PAULO BOULOS
IVAN DE CAMARGO

GEOMETRIA ANALÍTICA

um tratamento vetorial

MAKRON Books do Brasil Editora Ltda.
São Paulo
Rua Tabapuã, 1348 Itaim Bibi
CEP 04533-004
(011) 829-8604 e (011) 820-6622

Rio de Janeiro · Lisboa · Porto · Bogotá · Buenos Aires · Guatemala · Madrid · México · New York · Panamá · San Juan · Santiago

Auckland • Hamburg • Kuala Lumpur • London • Milan • Montreal • New Delhi • Paris • Singapore • Sydney • Tokyo • Toronto

SUMÁRIO

PARTE 2 - GEOMETRIA ANALÍTICA

PARTE I

VETORES

INTRODUÇÃO

Nesta 1ª parte, apresentamos os Vetores, que constituem uma importante ferramenta para o estudo da Geometria Analítica, da Física, do Cálculo etc. Você encontrará aqui respostas às perguntas: "O que é?", "Como funciona?" e "Para que serve?". O nosso ambiente será o conjunto dos pontos do espaço tridimensional, isto é, o conjunto dos pontos da Geometria Euclidiana. Esse conjunto será indicado por E^3, e muitas vezes citado simplesmente como o "espaço". Você deve sempre imaginar, como modelo intuitivo de E^3, o espaço físico que nos cerca.

Os pontos de E^3 serão indicados por letras latinas maiúsculas (A, B, P, Q etc.); as retas, por letras latinas minúsculas (r, s, t etc.) e os planos por letras gregas minúsculas (π, α, β etc.).

Se uma reta r contém os pontos P e Q, falaremos em "reta PQ"; o segmento geométrico de extremidades P e Q será indicado por PQ. Quando um plano contém os pontos P, Q e R (não colineares), falaremos em "plano PQR".

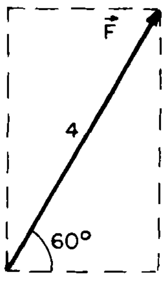
Serão pressupostos os resultados da Geometria Euclidiana, alguns dos quais serão utilizados livremente.

CAPÍTULO 1

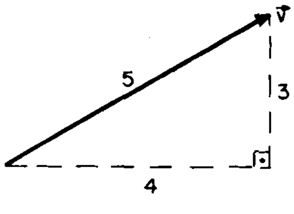
VETORES

Noção Intuitiva

Existem grandezas, chamadas escalares, que são caracterizadas por um número (e a unidade correspondente): 50 dm^2 de área, 4 m de comprimento, 7 kg de massa. Outras, no entanto, requerem mais do que isso. Por exemplo, para caracterizarmos uma força ou uma velocidade, precisamos dar a direção, a intensidade (ou módulo) e o sentido:

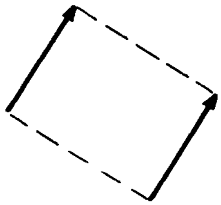


Uma força de 4 N



Uma velocidade de 5 m/s

Tais grandezas são chamadas vetoriais. Nos exemplos acima as flechas nos dão idéia exata das grandezas mencionadas. No entanto, vamos adotar o seguinte ponto de vista: duas flechas de mesmo comprimento, mesma direção, (isto é, paralelas) e mesmo sentido (veja a figura adiante) definem a *mesma* grandeza vetorial. Tais flechas são ditas equipolentes.



Um caso da prática que corresponde a esse ponto de vista é o de um sólido em translação. Nesse caso, a grandeza velocidade de cada ponto, em cada instante, é a mesma. Então, qual das flechas (equipolentes) que dão a velocidade dos pontos do sólido seria escolhida como sendo a *velocidade do sólido* num certo instante? Como nenhuma tem preferência, que tal escolher *todas*, ou melhor, o conjunto de todas elas para ser chamado velocidade do sólido? Aqui está o germe da noção de vetor. Nesse caso, tal conjunto seria o *vetor velocidade* do sólido, no instante considerado.

Formalização do conceito de vetor

Primeiramente, a definição de flecha. Flecha é, intuitivamente, um segmento no qual se fixou uma orientação. E fixar uma orientação é escolher um sentido. No caso da figura, o segmento orientado representado tem orientação de A para B. Na verdade não precisamos da flecha toda para os nossos objetivos. Bastam os pontos A e B, e a ordem: primeiro A e depois B. Eis a definição:

Definição 1

Um *segmento orientado* é um par ordenado (A, B) de pontos do espaço. A é dito *origem*, B *extremidade* do segmento orientado. Os segmentos orientados da forma (A, A) são ditos nulos. Observe que se $A \neq B$, (A, B) é diferente de (B, A).

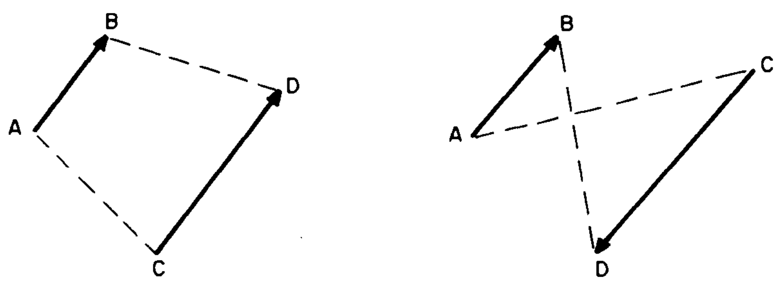
Definição 2

- Dizemos que os segmentos orientados (A, B) e (C, D) têm o mesmo comprimento se os segmentos geométricos AB e CD têm o mesmo comprimento.

- Suponha (A, B) e (C, D) não nulos. Então dizemos que (A, B) e (C, D) têm mesma direção se AB // CD(*). Nesse caso dizemos que (A, B) e (C, D) são paralelos.

- Suponha que (A, B) e (C, D) têm mesma direção.

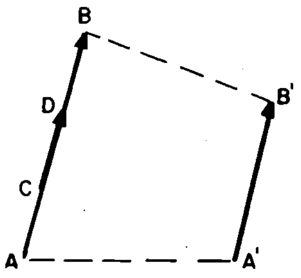
  a) Se as retas AB e CD são distintas, dizemos que (A, B) e (C, D) têm mesmo sentido caso os *segmentos* AC e BD tenham interseção vazia. Caso $AB \cap CD \neq \phi$, dizemos que (A, B) e (C, D) têm sentido contrário.



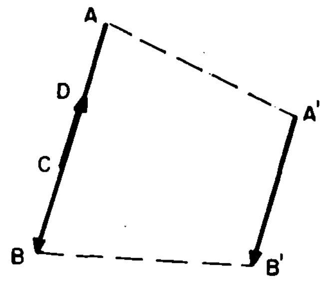
mesmo sentido   sentido contrário

(*) AB // CD inclui o caso em que as retas suportes coincidem.

b) Se as retas AB e CD coincidem, tome (A′, B′) tal que A′ não pertença à reta AB e (A′, B′) tenha mesma direção, e mesmo sentido que (A, B) (como em a)). Então dizemos que (A, B) e (C, D) têm mesmo sentido se (A′, B′) e (C, D) têm mesmo sentido. Se não, dizemos que (A, B) e (C, D) têm sentido contrário.



mesmo sentido



sentido contrário

Verifique que (A, B) e (B, A) têm mesmo comprimento, mesma direção e sentido contrário, sendo $A \neq B$.

Definição 3

Os segmentos orientados (A, B) e (C, D) são *equipolentes*, e indica-se $(A, B) \sim (C, D)$, se um dos casos seguintes ocorrer:

a) ambos são nulos;

b) nenhum é nulo, e têm mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido.

Decorre da definição que "equipolente a um segmento nulo, só outro segmento nulo".

Proposição 1: A relação de equipolência goza das seguintes propriedades:

a) $(A, B) \sim (A, B)$ (reflexiva)

b) $(A, B) \sim (C, D) \Rightarrow (C, D) \sim (A, B)$ (simétrica)

c) $(A, B) \sim (C, D)$ e $(C, D) \sim (E, F) \Rightarrow (A, B) \sim (E, F)$ (transitiva)(*)

Omitimos a demonstração. No entanto, será bom que você se convença da validade das asserções.

Considere agora um segmento orientado (A, B) fixado. Chama-se classe de equipolência de (A, B) ao conjunto de todos os segmentos orientados que são equipolentes a (A, B) (e portanto equipolentes entre si, pela propriedade transitiva). O próprio (A, B) é um deles, pela propriedade reflexiva. (A, B) se diz um *representante* da classe. Note que se (C, D) pertence à classe de equipolência de (A, B) então (A, B) pertence à classe de equipolência de (C, D) (devido à propriedade simétrica)

(*) Uma relação que goza das propriedades a), b) e c) se chama *relação de equivalência*.

e na verdade essas duas classes coincidem, pois quem for equipolente a (C, D) o será a (A, B) e vice-versa (propriedade transitiva). Em outras palavras, qualquer segmento orientado pertencente a uma classe de equipolência pode ser considerado seu representante, e cada segmento orientado é representante de uma única classe de equipolência.

Definição 4

- Um vetor é uma classe de equipolência de segmentos orientados de E^3. Se (A, B) é um segmento orientado, o vetor correspondente (ou seja, o vetor cujo representante é (A, B)) será indicado por $\overrightarrow{AB}$. Usam-se também letras latinas minúsculas encimadas por uma seta ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$ etc.), não se fazendo desse modo referência ao representante. É claro que para citarmos um vetor basta citar (ou desenhar) um qualquer de seus representantes, e pronto: o vetor estará bem determinado. O conjunto de todos os vetores será indicado por V^3.

- Chamaremos *vetor nulo* ao vetor cujo representante é um segmento orientado nulo. Já comentamos que equipolente a um segmento nulo, só outro segmento nulo; segue-se que *todos* os representantes do vetor nulo são segmentos com origem e extremidade coincidentes. Indica-se o vetor nulo por $\vec{0}$.

- Os vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ não-nulos são *paralelos* (indica-se $\vec{x} \,//\, \vec{y}$) se um representante de $\vec{x}$ é paralelo a um representante de $\vec{y}$ (e portanto a todos). Se $\vec{x} \,//\, \vec{y}$, $\vec{x}$ e $\vec{y}$ *têm mesmo sentido* (resp. *sentido contrário*) se um representante de $\vec{x}$ e um representante de $\vec{y}$ têm mesmo sentido (resp. sentido contrário). Consideraremos o vetor nulo paralelo a qualquer vetor.

- Chamaremos *norma* (ou *módulo*, ou *comprimento*) de um vetor ao comprimento de qualquer um de seus representantes; indica-se a norma de $\vec{x}$ por $\|\vec{x}\|$. Se $\|\vec{x}\| = 1$, dizemos que o vetor $\vec{x}$ é unitário.

Observação

De um modo geral, conceitos geométricos como paralelismo, perpendicularismo, comprimento, ângulos etc., envolvendo vetores, são definidos "pondo-se a culpa nos representantes", como foi feito acima. Veja por exemplo a Definição 2 do Capítulo 6.

- O vetor $\overrightarrow{BA}$ é chamado *vetor oposto* do vetor $\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ só diferem no sentido (se $A \neq B$), já que seus representantes (A, B) e (B, A) têm mesma direção, mesmo comprimento e sentido contrário. O vetor oposto do vetor $\overrightarrow{AB}$ é indicado também por $-\overrightarrow{AB}$; o vetor oposto de um vetor $\vec{x}$ é indicado por $-\vec{x}$.

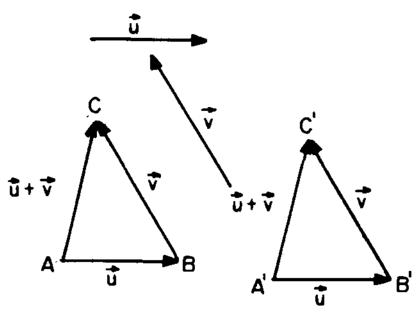
Um fato que estaremos usando sempre é que você poderá intuir facilmente é o seguinte: dados um ponto A e um vetor $\vec{v}$, existe um único segmento orientado representante de $\vec{v}$ com origem A (tente provar isso).

Finalizamos este parágrafo com uma recomendação: nunca use o termo "vetores equipolentes", já que a equipolência é uma relação entre segmentos orientados e não entre vetores. Se os *segmentos orientados* (A, B) e (C, D) são *equipolentes*, então os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são *iguais* (isto é, os segmentos orientados (A, B) e (C, D) pertencem à mesma classe de equipolência).

CAPÍTULO 2

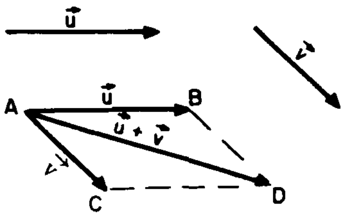
ADIÇÃO DE VETORES

Vamos definir em V^3 uma operação de adição, que a cada par de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ fará corresponder o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$. Para isso, procedemos do seguinte modo: consideramos um representante qualquer (A, B) do vetor $\vec{u}$ e o representante do vetor $\vec{v}$ que tem origem B. Seja C a extremidade deste último. Fica assim determinado o segmento orientado (A, C). Por definição, o vetor $\overrightarrow{AC}$, cujo representante é o segmento orientado (A, C), é o vetor soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$.



Observações

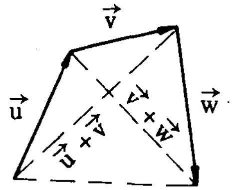
1. A definição nos diz que para determinar o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$, basta "fechar o triângulo", tomando o cuidado de escolher a origem do segundo coincidindo com a extremidade do primeiro (representante). Pode-se também adotar a "regra do paralelogramo", que consiste em tomar representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com a mesma origem A ((A, B) e (A, C) na figura



ao lado) e construir o paralelogramo ABCD. O segmento orientado (A, D) (diagonal que contém o ponto A) é um representante do vetor $\vec{u}+\vec{v}$, já que ela "fecha o triângulo" ABD e $\overrightarrow{BD} = \vec{v}$.

2. A escolha do representante (A, B) do vetor $\vec{u}$ é arbitrária, mas isso não influi na determinação de $\vec{u}+\vec{v}$. De fato, se escolhermos outro representante (A', B') para $\vec{u}$ e conseqüentemente outro representante (B', C') para $\vec{v}$ teremos $(A', B') \sim (A, B)$, $(B', C') \sim (B, C)$ e daí segue que $(A', C') \sim (A, C)$ (convença-se disso; por exemplo, na situação ilustrada na penúltima figura, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes – por quê?)

São muito importantes as propriedades que enunciamos a seguir; elas constituem as primeiras "regras" do cálculo com vetores. Não faremos demonstrações, mas as figuras seguintes são elucidativas.

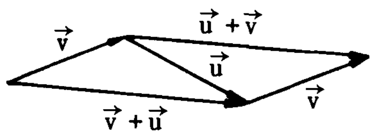


A1) PROPRIEDADE ASSOCIATIVA

$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}), \quad \forall\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$

A2) PROPRIEDADE COMUTATIVA

$\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u} \quad \forall\ \vec{u}, \vec{v} \in V^3$



A3) ELEMENTO NEUTRO

$\vec{u}+\vec{0} = \vec{u}, \qquad \forall\ \vec{u} \in V^3$

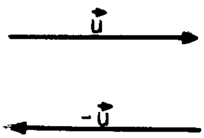
(lembre-se que todo representante do vetor nulo tem origem e extremidade coincidentes). Assim,

$\vec{u}+\vec{0} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}.$

A4) ELEMENTO OPOSTO

Dado um vetor $\vec{u}$ qualquer, existe um vetor que somado a $\vec{u}$ dá como resultado o vetor nulo: trata-se do vetor oposto de $\vec{u}$, que se indica por $-\vec{u}$.

$\vec{u}+(-\vec{u}) = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

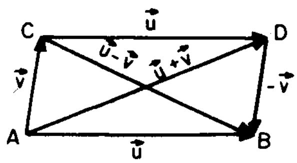


Esta propriedade nos permite definir subtração de vetores: $\vec{u} - \vec{v}$ é por definição a soma do vetor $\vec{u}$ com o vetor oposto do vetor $\vec{v}$.

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}), \quad \forall\ \vec{u}, \vec{v} \in V^3$$

Observação

Escolhidos os representantes (A, B) e (A, C) de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e construído o paralelogramo ABCD (figura) o vetor $\vec{u} - \vec{v}$ terá como representante o segmento orientado (C, B), pois $\overrightarrow{CD} = \vec{u}$, $\overrightarrow{DB} = -\vec{v}$, e $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CB}$. Assim, as diagonais do paralelogramo representam a soma e a diferença entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



Exercício resolvido

Prove as "leis do cancelamento" da adição:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$$

$$\vec{x} + \vec{z} = \vec{y} + \vec{z} \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$$

Resolução

Provaremos a primeira; a segunda se reduz à primeira devido à propriedade comutativa A2.

Somando aos dois membros da igualdade $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ o vetor oposto do vetor $\vec{u}$, obtemos:

$$(-\vec{u}) + (\vec{u} + \vec{v}) = (-\vec{u}) + (\vec{u} + \vec{w});$$

pela associativa (A1) temos

$$(-\vec{u} + \vec{u}) + \vec{v} = (-\vec{u} + \vec{u}) + \vec{w};$$

pela propriedade A4 resulta

$$\vec{0} + \vec{v} = \vec{0} + \vec{w}$$

ou, pela comutativa,

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{w} + \vec{0}\,;$$

e, finalmente, pela propriedade A3,

$$\vec{v} = \vec{w}.$$

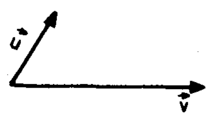
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Prove que

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$$

2. Dados representantes dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ conforme a figura, ache um representante de $\vec{x}$ tal que

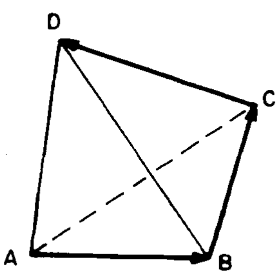
$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} = \vec{0}$$



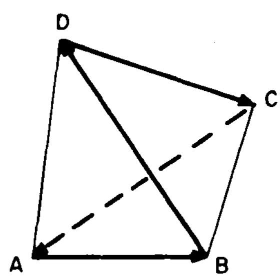
3. Justifique a seguinte regra. Para calcular $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, tome um representante (A, B) de $\vec{u}$, um representante (B, C) de $\vec{v}$, um representante (C, D) de $\vec{w}$. Então $\vec{x}$ tem como representante (A, D). (Intuitivamente falando, "fecha-se o polígono".) Raciocinando por indução finita, pode-se generalizar essa regra para *n* parcelas.

4. Ache a soma dos vetores indicados na figura, nos casos:

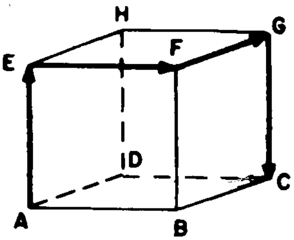
(a)



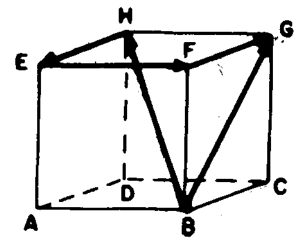
(b)



(c)

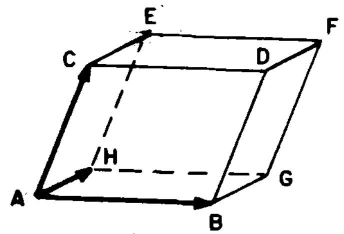


(d)



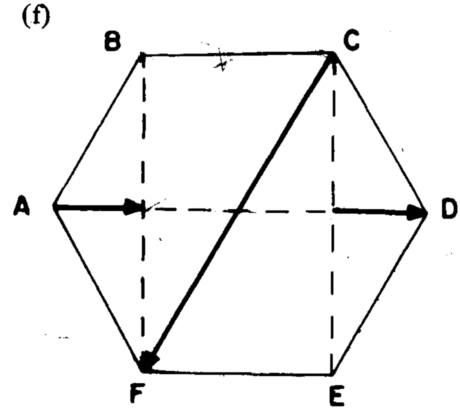
(CUBOS)

(e)



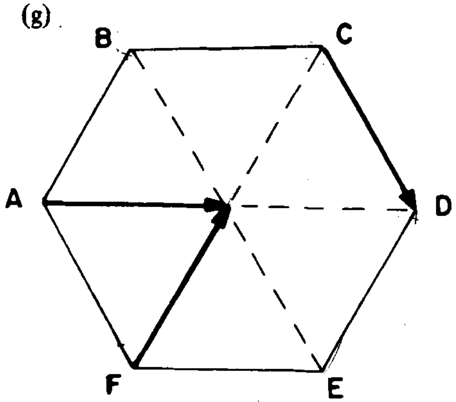
(PARALELEPIPEDO)

(f)

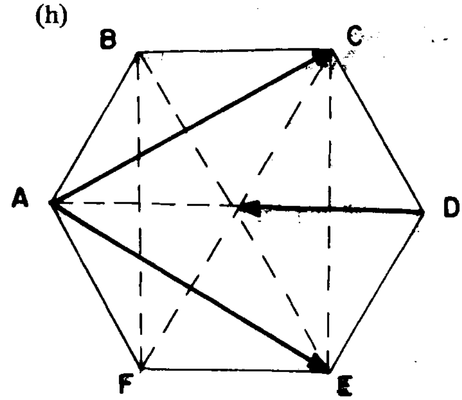


(HEXÁGONOS REGULARES)

(g)



(h)

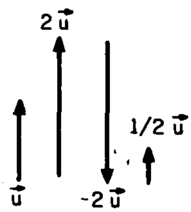


CAPÍTULO 3

MULTIPLICAÇÃO DE NÚMERO REAL POR VETOR

Vamos definir uma operação "externa" em V^3, que a cada número real α e a cada vetor $\vec{v}$ associa um vetor indicado por $\alpha\vec{v}$ tal que:

- Se $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\alpha\vec{v} = \vec{0}$ (por definição)
- Se $\alpha \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\alpha\vec{v}$ é caracterizado por



a) $\alpha\vec{v} // \vec{v}$

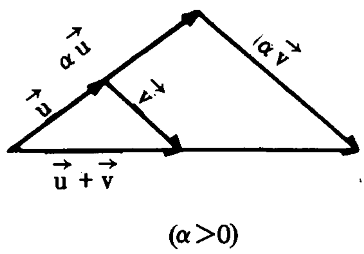
b) $\alpha\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido se $\alpha > 0$ e sentido contrário se $\alpha < 0$.

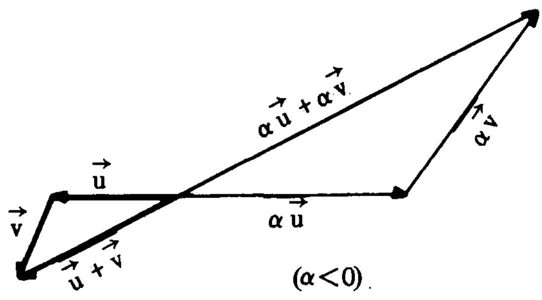
c) $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha|\,\|\vec{v}\|$.

Vejamos quais são as propriedades da multiplicação de número por vetor; aqui, como nas propriedades da adição, omitiremos as demonstrações (isso não o isenta da obrigação de entender e intuir as propriedades; faça figuras!).

M1) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}, \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall\ \vec{u}, \vec{v} \in V^3$

(observe a semelhança dos triângulos da figura seguinte).





M2) $(\alpha+\beta)\vec{v} = \alpha\vec{v}+\beta\vec{v}, \quad \forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}, \quad \forall\,\vec{v}\in V^3$

M3) $1.\vec{v} = \vec{v}, \quad \forall\,\vec{v}\in V^3$

M4) $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v} = \beta(\alpha\vec{v}), \quad \forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}, \quad \forall\,\vec{v}\in V^3$

Observações

1. As quatro propriedades da adição e as quatro propriedades da multiplicação de número por vetor conferem a V^3 o que se chama uma estrutura de "espaço vetorial". O nome "espaço vetorial" se inspira, naturalmente, nos vetores, e pode ser entendido como "espaço cujo comportamento algébrico é idêntico ao do espaço V^3", ou seja, espaço onde valem as propriedades A1, A2, A3, A4, M1, M2, M3, M4. Os espaços vetoriais são estudados na Álgebra Linear.

2. É comum usar-se o termo *escalar* para designar *número real*, em contraposição a *vetor*. A operação definida neste parágrafo é, pois, a *multiplicação de vetor por escalar* (não confunda com *produto escalar*, que será definido mais adiante).

3. Como as oito propriedades A1, A2, A3, A4, M1, M2, M3, M4 são válidas também para a adição e para a multiplicação de números reais, o cálculo com vetores (pelo menos no que tange às duas operações definidas até agora) segue os mesmos princípios – as mesmas regras – que o cálculo algébrico elementar. Por exemplo, somando aos dois membros da igualdade $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ o vetor oposto do vetor $\vec{a}$, e aplicando as propriedades A1, A4, A2, e A3, chegamos a

$$\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$$

Logo, vale para os vetores a conhecida regra "pode-se transpor um termo de um membro para outro de uma igualdade, desde que se lhe troque o sinal".

4. Se $\alpha\in\mathbb{R}$ e $\vec{v}\in V^3$, com $\alpha\neq 0$, $\dfrac{\vec{v}}{\alpha}$ significa $\dfrac{1}{\alpha}\vec{v}$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Prove as Regras de Sinais:

a) $(-\alpha)\vec{v} = -(\alpha\vec{v})$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\ \vec{v} \in V^3$

b) $\alpha(-\vec{v}) = -(\alpha\vec{v})$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\ \vec{v} \in V^3$

c) $(-\alpha)(-\vec{v}) = \alpha\vec{v}$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\ \vec{v} \in V^3$

Resolução

a) Devemos provar que $(-\alpha)\vec{v}$ é o vetor oposto do vetor $\alpha\vec{v}$; para isso, pela definição de vetor oposto, é suficiente mostrar que a soma $(-\alpha)\vec{v} + \alpha\vec{v}$ é o vetor nulo. Vejamos:

$$(-\alpha)\vec{v} + \alpha\vec{v} \overset{M2}{=} (-\alpha+\alpha)\vec{v} = 0\vec{v} \overset{\text{def.}}{=} \vec{0} \text{ como queríamos.}$$

b) Devemos mostrar que $\alpha(-\vec{v}) + \alpha\vec{v} = \vec{0}$ para concluir que $\alpha(-\vec{v})$ é o oposto de $\alpha\vec{v}$. Mas:

$$\alpha(-\vec{v}) + \alpha\vec{v} \overset{M1}{=} \alpha(-\vec{v}+\vec{v}) = \alpha\vec{0} \overset{\text{def.}}{=} \vec{0}$$

c) Usaremos as partes a) e b):

$$(-\alpha)(-\vec{v}) \overset{a)}{=} -[\alpha(-\vec{v})] \overset{b)}{=} -[-(\alpha\vec{v})] = \alpha\vec{v}$$

(explique você mesmo a última passagem; lembre-se da definição de vetor oposto).

2. Prove que se $\alpha\vec{v} = \beta\vec{v}$ e se $\vec{v} \neq \vec{0}$, então $\alpha = \beta$.

Resolução

$$\alpha\vec{v} = \beta\vec{v} \Rightarrow \alpha\vec{v} - \beta\vec{v} = \vec{0} \overset{\text{def.}}{\Rightarrow} \alpha\vec{v} + (-(\beta\vec{v})) = \vec{0}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \alpha\vec{v} + (-\beta)\vec{v} = \vec{0} \overset{M2}{\Rightarrow} (\alpha-\beta)\vec{v} = \vec{0}$$

Como por hipótese $\vec{v} \neq \vec{0}$, temos (exercício 1 adiante) que $\alpha - \beta = 0$ ou seja $\alpha = \beta$.

(*) Exercício Resolvido 1a).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Prove que $\alpha \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

2. Prove que se $\alpha \vec{u} = \alpha \vec{v}$ e se $\alpha \neq 0$, então $\vec{u} = \vec{v}$.

3. Prove que $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$.

4. Prove que $2\vec{v} = \vec{v} + \vec{v}$.

5. Se (A, B) é um representante de $\vec{u} \neq \vec{0}$, e (C, D) um representante de $\vec{v} \neq \vec{0}$, prove que:

   $AB \,//\, CD \iff$ existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.

   (Este resultado é importantíssimo e será muito útil; trata-se de uma "tradução" algébrica muito simples, $\vec{u} = \lambda \vec{v}$, de um fato geométrico muito importante, o paralelismo. É exatamente isto que se pretende na Geometria Analítica.)

6. Resolva a equação na incógnita $\vec{x}$: $2\vec{x} - 3\vec{u} = 10(\vec{x} + \vec{v})$

7. Resolva o sistema nas incógnitas $\vec{x}$ e $\vec{y}$:

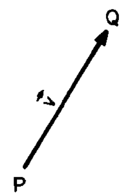
$$\begin{cases} \vec{x} + 2\vec{y} = \vec{u} \\ 3\vec{x} - \vec{y} = 2\vec{u} + \vec{v} \end{cases}$$

8. Seja $\vec{v} \neq \vec{0}$. Mostre que $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ é um vetor unitário (chamado *versor* de $\vec{v}$).

CAPÍTULO 4

SOMA DE PONTO COM VETOR

Como já comentamos no final do Capítulo 1, dados um ponto P e um vetor $\vec{v}$, existe um único segmento orientado (P, Q) representante de $\vec{v}$. Isso nos permite definir uma operação que a cada ponto $P \in E^3$ e a cada vetor $\vec{v} \in V^3$ associa um único ponto Q de E^3, indicado por $P + \vec{v}$, e chamado *soma* de P com $\vec{v}$. Assim,



$$\forall\ P \in E^3,\ \ \forall \vec{v} \in V^3 : P + \vec{v} = Q \iff \overrightarrow{PQ} = \vec{v} \tag{1}$$

donde $\qquad P + \overrightarrow{PQ} = Q$

Usaremos a notação $P - \vec{v}$ para indicar a soma do ponto P com o vetor oposto do vetor $\vec{v}$:

$$P - \vec{v} = P + (-\vec{v})$$

Intuitivamente, podemos encarar $P + \vec{v}$ como o resultado de uma translação do ponto P, translação essa determinada pelo vetor $\vec{v}$.

Vejamos algumas propriedades dessa operação:

P1. $\quad P + \vec{0} = P \quad \forall P \in E^3$

É uma conseqüência imediata da definição, pois $\overrightarrow{PP} = \vec{0} \Rightarrow P + \vec{0} = P$.

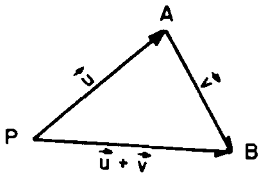
P2. $\quad P + \vec{u} = P + \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \vec{v}$

De fato: seja $Q = P + \vec{u} = P + \vec{v}$. Então, da definição decorre que $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$. Logo $\vec{u} = \vec{v}$. Note que esta propriedade permite um "cancelamento" de P na igualdade $P + \vec{u} = P + \vec{v}$.

P3. $(P + \vec{u}) + \vec{v} = P + (\vec{u} + \vec{v}) \quad \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V^3 \quad \forall\, P \in E^3$

Demonstração

Sejam (veja a figura ao lado) $A = P + \vec{u}$ e $B = A + \vec{v}$ (logo, $B = (P + \vec{u}) + \vec{v}$). Então, da definição decorre que $\overrightarrow{PA} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$. Somando, temos $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$ e como $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB}$, vem $\overrightarrow{PB} = \vec{u} + \vec{v}$. Novamente pela definição de soma de ponto com vetor, concluímos que $B = P + (\vec{u} + \vec{v})$ e que portanto $(P+\vec{u})+\vec{v}=P+(\vec{u}+\vec{v})$.



P4. $A + \vec{v} = B + \vec{v} \Rightarrow A = B$

(Agora se trata de um "cancelamento" de $\vec{v}$). De fato, $A + \vec{v} = B + \vec{v} \Rightarrow (A + \vec{v}) - \vec{v} = (B + \vec{v}) - \vec{v} \overset{P3}{\Rightarrow} A + (\vec{v} - \vec{v}) = B + (\vec{v} - \vec{v}) \Rightarrow A + \vec{0} = B + \vec{0} \overset{P1}{\Rightarrow} A = B$.

P5. $(P - \vec{v}) + \vec{v} = P$

Decorre diretamente de P3 e de P1:

$$(P - \vec{v}) + \vec{v} = [P + (-\vec{v})] + \vec{v} \overset{P3}{=} P + [-\vec{v} + \vec{v}] = P + \vec{0} \overset{P1}{=} P$$

Observação

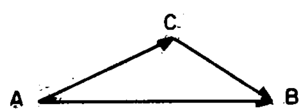
Se o segmento orientado (A, B) é um representante do vetor $\vec{x}$, é usual representar esse vetor por $\overrightarrow{AB}$, ou também por $B - A$. Esta última é chamada notação de Grassmann (não se trata, a rigor, de subtrair pontos, mas sim de uma notação sugestiva: já que o ponto B é a soma do ponto A com o vetor $\vec{x}$ (pois $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$), o vetor $\vec{x}$ seria a "diferença" entre B e A).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Mostre que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

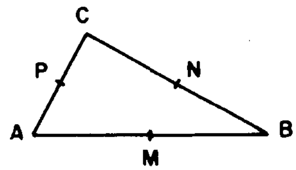
Resolução

Lembrando que por definição de adição de vetores $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ e que $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$ obtemos o resultado



2. Na figura, M, N, P são pontos médios de AB, BC e CA respectivamente. Exprima $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{CM}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Resolução



- $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BA}$

Precisamos fazer aparecer $\overrightarrow{AC}$. Aí usamos o fato de **P** ser ponto médio:

$$2\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC}$$

Então, levando na primeira relação acima, vem:

$$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \qquad (\alpha)$$

- Quanto a $\overrightarrow{AN}$:

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{AB}$$

$$2\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$$

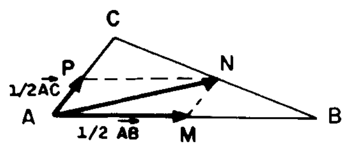
$$\therefore\ \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \qquad (\beta)$$

- Fica a seu cargo provar que

$$\overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \qquad (\gamma)$$

Na figura ao lado, damos uma ilustração de (β). Faça você uma de (α) e uma de (γ).



Observações

(a) Eis um outro modo de resolver o problema:

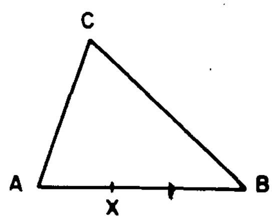
Parta de $2\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC}$ e faça aparecer B: $2(\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}$

Daí $2\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \therefore \overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

(b) Não vá concluir de (β) que a medida de AN é a semi-soma das medidas de AB e AC! Sendo A, B, C vértices de um triângulo, vale $\|\overrightarrow{AN}\| < \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\| + \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\|$ (por quê?)

(c) Verifique que (α), (β) e (γ) valem, mesmo que A, B e C sejam colineares.

3. Na figura, a medida de AX é metade da medida de XB. Exprima $\overrightarrow{CX}$ em função de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.



Resolução

Podemos escrever $\overrightarrow{AX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{XB}$ (Cuidado: $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{XB}$ têm o mesmo sentido! É comum enganar-se escrevendo por exemplo $\overrightarrow{AX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BX}$, o que está errado, pois os vetores do 1º e 2º membros têm sentido contrário.) Fazendo "aparecer" C resulta:

$$\overrightarrow{CX} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CX})$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{CX} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CX}$$

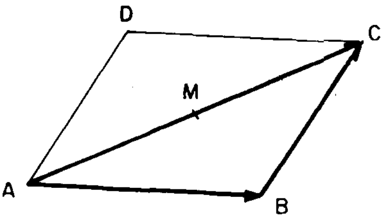
$$\therefore \quad \overrightarrow{CX} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$$

$$\therefore \quad \frac{3}{2}\overrightarrow{CX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{CX} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}.$$

4. Prove que as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.

Resolução

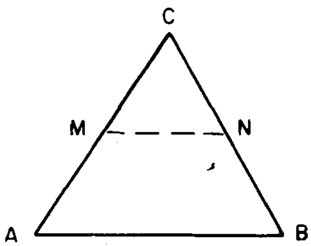


Considere o paralelogramo ABCD, de diagonais AC e DB. Seja M o ponto médio de AC. Vamos provar que M é também ponto médio de BD. Ora, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MD}$. Logo, M é ponto médio de BD.

5. Prove que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem por medida a metade da medida deste lado.

Resolução

Seja o triângulo ABC, e sejam M e N os pontos médios de AC e BC, respectivamente.



A afirmação feita equivale à seguinte relação: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (por quê?) a qual passaremos a provar.

Podemos escrever
$$2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC}$$
$$2\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CB}$$

Somando membro a membro, resulta $2(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

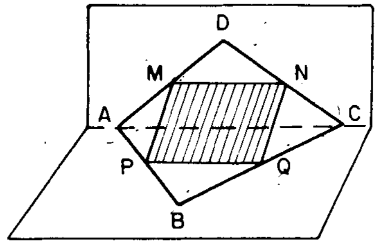
$$\therefore\ 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

6. Prove que se os pontos médios dos lados de um quadrilátero são vértices de um segundo quadrilátero, este é um paralelogramo.

Resolução

Seja ABCD o quadrilátero, e, M, N, P, Q os quatro pontos médios de seus lados. Para provarmos a asserção, basta provarmos que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ (pois se um quadrilátero tem dois lados opostos paralelos e congruentes, ele é um paralelogramo).



Pelo exercício anterior, considerando o Δ ADC, podemos escrever $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Do mesmo modo, considerando o Δ ACB, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Dessas duas expressões resulta $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$, como queríamos.

7. Prove que num triângulo as retas suportes de duas medianas se encontram num único ponto.

Resolução

Com a notação do Exercício Resolvido 2, vamos provar a afirmação provando que $\overrightarrow{AN}$ e $\overrightarrow{BP}$ não são paralelos. Se fossem, haveria $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{BP} = \lambda\ \overrightarrow{AN}$.

Usando as expressões (α) e (β) do Exercício Resolvido nº 2 vem

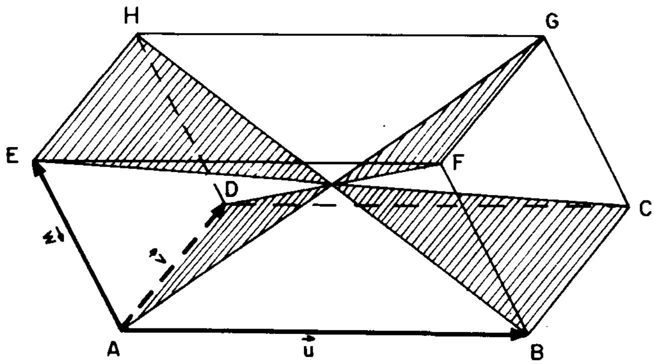
$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AB}$$

donde

$$\frac{1-\lambda}{2}\overrightarrow{AC} = (1 + \frac{\lambda}{2})\ \overrightarrow{AB}$$

Não pode suceder $\lambda = 1$, senão seria $(1 + \frac{1}{2})\ \overrightarrow{AB} = \vec{0}$, logo B = A. Então $\lambda \neq 1$, e daí $\overrightarrow{AC} = \dfrac{1 + \frac{\lambda}{2}}{\frac{1-\lambda}{2}}\overrightarrow{AB}$; logo $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$ seriam paralelos, o que é absurdo.

4 Na figura se representa um paralelepípedo ABCDEFGH. Sendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$, exprima $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{DF}$ em função de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.



Resolução

- $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \vec{w} + \vec{v} + \vec{u}$

$\therefore \ \overrightarrow{AG} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

(interpretação: em termos vetoriais, "a diagonal de um paralelepípedo é a soma de suas arestas").

- $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EA} = \vec{v} + \vec{u} - \vec{w}$

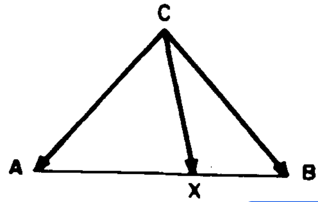
- $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{HD} = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$

Da mesma forma chega-se a

- $\overrightarrow{DF} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Dados quatro pontos A, B, C e X tais que $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$, exprima $\overrightarrow{CX}$ em função de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ (e m).



Sugestão. Na relação $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$ faça aparecer C em ambos os membros.

2. É dado um triângulo ABC e os pontos X, Y, Z tais que $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$ $\overrightarrow{BY} = n\overrightarrow{YC}$ $\overrightarrow{CZ} = p\overrightarrow{ZA}$. Exprima $\overrightarrow{CX}$, $\overrightarrow{AY}$, $\overrightarrow{BZ}$ em função de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ (e m, n, p).

3. Num triângulo ABC é dado X sobre AB tal que $\|\overrightarrow{AX}\| = 2\|\overrightarrow{XB}\|$ e é dado Y sobre BC tal que $\|\overrightarrow{BY}\| = 3\|\overrightarrow{YC}\|$. Mostre que as retas CX e AY se cortam.

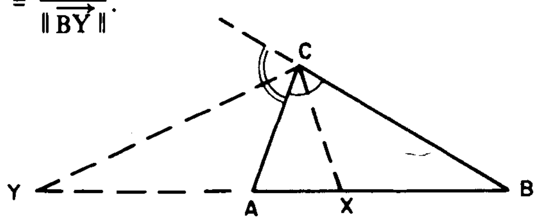
Sugestão: Use o exercício anterior, achando qual deve ser m e qual deve ser n. Suponha $\overrightarrow{CX} = \lambda\overrightarrow{AY}$ e chegue a um absurdo.

4. Num triângulo ABC, sejam X a interseção do lado AB com a bissetriz interna do ângulo $A\hat{C}B$, e, supondo $\|\overrightarrow{CA}\| \neq \|\overrightarrow{CB}\|$, Y a interseção da reta AB com uma das bissetrizes externas do ângulo $A\hat{C}B$(*).

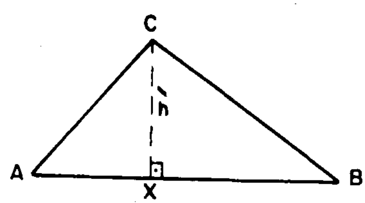
a) Os vetores $\dfrac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} + \dfrac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|}$ e $\dfrac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} - \dfrac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|}$ são respectivamente paralelos a $\overrightarrow{CX}$ e $\overrightarrow{CY}$. Dê uma explicação geométrica para isso. No Capítulo 8 (Exercício 3) você dará uma prova analítica.

b) Prove que $\dfrac{\|\overrightarrow{CA}\|}{\|\overrightarrow{AX}\|} = \dfrac{\|\overrightarrow{CB}\|}{\|\overrightarrow{BX}\|}$ e $\dfrac{\|\overrightarrow{CA}\|}{\|\overrightarrow{AY}\|} = \dfrac{\|\overrightarrow{CB}\|}{\|\overrightarrow{BY}\|}$.

c) Exprima $\overrightarrow{CX}$, $\overrightarrow{CY}$, X e Y em função de A, $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.



5. Sendo CX a altura do ΔABC relativa ao vértice C, exprima $\overrightarrow{CX}$ e X em função de A, $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.
Sugestão. Se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ não são retos, vale $h = \|\overrightarrow{AX}\| \operatorname{tg}\hat{A} = \|\overrightarrow{BX}\| \operatorname{tg}\hat{B}$. Conclua daí que $(\operatorname{tg}\hat{A})\overrightarrow{AX} = (\operatorname{tg}\hat{B})\overrightarrow{XB}$, quer $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sejam agudos, quer um deles seja obtuso.



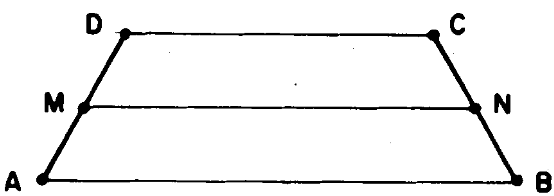
(*) Existe Y se $\|\overrightarrow{CA}\| \neq \|\overrightarrow{CB}\|$.

6. Prove que as medianas de um triângulo se encontram num mesmo ponto, que divide cada uma na razão 2:1 a partir do vértice correspondente.

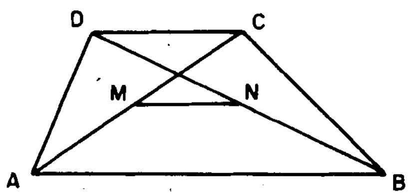
Sugestão: Usando o Exercício Resolvido nº 7: seja G o ponto comum às retas AN e BP, e H o ponto comum às retas AN e CM. Existem λ, μ, α e β tais que $G = A + \lambda\overrightarrow{AN} = B + \mu\overrightarrow{BP}$ e $H = C + \alpha\overrightarrow{CM} = A + \beta\overrightarrow{AN}$. Calcule λ, μ, α e β.

7. Prove que as alturas de um triângulo se encontram num mesmo ponto. Idem para as bissetrizes internas.

8. Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não-paralelos de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a semi-soma das medidas das bases. (Atenção: *não é suficiente* provar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$, mas isso ajuda bastante.)



9. Demonstre que o segmento que une os pontos médios das diagonais de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a semi-diferença das medidas das bases. (Atenção: *não é suficiente* provar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$, mas isso ajuda bastante.)



10. Num triângulo ABC, sejam M, N, P, os pontos médios dos lados AB, BC e AC, respectivamente. Mostre que

$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}.$$

Sugestão: Exercício Resolvido nº 2.

11. Dado um triângulo qualquer, mostre que existe outro com lados paralelos e congruentes às medianas do primeiro.

Sugestão: Tome um ponto O qualquer e considere os pontos $X = O + \overrightarrow{AN}$, $Y = X + \overrightarrow{BP}$ e $Z = Y + \overrightarrow{CM}$. Mostre que $Z = O$ e que O, X, Y não são colineares.

12. Sendo ABCDEF um hexágono regular de centro O, prove que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6\,\overrightarrow{AO}.$$

13. Seja OABC um tetraedro, X o ponto da reta BC definido por $\overrightarrow{BX} = m\overrightarrow{BC}$. Exprima $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{AX}$ em função de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

14. Seja OABC um tetraedro, X o ponto de encontro das medianas do triângulo ABC (baricentro). Exprima $\overrightarrow{OX}$ em termos de $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.

15. Sejam A, B, C, D pontos quaisquer, M o ponto médio de AC e N o de BD. Exprima $\vec{x}$ em função de $\overrightarrow{MN}$, sendo $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.

16. Seja ABCD um quadrilátero, e O um ponto qualquer. Seja P o ponto médio do segmento que une os pontos médios das diagonais AC e BD. Prove que

$$P = O + \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

17. Dados O, A, B, C, ache G tal que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ em função de O, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$.

18. Sejam A, B e C três pontos quaisquer, $A \neq B$. Prove que:

X é um ponto da reta AB $\Longleftrightarrow \overrightarrow{CX} = \alpha\,\overrightarrow{CA} + \beta\,\overrightarrow{CB}$, com $\alpha + \beta = 1$.

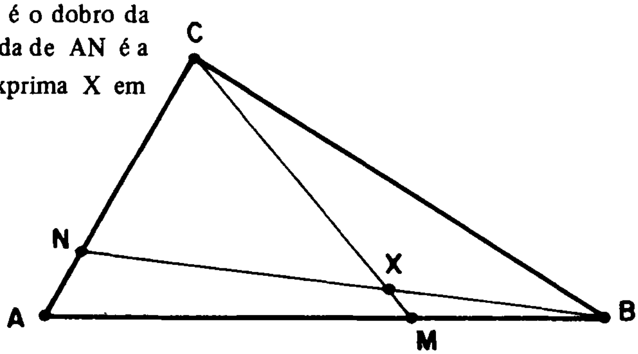
Sugestão: Exercício 1.

19. Nas condições do Exercício 18, prove que:

X é um ponto do segmento AB $\Longleftrightarrow \overrightarrow{CX} = \alpha\,\overrightarrow{CA} + \beta\,\overrightarrow{CB}$, com $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, e $\alpha + \beta = 1$.

20. Sejam A, B e C vértices de um triângulo. Prove que: X é um ponto interior ao triângulo ABC se e somente se $\overrightarrow{CX} = \alpha\,\overrightarrow{CA} + \beta\,\overrightarrow{CB}$, com $\alpha > 0$, $\beta > 0$, e $\alpha + \beta < 1$ (um ponto é interior a um triângulo se for interior a alguma ceviana dele).

21. Na figura, a distância de M a A é o dobro da distância de M a B, e a medida de AN é a terça parte da medida de CN. Exprima X em função de A, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.



22. Considere o triângulo ABC, e sejam $\overrightarrow{CA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{v}$, e $\vec{w} = \vec{u} - 2\vec{v}$. Calcule α real para que o ponto $X = C + \alpha\vec{w}$ pertença à reta AB.

CAPÍTULO 5

DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR

Um conceito fundamental para tudo o que virá a seguir é o de dependência linear de vetores. Veremos em primeiro lugar a conceituação geométrica, para em seguida caracterizá-la algebricamente.

Inicialmente, fixemos a seguinte linguagem: um vetor $\vec{u}$ diz-se paralelo a uma reta r (a um plano π) se existir um representante (A, B) de $\vec{u}$ tal que o segmento AB esteja contido em r (em π). Em particular, o vetor nulo é paralelo a qualquer reta e a qualquer plano. É claro que dois vetores paralelos a uma mesma reta são paralelos; mas cuidado: dois vetores paralelos a um mesmo plano podem não ser paralelos!

A conceituação geométrica da dependência linear será feita por etapas, conforme a quantidade de vetores envolvidos.

Definição 1

I – Uma seqüência $(\vec{v})$ de um único vetor $\vec{v} \in V^3$ é *linearmente dependente* (LD) se $\vec{v} = \vec{0}$. Se $\vec{v} \neq \vec{0}$, a seqüência $(\vec{v})$ é *linearmente independente* (LI).

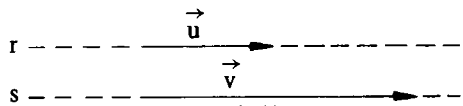
II – Uma seqüência $(\vec{u}, \vec{v})$ de vetores de V^3 é *linearmente dependente* (LD) se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos a uma mesma reta. Caso contrário, $(\vec{u}, \vec{v})$ é *linearmente independente* (LI).

III – Uma seqüência $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de vetores de V^3 é *linearmente dependente* (LD) se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ forem paralelos a um mesmo plano. Caso contrário, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é *linearmente independente* (LI).

IV – Qualquer seqüência de vetores com quatro ou mais elementos é *linearmente dependente* (LD) por definição.

Observações

1. Conforme ficou bem explícito na definição, dependência e independência linear são qualidades inerentes a *seqüência* de vetores, e não aos próprios vetores. Apesar disso, é comum dizer-se: "os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI", ou "os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são LD". É claro que o significado é: "o par ordenado $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI", ou, respectivamente, "a tripla ordenada $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD". Evite, portanto, o seguinte erro de raciocínio: se o vetor $\vec{u}$ é LI e o vetor $\vec{v}$ é LI, então os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI. Isso nem sempre é verdade, como por exemplo no caso da figura, onde $(\vec{u})$ é LI, pois $\vec{u} \neq \vec{0}$, $(\vec{v})$ é LI, pois $\vec{v} \neq \vec{0}$, mas $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD (por quê?)



(r // s)

2. Se uma seqüência $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n)$ é LD [LI], qualquer permutação dessa seqüência também é LD [LI].

3. Se um dos vetores da seqüência é nulo, essa seqüência é LD. Verifique você mesmo.

CARACTERIZAÇÃO ALGÉBRICA DA DEPENDÊNCIA E DA INDEPENDÊNCIA LINEAR

Definição 2

Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n$ vetores de V^3 $(n \geqslant 1)$ e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ números reais. Chama-se *combinação linear* dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n$ (com coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$) ao vetor

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n$$

Se $\vec{u}$ é combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n$, diz-se também que $\vec{u}$ é *gerado* pelos vetores $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_n$.

Observe agora que o vetor nulo é gerado por $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n$, quaisquer que sejam estes vetores. De fato, sempre é possível escolher $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, e teremos

$$\vec{0} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \ldots + 0\vec{v}_n \qquad (1)$$

Ora, dirá você, assim não tem graça! É claro que escolhendo todos os coeficientes iguais a zero, a combinação linear resultará no vetor nulo! Concordo. Será que haveria, porém, outra combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ (isto é, em que os coeficientes NÃO sejam todos nulos) que seja também igual a $\vec{0}$? Conforme veremos mais adiante (Proposição 2), isso depende exclusivamente de ser LI ou LD a seqüência $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$.

Antes, veremos uma primeira relação entre dependência linear e combinações lineares.

Proposição 1

Uma seqüência $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$ $(n \geqslant 2)$ é LD se e somente se algum vetor da seqüência for gerado pelos demais.

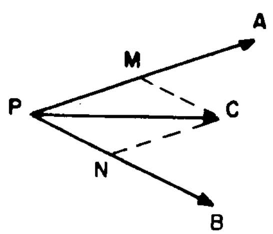
Demonstração

Analisaremos separadamente cada um dos casos (II), (III) e (IV) da Definição 1.

Caso (II) a) Suponhamos $(\vec{u}, \vec{v})$ LD. Se um dos dois vetores é nulo, ele é gerado pelo outro; suponhamos então $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$. Da hipótese, concluímos que existem representantes (A, B) de $\vec{u}$ e (A, C) de $\vec{v}$ tais que A, B e C são colineares, $A \neq B$ e $A \neq C$. Seja $\alpha = \dfrac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|}$.
Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido, temos $\vec{v} = \alpha \vec{u}$ e se têm sentido contrário, $\vec{v} = (-\alpha) \vec{u}$. Logo $\vec{v}$ é gerado por $\vec{u}$(*). Compare com o Exercício 5 do Capítulo 3.

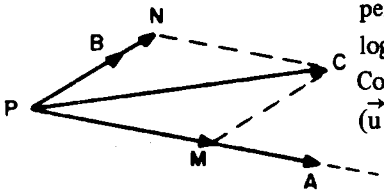
b) Reciprocamente, suponha que $\vec{v} = \alpha \vec{u}$ e que nenhum dos dois vetores é nulo (caso em que não haveria nada a demonstrar). Seja (A, B) um representante de $\vec{u}$. Da definição de multiplicação de vetor por escalar, concluímos que o representante de $\vec{v}$ com origem A tem sua extremidade C na reta que passa por A e B. Logo, A, B e C são colineares e isso quer dizer que $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD.

Caso (III) a) Suponhamos $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ LD. Se o par $(\vec{u}, \vec{v})$ for LD, teremos pelo que já foi provado (caso (II)) que $\vec{u} = \alpha \vec{v}$ (ou $\vec{v} = \beta \vec{u}$). Nesse caso, $\vec{u} = \alpha \vec{v} + 0 \vec{w}$ (ou $\vec{v} = \beta \vec{u} + 0 \vec{w}$) e está demonstrada a afirmação. Se, por outro lado, $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI, fazemos a seguinte construção geométrica: tomamos um ponto $P \in E^3$ e os representantes (P, A), (P, B) e (P, C) de $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ respectivamente; P, B e A não são colineares, pois $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI. Pelo ponto C tomamos retas paralelas a PB e PA, determinando assim os pontos M e N (figura). Então, $(\vec{u}, \overrightarrow{PM})$ é LD, e pelo que já foi provado (caso II) temos $\overrightarrow{PM} = \alpha \vec{u}$. Da mesma forma, $\overrightarrow{PN} = \beta \vec{v}$. Notando agora que $\vec{w} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}$, temos $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$. Observe que os argumentos acima valem também para os casos em que $\vec{w} \,//\, \vec{u}$ ou $\vec{w} \,//\, \vec{v}$; apenas a figura seria diferente. Pense nisso.



(*) Note que no caso $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ não só $\vec{u}$ é gerado por $\vec{v}$, mas também $\vec{v}$ é gerado por $\vec{u}$, pois $\alpha \neq 0$ e portanto de $\vec{v} = \alpha \vec{u}$ segue $\vec{u} = \frac{1}{\alpha} \vec{v}$.

b) Reciprocamente, suponha que $\vec{w}$, por exemplo, é gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, e que nenhum dos três vetores é nulo (pois nesse caso não há o que demonstrar). Sejam (P, A), (P, B) e (P, C) representantes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, respectivamente. Se P, A e B são colineares, é claro que os quatro pontos estão num mesmo plano e portanto $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD. Se, ao contrário, P, A e B determinam um plano, sendo $\overrightarrow{PM} = \alpha\vec{u}$ e $\overrightarrow{PN} = \beta\vec{v}$ (veja a figura) temos que M pertence à reta PA, N pertence à reta PB, e portanto o paralelogramo PMCN está contido no plano determinado por P, A e B. Concluímos que os pontos P, A, B e C são coplanares e portanto $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD.



Caso (IV) Neste caso, precisamos provar apenas que se $n \geqslant 4$, então um dos vetores da seqüência $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$ é gerado pelos demais (a recíproca é automaticamente verdadeira, pois para $n \geqslant 4$ a seqüência é LD por definição). Se $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ é LD, então, pelo que já vimos, um deles (por exemplo, $\vec{v}_1$) é gerado pelos outros dois:

$$\vec{v}_1 = \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3.$$

Segue-se que

$$\vec{v}_1 = \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_2\vec{v}_3 + 0\,\vec{v}_4 + ... + 0\,\vec{v}_n$$

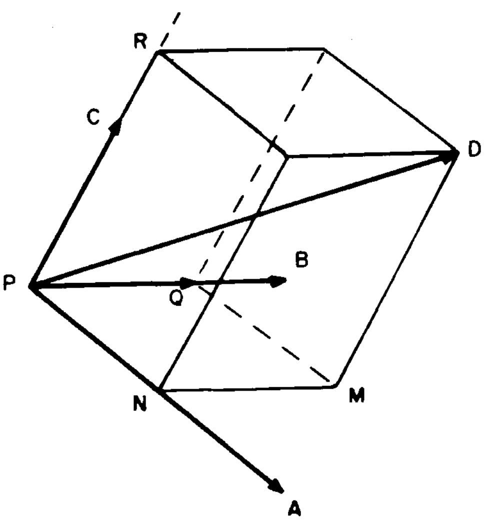
e portanto $\vec{v}_1$ é gerado pelos vetores $\vec{v}_2, \vec{v}_3, ..., \vec{v}_n$. Suponhamos agora que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ é LI e façamos a seguinte construção geométrica: sejam (P, A), (P, B), (P, C) e (P, D) respectivamente representantes de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ e $\vec{v}_4$. Pelo ponto D, tomamos uma reta paralela a PC, que encontra o plano PAB no ponto M (por que essa reta não pode ser paralela ao plano PAB?). Pelo ponto M, tomamos retas paralelas a PA e PB, determinando assim os pontos N e Q (ver figura). Finalmente, pelo ponto D tomamos um plano paralelo ao plano PAB, que intercepta a reta PC num ponto R (por que esse plano não pode ser paralelo a PC?). É claro que $\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} = \vec{v}_4$.

Por outro lado

$(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PN})$ é LD $\Rightarrow \overrightarrow{PN} = \alpha_1\overrightarrow{PA} = \alpha_1\vec{v}_1$

$(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PQ})$ é LD $\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \alpha_2\overrightarrow{PB} = \alpha_2\vec{v}_2$

$(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PR})$ é LD $\Rightarrow \overrightarrow{PR} = \alpha_3\overrightarrow{PC} = \alpha_3\vec{v}_3$



Logo, $\vec{v}_4 = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3$ e portanto, $\vec{v}_4 = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 + 0\,\vec{v}_5 + ... + 0\,\vec{v}_n$, isto é, $\vec{v}_4$ é gerado pelos demais vetores da seqüência. Note que os argumentos acima valem também para os casos em que D pertence a uma das retas PA, PB, PC, ou a um dos planos PAB, PAC, PBC. Pense nisso e faça novas figuras. Fica assim demonstrada a Proposição 1.

Corolário 1 $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD $\Longleftrightarrow$ existe α real tal que $\vec{u} = \alpha \vec{v}$ ou existe β real tal $\vec{v} = \beta \vec{u}$. Além disso, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são diferentes de $\vec{0}$, existem ambos, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, e $\alpha = \frac{1}{\beta}$.

Corolário 2 Se $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI e $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD, então $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é, existem escalares α e β tais que $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ (é o que foi demonstrado no Caso (III)). Na realidade, como se verá nos exercícios resolvidos, existe um único par de coeficientes α e β nessas condições.

Colorário 3 Se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI, então todo vetor $\vec{x} \in V^3$, é gerado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Isso quer dizer que para todo $\vec{x} \in V^3$, existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{x} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$$

(veremos logo mais, nos Exercícios Resolvidos, que essa tripla ordenada (α, β, γ) de escalares é determinada de modo único).

A proposição seguinte responde à pergunta a respeito de ser ou não ser possível obter o vetor nulo como combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ sem lançar mão do "golpe baixo" de tomar todos os escalares iguais a zero.

Proposição 2 Uma seqüência $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$ de vetores de V^3 é LD se, e somente se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ NÃO TODOS NULOS tais que $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + ... + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$. Ou seja, se e somente se a equação $x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + ... + x_n \vec{v}_n = \vec{0}$ nas incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ admite solução não-trivial.

Exemplos

1) Seja $\vec{v}$ um vetor qualquer; a seqüência $(\vec{v}, -\vec{v})$ é LD, pois $1.\vec{v} + 1.(-\vec{v}) = \vec{0}$ (os escalares não são todos nulos).

2) A seqüência $(\vec{u}, \vec{v}, 2\vec{u} - 3\vec{v})$ é LD, pois $(-2)\vec{u} + 3\vec{v} + 1.(2\vec{u} - 3\vec{v}) = \vec{0}$.

3) Com o auxílio da Proposição 2, é bem fácil ver que qualquer seqüência na qual compareça o vetor nulo é LD. De fato, basta escolher coeficiente não nulo para o vetor

nulo e coeficientes nulos para os demais; para a seqüência $(\vec{0}, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$, por exemplo, temos:

$$1.\ \vec{0} + 0 . \vec{v}_2 + ... + 0 . \vec{v}_n = \vec{0}$$

e portanto $(\vec{0}, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$ é LD.

Demonstração da Proposição 2

O caso n = 1 fica como exercício. Demonstremos para $n \geqslant 2$.

a) Suponhamos que $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ seja LD. Nesse caso, pela Proposição 1, algum dos $\vec{v}_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, é gerado pelos demais:

$$\vec{v}_j = \alpha_1 \vec{v}_1 + ... + \alpha_{j-1} \vec{v}_{j-1} + \alpha_{j+1} \vec{v}_{j+1} + ... + \alpha_n \vec{v}_n$$

e daí vem que (passando $\vec{v}_j$ para o 2º membro)

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + ... + \alpha_{j-1} \vec{v}_{j-1} - 1 . \vec{v}_j + \alpha_{j+1} \vec{v}_{j+1} + ... + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

o que mostra que existem escalares não todos nulos nas condições do enunciado (basta tomar $\alpha_j = -1$).

b) Reciprocamente, suponhamos que $\alpha_1 \vec{v}_1 + ... + \alpha_j \vec{v}_j + ... + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$, com $\alpha_j \neq 0$. Podemos daí concluir que:

$$\vec{v}_j = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j} \vec{v}_1 - ... - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j} \vec{v}_{j-1} - \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} \vec{v}_{j+1} - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_j} \vec{v}_n$$

ou seja, que $\vec{v}_j$ é combinação linear dos demais vetores da seqüência. Isso, pela Proposição 1, garante que $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ é LD.

Observações

1. Uma forma equivalente de enunciar a Proposição 2 é:

Proposição 3 "Uma seqüência $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, ... \vec{v}_n)$ de vetores V^3 é LI se e somente se a equação $x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + ... + x_n \vec{v}_n = \vec{0}$ nas incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$. SÓ admite a solução trivial, isto é, $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + ... + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... \alpha_n = 0$".

A implicação significa que é impossível obter o vetor nulo como combinação linear de $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$ a não ser daquela maneira que você achou "sem graça", escolhendo todos os coeficientes nulos.

2. Tome cuidado, pois neste ponto é muito fácil errar: na verificação de que uma seqüência $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$ é LI, não se trata de saber se é **possível** obter o vetor nulo como combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ (pois **sempre** é possível; na pior das hipóteses, escolhemos os escalares nulos). Tampouco se trata de saber se os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ **podem ser** ou **são** nulos (é claro que podem). Trata-se, isto sim, de verificar se é **obrigatório** apelar para coeficientes nulos para que a combinação linear resulte no vetor nulo. Se você entendeu, responda a esta pergunta:

Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ vetores de V^3 e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ escalares tais que $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + ... + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}$. Sabendo que $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, o que se pode afirmar da seqüência $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$? É LI ou LD? Veja a resposta no fim deste parágrafo, após os exercícios resolvidos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Seja $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$ LI $(1 \leqslant n \leqslant 3)$. Prove que

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + ... + \alpha_n\vec{v}_n = \beta_1\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2 + ... + \beta_n\vec{v}_n$$

só vale se $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, ..., \alpha_n = \beta_n$

(essa é a unicidade citada nos Corolários 2 e 3 da Proposição 1).

Resolução

Por hipótese, sabemos que

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + ... + \alpha_n\vec{v}_n = \beta_1\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2 + ... + \beta_n\vec{v}_n$$

Daí segue que

$$\alpha_1\vec{v}_1 - \beta_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 - \beta_2\vec{v}_2 + ... + \alpha_n\vec{v}_n - \beta_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

e portanto

$$(\alpha_1 - \beta_1)\vec{v}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\vec{v}_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\vec{v}_n = \vec{0}$$

e como $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ é LI, concluímos pela Proposição 3 que

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 - \beta_2 = 0, \ldots, \alpha_n - \beta_n = 0,$$

donde

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \ldots \quad \alpha_n = \beta_n.$$

2. Prove a recíproca da propriedade do exercício anterior: se $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ é tal que $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n = \beta_1\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2 + \ldots + \beta_n\vec{v}_n$ só vale se $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n$, então $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ é LI.

Resolução

Sabemos que $\vec{0} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \ldots + 0\vec{v}_n$. Então, se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são escalares tais que $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}$

segue-se que

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \ldots + 0\vec{v}_n$$

Mas por hipótese, essa igualdade só vale se $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$ (troque os "β_i" por 0 na hipótese).

Então, graças à Proposição 3, concluímos que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ é LI.

Observação

Os exercícios 1 e 2 acima mostram que você só poderá "identificar os coeficientes" (algo semelhante ao Princípio de Identidade de Polinômios) quando os vetores envolvidos forem LI. Exemplo: se $\vec{u} = 2\vec{v} + \vec{w}$, tem-se $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0\vec{u} + 3\vec{v} + 2\vec{w}$.

3. Prove que se $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI, então $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v})$ também é LI.

Resolução

Sejam α e β escalares tais que

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) + \beta(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0} \qquad (\alpha)$$

Devemos demonstrar que α e β são obrigatoriamente nulos.

Aplicando as propriedades da adição e da multiplicação por escalar, obtemos de (α) $\alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} + \beta\vec{u} - \beta\vec{v} = \vec{0}$, donde $(\alpha + \beta)\vec{u} + (\alpha - \beta)\vec{v} = \vec{0}$. Mas, por hipótese, $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI; logo, a igualdade acima só é possível se $\alpha + \beta = 0$ e $\alpha - \beta = 0$.

Como a única solução do sistema

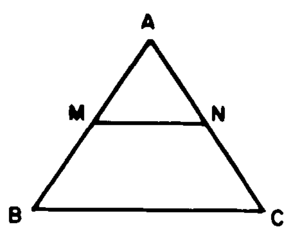
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

é $\alpha = \beta = 0$, provamos o que queríamos.

Atenção.

Seria péssima estratégia tentar resolver este exercício partindo de uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ igualada a $\vec{0}$, $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$. O motivo é que, como $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI, isso acarreta $\alpha = \beta = 0$, e não se conclui absolutamente nada a respeito da dependência ou independência linear dos vetores $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$, o que era o nosso propósito. Assim, quando se quer provar a independência linear de uma seqüência de vetores, deve-se partir de uma combinação linear dos vetores *dessa seqüência*, igual a $\vec{0}$.

4. Na figura, ABC é um triângulo e M é o ponto médio de AB. Sabendo que MN é paralelo a BC, prove que N é o ponto médio de AC.



Resolução

Vamos transpor o problema para a linguagem vetorial.

Se ABC é um triângulo, temos (por exemplo) que

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \text{ é LI} \qquad (\alpha)$$

Sendo M o ponto médio de AB, concluímos que

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} \qquad (\beta)$$

A hipótese de ser MN paralelo a BC se traduz por

$$\overrightarrow{MN} = \alpha\,\overrightarrow{BC} \qquad (\gamma)$$

Finalmente, como N pertence ao lado AC, podemos afirmar que

$$\overrightarrow{AN} = \beta\,\overrightarrow{AC} \qquad (\delta)$$

Agora, nosso objetivo é provar que $\beta = \frac{1}{2}$

De $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{AM}$ segue por (β) e (γ):

$$\overrightarrow{AN} = \alpha\,\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \qquad (\epsilon)$$

Por outro lado, por (δ),

$$\overrightarrow{AN} = \beta\,\overrightarrow{AC} = \beta(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}) = \beta\,\overrightarrow{BC} + \beta\,\overrightarrow{AB} \qquad (\lambda)$$

Comparando (ϵ) e (λ), obtemos:

$$\alpha\,\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \beta\,\overrightarrow{BC} + \beta\,\overrightarrow{AB}$$

Agora, por (α) e pelo primeiro exercício, concluímos que $\alpha = \beta$ e $\frac{1}{2} = \beta$, como queríamos. Observe que fica também provado que o comprimento de MN é igual à metade do comprimento de BC.

Agora a resposta à pergunta feita na Observação 2: nada se pode afirmar a respeito da dependência linear dos vetores.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Prove que se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI, então $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} - \vec{v}, 3\vec{v})$ também é LI, o mesmo sucedendo com $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w})$.

2. Seja $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ LI. Dado $\vec{t}$ qualquer, sabemos que existem α, β, γ tais que $\vec{t} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$ (por quê?). Prove que $(\vec{u} + \vec{t}, \vec{v} + \vec{t}, \vec{w} + \vec{t})$ é LI $\iff \alpha + \beta + \gamma + 1 \neq 0$.

3. Prove que $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI $\iff (\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v})$ é LI. (A implicação $\Rightarrow$ foi provada no Exercício Resolvido nº 3.)

4. Demonstre a Proposição 2 no caso $n = 1$. Pergunta: por que a demonstração feita no texto não serve neste caso?

5. Prove que $(\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}, 2\vec{u} + \vec{v} + 3\vec{w}, \vec{u} + 8\vec{v} + 3\vec{w})$ é LD quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.