Álgebra Linear I

Aula 6

Professora Kelly Karina

Definição:

Sejam V um espaço vetorial. Se S é um subconjunto não vazio de V tal que, com as operações (soma e produto por escalar) de V também é um espaço vetorial, então dizemos que S é um **subespaço vetorial** de V.

Observações:

- S herda várias propriedades de V;
- É necessário verificar se a soma e o produto por escalar são operações fechadas em S.

Teorema:

Um subconjunto S, não-vazio, de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V se forem satisfeitas as seguintes condições:

- Para quaisquer $u, v \in S$ tem-se $u + v \in S$;
- Para quaisquer $u \in S$ e $k \in \mathbb{R}$, tem-se $ku \in S$.

Demonstração: Exercício.

Exemplo:

Seja $V = \mathbb{R}^2$ munido das operações usuais. O conjunto $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y = 3x\}$ é um subespaço vetorial de V.

Demonstração:

- Note que $S_1 \neq \emptyset$, pois $(0, 0) \in S_1$.
- Sejam agora $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ elementos de S_1 (e portanto $y_1 = 3x_1, y_2 = 3x_2$).
  Podemos escrevê-los então como $(x_1, 3x_1)$ e $(x_2, 3x_2)$.

$$\begin{aligned} u + v &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \\ &= (x_1, 3x_1) + (x_2, 3x_2) \\ &= (x_1 + x_2, 3x_1 + 3x_2) \\ &= (x_1 + x_2, 3(x_1 + x_2)) \end{aligned}$$

Ou seja $u + v \in S_1$ (pois a segunda coordenada é o triplo da primeira).

- Seja $k \in \mathbb{R}$ e $u = (x, y) \in S_1$.

$$\begin{aligned} ku &= k(x, y) \\ &= k(x, 3y) \\ &= (kx, k3y) \\ &= (kx, 3(kx)) \end{aligned}$$

Ou seja $ku \in S_1$ (pois aqui a segunda coordenada também é o triplo da primeira).

Concluimos que S_1 é subespaço vetorial de V.

Exemplo:

Seja $V = \mathbb{R}^2$ munido das operações usuais. O conjunto $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x + 1\}$ não é um subespaço vetorial de V.

Por que S_2 não é um subespaço vetorial de V?

$0 = (0, 0) \notin S_2$.

Ou ainda, note que se $u = (x, x + 1)$ e $v = (y, y + 1)$ são elementos de S_2 então $u + v = (x + y, x + y + 2) \notin S_2$.

Exemplo:

O conjunto $S = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y = |x|\}$ não é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$.

Note que $0 = (0, 0) \in S$;

Mas, observe que $u = (1, 1) \in S$, $v = (-1, 1) \in S$ mas $u + v = (0, 2) \notin S$.

Segue que S não é subespaço vetorial de V.

Exemplo:

Seja $V = \mathbb{R}^3$, com as operações usuais. O conjunto $S = \{(x, y, z); x + 2y - z = 0\}$ é um subespaço vetorial de V.

Observações:

- Este conjunto representa um plano que passa pela origem, de forma que sabemos que de fato é um subespaço.

Exemplo:

Seja $V = M(2,2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$.

O conjunto $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}; a, c, \in \mathbb{R} \right\}$ é um subespaço vetorial de V.

Definição:

Seja V um espaço vetorial e sejam ainda S_1 e S_2 subespaços vetoriais de V. A interseção S de S_1 e S_2 (que denotaremos por $S = S_1 \cap S_2$) é o conjunto dos vetores de V que pertencem a S_1 e a S_2. Em símbolos:

$$S = S_1 \cap S_2 = \{v \in V; v \in S_1 \text{ e } v \in S_2\}$$

Teorema:
A interseção S de dois subespaços vetoriais S_1 e S_2 de V é um subespaço vetorial de V.

Ideia da dem:

$$\boxed{\begin{array}{lll}
u, v \in S = S_1 \cap S_2 & \rightarrow & \left\{\begin{array}{lll} u \in S_1, v \in S_1 & \rightarrow & u + v \in S_1 \\ u \in S_2, v \in S_2 & \rightarrow & u + v \in S_2 \end{array}\right. \\
 & \rightarrow & u + v \in S_1 \cap S_2 = S \\
u \in S = S_1 \cap S_2, k \in \mathbb{R} & \rightarrow & \left\{\begin{array}{lll} u \in S_1 & \rightarrow & ku \in S_1 \\ u \in S_2 & \rightarrow & ku \in S_2 \end{array}\right. \\
 & \rightarrow & ku \in S_1 \cap S_2 = S
\end{array}}$$

Exemplo:

- Considere o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$ com as operações usuais e os seguintes subespaços vetoriais:

$$S_1 = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$S_2 = \{(x, 0, z); x, z \in \mathbb{R}\}$$

Temos então que $S_1 \cap S_2 = \{(x, 0, 0); x \in \mathbb{R}\}$.

Exemplo:

Seja $V = M_2(\mathbb{R})$ com as operações usuais e os seguintes subespaços vetoriais:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} ; a, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Temos então que $S_1 \cap S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{R} \right\}$.

Definição:

Seja V um espaço vetorial e sejam S_1 e S_2 subespaços vetoriais de V. A soma de S_1 e S_2 (que denotaremos por $S = S_1 + S_2$) é o conjunto de todos os vetores de V que são a soma de um vetor de S_1 e um vetor de S_2. Em símbolos:

$$S = S_1 + S_2 = \{v \in V; v = v_1 + v_2 \text{ onde } v_1 \in S_1 \text{ e } v_2 \in S_2\}$$

Teorema:

A soma de dois subespaços vetoriais S_1 e S_2 de V é um subespaço vetorial de V.

Ideia da dem:

$$u, v \in S = S_1 + S_2 \quad \to \quad \begin{cases} u = u_1 + u_2; \ u_1 \in S_1, u_2 \in S_2 \\ v = v_1 + v_2; \ v_1 \in S_1, v_2 \in S_2 \end{cases}$$

$$\to \quad u + v = u_1 + u_2 + v_1 + v_2$$
$$= (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)$$

Como $\begin{array}{l} u_1 + u_2 \in S_1 \\ v_1 + v_2 \in S_2 \end{array}$

Segue que $u + v \in S_1 + S_2 = S$

$u \in S = S_1 + S_2, k \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad u = u_1 + u_2;\ u_1 \in S_1, u_2 \in S_2$

$ku = k(u_1 + u_2) = ku_1 + ku_2$

Como $\begin{matrix} ku_1 \in S_1 \\ kv_1 \in S_2 \end{matrix}$

Segue que $ku \in S_1 + S_2 = S$

Exemplo:

Consideremos os mesmos espaços com seus respectivos subespaços vetoriais do exemplo anterior e verifiquemos qual será o subespaço $S = S_1 + S_2$.

- O espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$ com as operações usuais e os subespaços vetoriais:

$$S_1 = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$S_2 = \{(x, 0, z); x, z \in \mathbb{R}\}$$

Temos então que $S_1 + S_2 = \{(x, y, z); x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

- Seja $V = M_2(\mathbb{R})$ com as operações usuais e os seguintes subespaços vetoriais:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} ; a, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Temos então que $S_1 + S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{R} \right\}$ [1].

[1] Aqui vale uma nota análoga à anterior.

Soma Direta de dois subespaços vetoriais

Definição:

Seja V um espaço vetorial e sejam S_1 e S_2 subespaços vetoriais de V. Dizemos que V é a soma direta de S_1 e S_2 (e representamos por $V = S_1 \oplus S_2$ se:

1. $V = S_1 + S_2$;
2. $S_1 \cap S_2 = \{0\}$.

Exemplo:

- Consideremos o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$ com as operações usuais e os subespaços vetoriais:

$$S_1 = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$S_2 = \{(x, 0, z); x, z \in \mathbb{R}\}$$

Já sabemos que $S_1 + S_2 = \{(x, y, z); x, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3 = V$;

Se $(x, y, z) \in S_1 \cap S_2$ então $z = 0$ e $y = 0$, ou seja, ele é do tipo $(x, 0, 0)$. Neste caso não podemos dizer que V é soma direta de S_1 e S_2.

Exemplo:

- Consideremos, mais uma vez, o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$ com as operações usuais mas agora consideremos os seguintes subespaços vetoriais:

$$S_1 = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$S_2 = \{(0, 0, z); x, z \in \mathbb{R}\}$$

Temos que $S_1 + S_2 = \{(x, y, z); x, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3 = V$.

Se $(x, y, z) \in S_1 \cap S_2$ então $z = 0$ e $x = y = 0$, ou seja, ele é necessariamente o elemento $(0, 0, 0)$. Neste caso $V = S_1 \oplus S_2$.

Teorema:

Se V é a soma direta de S_1 e S_2 então todo vetor $v \in V$ se escreve, de modo único, na forma $u = u_1 + u_2$ onde $u_1 \in S_1$ e $u_2 \in S_2$.

Demonstração:

Suponha que $u = u_1 + u_2$ e que $u = v_1 + v_2$ onde $u_1, v_1 \in S_1$ e $u_2, v_2 \in S_2$. Então temos:

$$\begin{array}{rcl} u_1 + u_2 & = & v_1 + v_2 \\ u_1 - v_1 & = & v_2 - u_2 \end{array}$$

Note que $u_1 - v_1 \in S_1$ e $v_2 - u_2 \in S_2$, além disso, estas expressões são iguais, então ambas estão em $S_1 \cap S_2$. Como $S_1 \cap S_2 = \{0\}$ (pois a soma é direta) então

$$u_1 - v_1 = v_2 - u_2 = 0$$

Ou seja, $u_1 = v_1$ e $u_2 = v_2$. $\blacksquare$

Exemplo:

No exemplo anterior vimos que $V = \mathbb{R}^3$ é a soma direta de:

$$S_1 = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\} \text{ e}$$
$$S_2 = \{(0, 0, z); x, z \in \mathbb{R}\}$$

Pelo Teorema sabemos que se $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ então se escreve como soma de um elemento de S_1 e um de S_2 de maneiro única. De fato, $(x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z)$.