Análisis numérico
Reto n° 1 – Primer parcial
2020-01

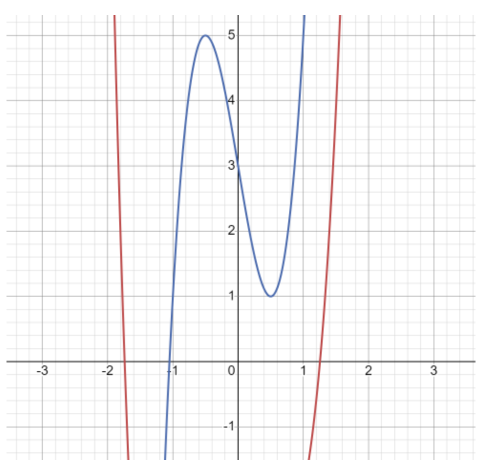
Angela Sofia Moreno Rodriguez
Anggie Carolina Correa Sánchez

1. Evaluación de un polinomio

a. Implemente en R o Python el método de Horner para evaluar f0(x0), tenga en cuenta la precisión de la computadora o unidad de redondeo

Entradas:
P(x)= c(2,0,-3,3,-4) <- Coeficientes
X0=-2 <- Punto a evaluar

Salidas:
Y = 10 <- Resultado de P(x) evaluado en X0
Z = -47 <- Resultado de P'(x) evaluado en X0
Operaciones = 8 <- Número mínimo de operaciones para resolver la derivada
Sumas = 4 <- Número de sumas realizadas
Multip = 4 <- Numero de multiplicaciones realizadas
Round(z,3) <- Redondeo a 3 dígitos



Gráfica P(x) -roja- con P'(X) -azul-

b. Implemente el método de Horner si se realiza con números complejos, tenga en cuenta la precisión

Entradas:
P(x)= `c(1+0i,0+8i,5+0i,-2+0i)`<- Coeficientes imaginarios

X0=6+1.3i <- Punto a evaluar

Salidas:
Y = 88.78+419.183i <- Resultado de P'(x) evaluado en X0
Operaciones = 4 <- Número mínimo de operaciones para resolver la derivada
Sumas = 2 <- Número de sumas realizadas
Multip = 2 <- Numero de multiplicaciones realizadas
Round(y,3) <- Redondeo de 3 dígitos

2. Óptima aproximación polinómica

a. Aplique una aproximación de Taylor para
f(x) = sin(x) en el intervalo [−π/64,π/64]

Para la función seno f (x) : sen x, tenemos que las sucesivas derivadas son

$$\begin{array}{ll} f(x) = \operatorname{sen} x, & f'(x) = \cos x, \\ f''(x) = -\operatorname{sen} x, & f'''(x) = -\cos x, \\ \vdots & \vdots \\ f^{2n)}(x) = (-1)^n \operatorname{sen} x, & f^{2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x. \end{array}$$

Como cos 0 =1 y sen 0 =0 tenemos $f^{2n}(0) = 0 \quad y \quad f^{2n+1}(0) = (-1n)^n$. Gracias a esto los polinomios de órdenes 2n+1 y 2n+2 son idénticos, es decir,

$$P_{2n+2}(x) = P_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Entonces la fórmula de Taylor para la función seno es:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - (-1)^n \frac{\cos c}{(2n+3)!} x^{2n+3}, \quad c \in I(0,x).$$

El error que se comete al aproximar sen x por $\frac{-x^3}{3!} + x$ está acotado por:

$$\left| \operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3!} \right) \right| = \left| \frac{\cos c}{5!} x^5 \right| \le \frac{|x|^5}{5!}$$

puesto que |cos c| <= 1 para cualquier valor de c. Entonces, el error será menor que $3 * 10^{-4}$ si se verifica que $\frac{|x|^5}{5!} < 3 * 10^{-4}$ lo que significa que $|x| < \sqrt[5]{360 * 10^{-4}} \approx 0.514$

Entradas:
f(x) = sin(x) <- Función a evaluar

n=10 <- Cantidad de polinomios

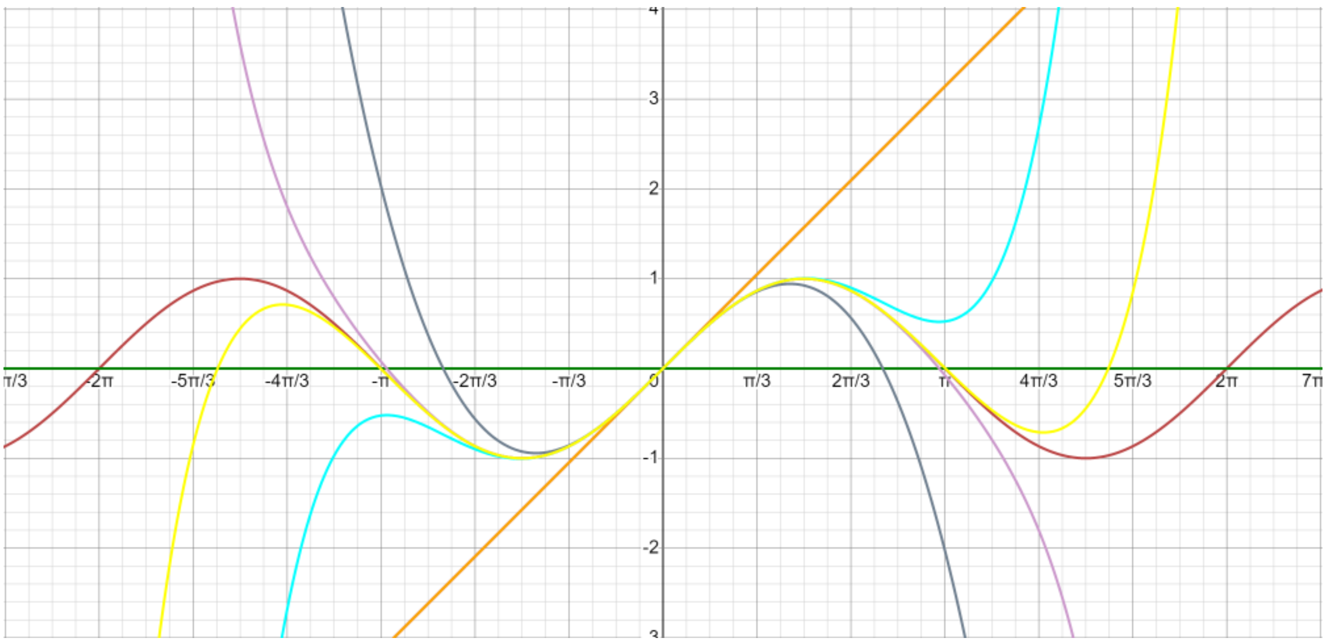
a=-pi/64 <- Límite inferior

b=pi/63 <-Límite superior

Salidas:
Número de operaciones: 100

Grado	Polinomio
0	0
1	x
2	x
3	$\frac{-x^3}{6} + x$
4	$\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x$
5	$\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x$
6	$\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x$
7	$\frac{-x^7}{5040} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x$
8	$\frac{-x^7}{5040} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x$
9	$\frac{x^9}{362880} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x$

A continuación, gráfica de las aproximaciones:



$\sin x$

0

x

x

$\frac{(-x)^3}{6} + x$

$\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x$

$\frac{(-x)^7}{5040} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x$

$\frac{x^9}{362880} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x$

b. Implemente el método de Remez para
   f(x) = sin(x) en el intervalo [−π/64,π/64]

   El método usado para construir las mejores aproximaciones uniformes de un polinomio se conoce como Remez. La sucesión formada por los polinomios Pn obtenidos por Remez siempre es convergente a la mejor aproximación y además esta converge de manera cuadrática, si al aproximar es diferenciable. El algoritmo Remez es una metodología para localizar la aproximación racional minimax a una función. La serie de pasos que se utilizan en este algoritmo los siguientes:

- Seleccionar n+2 puntos $x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1}$ en $I = [a, b]$ arbitrariamente.
- Calcular el polinomio $n \in P_n$ y el parámetro d tales que

$$f(x_i) - p_n(x_i) = (1)^{(i+1)} d \quad (1) \text{ para } i = 0, 1, \cdots, n, n+1.$$

Si se escoge una base de P_n, las n+ 1 componentes del polinomio en esa base y valor de d son las n+ 2 incógnitas de un sistema lineal. Determinar los puntos en los que la función $|f p_n|$ alcanza su máximo y reemplazar con ellos, todos o parte de los x_i utilizados.