Álgebra Linear I

Aula 24

Professora Kelly Karina

Dizemos que um operador linear $T : V \to V$ é diagonalizável se existe uma base de V formada por autovetores de T.

Observação:

A matriz quadrada A é diagonalizável se existe uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal. Dizemos nesse caso que P diagonaliza A.

Exemplo:

Determine a matriz P que diagonaliza

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Solução:

A equação característica de A é

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante pela 1^a linha, encontramos:

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda)+2] - 0 + 0 = 0$$

$$(2-\lambda)(4-5\lambda+\lambda^2+2) = 0$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6) = 0$$

$$(2-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

Note que o número 2 é raiz dupla da equação.

Calculando os autovetores:

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obtemos:

- para $\lambda = 2$ um autovetor LI $v_1 = (1, 0, 0)$
- para $\lambda = 3$ um autovetor LI $v_2 = (1, 1, -2)$.

Como existem apenas 2 autovetores LI no $\mathbb{R}^3$ então A **não é diagonalizável**.

Diagonalização de matrizes simétricas

I) A equação característica de uma matriz simétrica tem apenas raízes reais.

Dem (caso em que A tem ordem 2):

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} p & r \\ r & q \end{bmatrix}$$

A equação característica é

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} p - \lambda & r \\ r & q - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

isto é $(p-\lambda)(q-\lambda)-r^2=0$

ou $pq-\lambda p-\lambda q+\lambda^2-r^2=0$

$\lambda^2-(p+q)\lambda+(pq-r^2)=0$

O discriminante dessa equação do 2 grau é

$$(p+q)^2-4(pq-r^2)=p^2+2pq+q^2-4pq+4r^2=(p-q)^2+4r^2$$

II) Se $T : V \to V$ é um operador linear simétrico com autovalores distintos, então os autovalores são ortogonais.

De fato, sejam λ_1 e λ_2 autovalores do operador simétrico T e $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Sejam ainda $T(v_1) = \lambda_1 v_1$ e $T(v_2) = \lambda_2 v_2$. Mostraremos que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

$$\langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, T(v_2) \rangle$$

$$\langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle$$

$$\lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda 2$ então $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$, ou seja v_1 e v_2 são ortogonais.

III) Vimos que a matriz A é diagonalizada pela matriz P dos autovetores através de

$$D = P^{-1}AP$$

No caso particular de A ser simétrica, pela propriedade anterior, P será ortogonal. Normalizando cada vetor obtemos uma base P ortonormal. Note que como P é ortogonal então $P^{-1} = P^t$. Portanto

$$D = P^tAP$$

nesse caso, dizemos que P diagonaliza A ortogonalmente.

Exemplo:

1) Determinar a matriz ortogonal P que diagonaliza a matriz simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Solução:
A eqquação característica de A é:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

cujo desenvolvimento nos dá:

$$(6-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-9)=0$$

As raízes dessa equação são $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6$ e $\lambda_3 = 9$ (que são os autovalores de A).

Para determinação dos autovetores consideramos, para cada λ o sistema:

$$\begin{bmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Substituindo λ por 3 e resolvendo o sistema encontramos como solução os vetores do tipo $(x, 2x, 2x)$. O vetor unitário $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ é autovetor associado a $\lambda_1 = 3$;

- Substituindo λ por 6 e resolvendo o sistema encontramos como solução os vetores do tipo $(x, \frac{x}{2}, -x)$. O vetor unitário $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3})$ é autovetor associado a $\lambda_2 = 6$;

- Substituindo λ por 9 e resolvendo o sistema encontramos como solução os vetores do tipo $(x, -x, \frac{x}{2})$. O vetor unitário $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ é autovetor associado a $\lambda_3 = 9$.

A matriz P cujas colunas são as componentes dos autovetores unitários associados aos autovalores λ_1, λ_2 e λ_3 é ortogonal:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

De fato, é fácil ver que $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle = \langle u_2, u_3 \rangle = 0$. Além disso, $\langle u_1, u_1 \rangle = \langle u_2, u_2 \rangle = \langle u_3, u_3 \rangle = 1$, onde $u_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $u_2 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ e $u_3 = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

A matriz P é a matriz diagonalizadora

De fato,

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & -6 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Exemplo:

2) Seja o operador linear autoadjunto $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Determinar a matriz P que diagonaliza A.

Solução:
A eqquação característica de A é:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

cujo desenvolvimento nos dá:

$$\lambda^2(5-\lambda) = 0$$

As raízes dessa equação são $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 5$ (que são os autovalores de A).

Para determinação dos autovetores consideramos, para cada λ o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Substituindo λ por 0 e resolvendo o sistema encontramos como solução os vetores do tipo $(x, y, \frac{x}{2})$. Fazendo $x = 2$ e $y = 0$ encontramos $v_1 = (2, 0, 1)$, fazendo $x = 0$ e $y = 1$ encontramos $v_2 = (0, 1, 0)$. Os vetores v_1 e v_2 são vetores LI associados ao mesmo autovalor $\lambda = 0$.

  Normalizando, obtemos $u_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})$ e $u_2 = (0, 1, 0)$.

- Substituindo λ por 5 e resolvendo o sistema encontramos como solução os vetores do tipo $(x, 0, -2x)$. O vetor unitário $(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}})$ é autovetor unitário associado a $\lambda_3 = 5$.

A matriz P cujas colunas são as componentes dos autovetores unitários associados aos autovalores λ_1, λ_2 e λ_3 é ortogonal:

$$P = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

De fato, é fácil ver que $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle = \langle u_2, u_3 \rangle = 0$. Além disso, $\langle u_1, u_1 \rangle = \langle u_2, u_2 \rangle = \langle u_3, u_3 \rangle = 1$, onde $u_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})$, $u_2 = (0, 1, 0)$ e $u_3 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}})$.

A matriz P é a matriz diagonalizadora

De fato,

$$D = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$