Álgebra Linear I

Aula 23

Professora Kelly Karina

Diagonalização de operadores

Dado um operador linear $T : V \to V$ a cada base de V corresponde uma matriz $[T]_B$ que representa T na base B.

Qual base utilizar de forma que a matriz de T nessa base seja a mais simples representante de T?

Propriedade:

Autovetores associados a autovalores distintos de um operador $T : V \to V$ são linearmente independentes.

Corolário:

Se $T : V \to V$ é linear, $dim V = n$ e T possui n autovalores distintos, o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, formado pelos autovetores correspondentes, é uma base de V.

Exemplo:

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (-3x - 5y, 2y)$.
A matriz canônica de T é:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A equação característica de T é:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & -5 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ou $(-3\lambda)(2 - \lambda) = 0$ que é $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$. Portanto os aultovalores de T são: $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, os autovetores correspondentes formam uma base do $\mathbb{R}^2$.

Calculando os autovetores por meio do sistema homogêneo

$$\begin{bmatrix} -3-\lambda & -5 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obtemos:

- para $\lambda_1 = 2$ os vetores $v_1 = (x, -x)$;
- para $\lambda_2 = -3$ os vetores $v_2 = (-x, 0)$;

Logo o conjunto $\{(1, -1), (-1, 0)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$.

Observação:

Denominemos a base $\{(1,-1),(-1,0)\}$ por P, ou seja

$$P = \{(1,-1),(-1,0)\}$$

Como

$$\begin{array}{lcrcl} T(1,-1) & = & 2(1,-1) & = & 2(1,-1)+0(-1,0) \\ T(-1,0) & = & -3(-1,0) & = & 0(1,-1)-3(-1,0) \end{array}$$

concluímos que a matriz

$$[T]_P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

representa o operador T na base de autovetores e é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal são λ_1 e λ_2.

Observação:

Se A a matriz canônica do operador T, ou seja $[T] = A$, e D a matriz do operador T numa base de autovetores P, então $D = M^{-1}AM$, onde M é a matriz mudança de base de P para A. Como $M = P$ (onde aqui estamos representando por P a matriz cujas colunas são os autovetores de T) então:

$$D = P^{-1}AP$$

A matriz quadrada A é diagonalizável se existe uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal. Dizemos nesse caso que P diagonaliza A.De forma equivalente:

Dizemos que um operador linear $T : V \to V$ é diagonalizável se existe uma base de V formada por autovetores de T.

Exemplo:

Determine uma matriz P que diagonaliza a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

e calcule $P^{-1}AP$.

Solução:

Na aula passada calculamos oa autovalores e autovetores de T e encontramos $\lambda_1 = 2$ e $v_1 = (1, 0, -1)$, $\lambda_2 = 3$ e $v_2 = (1, 1, 1)$ e $\lambda_3 = 6$ e $v_3 = (1, -2, 1)$.

Como λ_1, λ_2 e λ_3 são distintos, o conjunto $P = \{v_1, v_2, v_3\}$ forma base do $\mathbb{R}^3$ e portanto a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonaliza A.

De fato,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & -12 \\ -2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = D$$

Exercício

Seja T um operador linear do $\mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y)$$

Encontre uma base do $\mathbb{R}^2$ em relação à qual a matriz de T é diagonal.