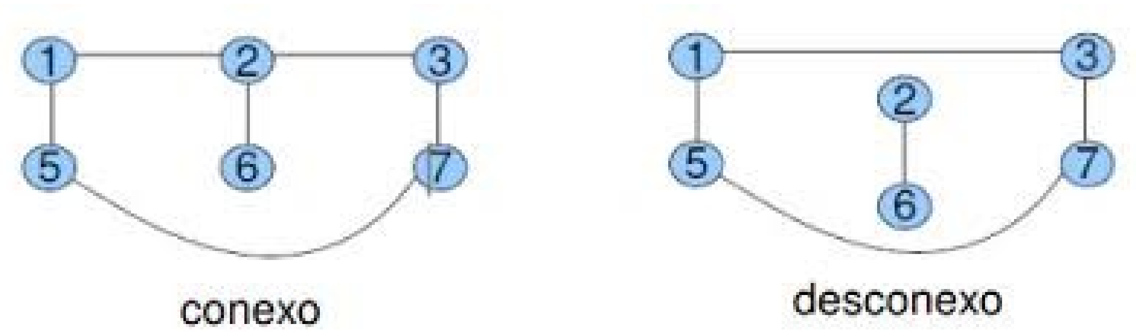
DCC405 – ESTRUTURA DE DADOS II

Aula 13.2 – Teoria dos Grafos – Conceitos Formais

2ª PARTE

Conceitos formais

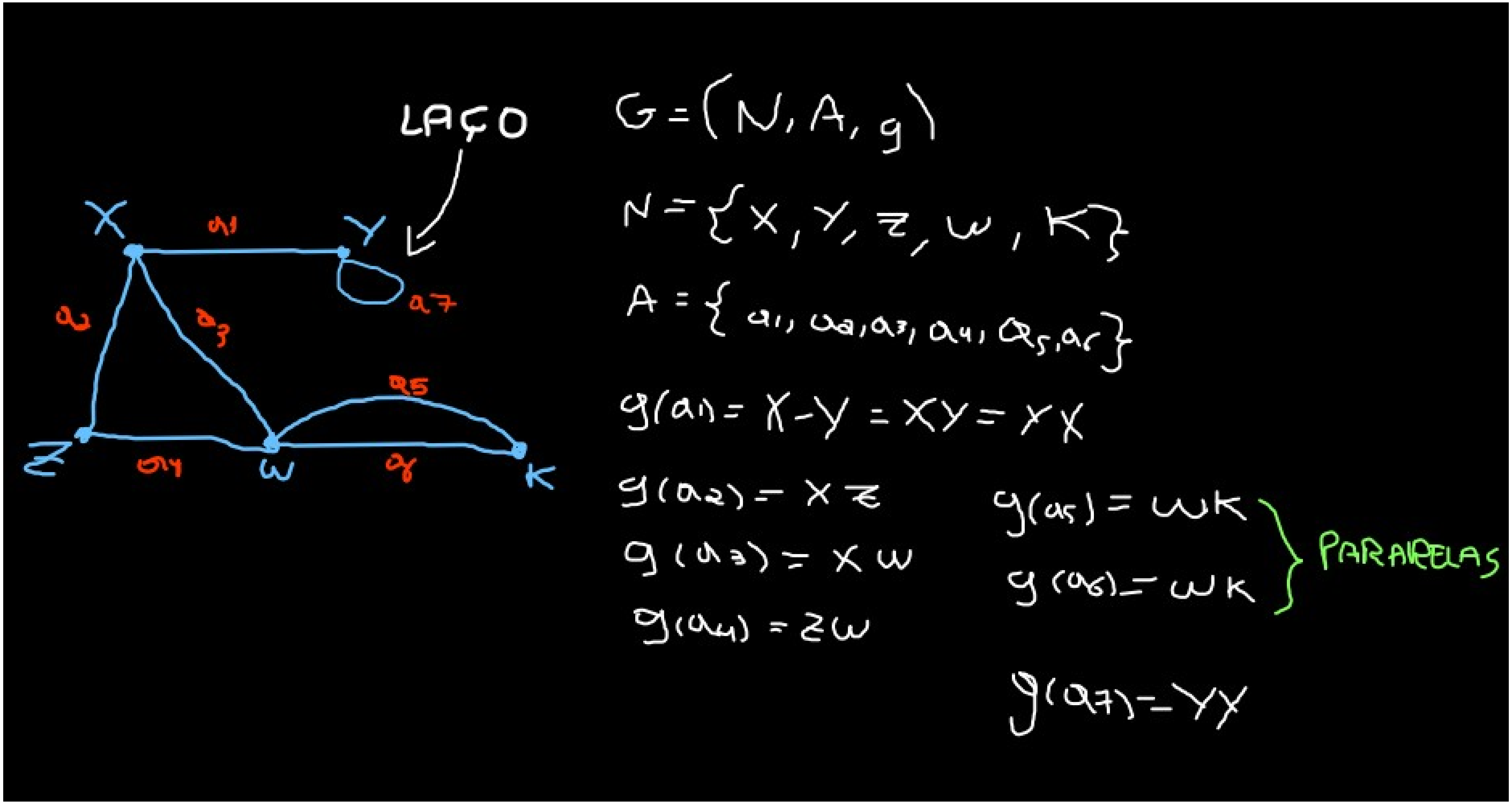


Definição Formal:

- Um grafo é uma tripla ordenada (N, A, g), onde:
  - N é um conjunto arbitrário, não-vazio e finito de **vértices (nós ou nodos)**
  - A é um conjunto finito de **arestas**
  - g é uma função que associa cada aresta **a∈A** a **um par não-ordenado de vértices** chamados de extremos de a

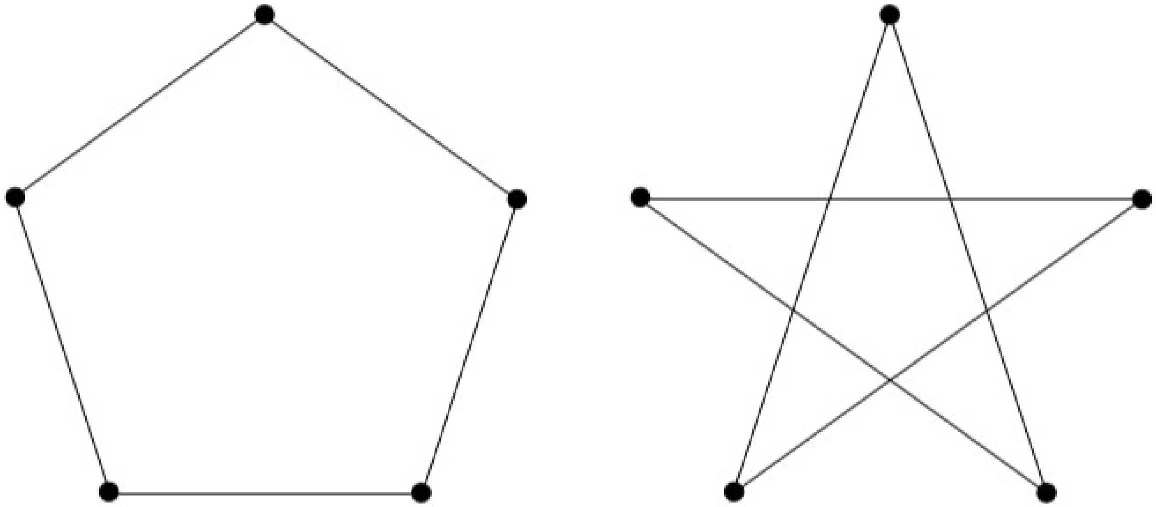
Desenhar grafo..

Teoria dos Grafos



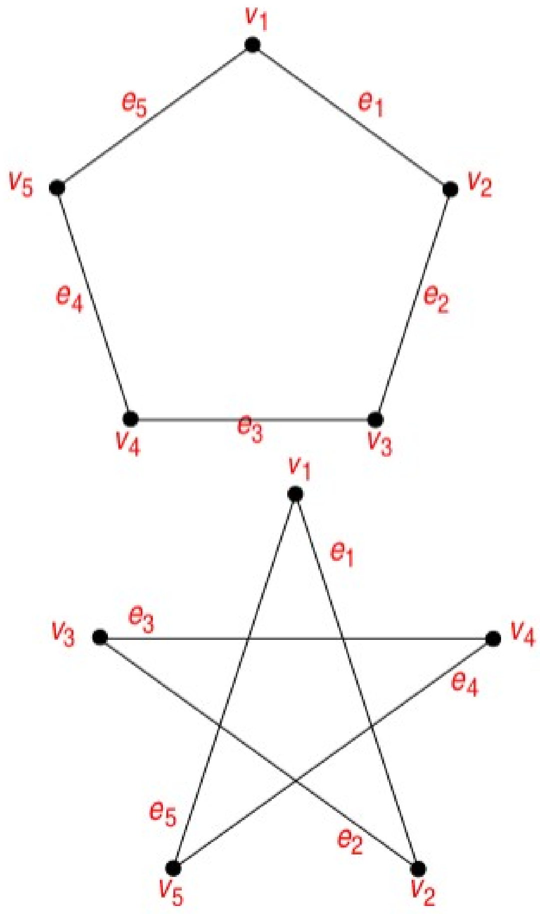
Teoria dos Grafos – Exercício Simples

Considere os dois diagramas abaixo. Rotule os vértices e as arestas de tal forma que os dois diagramas representem o mesmo grafo.



Teoria dos Grafos – Exercício Simples

Uma possível identificação de vértices e rótulos pode ser:



Os dois diagramas são representados por:

- Conjunto de vértices: $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.
- Conjunto de arestas: $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.
- Função aresta–vértice:

Aresta	Vértice
e_1	$\{v_1, v_2\}$
e_2	$\{v_2, v_3\}$
e_3	$\{v_3, v_4\}$
e_4	$\{v_4, v_5\}$
e_5	$\{v_5, v_1\}$

Teoria dos Grafos

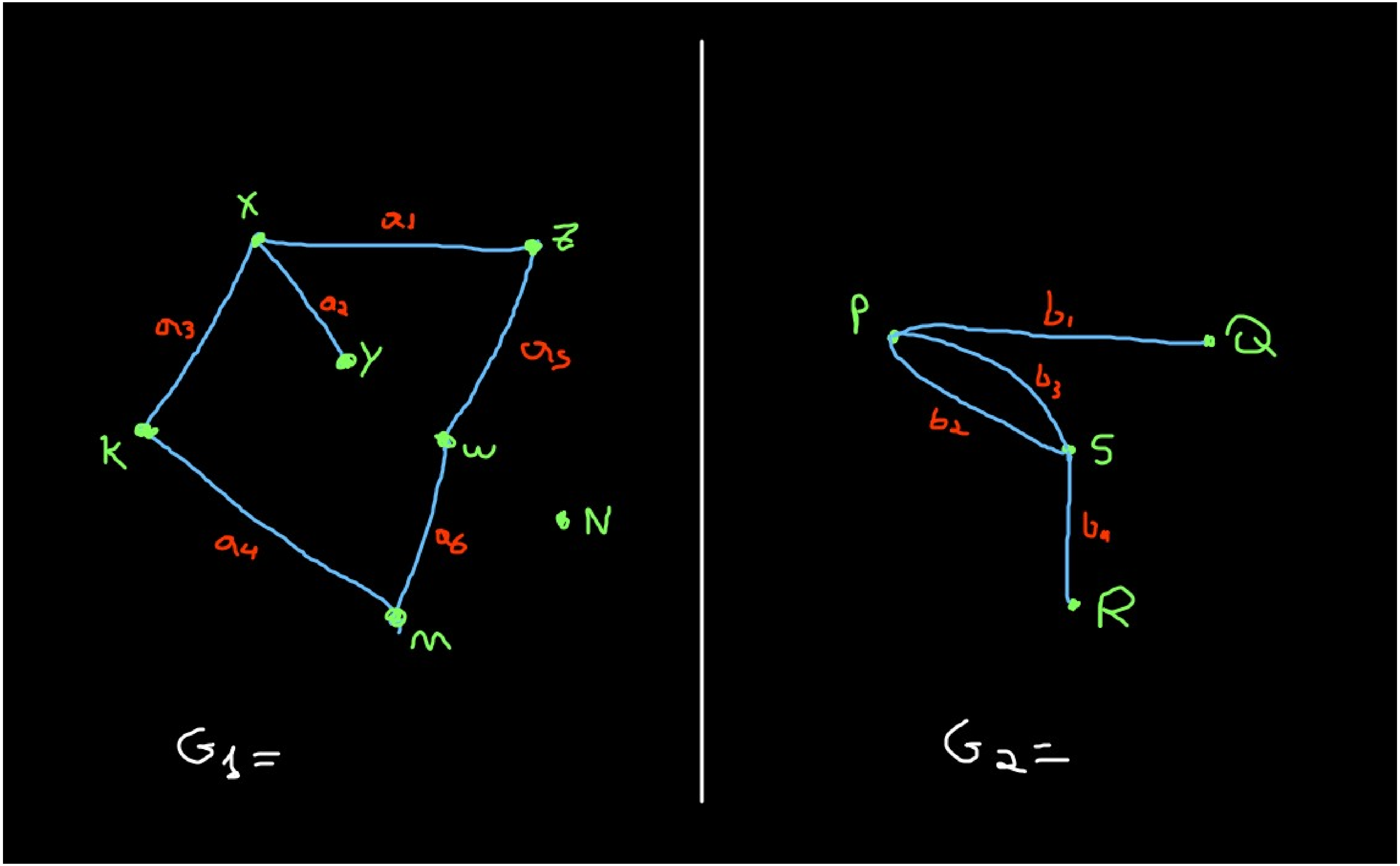
Conceitos importantes:

- Suponha um grafo **G = (N, A, g)**, onde:
- **N = {x, y}**, ou seja, contém dois vértices x e y
- **A = {a1}**, ou seja, contém apenas uma aresta
- A função g é tal que **g(a1) = x-y**
- Podemos denotar a aresta a1 por x-y simplesmente por **xy**
- Dizemos que essa aresta **incide** em **x** e em **y**
- x e y também são as **pontas** ou **extremos** da aresta
- Se xy é uma aresta do grafo, também podemos dizer que x e y são **vértices vizinhos** ou **adjacentes**

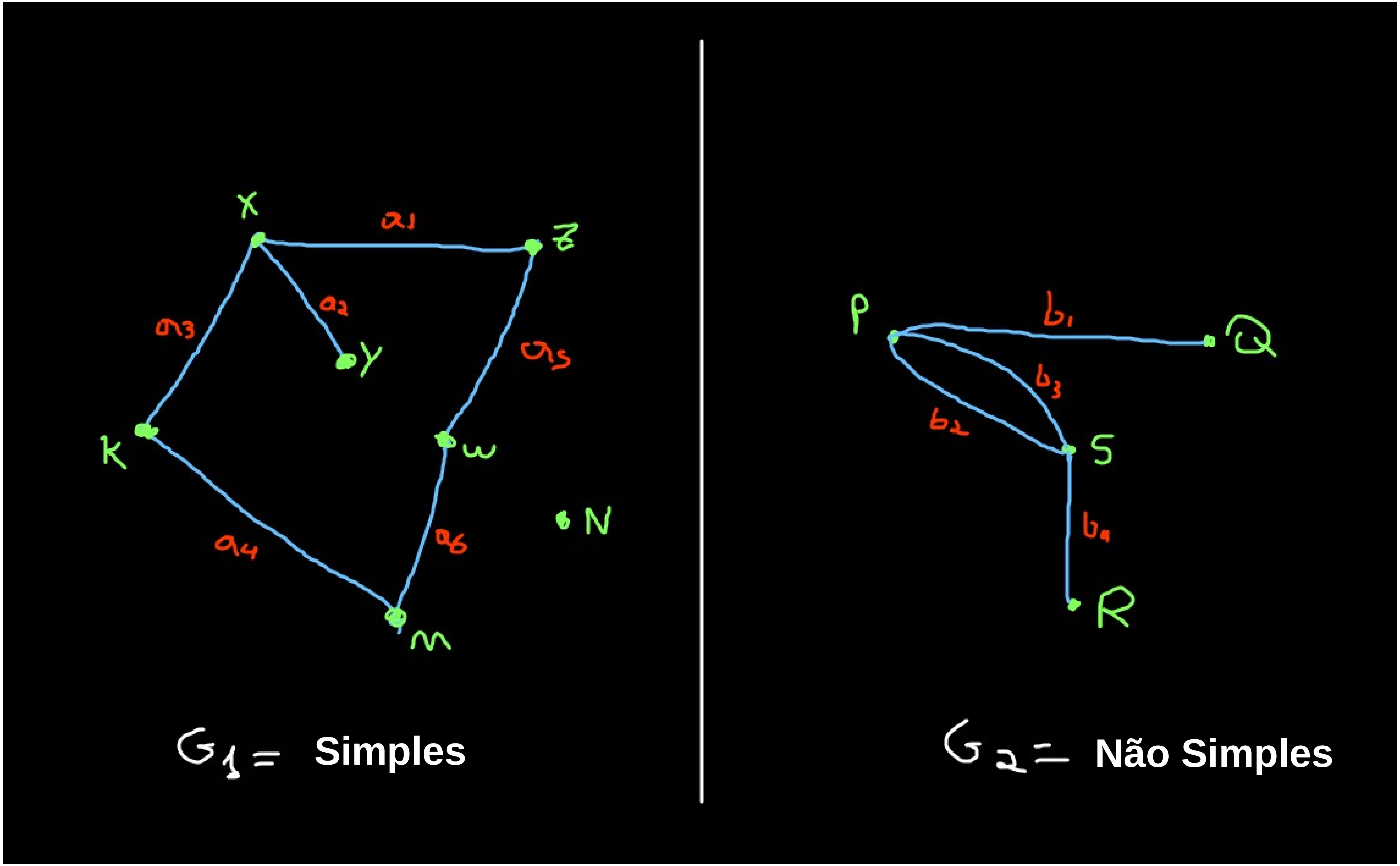
Grafo Simples

- Um grafo considerado **simples** não pode ter duas arestas com o mesmo par de pontas, ou seja **arestas paralelas** (**coincidentes**).
- Um grafo simples também não pode ter uma aresta com **pontas coincidentes**, ou seja não pode ter **laços**.

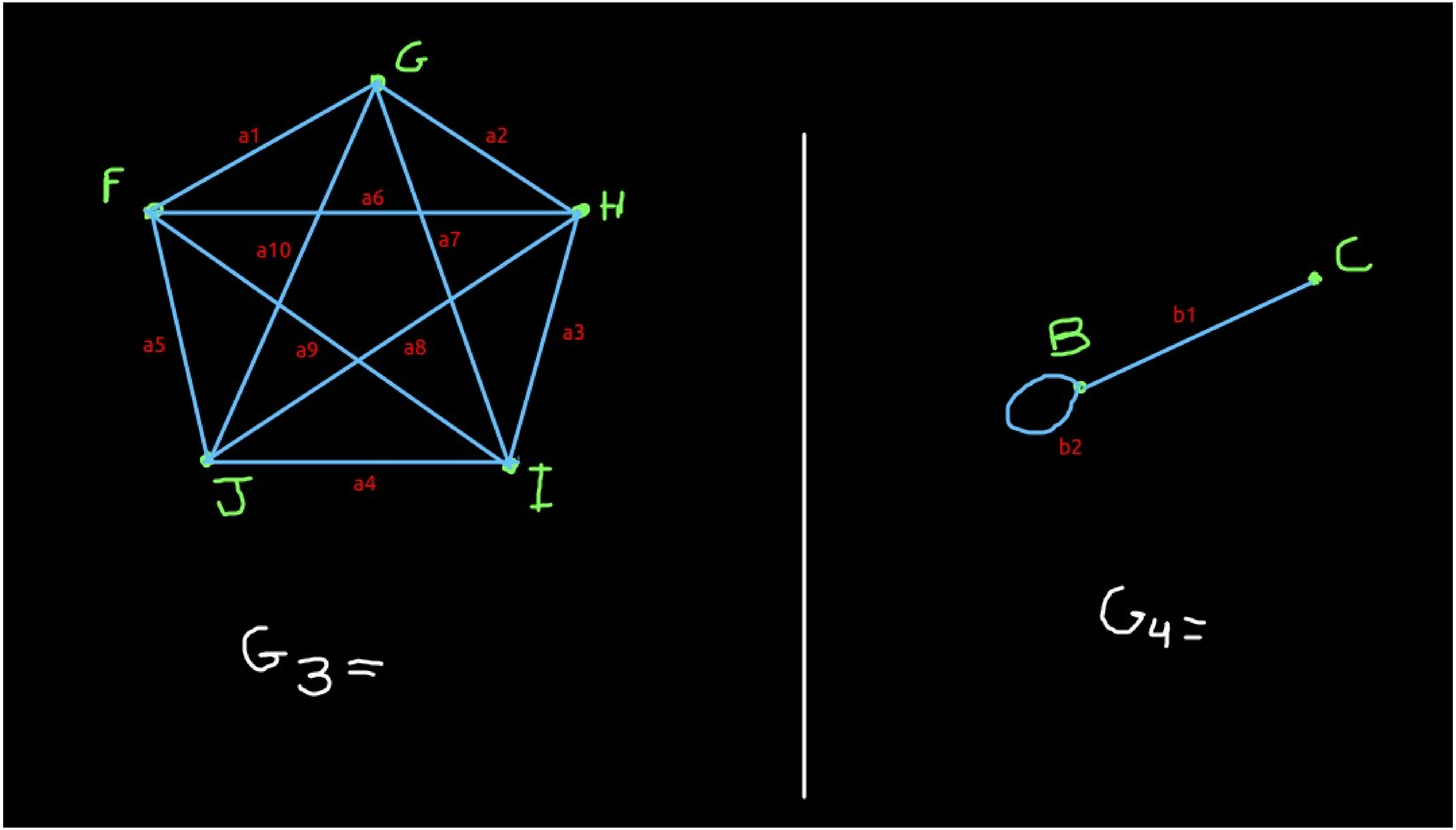
Teoria dos Grafos - Conceitos



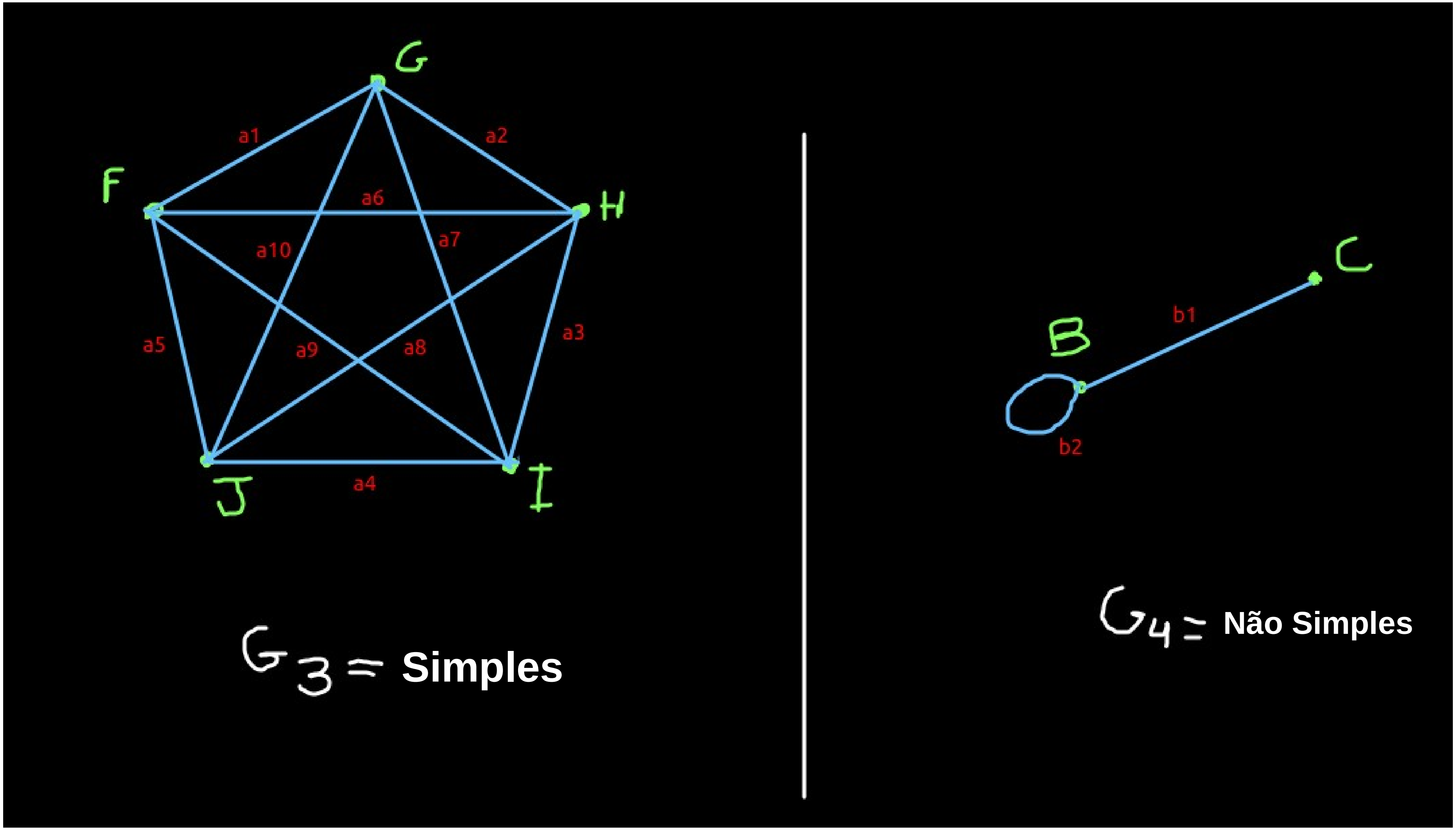
Teoria dos Grafos - Conceitos



Teoria dos Grafos - Conceitos



Teoria dos Grafos - Conceitos



Teoria dos Grafos - Conceitos

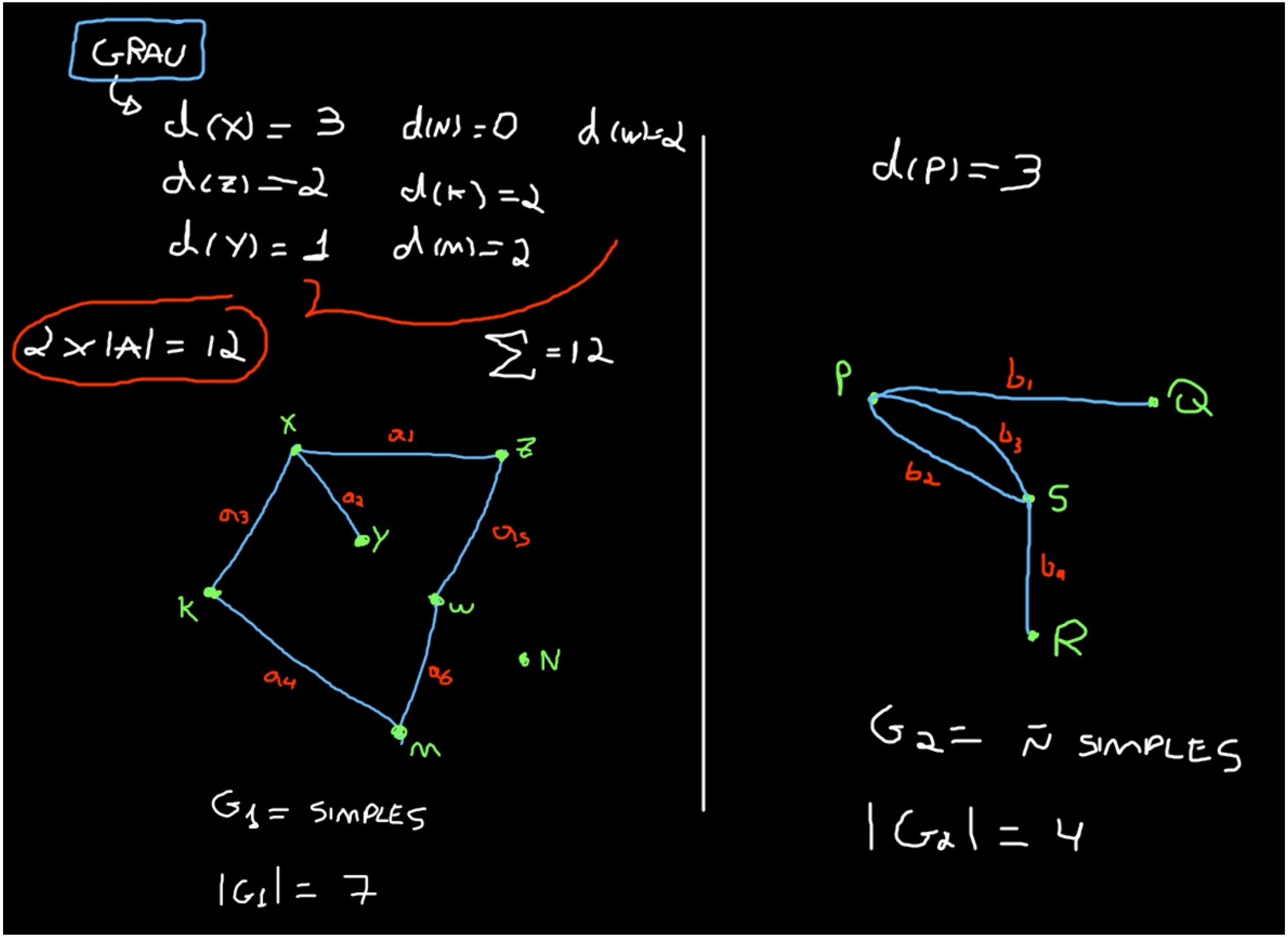
Cardinalidade e Grau

- A **cardinalidade** de um grafo G é o **número de vértices** que ele contém, e é denotado por **|G|**
- O **grau** de um vértice é dado pela **quantidade de arestas** que **incidem** sobre o vértice
- Teorema da soma dos graus:
  - A soma dos graus de um vértice deve ser igual ao dobro da quantidade de arestas

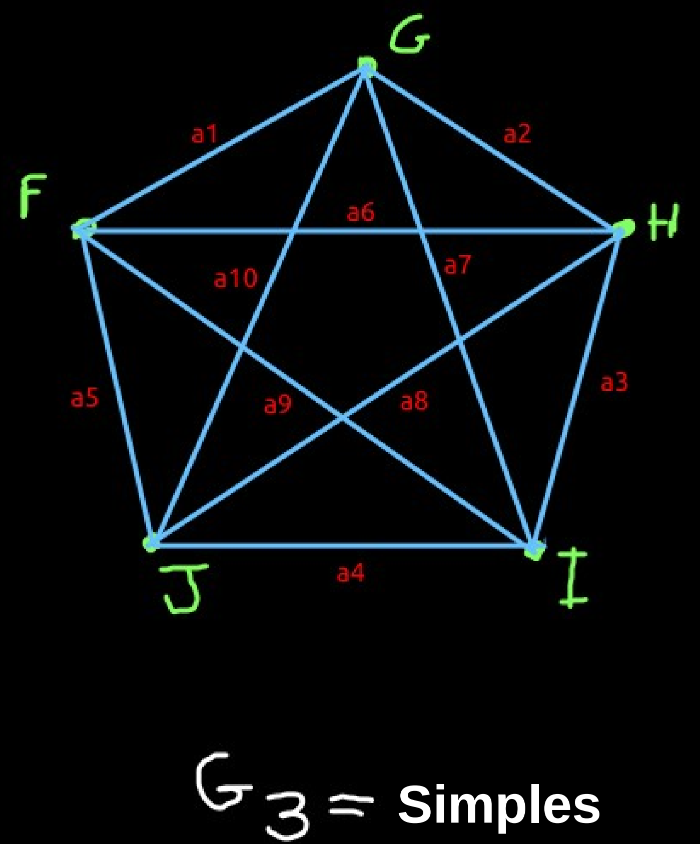
$$\sum_{x=1}^{|N|} d(v_x) = 2 * |A|$$

Desenhar grafo..

Teoria dos Grafos - Conceitos

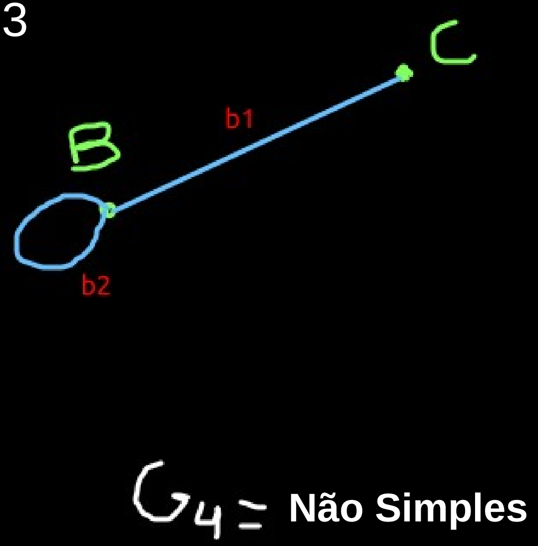


Teoria dos Grafos - Conceitos



O grau do vértice B é 3, pois tem um laço que representa 2 incidências.

d(B) = 3



Grafo Completo

- Um grafo **completo** é um **grafo simples** no qual **todos** os **vértices** distintos **são adjacentes**
- Como ele é necessariamente um grafo simples, um grafo completo não admite arestas paralelas e laços
- Grafos completos recebem nomes especiais de acordo com a quantidade de vértices que ele contém:
  - K1
  - K2
  - K3
  - ...

Grafo Completo

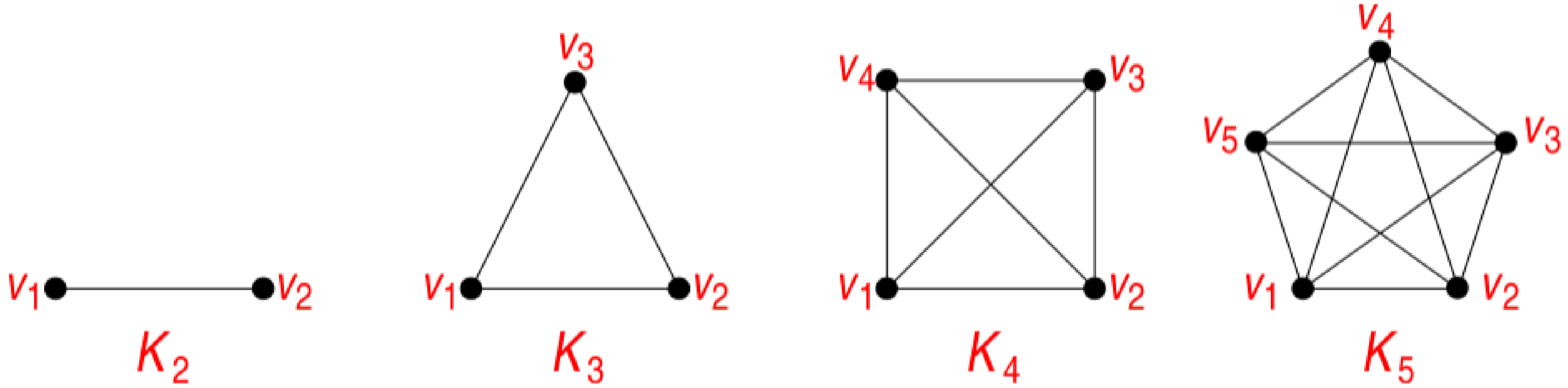
Desenhar grafo..

Teoria dos Grafos

Definição: Um grafo completo de n vértices, denominado K_n*, é um grafo simples com n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, cujo conjunto de arestas contém exatamente uma aresta para cada par de vértices distintos.

Grafo Completo

Exemplo: Grafos completos com 2, 3, 4, e 5 vértices.



*A letra K representa a letra inicial da palavra *komplett* do alemão, que significa “completo”.

Grafo Completo

Dado o grafo completo K_n temos que

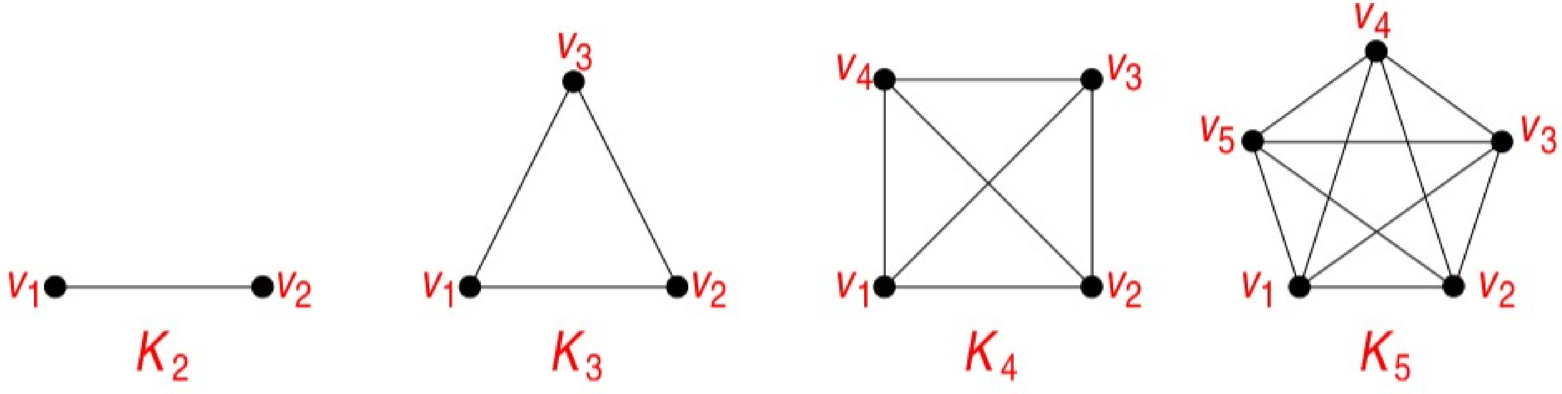
Vértice	está conectado aos vértices (não conectados ainda)	através de # arestas
v_1	$v_2, v_3, \ldots, v_n$	$n-1$
v_2	$v_3, v_4, \ldots, v_n$	$n-2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
v_{n-1}	v_n	1
v_n	–	0

ou seja, se contarmos o número total de arestas de K_n temos

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)\cdot n}{2} = \frac{n^2-n}{2} = \frac{(|V|^2-|V|)}{2}$$

Grafo Completo

Os grafos K_2, K_3, K_4, e K_5



possuem a seguinte quantidade de arestas:

Grafo	# arestas
K_2	1
K_3	3
K_4	6
K_5	10

Quantidade de grafos distintos com n vértices

O número total de grafos distintos com n vértices ($|V|$) é

$$2^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^{\frac{(|V|^2-|V|)}{2}}$$

que representa a quantidade de maneiras diferentes de escolher um subconjunto a partir de

$$\frac{n^2-n}{2} = \frac{(|V|^2-|V|)}{2}$$

possíveis arestas de um grafo com n vértices.

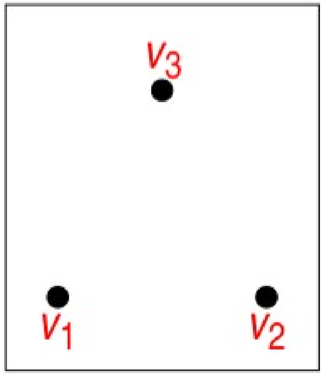
Quantidade de grafos distintos com n vértices

Exemplo: Quantos grafos distintos com 3 vértices existem?

- Um grafo com 3 vértices v_1, v_2 e v_3 possui no máximo 3 arestas, ou seja, $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3\}$.
- O número de sub-conjuntos distintos de E é dado por $\mathcal{P}(E)$, ou seja, o conjunto potência de E que vale $2^{|E|}$.

$$\mathcal{P}(E) = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset, \\ \{v_1v_2\}, \\ \{v_1v_3\}, \\ \{v_2v_3\}, \\ \{v_1v_2, v_2v_3\}, \\ \{v_1v_3, v_2v_3\}, \\ \{v_1v_2, v_1v_3\}, \\ \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3\} \end{array} \right\}$$

Cada elemento de $\mathcal{P}(E)$ deve ser mapeado num grafo com 3 vértices levando a um grafo distinto:

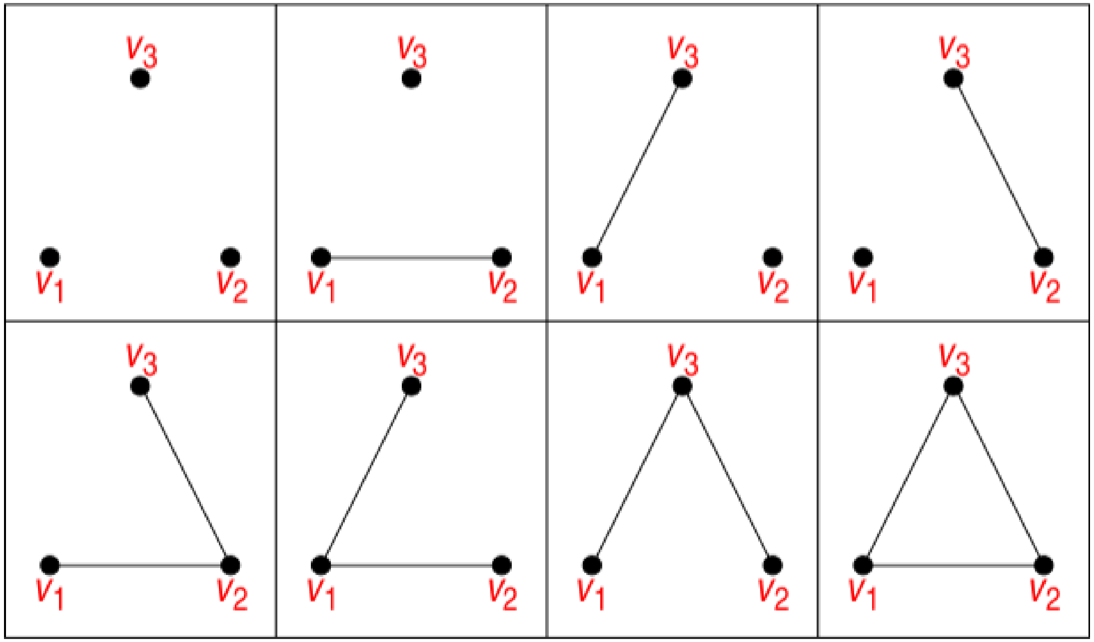


Quantidade de grafos distintos com n vértices

Exemplo: Quantos grafos distintos com 3 vértices existem (continuação)?

- Para cada elemento (sub-conjunto) do conjunto potência de E temos um grafo distinto associado, ou seja, o número total de grafos com 3 vértices é:

$$2^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^{\frac{3^2-3}{2}} = 2^3 = 8$$



Subgrafo

- Um **subgrafo** de um grafo consiste em um conjunto de vértices e arestas que são subconjuntos dos vértices e arestas do grafo original.
- **É uma parte do grafo original**

Passeio (*walk*)

- Um passeio ("walk") é uma sequência de vértices $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k$ tal que $v_{j-1}v_j \in E(G)$ para $j = 2, \ldots, k$. Note que em um passeio pode haver repetição de vértices e arestas. Se $v_1 = v_k$, dizemos que o passeio é fechado;
- caso contrário, o passeio é aberto. Um passeio fechado é também denominado **circuito** por alguns autores.

Passeio, Trilha, Caminho e Ciclo

Trilha (*Trail*)

- Uma trilha ("*trail*") é um passeio $v_1, v_2, . . . , v_{k-1}, v_k$ cujas **arestas** são todas distintas. Em uma trilha pode haver repetição de vértices, mas não de arestas. Assim como no caso dos passeios, as trilhas também podem ser classificadas em fechadas e abertas.

Passeio, Trilha, Caminho e Ciclo

Caminho (*Path*)

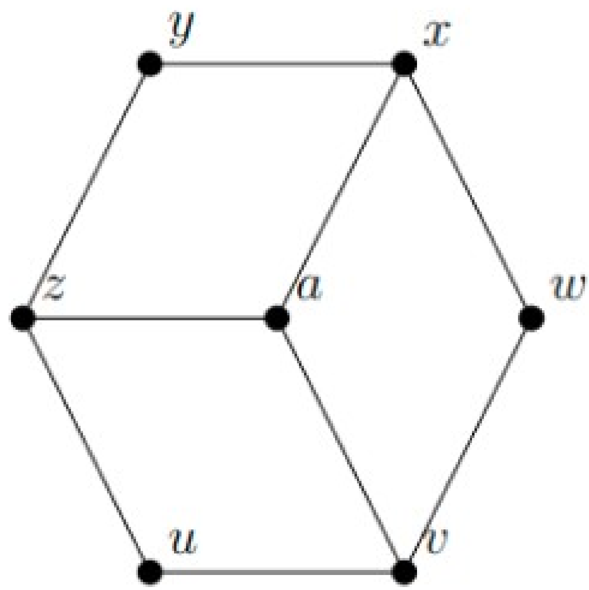
- Um caminho ("*path*") é um passeio $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k$ onde os vértices são todos distintos. Note que em um caminho, como não pode haver repetição de vértices, não há repetição de arestas. Portanto, todo caminho é uma trilha (mas nem toda trilha é um caminho). O comprimento de um caminho é o número de arestas neste caminho. Observe que não pode haver "caminho fechado", pois em um caminho não há repetição de vértices. Se **P** é um caminho e u, v são vértices deste caminho, denotamos por **P[u, v]** o subcaminho de **P** que vai de **u** até **v**.

Passeio, Trilha, Caminho e Ciclo

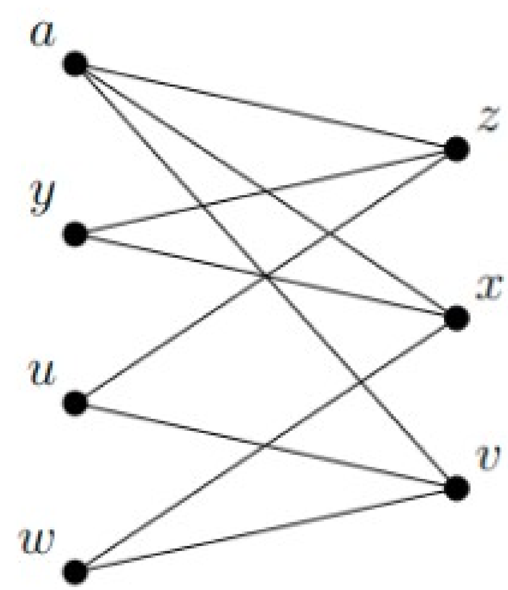
Ciclo

- Um ciclo ("cycle") é um passeio $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k$ tal que $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ é um caminho e $v_1 = v_k$. Por definição, em um ciclo devemos ter $k \geq 3$. O comprimento de um ciclo é o número de vértices (ou arestas) presentes no ciclo. Um ciclo de comprimento três é também chamado de triângulo. Um ciclo de comprimento ímpar [par] é chamado simplesmente de ciclo ímpar [ciclo par].

Percurso, Trilha, Caminho e Ciclo



a



b

a != b → **true ou false?**

Percurso, Trilha, Caminho e Ciclo

Exemplo 1.1. Seja G o grafo tal que $V(G) = \{a, u, v, w, x, y, z\}$ e $E(G) = \{uv, vw, wx, xy, yz, zu, av, ax, az\}$. Na Figura 1.1 temos duas representações geométricas diferentes para G.

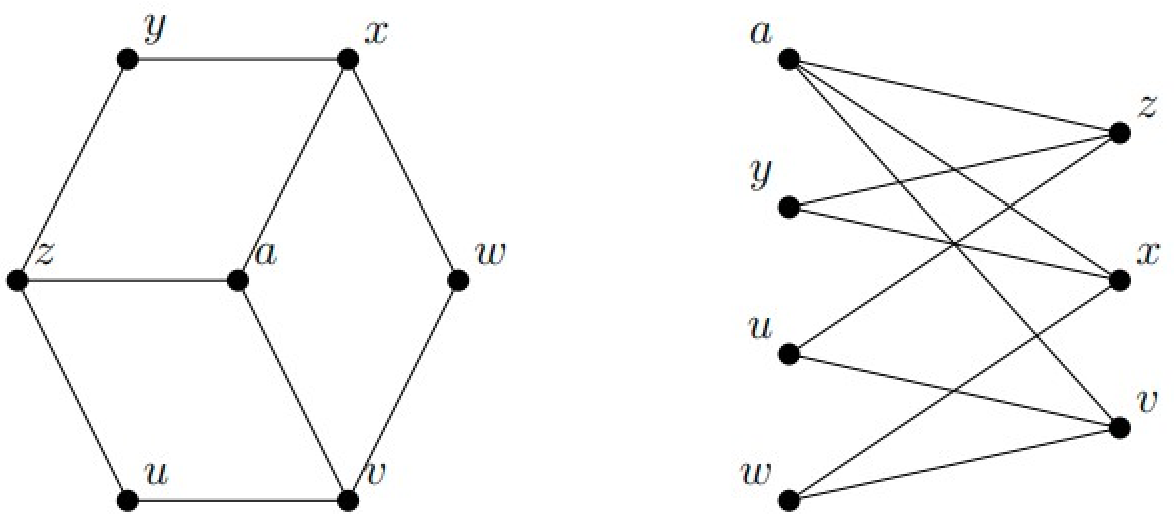
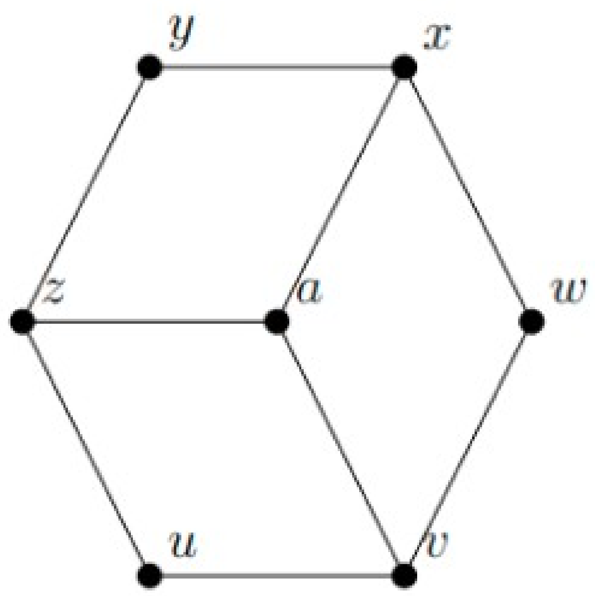


Figura 1.1: Duas representações geométricas diferentes para o mesmo grafo.

Percurso, Trilha, Caminho e Ciclo



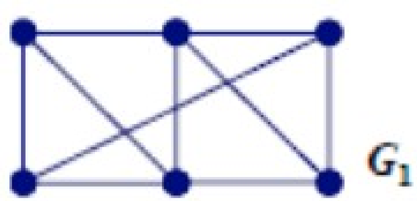
Exemplo 1.4. Considere novamente o grafo G do Exemplo 1.1. Então:

$W_1 = u, v, a, z, y, x, a, z$ é um passeio aberto;
$W_2 = u, v, a, z, y, x, a, z, u$ é um passeio fechado;
$T = a, v, w, x, a, z, y$ é uma trilha aberta;
$P_1 = u, v, w, x, a, z, y$ é um caminho;
$P_2 = u, v, w, x, y$ é um caminho induzido;
$C_1 = u, v, w, x, y, z, u$ é um ciclo;
$C_2 = u, v, a, z, u$ é um ciclo induzido.

Observação 1.1. Muitas vezes, será útil considerar passeios, trilhas, caminhos e ciclos como grafos (ou subgrafos), em vez de considerá-los simplesmente como sequências de vértices. Assim, por exemplo, podemos nos referir a um caminho P com k vértices como um grafo P tal que $V(P) = \{v_1, \ldots, v_k\}$ e $E(P) = \{v_{j-1}v_j \mid 2 \leq j \leq k\}$.

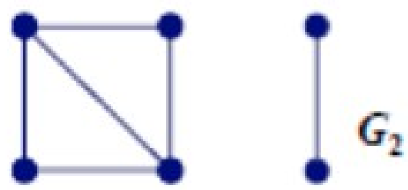
Grafo Conexo

- Um grafo G=(V, E, g) é **conexo** se existir um caminho entre **qualquer** par de vértices. Também chamado de conectado.
- Caso Contrário é **desconexo**.



conexo

Tem diferença do grafo conexo para o grafo completo. Qual é?

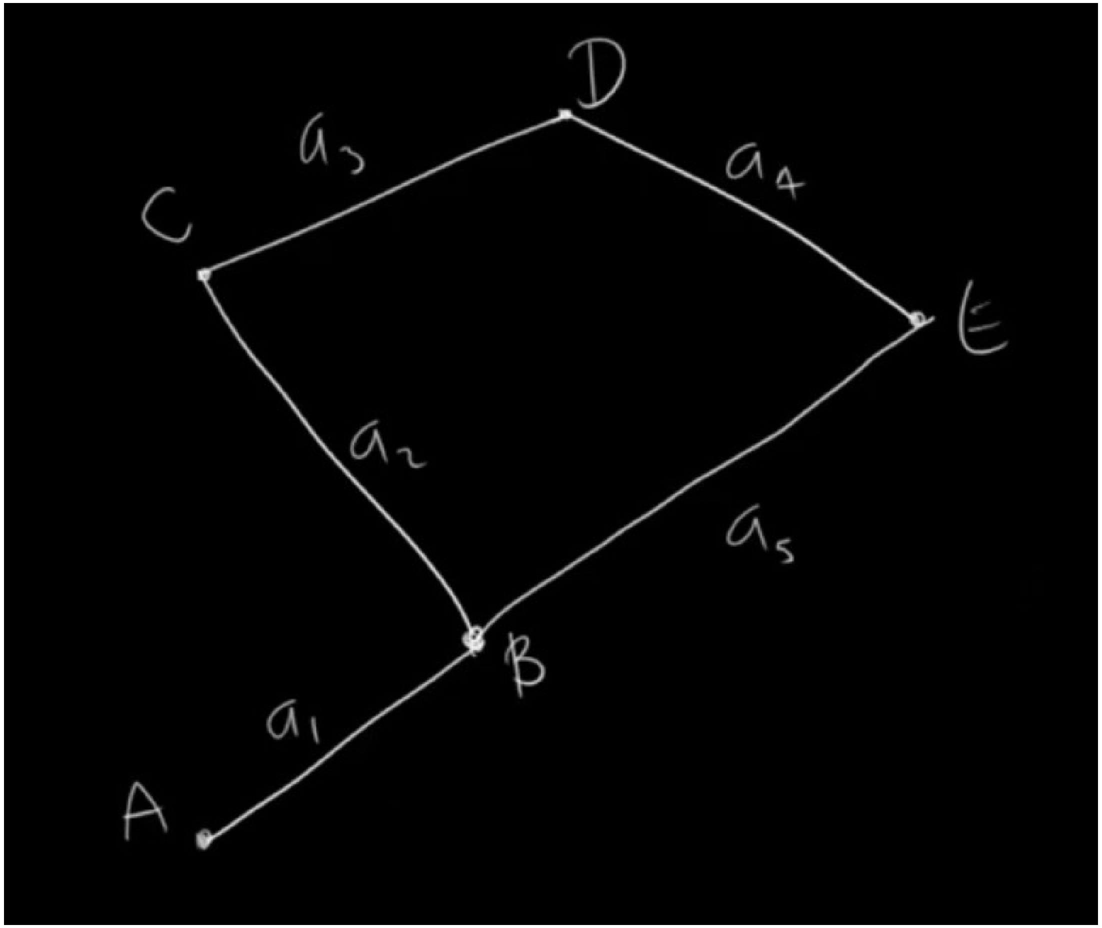


desconexo

Desenhar grafo.

Teoria dos Grafos - Conceitos

Grafo Conexo



Grafo Cíclico

- Um **ciclo** é um caminho de n_0 até n_0 novamente de forma que o único vértice que ocorre mais de uma vez é o n_0
- Um grafo sem ciclos é dito **acíclico**

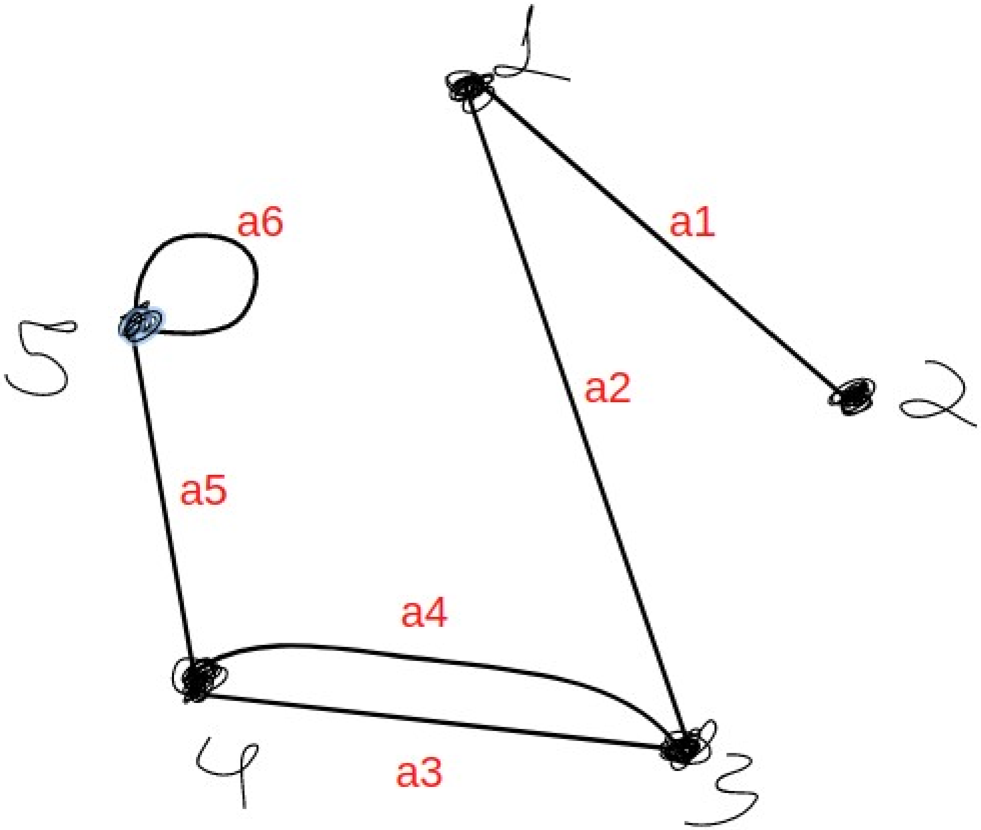
Exercício: Trace um grafo que tenha os vértices {1, 2, 3, 4, 5}, as arestas {a1, a2, a3, a4, a5, a6} e a função g, onde:

g(a1) = 1 – 2
g(a2) = 1 – 3
g(a3) = 3 – 4
g(a4) = 3 – 4
g(a5) = 4 – 5
g(a6) = 5 - 5

Trace caminhos que são ciclos no grafo, seguindo a definição:

Teoria dos Grafos - Conceitos

Grafo com ciclos



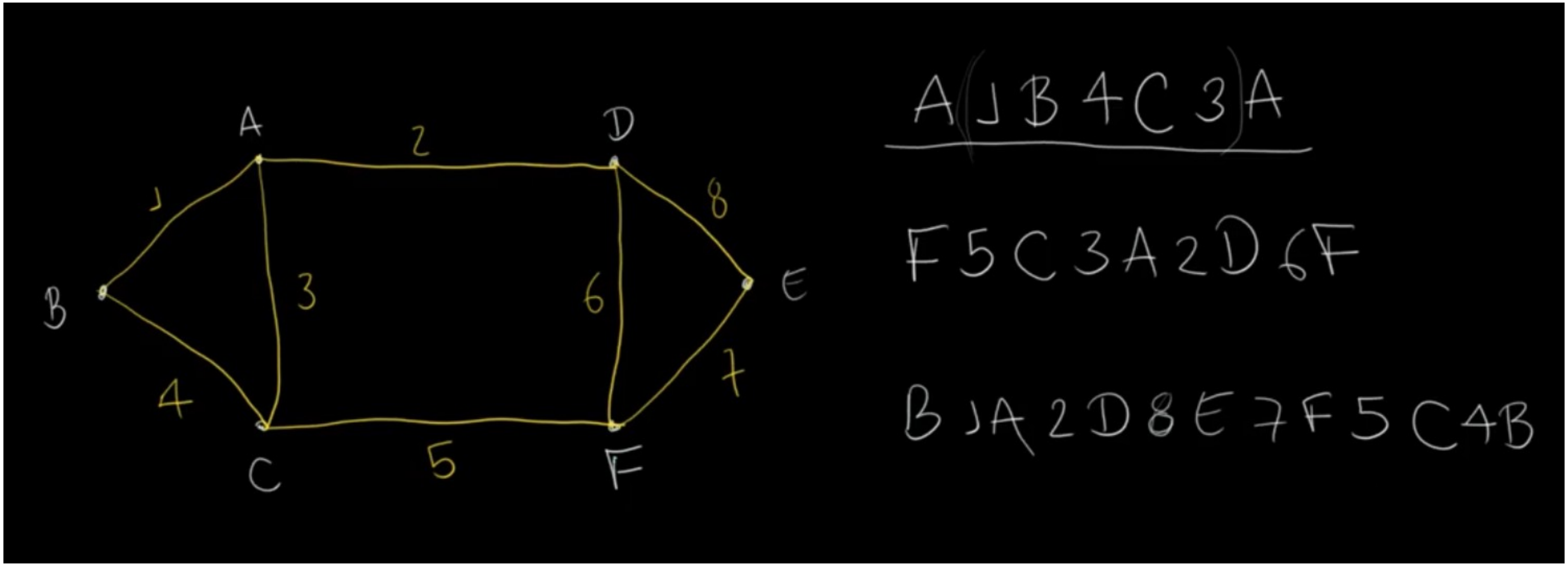
Ciclo no grafo:
3 a3 4 a4 3

NÃO é um ciclo:
3 a4 4 a4 3

Ciclo:
5 a6 5

Teoria dos Grafos - Conceitos

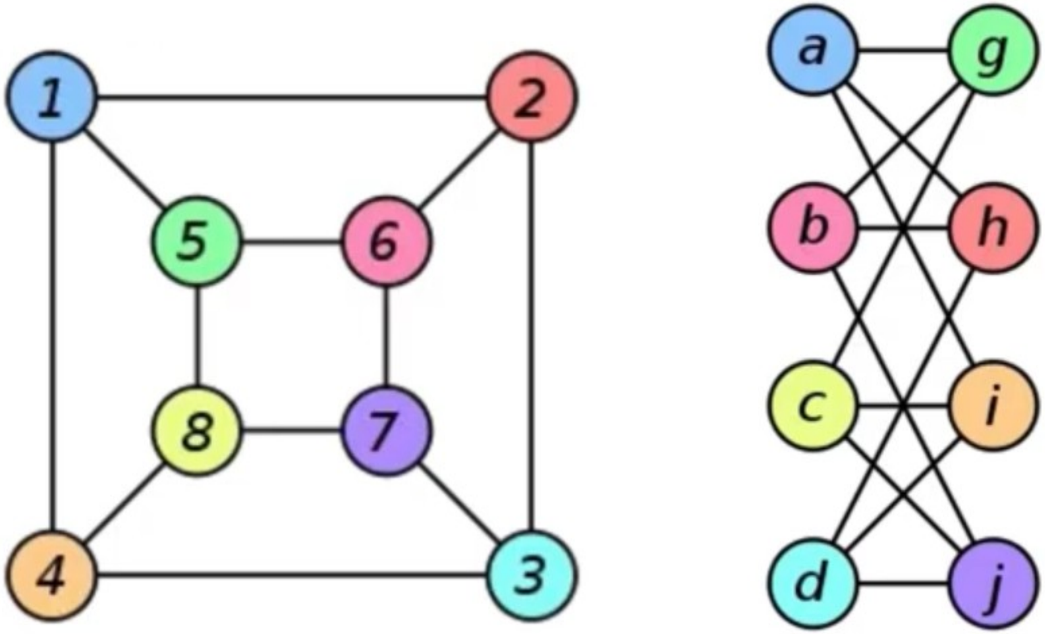
Grafo com ciclos



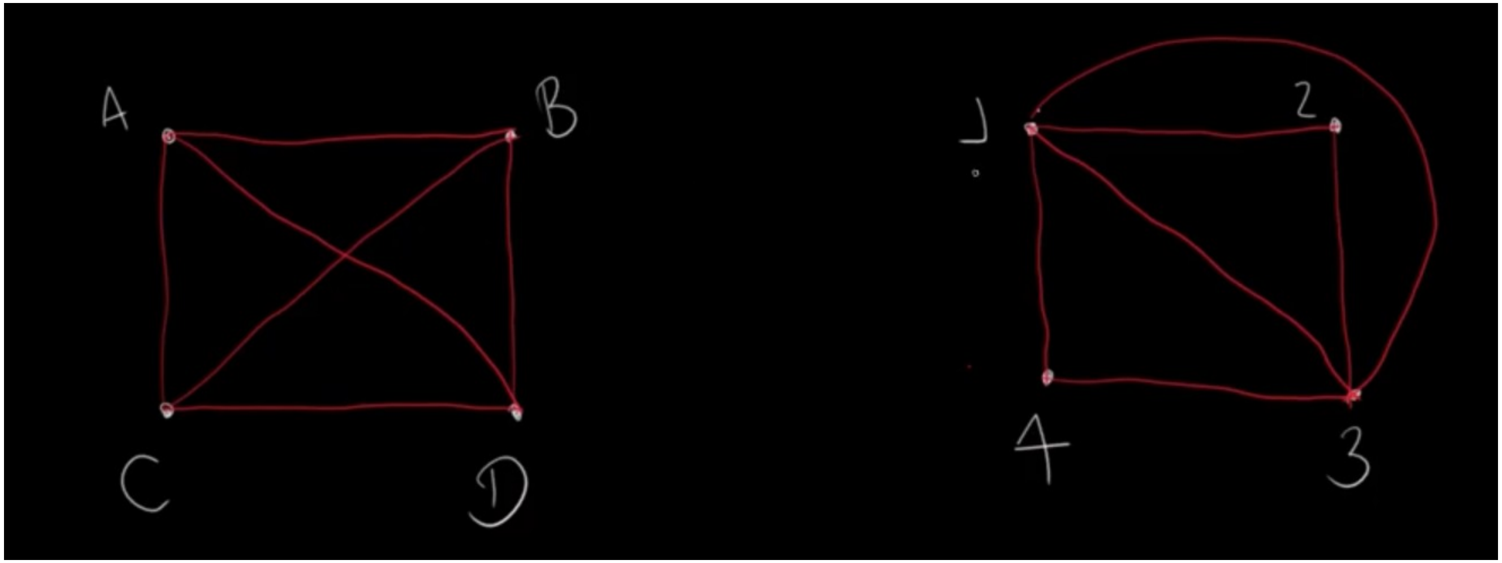
Teoria dos Grafos - Conceitos

Isomorfismo

- Um isomorfismo entre dois grafos G e H é uma bijeção f de V(G) em V(H) tal que dois vértices v e w são adjacentes em G se e somente se f(v) e f(w) são adjacentes em H.

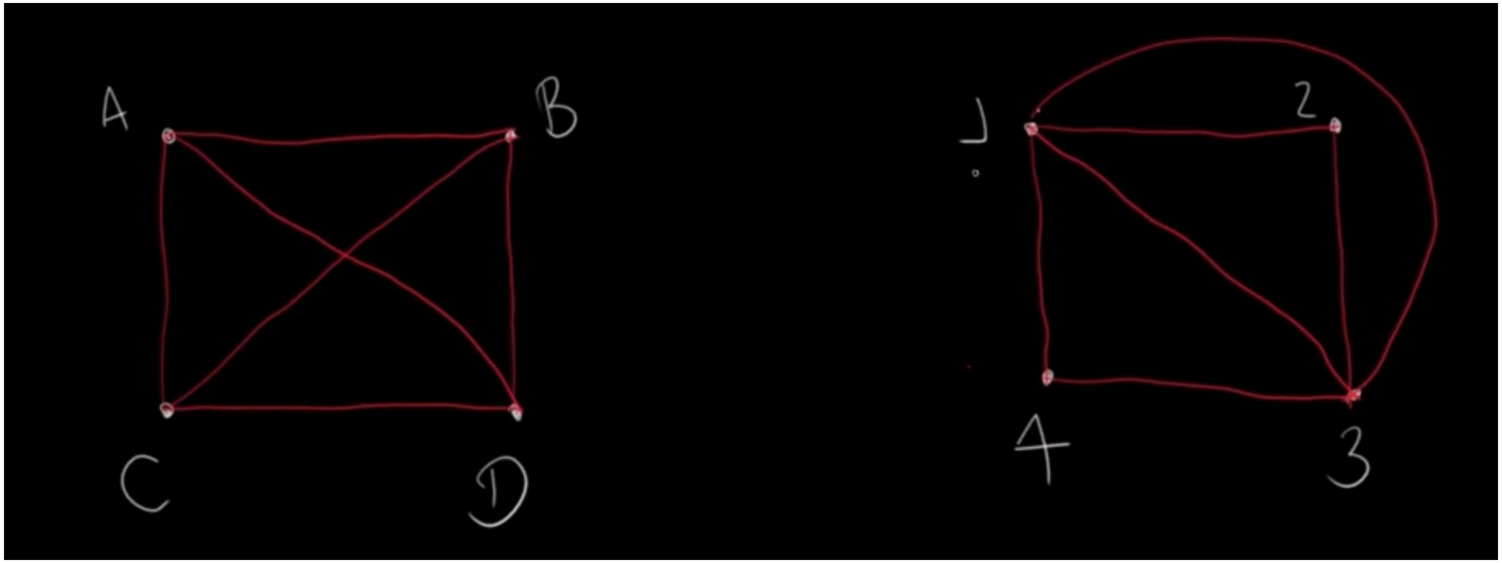


Isomorfismo



Esses grafos são isomorfos?

Isomorfismo



Esses grafos são isomorfos?

Resposta: NÃO

Isomorfismo

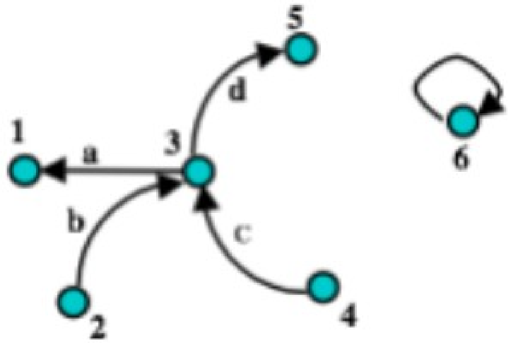
Não tem um algoritmo eficiente para dizer que um grafo é isomorfo. Por tem formas rápidas de checar o não isomorfismo.

Quando não é isomorfismo?

- Um grafo tem mais vértices que o outro.
- Um grafo tem mais arestas que o outro
- Um grafo tem arestas paralelas e o outro não.
- Um grafo tem um laço e o outro não.
- Um grafo tem um vértice de grau k e o outro não.
- Um grafo é conexo e o outro não.
- Um grafo tem um ciclo e o outro não

Grafo Dirigido

- Um grafo é dirigido (dígrafo) se suas arestas possuem orientação
- Denomina-se **arco** a aresta direcionada
- Em um grafo não dirigido, uma aresta pode ser representada por (i, j) ou por (j, i). O mesmo não ocorre em um grafo dirigido

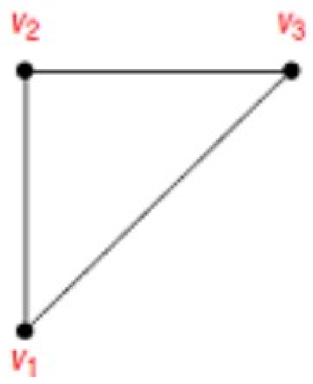


V = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
E = {(2, 3), (3, 1), (3, 5), (4, 3), (6, 6)}

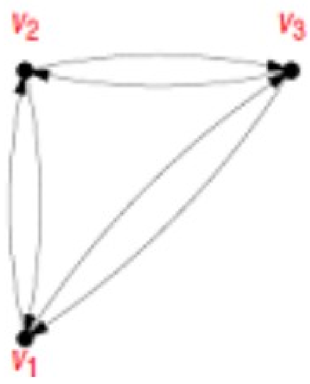
Grafo Dirigido

- Na versão dirigida G’ de um grafo não dirigido G = (V, E), cada aresta não dirigida (*i*, *j*) de G dá origem a dois arcos (*i*, *j*) e (*j*, *i*) em G’

Grafo não dirigido:

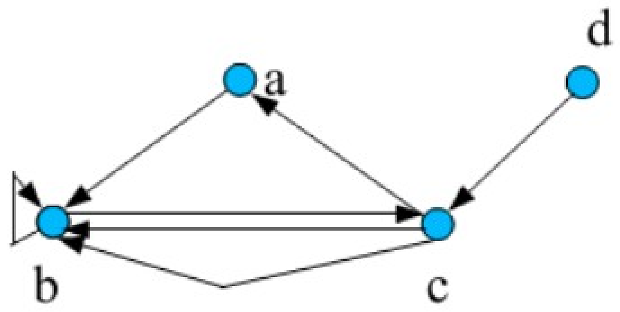


Grafo dirigido correspondente:



Grafo Dirigido

- Grau de vértices em grafo dirigido. Os vértices possuem:
    - Grau de entrada $d_{in}(v)$: número de arcos que chegam ao vértice v
    - Grau de saída $d_{out}(v)$: número de arcos que saem do vértice v



$d_{in}(a) = 1$
$d_{out}(a) = 1$
$d_{in}(b) = 4$
$d_{out}(b) = 2$
$d_{in}(c) = 2$
$d_{out}(c) = 3$
$d_{in}(d) = 0$
$d_{out}(d) = 1$

Referências

- T. Cormen - Algoritmos: teoria e prática - ELSEVIER, 2002
- Antonio Alfredo Ferreira Loureiro - loureiro@dcc.ufmg.br - http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro - UFMG