CAPÍTULO 6

A LINGUAGEM DA LÓGICA DE PREDICADOS

6.1 Introdução

Na primeira parte deste livro, estudamos a Lógica Proposicional, em que as fórmulas são veritativo-funcionais, ou seja, suas interpretações não dependem da estrutura interna de suas proposições, mas unicamente do modo como se combinam. O termo "veritativo-funcional" expressa, exatamente, esta propriedade: a verdade de uma sentença depende funcionalmente das suas partes. Em outras palavras, a interpretação da fórmula $P \vee Q$, por exemplo, depende apenas da interpretação e do modo como os símbolos proposicionais P e Q se combinam. E, nessa análise, não é necessário saber a constituição interna das proposições representadas pelos símbolos P e Q. Utilizando as proposições, muito pode ser feito, como, por exemplo, o que foi apresentado na primeira parte do livro. É possível introduzir conceitos importantes como sintaxe, semântica, prova, correção, completude etc. Entretanto, há um grupo fundamental de sentenças, ou argumentos, cuja interpretação é, também, determinada pela estrutura interna de seus enunciados simples. Esses tipos de argumentos são denominados silogismos categóricos e foram inicialmente estudados por Aristóteles. Sua análise é iniciada considerando os enunciados categóricos que tradicionalmente possuem as formas a seguir [Salmon]:

- "todos os alunos são inteligentes";
- "nenhum aluno é inteligente";

- "alguns alunos são inteligentes";
- "alguns alunos não são inteligentes".

Para interpretar enunciados categóricos como esses, é necessário interpretar os quantificadores "todos", "nenhum" e "algum". Considere, por exemplo, outra sentença: "Todos os alunos são inteligentes." Nesse caso, para saber se ela é verdadeira, ou falsa, é necessário, pelo menos, saber de quais alunos estamos falando. Se estamos considerando apenas o conjunto dos alunos campeões da Olimpíada Nacional de Matemática, certamente temos uma sentença verdadeira. Mas, se considerarmos todos os alunos do país, talvez não tenhamos o mesmo resultado. Portanto, para interpretar uma sentença como essa, é necessário saber algo que está implicitamente representado na própria estrutura da sentença. Em outras palavras, quando dizemos que todos os alunos são inteligentes, devemos deixar claro de que alunos estamos falando.

Este capítulo inicia a segunda parte do livro na qual consideramos o estudo da Lógica de Predicados e nela, estudamos sentenças como os enunciados categóricos. Os passos a serem seguidos são análogos àqueles considerados na primeira parte. Inicialmente, é definida a linguagem da Lógica de Predicados, analisada do ponto de vista sintático e semântico. Também são considerados alguns mecanismos que verificam fórmulas válidas. Então, para começar, analisamos neste capítulo os fundamentos da linguagem da Lógica de Predicados, cuja definição é semelhante à definição de outras linguagens. Como na linguagem da Lógica Proposicional, o alfabeto é definido inicialmente, e, em seguida, os outros elementos da linguagem. O resultado é uma linguagem mais rica que a da Lógica Proposicional, pois, além de conter os seus objetos, a linguagem da Lógica de Predicados possui quantificadores, símbolos funcionais e de predicados. Nesse sentido, a Lógica de Predicados é uma extensão da Lógica Proposicional, o que lhe confere maior poder de representação.

6.2 Alfabeto da Lógica de Predicados

A linguagem da Lógica de Predicados contém tudo que a linguagem da Lógica Proposicional contém e algo mais. Isso, porque a linguagem da Lógica de Predicados é uma extensão da linguagem da Lógica Proposicional. E sendo uma extensão, há vários tipos de sentenças, que não possuem representações adequadas na Lógica Proposicional, mas podem ser representadas, um pouco melhor, na Lógica de Predicados. Considere, por exemplo, as declarações:

- Todo aluno de Computação é inteligente. Zé é aluno de Computação. Logo, Zé é inteligente;
- A adição de dois números ímpares quaisquer é um número par;
- Dado um número qualquer, existe um número primo maior que ele.

A dificuldade em representar tais argumentos na Lógica Proposicional se deve às quantificações indicadas pelas palavras: "todo," "qualquer" e "existe". A linguagem da Lógica de Predicados estende a linguagem da Lógica Proposicional possibilitando a representação desses tipos de quantificação. Além disso, são considerados também funções, predicados e variáveis, de forma análoga ao Cálculo Diferencial. Assim, a Lógica de Predicados é obtida inicialmente pela extensão do alfabeto da Lógica Proposicional. Seguindo essa mesma ideia, a Lógica Proposicional também pode ser estendida de forma diferente da que consideramos aqui, ou, ainda, substituída, obtendo outras Lógicas. Isto é, há várias formas de extender, ou substituir, a Lógica Proposicional, como, por exemplo:

1. Lógicas Complementares são aquelas cujo objetivo é estender a Lógica Clássica. Um exemplo de Lógica Complementar é a Lógica Temporal.
2. Lógicas Alternativas ou heterodoxas têm como objetivo substituir a Lógica Proposicional Clássica. Exemplos de Lógicas Alternativas são as Lógicas Polivalentes, em que as sentenças declarativas podem ser interpretadas diferentemente de T e F.

Mas, no nosso caso, tais fatos são apenas informações. A Lógica de Predicados é uma extensão clássica da Lógica Proposicional e seu alfabeto é definido pelo conjunto de símbolos descritos a seguir.

Definição 6.1 (alfabeto da Lógica de Predicados) *O alfabeto da Lógica de Predicados é constituído por:*

1. *símbolos de pontuação: (,);*
2. *um conjunto enumerável de símbolos para variáveis:* $x, y, z, w, x_1, y_1, \ldots$;
3. *um conjunto enumerável de símbolos para funções:* $f, g, h, f_1, g_1, h_1, f_2, g_2, \ldots$;
4. *um conjunto enumerável de símbolos para predicados:* $p, q, r, p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, \ldots$;
5. *conectivos:* $\neg, \vee, \forall, \exists$.

Associado a cada símbolo para função ou predicado, temos um número inteiro não negativo k. Esse número indica a aridade, ou seja, o número de argumentos da função ou predicado.

Como podemos observar, o alfabeto da linguagem da Lógica de Predicados é uma extensão do alfabeto da Lógica Proposicional, Definição 3.14. Ele contém os mesmos símbolos de pontuação e parte dos conectivos. Mas, onde estão os símbolos proposicionais? Espere um pouco. Como analisamos mais adiante, eles estão representados, implicitamente, no conjunto dos símbolos para predicados. Além dos símbolos de pontuação e dos conectivos, o alfabeto da Lógica de Predicados contém conjuntos infinitos e enumeráveis de símbolos para funções, predicados e variáveis.

Variáveis. Os símbolos para variáveis formam um novo conjunto, o que não ocorre na Lógica Proposicional. Como é visto mais adiante, as variáveis têm um papel importante na Lógica de Predicados. Isso não é uma surpresa, pois usamos, com frequência, as variáveis em Matemática, Computação e muitas outras áreas. Em programação em Lógica, por exemplo, as variáveis são utilizadas na determinação das respostas dos programas [Casanova], [Chang], [Lloyd].

Variáveis e metavariáveis. Na Lógica Proposicional, o símbolo $\breve{P}$ é utilizado como uma metavariável, o que significa que ele representa qualquer símbolo proposicional. Como foi enfatizado anteriormente, $\breve{P}$ não é um símbolo da linguagem da Lógica Proposicional, mas sim um símbolo da metalinguagem. O símbolo $\breve{P}$ é utilizado para representar qualquer símbolo proposicional do conjunto $\{P, Q, R, J, P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2, Q_2, \ldots\}$. Na Lógica de Predicados também há metavariáveis. Só que, nesse caso, o alfabeto também contém suas próprias variáveis. Isso significa que na Lógica de Predicados há variáveis que ocorrem na linguagem-objeto e outras que ocorrem na metalinguagem. As variáveis da linguagem são denotadas por $x, y, z, w, x_1, y_1, \ldots$.

Notação. Como na Lógica Proposicional, utilizamos um pequeno risco acima de um símbolo para indicar que ele representa uma metavariável. Nesse sentido, $\breve{x}, \breve{p}$ e $\breve{f}$ representam metavariáveis de variáveis, símbolos proposicionais, de predicados e de funções.

Predicados. Observe inicialmente que os símbolos para predicados não ocorrem na Lógica Proposicional. Eles são utilizados para representar propriedades e relações entre objetos. Ao dizer, por exemplo, que Maria é bonita, temos que "bonita" é uma propriedade de Maria. Tal fato pode ser representado, na Lógica de Predicados, por $p(x)$. Nesse caso, de uma maneira informal, podemos dizer:

$p(x)$ é verdadeiro se, e somente se, x é bonita.

Dessa forma, o símbolo de predicado p é utilizado para representar a propriedade de ser bonita. E quando x é interpretado como sendo Maria, o resultado da interpretação da sentença é verdadeiro. Os símbolos para predicados também podem ser utilizados para expressar relações entre objetos. A relação "irmão", por exemplo, pode ser representada por $q(x, y)$. Neste caso, de maneira informal, dizemos que:

$q(x, y)$ é verdadeiro se, e somente se, a pessoa x é irmã de y.

Funções. Como os símbolos para predicados, os símbolos para funções também não ocorrem na Lógica Proposicional. Na Lógica, os símbolos para função têm utilização análoga àquela que ocorre na Aritmética. Isto é, não há diferença alguma entre as funções da Lógica e as da Aritmética. E, certamente, já conhecemos bastante sobre o conceito de função. Na Lógica, na Matemática e em Computação os conceitos de função e de predicado são fundamentais. Em Computação, por exemplo, há linguagens que se baseiam nesses conceitos, como as linguagens funcionais *SCHEME* e *LISP* [Winston], [Dybvig], e as linguagens em Lógica, [Casanova], [Chang] e [Lloyd].

Símbolos para constantes. Se temos símbolos para funções, temos as constantes. Isso porque cada símbolo para função possui um número k, não negativo, associado, que representa sua aridade. E quando $k = 0$, temos uma função com zero argumento. Nesse caso, como no Cálculo por exemplo, as funções com zero argumento, ou aridade nula, representam as constantes. Ou seja, elas são as funções constantes.

Notação. Os símbolos para funções zero-árias, com aridade nula, são denominados constantes. Elas são representadas por $a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, \ldots$ Como há enumeráveis símbolos para funções com aridade zero, há também um conjunto infinito e enumerável de constantes.

Símbolos proposicionais. Cada símbolo para predicado possui um número k, não negativo, associado, que representa sua aridade. Quando $k = 0$, temos um predicado com zero argumento. E os predicados com aridade zero representam os símbolos proposicionais, que ocorrem no alfabeto da Linguagem Proposicional.

Notação. Os símbolos para predicados zero-ários são denominados símbolos proposicionais. Como na Lógica Proposicional, eles são representados por $P, Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2, Q_2, \ldots$. Observe que há um conjunto infinito e enumerável de símbolos proposicionais.

Conectivos. O conjunto dos conectivos contém $\neg$ e $\vee$, que pertencem à versão simplificada do alfabeto da Lógica Proposicional, Definição 3.14. Além desses conectivos, há também $\forall$ e $\exists$, que representam os quantificadores universal, para todo, e existencial, existe, respectivamente. Como é analisado mais adiante, tais quantificadores ampliam, em muito, o poder de representação da Lógica de Predicados, como também a complexidade das demonstrações e dos resultados.

Uma maneira informal de ver o quantificador universal. Na nossa linguagem cotidiana, utilizamos, com frequência, os quantificadores universal e existencial.

- Todo homem é mortal.
- Todos os homens são mortais.
- Os homens são mortais.
- Homens são sempre mortais.
- Somente mortais é que são homens.
- Apenas mortais é que são homens.
- Só mortais é que são homens.
- Se algo é homem, então é mortal.

Leia com atenção e verifique que todas essas sentenças têm o mesmo sentido. De maneira informal, se consideramos que a variável x representa homens e o predicado $q(x)$ é verdadeiro quando x é mortal, então as sentenças podem ser representadas por $(\forall x)q(x)$. Nesse caso, o quantificador $(\forall x)$ expressa a universalização de x, no sentido que todo, para todo, qualquer que seja, todos ou cada x, sem exceção, satisfaz $p(x)$. Mas cuidado! A tradução de sentenças que utilizam quantificadores universais para a Lógica não deve ser feita às pressas. Por exemplo, o par de sentenças a seguir não expressa as mesmas ideias:

- Somente os mortais são homens.

- Somente mortais é que são homens.

Da mesma forma, o par de sentenças a seguir não expressa as mesmas ideias:

- Todos os homens são mortais.
- Todos os mortais são homens.

Uma maneira informal de ver o quantificador existencial. Considere as sentenças:

- Existe homem inteligente.
- Há um homem inteligente.
- Há pelo menos um homem inteligente.
- Há homens inteligentes.
- Algum homem é inteligente.
- Alguns homens são inteligentes.

Verifique que todas essas sentenças têm o mesmo sentido. De maneira informal, se consideramos que a variável x representa homens e o predicado $q(x)$ é verdadeiro quando x é inteligente, então as sentenças podem ser representadas por $(\exists x)q(x)$. Nesse caso, o quantificador $(\exists x)$ expressa que existe um, alguns, algum, um ou pelo menos um x, que representa homem e que satisfaz $p(x)$.

Os conectivos $\wedge, \rightarrow$ e $\leftrightarrow$. Na linguagem da Lógica de Predicados, os conectivos $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ são definidos a partir de $\neg$ e $\vee$, conforme é indicado na Lógica Proposicional.

6.3 Fórmulas da Lógica de Predicados

Após a definição do alfabeto, seguimos a mesma orientação do Capítulo 1. O próximo passo é definir as fórmulas. Mas na linguagem da Lógica de Predicados ocorrem vários elementos básicos necessários à definição de fórmula. Inicialmente, observe que na língua portuguesa há sentenças cuja interpretação é um valor de verdade e outras um objeto. A sentença declarativa "A capital de Minas Gerais é Belo Horizonte" é uma proposição, cuja interpretação resulta em um valor de verdade. Nesse caso, o valor de verdade é verdadeiro, pois Belo Horizonte é realmente a capital de Minas Gerais. Por outro lado, o resultado da interpretação da sentença "Capital do Brasil" não é um valor de verdade. O resultado é Brasília, que é um objeto. Em geral, na linguagem da Lógica de Predicados, as sentenças que representam objetos do domínio são os termos. Portanto, nesse sentido a sentença "Capital do Brasil" é um termo. Por outro lado, as fórmulas representam sentenças declarativas que podem ser interpretadas como verdadeiras ou falsas.

Os termos, átomos e fórmulas são definidos a seguir. A interpretação de termos, átomos e fórmulas da linguagem da Lógica de Predicados é analisada nos capítulos posteriores.

Definição 6.2 (termo) *O conjunto dos termos da linguagem da Lógica de Predicados é o menor conjunto que satisfaz as regras a seguir:*

1. *as variáveis são termos;*
2. *se $t_1, t_2, \ldots, t_n$ são termos e $\breve{f}$ é um símbolo para função n-ária, então $\breve{f}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é um termo.*

Conforme a Definição 6.2, as variáveis são termos. Isso ocorre, pois, como veremos, os resultados das interpretações das variáveis representam objetos. Da mesma forma, o resultado da aplicação de uma função a um conjunto de termos é um termo. Isto é, a interpretação do resultado de uma função aplicada a outros objetos é um objeto. Além disso, observe que na Definição 6.2, o símbolo $\breve{f}$, com tracinho em cima, é uma metavariável que representa um símbolo para função qualquer.

Exemplo 6.1 (termos) A seguir, relacionamos algumas expressões que são termos e outras que não o são.

1. A variável x é um termo.
2. A constante a é um termo, pois é uma função zero-ária. Nesse caso, temos uma função aplicada a zero termo.
3. Se f é uma função binária, então $f(x, a)$ é um termo, pois x e a são termos. A aplicação de uma função binária f aos termos x e a é um termo. Observe que se f não for uma função binária, então $f(x, a)$ não é um termo.
4. Sejam g e f funções ternária e binária respectivamente. Nesse caso, $g(y, f(x, a), c)$ é um termo. Isso ocorre porque os argumentos da função g, em $g(y, f(x, a), c)$, são termos, e a aplicação da função g a esses termos também é um termo.
5. Como f é binária, então a concatenação de símbolos $f(y, x, z)$ não é um termo, pois f deve conter exatamente dois argumentos.

■

Nota. Se declaramos, por exemplo, que $h(x, y, z)$ é um termo, então, nesse caso, é considerado implicitamente que h é ternária.

Exemplo 6.2 (termos) Este exemplo considera, de maneira informal, funções e constantes que representam elementos da aritmética, como funções de adição, de subtração e números naturais. A rigor, os símbolos que representam tais funções não pertencem ao alfabeto da Lógica de Predicados, conforme Definição 6.1, que contém apenas símbolos para função pertencentes ao conjunto $\{f, g, h, \ldots\}$. Mas, para fins didáticos, consideremos, por um instante, que os símbolos $+$ e $-$ e as constantes $1, 2, 3, \ldots$ também pertencem ao alfabeto da Lógica de Predicados. Isso significa que $+$ e $-$, por exemplo, são iguais a símbolos funcionais binários considerados na Definição 6.1. Temos que:

1. x, 9, y, 10 são termos, pois variáveis e constantes são termos.
2. $+(4, 8)$ é um termo, pois a função + aplicada a dois termos é um termo. Nesse caso, o resultado é interpretado como sendo igual a 13, isto é, o resultado é um novo termo.
3. $+(-(8, 7), 3)$ também é um termo. A adição aplicada aos termos $-(8, 7)$ e 3 é um termo. O resultado é interpretado como sendo igual a 4, que é um termo.

Observe que, neste exemplo, a notação utilizada para as funções é a prefixa. As equivalências entre notação prefixa e infixa são: $+(5, 8)$ corresponde a $(5 + 8)$, e $-(8, 7)$ corresponde a $(8 - 7)$. ■

Nem tudo são objetos na interpretação dos elementos da linguagem da Lógica de Predicados. Há, também, as sentenças cujas interpretações são valores de verdade. Elas são representadas por fórmulas declarativas que podem ser interpretadas como verdadeiras ou falsas. Os átomos, que representam expressões cuja interpretação é em valor de verdade, são definidos a seguir.

Definição 6.3 (átomo) *O conjunto dos átomos da linguagem da Lógica de Predicados é o menor conjunto que satisfaz as regras a seguir:*

1. *os símbolos proposicionais são átomos;*
2. *se $t_1, t_2, \ldots, t_n$ são termos e $\breve{p}$ é um símbolo para predicado n-ário, então, $\breve{p}(t_1, t_2, ..., t_n)$ é um átomo.*

Observe que na Definição 6.3, $\breve{p}$ é uma metavariável que representa um símbolo para predicado qualquer.

Exemplo 6.3 (átomos) Este exemplo considera um conjunto de átomos. Alguns deles são construídos a partir de termos definidos em exemplos anteriores.

1. O símbolo proposicional P é um átomo, pois é um predicado zero-ário. Temos, nesse caso, um predicado aplicado a zero termo.
2. Se p é um predicado binário, então $p(f(x, a), x)$ é um átomo. Observe que x, a e $f(x, a)$ são termos. A aplicação de p aos termos $f(x, a)$ e x é um átomo. Observe também que se p não for binário, então a expressão anterior não é um átomo.
3. $q(x, y, z)$ é um átomo. Nesse caso, consideramos implicitamente que q é ternário.
4. Os termos não são átomos. Por exemplo, $g(y, f(x, a), c), f(y, x, z)$ e $h(x, y, z)$ não são átomos.
5. Os átomos não são termos. Por exemplo, $P, p(f(x, a), x)$ e $q(x, y, z)$ não são termos.

■

Nota. Se declaramos, por exemplo, que $p(x, y, z)$ é um átomo, então, nesse caso, é considerado implicitamente que p é ternário.

Exemplo 6.4 (átomos) Este exemplo, de maneira informal, retoma a notação aritmética em que são considerados os predicados "maior que" e "diferente", representados pelos símbolos $>$ e $\neq$, respectivamente. A rigor, tais símbolos não pertencem ao alfabeto da Lógica de Predicados, conforme Definição 6.1, que contém apenas símbolos de predicado pertencente ao conjunto $\{p, q, r, \ldots.\}$. Mas, para fins didáticos, novamente, é considerado que os predicados $>$ e $\neq$ também pertencem ao alfabeto da Lógica de Predicados, sendo iguais a símbolos de predicado binários considerados na Definição 6.1.

1. A expressão aritmética $>(+(5,8), 3)$ representa um átomo. Isso porque $+(5,8)$ e 3 são termos. E o predicado $>$ aplicado a esses termos é um átomo. Nesse caso, o resultado da interpretação da aplicação do predicado $>$ aos termos $+(5,8)$ e 3 é igual ao valor de verdade T.
2. A expressão aritmética $\neq(-(8,7), 3)$ é um átomo. A desigualdade é um predicado. A aplicação de $\neq$ aos termos $-(8,7)$ e 3 é um átomo. O resultado da interpretação deste átomo é igual ao valor de verdade T. ■

Observe que, nos Exemplos 6.1 e 6.2, os resultados das interpretações dos termos são objetos. Por outro lado, nos Exemplos 6.3 e 6.4 os resultados das interpretações dos átomos são valores de verdade. Agora, estamos prontos para definir as fórmulas da Lógica de Predicados. A construção dessas fórmulas é feita a partir da concatenação de átomos e conectivos. Entretanto, como ocorre na Lógica Proposicional, não é qualquer concatenação de símbolos que é uma fórmula.

Definição 6.4 (fórmula) *O conjunto das fórmulas da linguagem da Lógica de Predicados é o menor conjunto que satisfaz as regras a seguir:*

1. *Todo átomo é uma fórmula.*
2. *Se H é uma fórmula, então $(\neg H)$ é uma fórmula.*
3. *Se H e G são fórmulas, então $(H \vee G)$ é uma fórmula.*
4. *Se H é uma fórmula e $\breve{x}$ uma variável, então $((\forall \breve{x})H)$ e $((\exists \breve{x})H)$ são fórmulas.*

Na definição anterior, cada item define uma regra para construção de fórmulas, a partir de fórmulas mais simples. As fórmulas mais elementares, que são os átomos, são consideradas inicialmente. Em seguida, utilizando os conectivos $\neg, \vee, \forall$ e $\exists$, obtemos fórmulas mais complexas. Como o conjunto de conectivos $\neg, \vee$ é completo, então também é possível obter fórmulas com os conectivos $\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Notação. De forma análoga à Lógica Proposicional, as metavariáveis A, B, C, D, E, H, com possíveis subíndices, também representam fórmulas da Lógica de Predicados. Também, de forma análoga, temos os esquemas de fórmulas, que são fórmulas formadas a partir de metavariáveis, como, por exemplo: $((\exists \breve{x})H)$. Lembre que os esquemas de fórmulas se transformam em fórmulas quando as metavariáveis são substituídas por símbolos e fórmulas do alfabeto da Lógica.

Exemplo 6.5 (construção de fórmulas)

1. Os átomos $p(x)$, R e $q(x, a, z)$ são fórmulas.
2. Como R e $p(x)$ são fórmulas, obtemos a fórmula $((\neg p(x) \vee R))$. Conforme é analisado na primeira parte do livro, essa fórmula pode ser denotada como $(p(x) \rightarrow R)$. Seguindo esse raciocínio, são construídas fórmulas utilizando os conectivos $\wedge, \rightarrow$ e $\leftrightarrow$.
3. Como $(p(x) \rightarrow R)$ é uma fórmula, então $((\forall x)(p(x) \rightarrow R))$ também é uma fórmula.
4. Dadas as fórmulas anteriores, então $(((\forall x)(p(x) \rightarrow R)) \rightarrow q(x, a, z))$ também é uma fórmula.

Seguindo o raciocínio apresentado neste exemplo, infinitas, mas enumeráveis, fórmulas podem ser obtidas. ■

Definição 6.5 (expressão) *Uma expressão da Lógica de Predicados é um termo ou uma fórmula.*

6.4 Correspondência entre quantificadores

Conforme é analisado na Lógica Proposicional, os conectivos $\wedge$,$\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ podem ser definidos a partir dos conectivos $\neg$ e $\vee$. Analogamente, é possível definir o quantificador existencial $\exists$ a partir do quantificador universal $\forall$, e vice-versa. Isso significa que o alfabeto da Lógica de Predicados pode ser simplificado, considerando apenas os conectivos $\neg$, $\vee$,$\forall$. Para ver como ocorre essa correspondência, considere, inicialmente, a afirmação: "Existe aluna de Computação que é bonita". Além disso, de maneira informal, suponha que o universo das pessoas consideradas seja o conjunto das alunas de Computação e ninguém mais. Suponha, também, que:

$p(x)$ é verdadeiro se, e somente se, x é bonita

Nesse sentido, a afirmação pode ser representada na Lógica de Predicados pela fórmula $(\exists x)p(x)$, na qual $(\exists x)$ é o quantificador existencial "existe x", onde x é aluna de computação. Se a afirmação anterior é verdadeira, então $(\forall x)\neg p(x)$ é falsa. Observe que esta fórmula representa a afirmação: "Toda aluna de Computação é feia". Mas, se $(\forall x)\neg p(x)$ é falsa, então a sua negação: $\neg((\forall x)\neg p(x))$ é verdadeira. Isto é, é falso que toda aluna de Computação é feia, ou seja, pelo menos uma aluna é bonita. Portanto, informalmente, as afirmações a seguir são equivalentes:

1. $(\exists x)p(x)$, que é interpretada como: "existe aluna de Computação que é bonita."
2. $\neg(\forall x)\neg p(x)$, que é interpretada como: "é falso que toda aluna de Ciência da Computação é feia."

Seguindo esse raciocínio, o quantificador $\forall$ é definido a partir de $\exists$.

Definição 6.6 (correspondência entre quantificadores) *Considere uma fórmula H e uma variável $\breve{x}$. Os quantificadores existencial $\exists$ e universal $\forall$ se relacionam pelas correspondências:*

1. $((\forall\breve{x})H)$ *denota* $\neg((\exists\breve{x})(\neg H))$;
2. $((\exists\breve{x})H)$ *denota* $\neg((\forall\breve{x})(\neg H))$.

Qualquer um dos quantificadores pode ser definido a partir do outro, utilizando as correspondências da definição anterior. O quantificador existencial, por exemplo, pode ser definido a partir da correspondência entre as fórmulas $((\exists\breve{x})H)$ e $\neg((\forall\breve{x})(\neg H))$. Se for essa a correspondência utilizada, então o conectivo $\exists$ pode ser retirado do alfabeto da Lógica de Predicados, Definição 6.1, obtendo um alfabeto simplificado da Lógica de Predicados.

6.5 Símbolos de Pontuação

Analogamente às simplificações da Lógica Proposicional, os parênteses das fórmulas da Lógica de Predicados podem ser omitidos quando não há problemas sobre suas interpretações. As fórmulas também podem ser escritas utilizando várias linhas para uma melhor leitura. Na Lógica de Predicados também há uma ordem de precedência entre os conectivos que possibilita a simplificação das fórmulas. Nesse caso, a ordem de precedência dos conectivos $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ e $\leftrightarrow$ é a mesma considerada na Lógica Proposicional, e os conectivos $\forall$ e $\exists$ possuem precedências equivalentes.

Definição 6.7 (ordem de precedência) *Na Lógica de Predicados, a ordem de precedência dos conectivos é a seguinte:*

1. *maior precedência:* $\neg$;
2. *precedência intermediária superior:* $\forall$, $\exists$;
3. *precedência intermediária inferior:* $\rightarrow$, $\leftrightarrow$;
4. *precedência inferior:* $\vee$, $\wedge$.

O exemplo a seguir mostra como a ordem de precedência dos conectivos é utilizada para simplificar as fórmulas, retirando símbolos de pontuação.

Exemplo 6.6 (precedência) Este exemplo considera a simplificação de uma fórmula pela eliminação de símbolos de pontuação. Considerando a ordem de precedência dos conectivos, Definição 6.7, a concatenação de símbolos

$$(\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow (\exists z)\neg q(z) \wedge r(y)$$

representa a fórmula

$$((((\forall x)((\exists y)p(x,y))) \rightarrow ((\exists z)(\neg q(z))) \wedge r(y)). \blacksquare$$

6.6 Características Sintáticas das Fórmulas

Como na Lógica Proposicional, algumas propriedades semânticas podem ser definidas para as expressões da Lógica de Predicados. Dada uma expressão, as partes que a compõem possuem denominações especiais, conforme a definição a seguir.

Definição 6.8 (subtermo, subfórmula, subexpressão) *Os elementos a seguir definem as partes de um termo ou fórmula E:*

1. *Se $E = \breve{x}$,*
   então a variável $\breve{x}$ é um subtermo de E;
2. *Se $E = \breve{f}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, então, $\breve{f}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ e t_i, para todo i, são subtermos de E;*
3. *Se t_1 é subtermo de t_2 e t_2 é subtermo de E, então t_1 é subtermo de E;*
4. *Se $E = (\neg H)$ então H e $(\neg H)$ são subfórmulas de E;*
5. *Se E é uma das fórmulas $(H \vee G)$, $(H \wedge G)$, $(H \rightarrow G)$ ou $(H \leftrightarrow G)$,*
   então H, G e E são subfórmulas de E;
6. *Se $E = ((\forall \breve{x})H)$, então H e $((\forall \breve{x})H)$ são subfórmulas de E;*
7. *Se $E = ((\exists \breve{x})H)$, então H e $((\exists \breve{x})H)$ são subfórmulas de E;*
8. *Se H_1 é subfórmula de H_2 e H_2 é subfórmula de E,*
   então H_1 é subfórmula de E;
9. *Todo subtermo ou subfórmula é também uma subexpressão.*

Dados um termos t e uma expressão E, então t é um subtermo de E se t é uma parte de E que é termo. Nesse caso, t pode ser igual ou diferente de E. Se for diferente, t é um subtermo próprio de E. Da mesma forma, dadas duas fórmulas G e H, então G é uma subfórmula de H se G é uma parte de H que é fórmula. Como no caso dos termos, G pode ser igual ou diferente de H. Se for diferente, G é uma subfórmula própria de H.

Exemplo 6.7 (subfórmula) Considere a fórmula:

$$H = (((\forall x)p(x)) \rightarrow (p(x)) \wedge ((\forall y)r(y))).$$

A fórmula $p(x)$ é uma subfórmula de H que ocorre duas vezes em H. As outras subfórmulas de H são: H, $(\forall x)p(x)$, $(\forall y)r(y)$, $r(y)$, e $((\forall x)p(x)) \rightarrow (p(x)$. ■

Comprimento de uma fórmula. O comprimento de uma fórmula da Lógica de Predicados é definido a seguir. Como na Lógica Proposicional, esse conceito é utilizado na demonstração de inúmeros resultados, principalmente aqueles que utilizam o princípio da indução finita.

Definição 6.9 (comprimento de uma fórmula) *Dada uma fórmula H, da Lógica de Predicados, o comprimento de H, denotado por $comp[H]$, é definido como se segue:*

1. *se H é um átomo, então $comp[H] = 1$;*
2. *$comp[\neg H] = comp[H] + 1$;*
3. *$comp[H \vee G] = comp[H] + comp[G] + 1$;*
4. *$comp[H \wedge G] = comp[H] + comp\ [G] + 1$;*
5. *$comp[H \rightarrow G] = comp[H] + comp[G] + 1$;*
6. *$comp[H \leftrightarrow G] = comp[H] + comp[G] + 1$;*
7. *se $H = (\forall \breve{x})G$, então $comp[(\forall \breve{x})G] = 1 + comp[G]$;*
8. *se $H = (\exists \breve{x})G$, então $comp[(\exists \breve{x})G] = 1 + comp[G]$.*

Para simplificar a definição do comprimento de uma fórmula, consideramos que todos os conectivos $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall$ e $\exists$ fazem parte do alfabeto. Observe que isso é um abuso de notação, pois o alfabeto pode ser simplificado considerando apenas os conectivos $\neg, \vee$ e $\forall$.

Exemplo 6.8 (comprimento de uma fórmula) Este exemplo considera duas fórmulas e seus respectivos comprimentos.

- Se $H = (p(x) \rightarrow q(y))$, então $comp[H] = 1 + comp[p(x)] + comp[q(y)] = 3$.
- Se $G = (\forall x)p(x) \leftrightarrow (\exists y)q(y)$, então $comp[G] = 1 + comp[(\forall x)p(x)] + comp[(\exists y)q(y)] = 1 + 1 + comp[p(x)] + 1 + comp[q(y)] = 5$. ■

6.7 Classificações de variáveis

As variáveis que ocorrem nas fórmulas da Lógica de Predicados possuem várias classificações. E entender essa classificação é importante para interpretar tais fórmulas. Nesta seção estudamos essa classificação e no próximo capítulo o uso dela para compreender a interpretação de fórmulas com variáveis. Nas fórmulas da Lógica de Predicados, as variáveis podem ocorrer na forma livre ou ligada. Além disso, dependendo da classificação das variáveis de uma fórmula, temos a classificação da fórmula propriamente dita. Inicialmente, para determinar se a ocorrência de uma variável é livre ou ligada, é necessário determinar primeiro os escopos dos quantificadores que ocorrem na fórmula. Mas, afinal, o que significa “escopo”? Uma semântica dessa palavra, adequada ao presente contexto, é o de abrangência. Isto é, o escopo de um quantificador significa, na Lógica, a sua abrangência ou domínio de influência. O conceito de escopo é definido a seguir.

Definição 6.10 (escopo de um quantificador) *Seja E uma fórmula da Lógica de Predicados:*

1. *Se* $(\forall \breve{x})H$ *é uma subfórmula de* E*,*
   então o escopo de $(\forall \breve{x})$ *em* E *é a subfórmula* H*;*
2. *Se* $(\exists \breve{x})H$ *é uma subfórmula de* E*,*
   então o escopo de $(\exists \breve{x})$ *em* E *é a subfórmula* H*.*

Portanto, o escopo de um quantificador é tudo aquilo que vem após ele, mas que está no seu domínio, ou abrangência de sua influência. Isso significa que dada, por exemplo, uma fórmula do tipo $((\exists x)H \wedge G)$, o escopo de $(\exists x)$ em $((\exists x)H \wedge G)$ é a subfórmula H. Observe que não temos o resto da fórmula escrito após o quantificador $(\exists x)$. Isso acontece porque a abrangência do quantificador é apenas a subfórmula H e essa abrangência não inclui G.

Exemplo 6.9 (escopo de um quantificador) Considere a fórmula a seguir:

$$E = (\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)q(z, y, x, f(z_1))).$$

Nesse caso temos:

1. o escopo do quantificador $(\forall x)$ em E é
   $(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)q(z, y, x, f(z_1)))$;
2. o escopo do quantificador $(\exists y)$ em E é
   $((\forall z)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)q(z, y, x, f(z_1)))$;
3. o escopo do quantificador $(\forall z)$ em E é $p(x, y, w, z)$. Observe que, nesse caso, o escopo de $(\forall z)$ não é o resto da fórmula E, a partir de $(\forall z)$;
4. o escopo do quantificador $(\forall y)$ em E é $q(z, y, x, f(z_1))$.

O escopo de um quantificador em uma fórmula E é a subfórmula de E referida pelo quantificador. O escopo é a abrangência ou domínio do quantificador. A subfórmula $((\forall z)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)(z, y, x, f(z_1)))$ é o escopo de $(\exists y)$, pois essa é a subfórmula de E referida pelo quantificador $(\exists y)$, que está quantificando sob o seu escopo. Da mesma forma, o quantificador $(\forall z)$ está quantificando apenas sobre a subfórmula $p(x, y, w, z)$ e não sobre o resto da fórmula E, a partir de $(\forall z)$. ■

Se uma variável x ocorre no escopo de um quantificador em x, como, por exemplo $(\forall x)$, dizemos que tal ocorrência é ligada. Ou seja, ela é ligada ao quantificador $(\forall x)$. Caso contrário, se x não ocorre no escopo de um quantificador em x, dizemos que tal ocorrência é livre. Portanto, dada uma variável x em uma fórmula E, ela pode ocorrer livre ou ligada em E, conforme é definido a seguir.

Definição 6.11 (ocorrência livre e ligada) *Sejam* $\breve{x}$ *uma variável e* E *uma fórmula:*

1. *Uma ocorrência de* $\breve{x}$ *em* E *é ligada se* $\breve{x}$ *está no escopo de um quantificador* $(\forall \breve{x})$ *ou* $(\exists \breve{x})$ *em* E*;*
2. *Uma ocorrência de* $\breve{x}$ *em* E *é livre se não for ligada.*

Fique atento e observe o seguinte: as ocorrências das variáveis dos quantificadores não são livres e nem ligadas. Isto é, a variável $\breve{x}$ em $(\forall \breve{x})$, ou em $(\exists \breve{x})$, não é classificada.

Exemplo 6.10 (ocorrência livre e ligada) Considere a fórmula E do Exemplo 6.9. A fórmula E é escrita novamente indicando as variáveis livres com índices v e as ligadas com índices g.

$$E = (\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x_g, y_g, w_v, z_g) \to (\forall y)q(z_v, y_g, x_g, f(z_{1_v}))).$$

Temos, então, as seguintes observações:

1. A variável z ocorre ligada em $p(x, y, w, z)$, pois z está no escopo de $(\forall z)$.
2. A variável z ocorre livre em $q(z, y, x, f(z_1))$, pois, nesse caso z não está no escopo de nenhum quantificador em z.
3. A ocorrência da variável y em $q(z, y, x, f(z_1))$ é uma ocorrência ligada, pois nesse caso y está no escopo de dois quantificadores $(\exists y)$ e $(\forall y)$.
4. A ocorrência da variável y em $q(z, y, x, f(z_1))$ está ligada ao quantificador mais próximo, isto é, y está ligada a $(\forall y)$.
5. As variáveis que ocorrem nos quantificadores não são livres e nem ligadas.

■

Definição 6.12 (variável livre e ligada) *Sejam $\breve{x}$ uma variável e E uma fórmula que contém $\breve{x}$:*

1. *A variável $\breve{x}$ é ligada em E, se existe pelo menos uma ocorrência ligada de $\breve{x}$ em E;*
2. *A variável $\breve{x}$ é livre em E, se existe pelo menos uma ocorrência livre de $\breve{x}$ em E.*

Exemplo 6.11 (variável livre e ligada) Considere a fórmula E do Exemplo 6.9. Nesse caso:

1. as variáveis x, y, e z são ligadas em E;
2. as variáveis w, z, e z_1 são livres em E;
3. a variável z é livre e ligada em E pois há uma ocorrência livre e uma ocorrência ligada de z em E. ■

Conforme o Exemplo 6.10, uma variável pode ocorrer livre e ligada em uma mesma fórmula. Nesse caso, como é analisado no próximo capítulo, a interpretação dessa variável é feita de forma diferente, dependendo se a ocorrência é livre ou ligada. A interpretação de uma variável que ocorre ligada é determinada pelo quantificador ao qual ela está ligada. Por outro lado, as ocorrências livres são interpretadas de forma diferente e não dependem de quantificadores. Além disso, para interpretar uma fórmula da Lógica de Predicados, além de interpretar as variáveis que ocorrem livres, é necessário interpretar os símbolos de predicados e de funções que ocorrem na fórmula. Nesse sentido, definimos como símbolos livres de uma fórmula, os símbolos que não estão ligados a quantificadores. E, para interpretar uma fórmula, é necessário interpretar, de forma própria, esses símbolos livres. Ou seja, para interpretar uma fórmula, é necessário, antes de qualquer coisa, interpretar as variáveis que ocorrem livres, os símbolos de predicados e os de funções.

Definição 6.13 (símbolos livres) *Dada uma fórmula E, os seus símbolos livres são as variáveis que ocorrem livres em E, os símbolos de função e os símbolos de predicado.*

Os símbolos livres de uma fórmula são todos os seus símbolos, exceto as variáveis ligadas, as variáveis dos quantificadores, os conectivos, e os símbolos de pontuação.

Exemplo 6.12 (símbolos livres) O conjunto $\{w, z, z_1, p, q, f\}$ é formado pelos símbolos livres da fórmula E, do Exemplo 6.9. Observe que as variáveis que ocorrem apenas na forma ligada não são símbolos livres. ■

A partir da classificação das variáveis de uma fórmula, temos a classificação da fórmula que as contém.

Definição 6.14 (fórmula fechada) *Uma fórmula é fechada quando não possui variáveis livres.*

Exemplo 6.13 (fórmula fechada) A fórmula E do Exemplo 6.9 não é fechada, pois contém variáveis livres. Considere as fórmulas a seguir:

1. Adicione o quantificador $(\forall z_1)$ no início da fórmula E. O resultado, indicado por E_1, não é uma fórmula fechada, pois contém as variáveis livres w e x.

$$E_1 = (\forall z_1)(\forall x)(\exists y)((\forall x)p(x, y, w, z) \rightarrow (\exists y)q(z, y, x, f(z_1)))$$

2. Adicione o quantificador $(\forall x)$ no início da fórmula E_1. O resultado, indicado por E_2, não é uma fórmula fechada, pois contém as variável livre w.

$$E_2 = (\forall x)(\exists y)((\forall x)p(x, y, w, z) \rightarrow (\exists y)q(z, y, x, f(z_1)))$$

3. Adicione o quantificador $(\forall w)$ no início da fórmula E_2. O resultado, indicado por E_3, é uma fórmula fechada, pois não contém variáveis livres.

$$E_3 = (\forall w)(\forall x)(\exists y)((\forall x)p(x, y, w, z) \rightarrow (\exists y)q(z, y, x, f(z_1)))$$

   Nesse caso, as ocorrências livres de w, z e z_1 na fórmula E se tornam ocorrências ligadas em E_3 devido à adição de quantificadores universais.

■

No exemplo anterior, Exemplo 6.13, é dada uma fórmula E, que não é fechada. A partir dela, pela adição de quantificadores universais, obtemos uma fórmula fechada. É como fazer um "fecho" da fórmula inicial. Assim, dada uma fórmula H da Lógica de Predicados, podemos obter, pela adição de quantificadores no início da fórmula H, dois tipos de fórmulas fechadas: o fecho universal e o existencial de H.

Definição 6.15 (fecho de uma fórmula) *Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados e*
$\{\breve{x}_1, ..., \breve{x}_n\}$ *o conjunto das variáveis livres em H:*

1. *O fecho universal de H, indicado por $(\forall *)H$, é dado pela fórmula $(\forall \breve{x}_1)...(\forall \breve{x}_n)H$;*
2. *O fecho existencial de H,indicado por $(\exists *)H$, é dado pela fórmula $(\exists \breve{x}_1)...(\exists \breve{x}_n)H$.*

Exemplo 6.14 (fecho de uma fórmula) Considere as fórmulas.

1. A fórmula E_3, do Exemplo 6.13, é o fecho universal da fórmula E. Logo, $E_3 = (\forall *)E$.
2. O fecho existencial de E é dado pela fórmula:
$$E_4 = (\exists w)(\exists z)(\exists z_1)(\forall x)(\exists y)((\forall x)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)q(z, y, x, f(z_1)))$$
A fórmula E_4 é obtida a partir da fórmula E, adicionando os quantificadores existenciais nas suas variáveis livres. Logo, $E_4 = (\exists *)E$.
3. Considere a fórmula fechada $H = (\exists x)p(x)$. Como H não possui variáveis livres, então o seu fecho universal, ou existencial, é igual a H. Isto é, nesse caso, $(\forall *)H = (\exists *)H = H$.

■

6.8 Formas normais

Como na Lógica Proposicional, dada uma fórmula H, da Lógica de Predicados, existe uma fórmula G, equivalente a H, que está na forma normal. Tais fórmulas são definidas a partir dos literais.

Definição 6.16 (literal na Lógica de Predicados) *Um literal, na Lógica de Predicados, é um átomo ou a negação de um átomo. Um átomo é um literal positivo. A negação de um átomo é um literal negativo.*

Lembre se de que, na Lógica Proposicional, um literal é um símbolo proposicional, ou sua negação. Nesse sentido, os símbolos proposicionais da Lógica Proposicional correspondem aos átomos na Lógica de Predicados.

Exemplo 6.15 (literal) As fórmulas a seguir são literais:

1. Como P é um átomo, então P e $\neg P$ são literais;
2. Como $p(f(x,a),x)$ é um átomo, $\neg p(f(x,a),x)$ é um literal;
3. $q(x,y,z)$ e $\neg q(x,y,z)$ são literais.

■

As formas normais na Lógica de Predicados são definidas de forma análoga às formas normais da Lógica Proposicional.

Definição 6.17 (forma normal) *Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados.*

1. *H está na forma normal conjuntiva, fnc, se é uma conjunção de disjunções de literais.*
2. *H está na forma normal disjuntiva, fnd, se é uma disjunção de conjunções de literais.*

Observe que, mesmo havendo quantificadores na Lógica de Predicados, fórmulas na fnc e na fnd não os consideram. As formas normais são conjunções ou disjunções de literais, que, por sua vez, são formadas a partir de átomos. Mas, afinal, que aplicação tem as formas normais na Lógica de Predicados? É claro que tem muitas e apresentamos, a seguir, uma delas. Em Programação em Lógica, o elemento fundamental da sintaxe da linguagem é a cláusula de programa, que é uma fórmula na forma normal disjuntiva.

Definição 6.18 (cláusula de programa) *Uma cláusula de programa, na Lógica de Predicados, é uma cláusula do tipo $C = (\forall *)G$, onde G está na forma normal disjuntiva e contém exatamente um literal positivo.*

Exemplo 6.16 (cláusula de programa) A fórmula C_1 a seguir é uma cláusula de programa. As outras fórmulas não são cláusulas de programa, pois não contêm exatamente um literal positivo.

$$\begin{aligned}
C_1 &= (\forall x)(\forall y)(p(x) \lor \neg q(x) \lor \neg r(x,y)) \\
&= (\forall *)((q(x) \land r(x,y)) \rightarrow p(x)), \\
C_2 &= (\forall x)(\forall y)(\neg p(x) \lor \neg r(x,y)) \\
&= (\forall *)(\neg p(x) \lor \neg r(x,y)), \\
C_3 &= (\forall y)(\forall z)(\neg p(y) \lor q(z) \lor r(z)) \\
&= (\forall *)(\neg p(y) \lor q(z) \lor r(z)).
\end{aligned}$$

Observe que a fórmula C_1 contém um literal positivo, sendo, portanto, uma cláusula. Além disso, ela pode ser apresentada em duas notações diferentes equivalentes, como indicado pelas equivalências a seguir:

$$\begin{aligned}
C_1 &= (\forall *)(p(x) \lor \neg q(x) \lor \neg r(x,y)) \\
&\Leftrightarrow (\forall *)(p(x) \lor \neg(q(x) \land r(x,y))) \\
&\Leftrightarrow (\forall *)(\neg(q(x) \land r(x,y)) \lor p(x)) \\
&\Leftrightarrow (\forall *)((q(x) \land r(x,y)) \rightarrow p(x)).
\end{aligned}$$

Portanto, C_1 pode ser denotada por:
$C_1 \quad = (\forall *)((q(x) \wedge r(x,y)) \rightarrow p(x))$.
Como toda cláusula é um fecho universal, o quantificador $(\forall *)$ é omitido, ficando implícito. Nesse caso, C_1 é, ainda, denotada por:
$C_1 \quad = (q(x) \wedge r(x,y)) \rightarrow p(x)$.
E em Programação em Lógica, C_1 é denotada por:
$C_1 \quad = p(x) \leftarrow q(x), r(x,y)$,
onde o conectivo $\wedge$ é representado por vírgula e a implicação é invertida. ■

Notação. Uma cláusula de programa:

$$(\forall *)(B \vee \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n)$$

é denotada por:

$$B \leftarrow A_1, \ldots, A_n.$$

Nesse caso, B é a cabeça da cláusula e $A_1, \ldots, A_n$ é a cauda.

Definição 6.19 (cláusula unitária) *Uma cláusula de programa unitária é uma cláusula do tipo $B \leftarrow$. Nesse caso, a cláusula não contém literais negativos.*

Uma cláusula unitária é também denominada como fato.

Definição 6.20 (programa lógico) *Um programa lógico é um conjunto de cláusulas de programa.*

Portanto, o ato de programar em Programação em Lógica, corresponde, mais ou menos, a determinar um conjunto de cláusulas que representam aquilo que é o objeto da programação. A seguir apresentamos um programa lógico e no próximo capítulo analisamos a semântica desse programa.

Exemplo 6.17 (programa lógico) O conjunto de cláusulas de programa a seguir forma um programa lógico.

1. $p(a,b) \ \leftarrow$

2. $p(f(x),y) \ \leftarrow \ p(x,z), q(g(f(x),z),y)$

Nesse programa lógico temos uma cláusula unitária e outra cláusula que não é unitária. É claro que não dá para entender nada a respeito do seu significado. Isso ocorre por estarmos apresentando apenas a sintaxe e ainda falta a semântica, que estabelece o significado dos símbolos envolvidos. Consideramos essa semântica no próximo capítulo, onde analisamos o significado desse programa. ■

6.9 Exercícios

1. Responda, justificando sua resposta, às seguintes questões:
   (a) Todo termo é uma fórmula?
   (b) Todo literal é uma expressão?
   (c) Toda expressão é um literal?
2. Seja E a fórmula a seguir:
   $E = (\forall w)(\forall z)(\forall z_1)(\forall x)(\exists y)((\forall x)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)q(z, y, x, z1))$
   (a) Determine todas as subfórmulas de E.
   (b) Determine todas as subexpressões de E.
3. Reescreva os parênteses das fórmulas a seguir.
   (a) $(\forall x)p(x) \vee \neg(\forall x)q(x) \rightarrow r(y)$
   (b) $(\exists z)p(z) \leftrightarrow \neg q(y)$
   (c) $(\exists x)(\forall x)\neg p(x)$
4. Elimine o máximo de símbolos de pontuação das fórmulas a seguir, mantendo a fórmula original.
   (a) $((\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)))$
   (b) $(((\forall x)p(x) \rightarrow q(y)) \rightarrow ((\forall z)q(z)))$
   (c) $(((\exists y)((\forall z)p(z)) \wedge r(z)) \vee ((\forall x)q(x)))$
5. Seja E uma fórmula e $\breve{x}$ uma variável. Responda justificando sua resposta:
   (a) É possível haver ocorrências de $\breve{x}$ em E livres e ligadas?
   (b) É possível a variável $\breve{x}$ ser livre e ligada em E ao mesmo tempo?
6. Dê exemplo de uma fórmula H na qual uma variável x ocorre tanto livre quanto ligada.
7. Responda:
   (a) Existe fórmula sem símbolo livre?
   (b) Quais são os símbolos livres de uma fórmula fechada?
   (c) Toda variável é símbolo livre?
8. Determine o fecho universal e existencial das fórmulas a seguir:
   (a) $F_1 = p(x, y)b)$
   (b) $F_2 = (\exists x)p(x, y)$
   (c) $F_3 = (\exists y)(\exists x)p(x, y)$

9. Dê exemplos:
   (a) de uma fórmula cujo fecho existencial contém apenas quantificadores universais;
   (b) de uma fórmula cujo fecho universal ou existencial não contém quantificadores;
   (c) de uma fórmula cujo fecho universal ou existencial é igual a ela própria.