# Analisi I

angeloperotti7

January 2025

## 0.1 Introduction

## 0.2 Nozioni Preliminari

### 0.2.1 Insiemi

#### insieme matematico

**Insieme matematico.**
Un *insieme matematico* è una collezione di oggetti (o elementi) ben definiti, considerati nel loro insieme come un'entità unica.
es:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

classificazione:

- per *elencazione*
  - L'ordine degli elementi non e' importante
  - $\in$ = appartiene, $\notin$ = non appartiene
  - ":=" = e' definito, "{}" = definiscono un insieme
- per *proprieta' che li accomuna*

#### operazioni fondamentali tra insiemi

- **unione**
  $$A \cup B := \{x : x \in A \; o \; x \in B\}$$
  "A unito B" e i suoi elementi sono dati dagli elementi di A con gli elementi di B
- **intersezione**
  $$A \cap B := \{x : x \in A \; e \; x \in B\}$$
  "A intersecato B" e i suoi elementi sono dati dagli elementi comuni di A e B
- **differenza insiemistica**
  $$A/B := \{x : x \in A \; e \; x \notin B\}$$
  "A meno B" e i suoi elementi sono gli elementi di A che non sono in B

$\hookrightarrow$ affinche' le ultime due operazioni abbiano senso introduciamo l'insieme vuoto: $\emptyset$

### 0.2.2 I numeri reali

**insiemi numerici.**
insieme:

- dei *numeri naturali* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4...\}$
- dei *numeri interi* $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2...\}$
  - insieme simmetrico
  - e' chiuso rispetto la sottrazione

- dei *numeri naturali* $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \quad q \neq 0\}$
  - chiuso rispetto le operazioni elementari

**Teorema $\sqrt{2}$.**
non esiste alcun numero razionale $x \in \mathbb{Q}$ t.c. $x^2 = 2$
*Dimostrazione*:
non ho voglia di farla ora :D *Osservazione*:
Dal teeorema deduciamo che per esempio $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ quindi i numeri razionali NON bastano a contenere tutte le espressioni numeriche

**Rappresentazione decimale.**
ogni numero razionale $x \in \mathbb{Q}$ si puo' scrivere con un allineamento decimale limitato o periodico

$$x = \pm p\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4 ...\ \alpha_n ... \quad con \quad p \in \mathbb{N}\ e\ \alpha_i \in 0, 1, 2, 3, 4...$$

**i numeri reali.**
Definiamo l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali come l'insieme di tutti i possibili allineamenti decimali

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

**intervalli.**
dati due numeri reali a,b $\in$ **R** con a<b, si pone:
*intervalli limitati*

- (a,b) intervallo *aperto*
- [a,b] intervallo *chiuso*
- (a,b] intervallo *aperto in a, chiuso in b*
- [a,b) intervallo *chiuso in a, aperto in b*

*intervalli illimitati*

- (-∞,a) $\{x \in \mathbf{R},\ x < a\}$
- (-∞,a] $\{x \in \mathbf{R},\ x \leq a\}$
- (a,+∞) $\{x \in \mathbf{R},\ x > a\}$
- [a,+∞) $\{x \in \mathbf{R},\ x \geq a\}$

**Maggioranti/Minoranti.**
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$
Def:

- Maggiorante: un elemento M $\in \mathbb{R}$ si dice maggiorante di A se

$$x \leq M \qquad \forall x \in A$$

- Minorante: un elemento m $\in \mathbb{R}$ si dice minorante di A se

$$x \geq m \qquad \forall x \in A$$

Esistono insiemi privi di maggioranti e/o minoranti

- A si dice *limitato superiormente* se ammette almeno un maggiorante
- A si dice *limitato inferiormente* se ammette almeno un minorante
- A si dice *limitato* se e' limitato sia superiormente che inferiormente

Es:
A = [ 1, ∞)

- **A non ha maggioranti**; infatti se esistesse un maggiorante chiamato M $\in \mathbb{R}$, allora dalla definizione di maggiorante deduciamo che $\forall x \in [1, +\infty)$ si ha che x $\leq$M. Ma questo e' assurdo perche' per esempio M+1$\in [1, +\infty)$, questo pero' non verifica x$\leq$M!
- A ammmette minoranti, per esempio m=1 oppure ogni reale minore di 1

A quindi:

- non e' superiormente limitato
- e' inferiormente limitato
- non e' limitato

*NB*

- M$\in$ **R** e' maggiorante di A se x $\leq$ M $\forall x \in A$
- Nella definizione di maggiorante/minorante di un insieme A *NON e' richiesto* che il maggiorante/minorante *appartenga* ad A

**Massimo/minimo.**
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$
Def:

- Un elemento M $\in$ **R** si dice massimo di A se:
  - M e' maggiorante di A
  - M $\in$ A
- Un elemento m $\in$ **R** si dice minimo di A se:
  - m e' minorante di A
  - m $\in$ A

*NB*:

- Se un insieme e' limitato **superiormente**/*inferiormente*, il **massimo**/*minimo* puo' non esistere
- Massimo e minimo se esistono sono unici

Es:
Dato $A \subseteq \mathbf{R}, A \neq 0$,