Álgebra Linear I

Aula 8

Professora Kelly Karina

Definição:

Sejam V um espaço vetorial, $v_1, \cdots, v_n$ vetores de V e $k_1, \cdots, k_n$ escalares. Dizemos que o vetor $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ é combinação linear dos vetores $v_1, \cdots, v_n$.

Exemplo:

O vetor $(2,3) \in \mathbb{R}^2$ é combinação linear dos vetores $(1,0)$ e $(1,1)$. Esta afirmação é verdadeira pois

$$(2,3) = (-1)(1,0) + 3(1,1).$$

No espaço vetorial $M(2,2)$ a matriz $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ é combinação linear das matrizes $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De fato, observe que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definição:
Sejam $v_1, \cdots, v_n$ vetores fixos de V, o conjunto de todos os vetores de V que são combinação linear de tais vetores é um subespaço vetorial vetorial W de V a qual chamaremos **subespaço gerado por** $v_1, \cdots, v_n$.

Notação: $W = [v_1, \cdots, v_n]$

Observação:

- W é o menor subespaço de V que contém os vetores $v_1, \cdots, v_n$.
- Se $v_1, \cdots, v_n$ são vetores de um espaço vetorial V e $u = k_1 v_1 + \cdots k_n v_n$ então $[v_1, \cdots, v_n] = [v_1, \cdots, v_n, u]$.
- Dizemos que um espaço vetorial V é finitamente gerado se existir um conjunto finito $A \subset V$ tal que $V = [A]$.

Exemplo:

1− Sejam $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (0, 1)$. Qual é o espaço gerado por v_1 e v_2? Note que todos os vetores do $\mathbb{R}^2$ podem ser escritos como combinação linear de v_1 e v_2. Portanto $[v_1, v_2] = \mathbb{R}^2$.

2− Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e $v \in V$ não nulo. Neste caso temos $W = \{kv; k \in \mathbb{R}\}$, cuja representação é uma reta que contém v e passa pela origem.

3− Sejam $V = M(2, 2)$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Temos então que

$[v_1, v_2] = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

4− Sejam $V = \mathbb{R}^3, v_1 = (1,0,3)$ e $v_2 = (-1,1,1)$. Temos que $[v_1, v_2] = \{(x,y,z); 3x + 4y - z = 0\}$, que é um plano que contém os vetores v_1 e v_2.

De fato, se $(x,y,z) \in [v_1, v_2]$ então existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que:

$$(x,y,z) = a(1,0,3) + b(-1,1,1) \tag{1}$$

E qual é a relação entre x, y e z?

Desenvolvendo a equação acima encontramos o seguinte sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a - b & = & x \\ b & = & y \\ 3a + b & = & z \end{array}\right.$$

Ao discutir o sistema encontramos a condição $-3x - 4y + z = 0$. Segue que

$$[v_1, v_2] = \{(x,y,z); 3x + 4y - z = 0\}.$$

Definição:

Seja V um espaço vetorial e sejam $v_1, \cdots, v_n \in V$. Dizemos que os vetores $v_1, \cdots, v_n$ são linearmente independentes (LI) se a equação

$$k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n = 0 \tag{2}$$

admite apenas a solução trivial $k_1 = \cdots = k_n = 0$.

Caso esta equação admita solução em que algum coeficiente é não nulo diremos que os vetores são linearmente dependentes (LD).

Observação:

Podemos dizer que os vetores são LI ou que o conjunto $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é LI.

Teorema:
O conjunto $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é LD se e somente se um de seus vetores for combinação linear dos outros.

Demonstração:

Primeiramente mostremos que se o conjunto $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é LD então um de seus vetores é combinação linear dos outros.

Se o conjunto $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é LD então existe uma solução não trivial para a equação $k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n = 0$, em outras palavras existe uma solução em que ao menos um coeficiente k_i é não nulo. Neste caso, temos:

$$\begin{aligned} k_i v_i &= k_1 v_1 + \cdots + k_{i-1} v_{i-1} + k_{i+1} v_{i+1} + \cdots + k_n v_n \\ v_i &= \frac{k_1}{k_i} v_1 + \cdots + \frac{k_{i-1}}{k_i} v_{i-1} + \frac{k_{i+1}}{k_i} v_{i+1} + \cdots + \frac{k_n}{k_i} v_n \end{aligned}$$

Ou seja, um dos vetores é combinação linear dos outros vetores. Isto conclui a primeira parte da demonstração.

Mostremos agora que se um de seus vetores é combinação linear dos outros então o conjunto $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é LD.

Seja v_j um vetor que é combinação linear dos outros, ou seja, v_j é tal que existem $c_1, \cdots, c_{j-1}, c_{j+1}, \cdots, c_n$ tais que:

$$v_j = c_1 v_1 + \cdots + c_{j-1} v_{j-1} + c_{j+1} v_{j+1} + \cdots + c_n v_n.$$

Portanto
$c_1 v_1 + \cdots + c_{j-1} v_{j-1} - v_j + c_{j+1} v_{j+1} + \cdots + c_n v_n = 0$, e assim a equação (2) admite solução não trivial e o conjunto $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é LD. ■

Exemplo:

- Os vetores $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (0, 1)$ do $\mathbb{R}^2$ são LI.
- Os vetores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$ do $\mathbb{R}^3$ são LI.
- Num espaço vetorial qualquer dois vetores v_1 e v_2 são LD se e somente se um é múltiplo do outro, ou seja $v_1 = kv_2$ para algum $k \in \mathbb{R}$ não nulo.
- O conjunto $\{(2, 0), (4, 5), (0, 1)\}$ é LD. Note que $(4, 5) = 2(2, 0) + 5(0, 1)$.

Propriedades:

Seja V um espaço vetorial.

- Se $v \in V$ é não nulo então $\{v\}$ é LI;
- Se um conjunto de V contém o vetor nulo então ele é LD;
- Se uma parte de um conjunto $A \subset V$ é LD então o conjunto A é LD;
- Se um conjunto $B \subset V$ é LI então qualquer subconjunto de A também é LI;
- Se $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é um conjunto LI e $\{v_1, \cdots, v_n, u\}$ é LD então u é combinação linear de $v_1, \cdots, v_n$.