UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
DCC511 – Lógica de Predicados (2022.2)
Prof. Msc. Thais Oliveira Almeida

AULA 9:

PROPRIEDADES SEMÂNTICAS DA LÓGICA DE PREDICADOS

Funções e Predicados Computáveis

- Predicados comuns: pai(jose, maria);
- Predicados computáveis “maior_que” e “menor_que”;
- Funções computáveis: maior_que(mais(2; 3); 1).

Fórmulas ou Predicados

- Predicados unários:
  - brasileiro(João);

- Predicados binários:
  - maior(3,4);
  - matou(João,Maria);

- Predicados ternários:
  - deu(Maria,livro,João).

Semântica da Lógica Proposicional

- Seja *a* uma atribuição de valores-verdade. A função de avaliação para I(α) induzida por *a* é a função:

- v : I(α) = {F;V} definida da seguinte forma:
  - v(p) = a(p), se p é um símbolo proposicional
  - v(¬p) = V, se v(p) = F
    - = F, se v(p) = V
  - v(p ^ q) = V, se v(p) = v(q) = V
    - = F, em caso contrário
  - v(p v q) = F, se v(p) = v(q) = F
    - = V, em caso contrário
  - v(p ⟶ q) = F, se v(p) = V e v(q) = F
    - = V, em caso contrário
  - v(p ↔ q) = V, se v(p) = v(q)
    - = F, em caso contrário

Propriedades Semânticas

- Tautologia
- As relações entre tais propriedades são análogas:
  - (H $\longrightarrow$ G) é uma tautologia $\Leftrightarrow$ H implica G;
    - Se I[H]=T, então I[G]=T.
  - (H $\leftrightarrow$ G) é uma tautologia $\Leftrightarrow$ H equivale a G;
    - I[H]=I[G].
  - Satisfatibilidade;
  - Implicação;
  - Equivalência...

Satisfatibilidade de Fórmula

- **Válida** (tautológica): é verdadeira em toda interpretação;
- **Satisfatível** (contingente): quando existe pelo menos uma interpretação I tal que I[H]=T;
  - Um *conjunto de fórmulas* é $B=\{H_1, H_2, ..., H_n\}$ é satisfatível se e somente se <u>existe uma interpretação</u> I tal que $I[H_1]=I[H_2]=...= I[H_n]=T$;
- **Insatisfatível** (contraditória): quando para toda interpretação I, I[H]=F.

Exercício

- Verificar se o conjunto de fórmulas H_1, H_2, H_3 e H_4 definidas a seguir são satisfatíveis ou não:
  - $H_1 = p(x,y)$, I_1 é uma interpretação sobre os naturais N, tal que: $I_1[p]=$"<", $I_1[x]=5$ e $I_1[y]=9$;
  - $H_2 = (\forall x)p(x,y)$, I_2 é uma interpretação sobre os naturais N, tal que: $I_2[p]=$"≥" e $I_2[y]=0$;
  - $H_3 = (\forall x)(\exists y)p(x,y)$, I_3 é uma interpretação sobre os naturais N, tal que: $I_3[p]=$"<";
  - $H_4 = (\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow p(x,y)$, I_4 é uma interpretação sobre os naturais N, tal que: $I_4[p]=$"<", $I_4[x]=5$ e $I_4[y]=9$.

Exercício

- Verificar se o conjunto de fórmulas H_1, H_2, H_3 e H_4 definidas a seguir são satisfatíveis ou não:
  - $H_1 = p(x,y)$, I_1 é uma interpretação sobre os naturais N, tal que: $I_1[p]=$"<", $I_1[x]=5$ e $I_1[y]=9$;
  - $H_1 = p(x,y) = <(5,9) = 5<9 = T$
  - $H_2 = (\forall x)p(x,y)$, I_2 é uma interpretação sobre os naturais N, tal que: $I_2[p]=$"$\geq$" e $I_2[y]=0$;
  - $H_2 = (\forall x)p(x,y) = (\forall x) \geq (x,0) = x \geq 0 = T$

Exercício

- Verificar se o conjunto de fórmulas H_1, H_2, H_3 e H_4 definidas a seguir são satisfatíveis ou não:
  - $H_3 = (\forall x)(\exists y)p(x,y)$, I_3 é uma interpretação sobre os naturais N, tal que: $I_3[p]=$"<";
  - $H_3 = (\forall x)(\exists y)p(x,y) = (\forall x)(\exists y)<(x,y) = T$

$\Leftrightarrow \forall\ d \in N;\ <x \leftarrow d>\ I[(\exists y)p(x,y)]=T$

$\Leftrightarrow \forall\ d \in N,\ \exists\ c \in N;\ <y \leftarrow c><x \leftarrow d>\ I[p(x,y)]=T$

$\Leftrightarrow \forall\ d \in N,\ \exists\ c \in N;$ $(d<c)$ é verdadeiro

Exercício

- Verificar se o conjunto de fórmulas H_1, H_2, H_3 e H_4 definidas a seguir são satisfatíveis ou não:
  - $H_4 = (\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow p(x,y)$, I_4 é uma interpretação sobre os naturais N, tal que: $I_4[p]$="<", $I_4[x]=5$ e $I_4[y]=9$.

- $I[H4] = F \Leftrightarrow I[(\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow p(x,y)] = F$

$\Leftrightarrow I[(\forall x)(\exists y)p(x,y) = T$ e $I[p(x,y)] = F$

$\Leftrightarrow \forall\ d \in N; <x \leftarrow d>\ I[(\exists y)p(x,y)]=T$ e $I[p(x,y)]=F$

$\Leftrightarrow \forall\ d \in N, \exists\ c \in N; <y \leftarrow c><x \leftarrow d>\ I[p(x,y)]=T$ e $I[p(x,y)] = F$

$\Leftrightarrow \forall\ d \in N, \exists\ c \in N;$ $(d<c)$ é verdadeiro e $(5<9)$ é falso.

A última afirmação é falsa, pois é falso dizer que $(5<9) = F$.

Logo I [H4] = T, e H4 é satisfatível.

Exercício

- As fórmulas H_1, H_2, H_3 e H_4 são **satisfatíveis**, pois as interpretações I_1, I_2, I_3 e I_4 são tais que: $I_1[H_1]=I_2[H_2]=I_3[H_3]=I_4[H_4]=T$.
  - $H_1 = p(x,y) = <(5,9) = 5<9 = T$
  - $H_2 = (\forall x)p(x,y) = (\forall x) \geq (x,0) = x \geq 0 = T$
  - $H_3 = (\forall x)(\exists y)p(x,y) = (\forall x)(\exists y)<(x,y) = T$
  - $H_4 = (\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow p(x,y) = T$

Satisfatibilidade de Fórmula

- Demonstrar se a fórmula abaixo é satisfatível ou não:
- $H = \neg(\forall x)p(x,y) \leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x,z))$
- Seja I uma interpretação sobre o conjunto dos números naturais N:
  - $I[p(x,y)] = T \Leftrightarrow x_1$ e y_1 são números pares;
  - $I[y] = 4$;
  - $I[z] = 6$;
  - $I[H] = T \Leftrightarrow I[\neg((\forall x)p(x,y))] = I[(\exists x)(\neg p(x,z))]$.