Taller interpolación

Angela Sofia Moreno
Julio Andrés Mejía
julio.mejia@javeriana.edu.co
Anggie Carolina Correa
Brayan Estiben Giraldo
bestiben.giraldol@javeriana.edu.co

Abril 2020

1. Primer punto

1.1. Problema

Dados los n + 1 puntos distintos (xi,yi). Demuestre que el polinomio interpolante que incluye a todos los puntos es único

1.2. Solución

Sean x1, x2, . . ., xn algunos números diferentes por pares y sean y1, y2. . ., yn algunos números. Entonces existe un único polinomio P de grado (Grado n1) tal que:

P(xj) = yj (j=1, . . . , n).

Las incógnitas del problema son los coecientesc0, . . . , cn1 del polinomio

P: (x) =c0+c1x+. . .+cn1xn1=n1j=0cjxj.

2. Segundo punto

2.1. Problema

Construya un polinomio de grado tres que pase por: (0,10),(1,15),(2,5) y que la tangente sea igual a 1 en x0

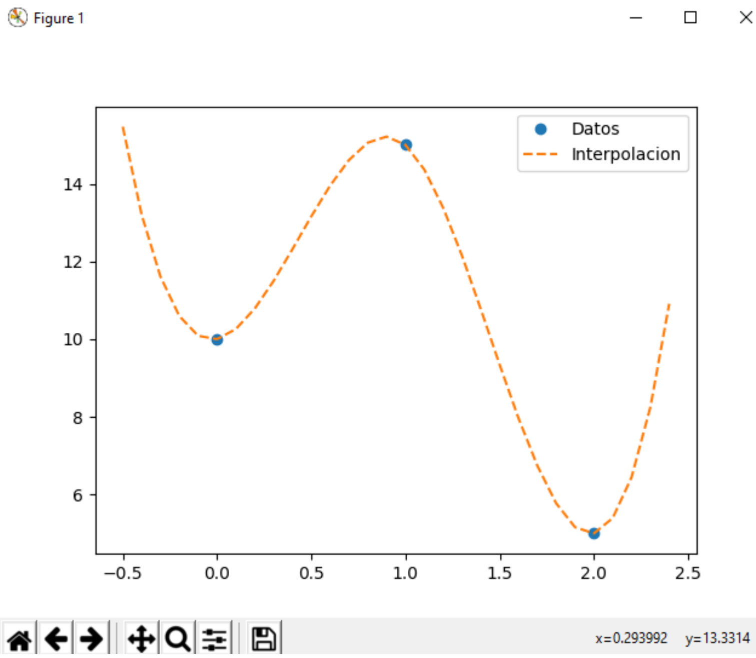
2.2. Solución

Entradas: x : Puntos en X. y : Puntos en Y.

Salidas: f : Polinomio resultado de interpolar.

Para esta solución se utilizó la librería Scipy de Python y la función:

f ← interpolate.CubicSpline(x,y)



3. Tercer punto

3.1. Problema

Construya un polinomio del menor grado que interpole una función f(x) en los siguientes datos:

$f(1) = 2$; $f(2) = 6$; $f'(1) = 3$; $f'(2) = 7$; $f''(2) = 8$

4. Cuarto punto

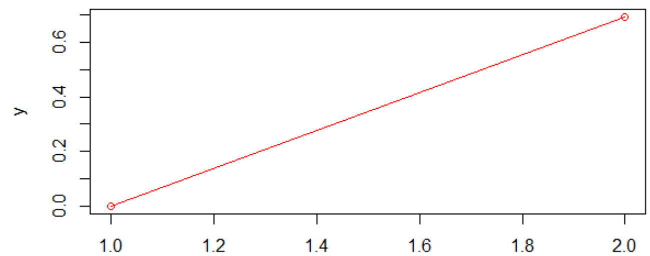
4.1. Problema

Con la función $f(x) = \ln x$ construya la interpolación de diferencias divididas en

$x0 = 1$; $x1 = 2$ y estime el error en [1,2]

4.1. Solución

	x	f	D1
0	1	0.0000000	0.6931472
1	2	0.6931472	



5. Quinto punto

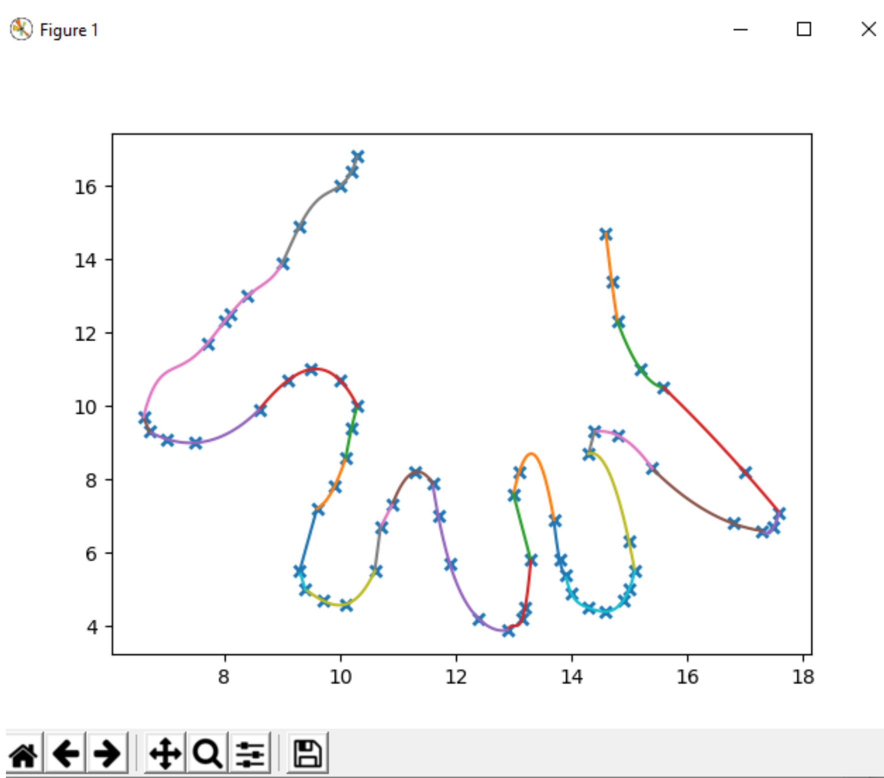
5.1. Problema

Utilice la interpolación de splines cúbicos para el problema de la mano

5.1. Solución

Entradas: x : Puntos en X. y : Puntos en Y.
Salidas: lag_pol : Polinomio interpolador

Realizamos el modelado de una de las manos de los integrantes del grupo



6. Sexto punto

6.1 Problema

Sea f(x) = tan(x) utilice la partición de la forma xi = δ k para implementar una interpolación para n=10 puntos y encuentre el valor δ que minimice el error

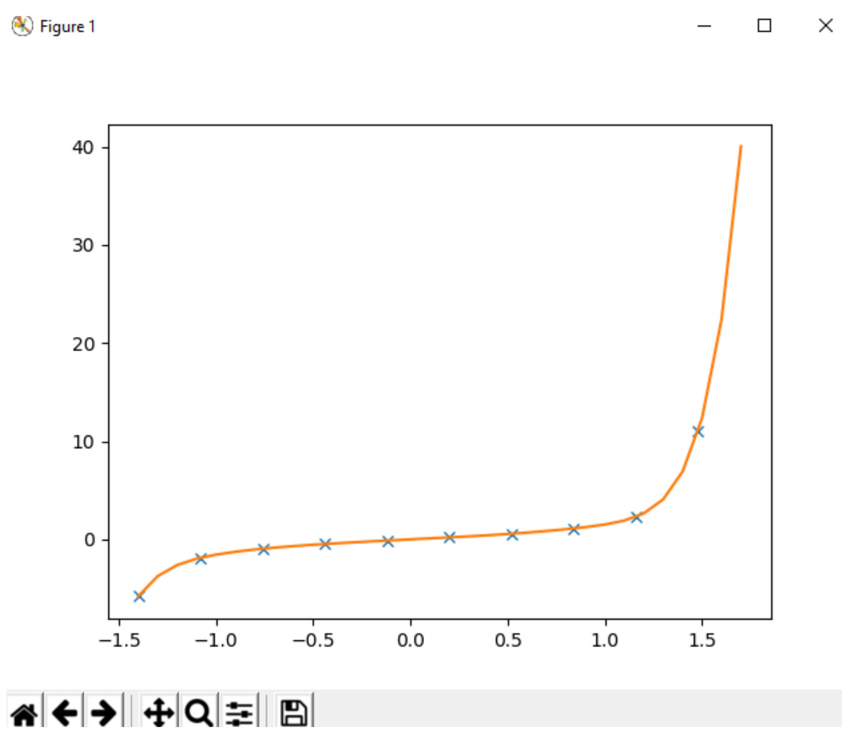
6.1. Solución

Primero se debe definir el inicio, luego los pasos o intervalos y luego generar los 10 puntos

Luego se calcula el sigma que minimiza el error

El sigma que minimiza el error es: 0.31999999999999984

La función luce así:



7. Séptimo punto

7.1. Problema

Sea f(x) = e^x en el intervalo de [0,1] utilice el método de lagrange y determine el tamaño del paso que me produzca un error por debajo de 10− 5.

¿Es posible utilizar el polinomio de Taylor para interpolar en este caso? Verique su respuesta.

7.1. Solución

Utilizando lagrange se obtienen los pasos que me producen un error menor de 10-5 n un intervalo [0,1]

x ← numpy.arange(0,1,ini) 9

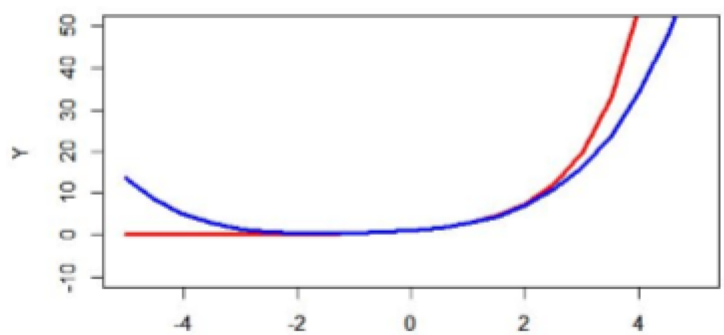
y ← ex 10

f ← lagrange(x,y)

El paso que minimiza el error es : 0.49999999999999956

Si es posible utilizar Taylor para esto, pero podemos decir que el polinomio no es un buen interpolador, esto debido a que no se logra representar el comportamiento de la función original por medio del polinomio. Si bien se logran ver algunas regiones (puntos) donde se llega a ser el polinomio bastante cercano a la función original, en otras regiones se aleja bastante los valores originales, esto también gracias a que el polinomio es de grado 4.

A continuación, podemos observar la evaluación del polinomio con su error



8. Octavo punto

8.1. Problema

Considere el comportamiento de gases no ideales se describe a menudo con la ecuación viral de estado. los siguientes datos para el nitrógeno N2

T(K)	100	200	300	400	450	500	600
$B(cm^3)/mol$	-160	-35	-4.2	9.0		16.9	21.3

Donde T es la temperatura [K] y B es el segundo coeficiente viral. El comportamiento de gases no ideales se describe a menudo con la ecuación viral de estado

$$\frac{PV}{RT} = 1 + \frac{B}{V} + \frac{C}{V^2} + ...,$$

Donde P es la presión, V el volumen molar del gas, T es la temperatura Kelvin y R es la constante de gas ideal. Los coeficientes B = B(T), C = C(T), son el segundo y tercer coeficiente viral, respectivamente. En la práctica se usa la serie truncada para aproximar

$$\frac{PV}{RT} = 1 + \frac{B}{V}$$

En la siguiente gura se muestra cómo se distribuye la variable B a lo largo de la temperatura.

a) Determine un polinomio interpolante para este caso

b) Utilizando el resultado anterior calcule el segundo y tercer coeficiente viral a 450K.

c) Graque los puntos y el polinomio que ajusta

d) Utilice la interpolación de Lagrange y escriba el polinomio interpolante

e) Compare su resultado con la serie truncada (modelo teórico), ¿cuál aproximación es mejor por qué?

8.2. Solución

8.2.1 Punto a.

Polinomio obtenido al utilizar la función “poly_calc” de la Librería ” PolynomF” . No se utilizó el primer punto (100,-160) ya que se consideró un punto atípico, causando que no se genere el polinomio de manera correcta

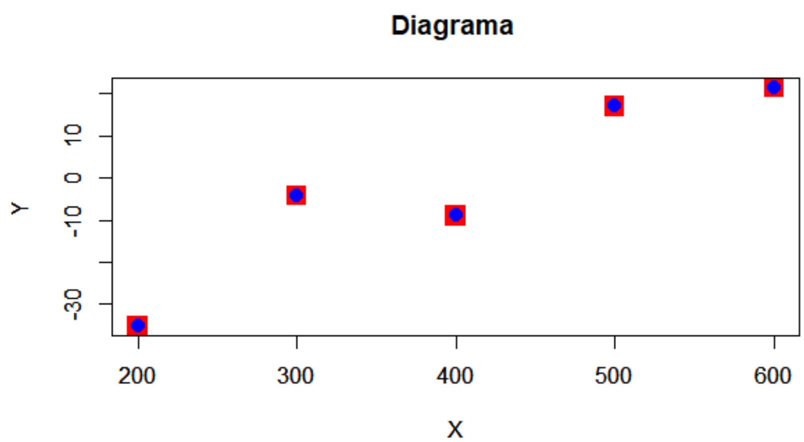
y = -1061.1 + 11.67475∗ x - 0.04678125∗ xˆ 2 + 8.0175e-05∗ xˆ 3 - 4.9375e-08∗ xˆ 4

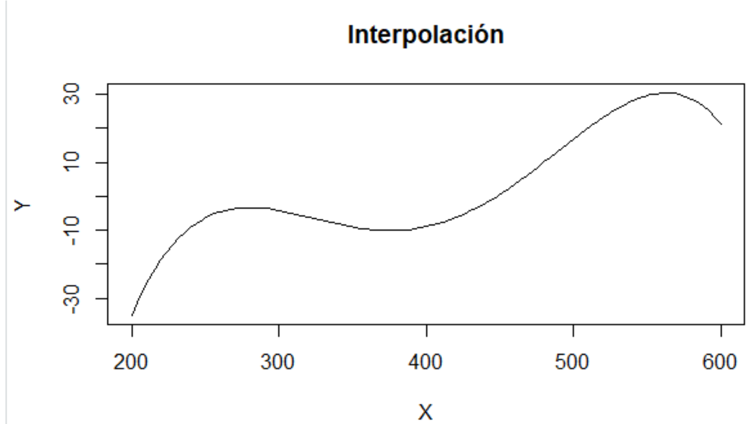
8.2.2 Punto b.

Al evaluar el polinomio con x = 450 dio como resultado 0.59765625

8.2.3 Punto c.

Se graficó tanto datos reales (cuadrados rojos) como los datos interpolados (cuadrados azules)





8.2.4 Punto d.

Utilizando la interpolación de lagrange se obtiene la siguiente tabla de datos:

$$L_0 = \frac{(x-300)(x-400)(x-500)(x-600)}{(200-300)(200-400)(200-500)(200-600)}$$

$$L_1 = \frac{(x-200)(x-400)(x-500)(x-600)}{(300-200)(300-400)(300-500)(300-600)}$$

$$L_2 = \frac{(x-200)(x-300)(x-500)(x-600)}{(400-200)(400-300)(400-500)(400-600)}$$

$$L_3 = \frac{(x-200)(x-300)(x-400)(x-600)}{(500-200)(500-300)(500-400)(500-600)}$$

$$L_4 = \frac{(x-200)(x-300)(x-400)(x-500)}{(600-200)(600-300)(600-400)(600-500)}$$

Seguido de tener los L, se procede a multiplicar con su respectivo y. Para terminar, se suma todas las L, dando como resultado el polinomio:

y $= -$ 4,3750e$-$ 09 $*$ xˆ 4 $+$ 8,175e$-$ 06$*$ xˆ 3 $-$ 0,00583$*$ xˆ 2 $+$ 1,95475x $-$ 251,1

8.2.5 Punto e

Al realizar la interpolación por diferentes métodos se puede mirar los cambios que tienen estos métodos y cuál de ellos es más cercano a los datos reales.

	DatosReales	Interpolados	Lagrange
200	-35.0	-35.0	-35.0
300	-4.2	-4.2	-4.1
400	-9.0	-9.0	9.2
450	?	0.6	13.5
500	16.9	16.9	17.2
600	21.3	21.3	21.7

Al ver la tabla comparativa de los datos obtenidos por las interpolaciones anteriores, podemos notar como la interpolación común representa correctamente el comportamiento de los datos reales. Por otro lado, por medio de la interpolación de lagrange se puede notar que si bien llega a tener unos puntos muy cercanos a los reales (problemas dados por errores de redondeo de valores), existen otros puntos los cuales se alejan bastante de los datos verdaderos. Se puede apreciar mejor esto al gracar todos los métodos.

Con esto podemos decir que el mejor método de interpolación es por el método común de interpolación

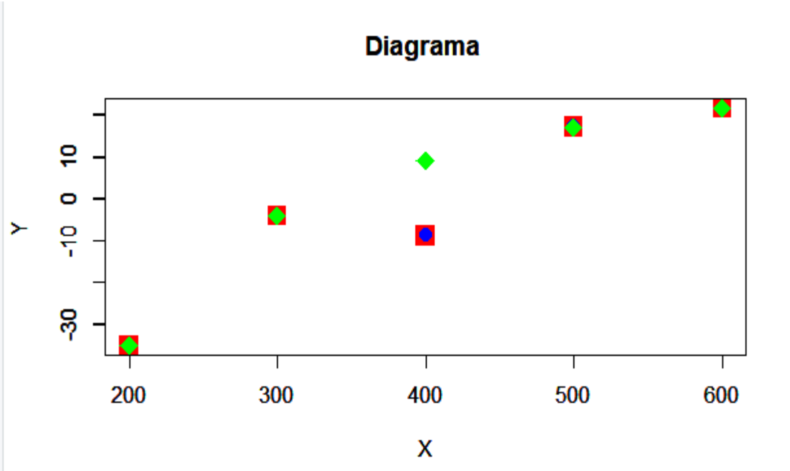


Diagrama
Y
-30
-10
0
10
200
300
400
500
600
X