \rightarrow (p(x) \wedge (\forall y)\ r(y))$$

$(\forall x)\ p(x) \rightarrow (p(x) \wedge (\forall y)\ r(y))$

$(\forall x)\ p(x)$

$p(x)$

$(p(x) \wedge (\forall y)\ r(y))$

$(\forall y)\ r(y)$

$r(y)$

Exercício

- Deseja-se saber as subfórmulas da fórmula G.

$$G = (\forall x)\ (\exists y)\ ((\forall z)\ p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))$$

$(\forall x)\ (\exists y)\ ((\forall z)\ p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))$

$(\exists y)\ ((\forall z)\ p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))$

$(\forall z)\ p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1)$

$(\forall z)\ p(x,y,w,z)$

$p(x,y,w,z)$

$(\forall y)q(z,y,x,z_1)$

$q(z,y,x,z_1)$

Ocorrência Livre e Ligada

- Se x é uma variável e E uma fórmula, uma ocorrência de x em E é:
  - Ligada, se x está no escopo de um quantificador $(\forall x)$ ou $(\exists x)$ em E;
  - Livre, se não for ligada;

- Ex.: $G = (\forall x)\ (\exists y)\ ((\forall z)\ p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))$

$$(\forall x)\ (\exists y)\ ((\forall z)\ p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))$$

Variável Livre e Ligada

- Se x é uma variável e E uma fórmula que contém x, x é:
  - Ligada em E, se existir uma ou mais ocorrências ligadas de x em E;
  - Livre em E, se existir uma ou mais ocorrências livres de x em E.

- Uma fórmula é fechada quando não possui variáveis livres.

Exercício

- Na fórmula abaixo, quais variáveis são livres e quais são ligadas?

$$G = (\forall x)\ (\exists y)\ ((\forall z)\ p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))$$
$$= (\forall x)\ (\exists y)\ ((\forall z)\ p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))$$
$$= (\forall x)\ (\exists y)\ ((\forall z)\ p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))$$
$$= (\forall x)\ (\exists y)\ ((\forall z)\ p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))$$
$$= (\forall x)\ (\exists y)\ ((\forall z)\ p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))$$
$$\mathbf{= (\forall x)\ (\exists y)\ ((\forall z)\ p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z_1))}$$

- As variáveis x, y e z são ligadas em G;
- As variáveis w e z_1 são livres em G;
- A variável z é livre e ligada.