Exercício 2 *De quantos modos podemos formar uma mesa de ciranda com 5 meninos e 5 meninas de modo que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?*

Conte primeiro de quantos modos pode-se colocar as meninas e uma colocada-as, de quantos modos pode-se colocar os meninos.

Exercício 3 *De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 6 crianças, de modo que duas delas Vera e Isadora não fiquem juntas?*

Exercício 4 *Quantas são as soluções inteiras e positivas de* $x + y + z = 7$*?*

Exercício 5 *Quantas são as soluções inteiras e positivas de* $x + y + z \leq 6$*?*

Exercício 6 *Uma indústria fabrica 5tipos de balas que são vendidas em caixas de 20 balas, de um só tipo ou sortidas. Quantos tipos de caixas podem ser montados?*

10 Propriedades Combinatórias e o Triângulo de Pascal

Começamos esta seção com a chamada Relação de Stifel[1].

Theorem 1 (Relação de Stifel)

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1} \tag{10.1}$$

Prova: Considere um conjunto A de $n+1$ elementos, um dos quais é x. O número de subconjuntos de A com $p+1$ elementos é $\binom{n+1}{p+1}$. Esse número é igual à soma do número de subconjuntos nos quais x não figura, $\binom{n}{p+1}$, com o número de subconjuntos nos quais x figura, $\binom{n}{p}$.

A relação de Stifel permite construir rapidamente o *triangulo de Pacal*, formado com os diversos valores de C_n^p.

$$\begin{array}{llllll}
C_0^0 \\
C_1^0 & C_1^1 \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 \\
C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 \\
C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 \\
C_5^0 & C_5^1 & C_5^2 & C_5^3 & C_5^4 & C_5^5
\end{array}$$

[1] Stifel, Michael(1847?-1567), algebrista alemão

Note que enumerando as linhas a partir do zero, o termo C_n^p aparece na linha n e coluna p. Com os valores numéricos obtemos o triângulo abaixo.

$$\begin{array}{llllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

Veja que a soma dos elementos lado a lado é igual ao elemento situado embaixo do da direita.

Uma outra relação importante é o chamdo teorema das linhas.

Theorem 2 (Teorema das linhas)

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n. \tag{10.2}$$

Prova: Basta ver que os dois membros são iguais aos número de subconjuntos de um conjunto com n elementos.

Example 15 *Um palácio tem 7 portas. De quantos modos pode ser aberto o palácio?*

Solução: O palácio pode ser aberto abrindo-se apenas uma porta ou abrindo duas portas ou abrindo 3 portas, e etc. Usando o Teorema das linhas, resposta é $C_7^1 + C_7^2 + ... + C_7^7 = 2^7 - C_7^0 = 127$.

Agora temos a relação que declara que, em cada linha, elementos equidistantes dos extremos são iguais.

Theorem 3

$$\binom{p}{n} = \binom{n-p}{n}. \tag{10.3}$$

Prova: Baste ver que o número de modos de escolher, entre n objetos, p objetos para usar é igual ao de escolher $n-p$ objetos para não usar.

11 Binômio de Newton

A fórmula do Binômio de Newton [2] fornece o desenvolvimento de $(x + a)^n$.

[2]Newton, Isaac(1642-1727), matemático e físico inglês.

Vamos mostrar que

$$(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p x^{n-p} = C_n^0 a^0 x^n + C_n^1 a^1 x^{n-1} + ... + C_n^n a^n x^0. \tag{11.1}$$

Veja que

$$(x+a)^n = (x+a).(x+a). \ \ ... \ \ .(x+a),$$

onde o fator $(x+a)$ configura n vezes na multiplicação. Como são n fatores, todos os termos que aparecem após realizar a multiplicação, são da forma $a^p x^{n-p}$. Esse termo pode ser obtido tomando em p dos fatores $(x+a)$ a segunda parcela(o termo a por exemplo) e nos restantes $n-p$ o termo x. Para fazer isto baste ver em quais termos o a vai aparecer, o que pode ser feito de C_n^p modos. Assim, o termo genérico do produto é $C_n^p a^p x^{n-p}$ e portanto,

$$(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p x^{n-p} = C_n^0 a^0 x^n + C_n^1 a^1 x^{n-1} + ... + C_n^n a^n x^0. \tag{11.2}$$

Example 16 *Determine o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de $(x^4 - \frac{1}{x})^7$.*

Solução: O termo genérico do desenvolvimento é

$$C_7^p(-1/x)^p x^{7-p} = C_7^p(-1)^p x^{28-5p}.$$

O termo em x^3 é obtido fazendo $28 - 5p = 3$, ouseja, $p = 5$. O termo procurado é $C_7^5(-1)^5 x^3 = -21x^3$.

12 Considerações finais