Álgebra Linear I

Aula 22

Professora Kelly Karina

Autovalores e Autovetores

Seja $T : V \to V$ um operador linear. Um vetor $v \in V$, $v \neq 0$ é um autovetor do operador T se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(v) = \lambda v$. O número λ tal que $T(v) = \lambda v$ é denominado autovalor de T associado ao autovetor v.

Observação:

- Os autovetores também podem ser denominados vetores próprios ou vetores característicos.
- Os autovalores também podem ser denominados valores próprios ou valores característicos.

Exemplos:

1) O vetor $v = (5, 2)$ é autovetor do operador linear

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \ T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y)$$

associado ao autovalor $\lambda = 6$ pois

$$T(v) = T(5, 2) = (30, 12) = 6(5, 2)$$

O vetor $v = (2, 1)$ não é autovetor deste operador T pois

$$T(2, 1) = (13, 5) \neq \lambda(2, 1) \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

2) Na simetria no $\mathbb{R}^3$ definida por $T(v) = -v$, qualquer vetor $v \neq 0$ é autovetor associado ao autovalor $\lambda = -1$.

Determinação dos Autovalores e Autovetores

Discutiremos a determinação dos autovetores e autovalores de um operador linear do $\mathbb{R}^3$, no entanto, o procedimento adotado pode ser usado em geral.

Seja o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuja matriz canônica é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Se v e λ são respectivamente o autovetor e o correspondente autovalor de T então:

$$A \cdot v = \lambda v$$

$$A \cdot v = \lambda v$$

$$A \cdot v - \lambda I v = 0$$

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Para que este sistema homogêneo admita soluções não nulas, deve-se ter:

$$det(A - \lambda I) = 0$$

$$det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

A equação $det(A - \lambda I) = 0$ é denominada **equação característica** do operador T (ou da matriz A) e suas raízes são os autovalores de T. O polinômio $det(A - \lambda I)$ é denominado **polinômio característico**.

A substituição de λ pelos seus valores no sistema homogêneo $(A - \lambda I)v = 0$ permite determinar os autovetores associados.

Exemplos:

1) Determine os autovalores e autovetores do operador linear

$$T(x, y, z) = (3x - y + z, -x + 5y - z, x - y + 3z)$$

Solução:
A matriz canônica do operador T é:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

A equação característica do operador T é:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 5-\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(15-8\lambda+\lambda^2-1)+1(-3+\lambda+1)+1(1-5+\lambda)=0$$

$$(3-\lambda)(15-8\lambda+\lambda^2-1)+2\lambda-6=0$$

$$(3-\lambda)(15-8\lambda+\lambda^2-1)-2(3-\lambda)=0$$

$$(3-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+12)=0$$

Cujas raízes são $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 6$.

O sistema $(A-\lambda I)v=0$ fica:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_1=2$ temos então:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 0 \\ -x+3y-z & = & 0 \\ x-y+z & = & 0 \end{array}\right.$$

cuja solução é $\{(x,y,z); y=0, z=-x\}$. Assim os vetores do tipo $(x,0,-x)$ onde $x\neq 0$ são autovetores associados ao autovalor $\lambda_1=2$

Para $\lambda_2 = 3$ temos então:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -y+z & = & 0 \\ -x+2y-z & = & 0 \\ x-y & = & 0 \end{array} \right.$$

cuja solução é $\{(x,y,z); y=x, z=x\}$. Assim os vetores do tipo (x,x,x) onde $x \neq 0$ são autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 3$

Para $\lambda_3 = 6$ temos então:

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x - y + z & = & 0 \\ -x - y - z & = & 0 \\ x - y - 3z & = & 0 \end{cases}$$

cuja solução é $\{(x, y, z); y = -2x, z = x\}$. Assim os vetores do tipo $(x, -2x, x)$ onde $x \neq 0$ são autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = 6$

Exemplos:

2) Determine os autovalore e autovetores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: Exercício.

Propriedades dos autovalores e dos autovetores

Propriedade:

I) Se v é autovetor associado ao autovalor λ de um operador linear T, o vetor αv, para qualquer real $\alpha \neq 0$, é também autovetor de T associado ao mesmo λ.

Observação:

Fazendo $\alpha = \frac{1}{|v|}$ pode-se obter sempre um autovetor associado ao autovalor λ.

II) Se λ é um autovalor de um operador linear $T : V \to V$, o conjunto S_λ de todos os vetores $v \in V$, inclusive o vetor nulo, associados ao autovalor λ, é um subespaço vetorial de V. O subespaço S_λ é denominado subespaço associado ao autovalor λ ou auto-espaço associado a λ.

III) Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico e, por isso, os mesmos valores próprios.

Observação:

Sabe-se que $[T]_B = M^{-1}[T]_A M$ onde M é a matriz mudança de base de B para A, ou seja $[T]_B$ e $[T]_A$ são semelhantes.