Álgebra Linear I

Aula 19

Professora Kelly Karina

Isomorfismo

Consideremos o espaço vetorial

$$V = P_3 = \{at^3 + bt^2 + ct + d/a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

e seja $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ uma base de P_3.

Fixada uma base, para cada vetor $v \in P_3$ existe uma só quádrupla $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$ tal que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4$$

Reciprocamente, dada uma quádrupla $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$ existe um só vetor em P_3 da forma

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4$$

Dessa forma, a base $B = \{v_1, \cdots, v_4\}$ determina uma correspondência biunívoca entre os vetores de P_3 e as quádruplas do $\mathbb{R}^4$.

Observação:

a) Se $v = a_1v_1 + \cdots a_4v_4 \in P_3$ corresponde a $(a_1, \cdots, a_4) \in \mathbb{R}^4$ e $w = b_1v_1 + \cdots b_4v_4 \in P_3$ corresponde a $(b_1, \cdots, b_4) \in \mathbb{R}^4$ então:
$v + w = (a_1 + b_1)v_1 + \cdots + (a_4 + b_4)v_4 \in P_3$ corresponde a $(a_1 + b_1, \cdots, a_4 + b_4)$

b) Para $k \in \mathbb{R}$, $kv = (ka_1)v_1 + \cdots (ka_4)v_4 \in P_3$ corresponde a $(ka_1, \cdots, ka_4) \in \mathbb{R}^4$

Ou seja, a correspondência biunívoca entre P_3 e $\mathbb{R}^4$ preserva as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar.

Neste caso dizemos que P_3 e $\mathbb{R}^4$ são isomorfos.

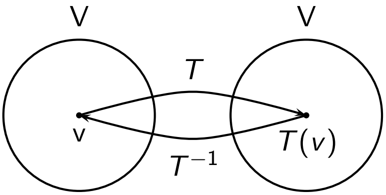
- $M(2,2)$ e $\mathbb{R}^4$ são isomorfos;
- P_2 e $\mathbb{R}^3$ são isomorfos;
- $M(3,1)$ e $\mathbb{R}^3$ são isomorfos;
- $M(2,1)$ e $\mathbb{R}^2$ são isomorfos.

De forma geral temos:

"Se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $dim\ V = n$ então V e $\mathbb{R}^n$ são isomorfos."

Operadores Inversíveis

Um operador $T : V \to V$ associa a cada vetor $v \in V$ um vetor $T(v) \in V$. Se por meio de outro operador S for possível inverter essa correspondência, de tal modo que a cada vetor transformado $T(v)$ se associe o vetor de partida v, diz-se qque S é *operador inverso* de T, e se indica T^{-1}.



Propriedades:

Seja $T : V \to V$ um operador linear.

- Se T é inversível e T^{-1} é a sua inversa, então $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$ (identidade);
- T é inversível se e somente se $N(T) = \{0\}$;
- Se T é inversível, T transforma base em base;
- De T é inversível e B uma base de V, então $T^{-1} : V \to V$ é linear e $[T^{-1}]_B = ([T]_B)^{-1}$.

  Em particular, se B é a base canônica temos $[T^{-1}] = [T]^{-1}$ e assim $[T][T^{-1}] = [T \circ T^{-1}] = [I]$.Portanto T é inversível se, e somente se, $det\ [T] \neq 0$.

Exemplo:

1) Seja o operador linear em $\mathbb{R}^2$ definido por

$$T(x,y) = (4x - 3y, -2x + 2y)$$

a) Mostrar que T é inversível.
b) Encontrar uma regra para T^{-1} como a que define T.

Solução:

a) A matriz canônica de T é $[T] = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

Como $det\ [T] = 2 \neq 0$, T é inversível.

b) $[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Logo:

$$[T^{-1}(x,y)] = [T^{-1}]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+\frac{3}{2}y \\ x+2y \end{bmatrix}$$

ou seja

$$T^{-1}(x,y) = (x+\frac{3}{2}y, x+2y)$$

Exemplo:

2) Verificar se o operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(1,1,1) = (1,0,0)$, $T(-2,1,0) = (0,-1,0)$ e $T(-1,-3,-2) = (0,1,-1)$ é inversível e, em caso afirmativo, determinar $T^{-1}(x,y,z)$.

Solução:

Note que $\{(1,1,1), (-2,1,0), (-1,-3,-2)\}$ é base do $\mathbb{R}^3$ e T está bem definido, pois conhecemos as imagens dos vetores dessa base. Para resolver, é possível encontrar $T(x,y,z)$ e proceder da mesma forma que no exemplo 1. No entanto, resolveremos aqui de outra forma.

Pela definição de T temos:

$$\begin{array}{rcl} T^{-1}(1,0,0) & = & (1,1,1) \\ T^{-1}(0,-1,0) & = & (-2,1,0) \\ T^{-1}(0,1,-1) & = & (-1,-3,-2) \end{array}$$

Observando que $\{(1,0,0,(0,-1,0),(0,1,-1)\}$ é também base do $\mathbb{R}^3$ e que as imagens desses vetores é conhecida, o operador T^{-1} está definido. Portanto T é inversível (pois T^{-1} existe!).
Encontremos a expressão de $T^{-1}(x,y,z)$:

Primeiramente, expressemos (x, y, z) em relaçao a esta base:

$$(x, y, z) = x(1,0,0) + (-y-z)(0,-1,0) + (-z)(0,1,-1)$$

logo:

$$\begin{aligned}
T^{-1}(x,y,z) &= xT^{-1}(1,0,0) + (-y-z)T^{-1}(0,-1,0) \\
&\quad +(-z)T^{-1}(0,1,-1) \\
T^{-1}(x,y,z) &= x(1,1,1) + (-y-z)(-2,1,0) \\
&\quad +(-z)(-1,-3,-2) \\
T^{-1}(x,y,z) &= (x,x,x) + (2y+2z, -y-z, 0) + (z, 3z, 2z) \\
T^{-1}(x,y,z) &= (x+2y+3z, x-y+2z, x+2z)
\end{aligned}$$

Produto Interno

Definição:

Seja V um espaço vetorial. Um *produto interno* sobre V é uma função que a cada par de vetores v_1 e v_2 associa um número real, denotado $\langle v_1, v_2 \rangle$, satisfazendo as propriedades:

i) $\langle v, v \rangle \geq 0$ para todo vetor v;

$\langle v, v \rangle = 0$ se e somente se $v = 0$;

ii) $\langle \alpha v_1, v_2 \rangle = \alpha \langle v_1, v_2 \rangle$ para todo real α;

iii) $\langle v_1 + v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle$;

iv) $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle$.

Exemplo:

1) O produto escalar de vetores do espaço $\mathbb{R}^3$.
Para $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

De modo análogo, definimos o produto interno usual para o espaço $\mathbb{R}^n$:

Dados $v_1 = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ e $v_2 = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

2) $V = \mathbb{R}^2, v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + y_1y_2$$

3) Se V é o espaço das funções contínuas no intervalo $[0, 1]$, dadas $f_1, f_2 \in V$, definimos

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^1 f_1(t) f_2(t) dt$$

Definição:

Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$. Diz-se que dois vetores v e w de V são *ortogonais* (em relação a este produto interno) se $\langle v, w \rangle = 0$. No caso em que v, w são ortogonais, escrevemos $v \perp w$.

Propriedades:

i) $0 \perp v$ para todo $v \in V$;
ii) $v \perp w \Rightarrow w \perp v$;
iii) Se $v \perp w$ para todo $w \in V$ então $v = 0$;
iv) Se $v_1 \perp w$ e $v_2 \perp w$, então $v_1 + v_2 \perp w$;
v) Se$v \perp w$ eλ é um escalar, $\lambda v \perp w$.

Definição:

Base Ortogonal

Dizemos que uma base $\{v_1, \cdots, v_n\}$ de V é **base ortogonal** se $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para $i \neq j$, isto é, os vetores da base são dois a dois ortogonais.

Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$ e $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base ortogonal de V e w um vetor qualquer de V. Calculemos as coordenadas do vetor w em relação à base B.

Se $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$ e queremos determinar a $i - esima$ coordenada x_i então devemos fazer o produto interno dos 2 membros da igualdade acima com v_i:

$$\begin{aligned} \langle w, v_i \rangle &= \langle x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n, v_i \rangle \\ &= x_i \langle v_i, v_i \rangle \end{aligned}$$

Segue que $x_i = \frac{\langle w, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$.

Exemplo:

Seja $V = \mathbb{R}^2$ com produto interno usual e $B = \{(1,1), (-1,1)\}$. Note que B é base ortogonal. Calculemos $[(2,3)]_B$.

$$(2,3) = a(1,1) + b(-1,1)$$

$$x_1 = \frac{\langle (2,3), (1,1) \rangle}{\langle (1,1), (1,1) \rangle} = \frac{5}{2}$$

$$x_2 = \frac{\langle (2,3), (-1,1) \rangle}{\langle (-1,1), (-1,1) \rangle} = \frac{1}{2}$$

Segue que $[(2,3)]_B = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$