Seminarul 5

1. O variabilă aleatoare continuă X are funcţia de densitate $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ cxe^{-x}, & x>0.\end{cases}$
Determinaţi $c\in\mathbb{R}$ şi apoi calculaţi:

a) funcţia de repartiţie a lui X;

b) probabilitatea evenimentului $\{|X-3|>2\}$;

c) probabilitatea evenimentului $\{X<3\}$, ştiind că are loc evenimentul $\{X>1\}$.

Valoarea medie a unei v.a. continue X, care are funcţia de densitate f, este

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt,\ \text{dacă}\ \int_{-\infty}^{\infty}|t|f(t)dt<\infty.$$

2. Timpul (în secunde) de descărcare completă a unui condensator este o variabilă aleatoare T care are distribuția exponențială cu parametrul $\lambda>0$: $T\sim Exp(\lambda)$. Determinați parametrul λ, știind că $E(T)=5$ (secunde), apoi calculați probabilitatea evenimentului E: “condensatorul se descarcă complet după cel puțin 4 secunde”.

3. Un circuit are trei condensatoare, care funcţionează independent unele de altele. Timpul de descărcare completă a fiecărui condensator are distribuţia exponenţială cu valoarea medie de 3 secunde. Ştiind că cele trei condensatoare sunt grupate în circuit aşa cum indică
a) figura A (în paralel),
b) figura B (în serie),
determinaţi valoarea medie a timpului de funcţionare a circuitului.

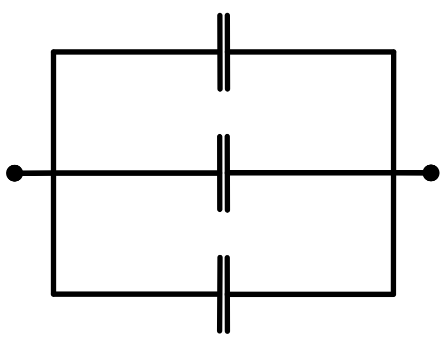

Figura A

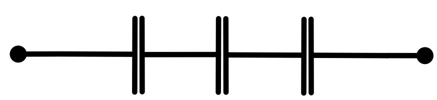

Figura B

4. Ce probabilitate estimează valoarea p din codul de mai jos? Calculaţi probabilitatea teoretică corespunzătoare.

```
from scipy.stats import randint, uniform
N=10000
u = randint.rvs(0,10,size=N)
y = uniform.rvs(loc=0,scale=3,size=N)*(u<=3)+uniform.rvs(loc=3,scale=6,size=N)*(u>3)
p = sum((y>=2)&(y<=5))/N
```

Observaţie: Toate metodele `rvs` din codul de mai sus generează valori pentru variabile aleatoare independente.

Seminarul 5

1. O variabilă aleatoare continuă X are funcţia de densitate $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ cxe^{-x}, & x > 0. \end{cases}$

Determinaţi $c \in \mathbb{R}$ şi apoi calculaţi:

a) funcţia de repartiţie a lui X;

b) probabilitatea evenimentului $\{|X - 3| > 2\}$;

c) probabilitatea evenimentului $\{X < 3\}$, ştiind că are loc evenimentul $\{X > 1\}$.

Valoarea medie a unei v.a. continue X, care are funcţia de densitate f, este

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt, \text{ dacă } \int_{-\infty}^{\infty} |t|f(t)dt < \infty.$$

? $c \in \mathbb{R}$ a.î. f funcţ. de densitate

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1 \Rightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt}_{0} + \int_{0}^{\infty} f(t)\,dt = 1.$$

$$\int_0^\infty ct\,e^{-t}\,dt = 1.$$

$u'(t) = e^{-t}$, $v(t) = t$

$u(t) - e^{-t}$, $v'(t) = 1$.

$$\int u'(t)v(t)dt = u(t)\,v(t) - \int u(t)\,v'(t)\,dt$$

$$c\left(-te^{-t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}dt\right) = 1.$$

$$c\left(\lim_{t\to\infty} (-t\,e^{-t}) - 0 - e^{-t}\Big|_0^\infty\right) = 1$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^t} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{l'H}{=}} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t} = 0.$$

$$-c\left(\lim_{t\to\infty} e^{-t} - e^0\right) = 1 \Rightarrow c = 1.$$

a) funcția de repartiție $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$$= \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \int_0^x t e^{-t}\,dt \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \left(-t e^{-t} - e^{-t}\right)\Big|_0^x = -x e^{-x} - e^{-x} + 1, & x > 0 \end{cases}$$

b) $P(|X-3| > 2) =$ $\qquad |X-3| > 2 \iff X-3 < -2$ sau $X-3 > 2$

$P(X<1) + P(X>5)$ $\qquad X < 1$ sau $X > 5$

$P(X>5) \rightarrow 1 - P(X \le 5)$

$= F(1) + 1 - F(5)$

$= 1 - \frac{2}{e} + 1 - 1 + \frac{6}{e^5} = 1 - \frac{2}{e} + \frac{6}{e^5}$

c) $P(X<3 \mid X>1)$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$= \frac{P(1 < X < 3)}{P(X>1)}$

$P(a<X<b) = F(b) - F(a)$ ← Newton

$= \frac{F(3) - F(1)}{1 - F(1)} = \frac{\cancel{1} - \frac{4}{e^3} - \cancel{1} + \frac{2}{e}}{\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{2}{e}} = 1 - \frac{2}{e^2}$

$-\infty$ $\qquad -\infty$

2. Timpul (în secunde) de descărcare completă a unui condensator este o variabilă aleatoare T care are distribuția exponențială cu parametrul $\lambda > 0$: $T \sim Exp(\lambda)$. Determinați parametrul λ, știind că $E(T) = 5$ (secunde), apoi calculați probabilitatea evenimentului E: “condensatorul se descarcă complet după cel puțin 4 secunde”.

$T \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$ $\qquad f_T(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$

λ - ? știind că $E(T) = 5$ (val medie)

$$E(T) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_T(t)\,dt$$

$$E(T) = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left(-t e^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$\lambda = \frac{1}{5}$ $\qquad$ $P(T \geq 4) = ?$

$$P(T\geq 4) = 1 - P(T<4) = 1 - F_T(4) = 1 - \int_0^4 \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}t}\, dt$$

$$= 1 + e^{-\frac{1}{5}t}\Big|_0^4 = 1 + e^{-\frac{4}{5}} - 1 = e^{-\frac{4}{5}}$$

după cel puțin 4 secunde".

3. Un circuit are trei condensatoare, care funcţionează independent unele de altele. Timpul de descărcare completă a fiecărui condensator are distribuţia exponenţială cu valoarea medie de 3 secunde. Ştiind că cele trei condensatoare sunt grupate în circuit aşa cum indică
a) figura A (în paralel),
b) figura B (în serie),
determinaţi valoarea medie a timpului de funcţionare a circuitului.

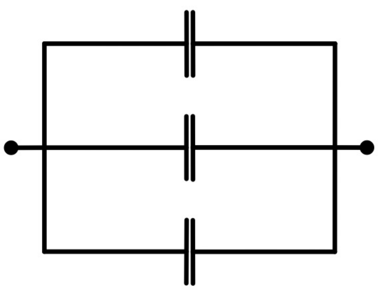

Figura A

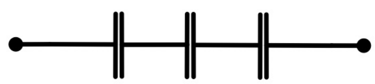

Figura B

$T_i \sim Exp\left(\frac{1}{3}\right)$, $i = 1,2,3$

a) $T = \max\{T_i\}$ $\qquad$ $f_T = ?$

$$f_{T_i}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x}, & x > 0 \end{cases}$$

$$P(T \leq t) = P(\max(T_i) \leq t) = P\left(\bigcap_{i=1}^{3} T_i \leq t\right)$$

$$F_T(t) = P(T_1 \leq t) \cdot P(T_2 \leq t) \cdot P(T_3 \leq t) = F_{T_1}(t)\, F_{T_2}(t)\, F_{T_3}(t)$$

$$F_{T_i}(t) = \int_{-\infty}^{t} f_{T_i}(x)\, dx = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \int_0^t \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} dx \end{cases}$$

$$= -e^{-\frac{1}{3}x}\Big|_0^t$$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{3}t}, \quad t > 0$$

$$F_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ (1-e^{-\frac{1}{3}t})^3, & t > 0 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow 1 - 3e^{-\frac{1}{3}t} + 3e^{-\frac{2}{3}t} - e^{-t}$$

$$f_T(t) = F'_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{3}t} - 2e^{-\frac{2}{3}t} + e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$$

$$E(T) = \int_{-\infty}^{\infty} t\, f_T(t)\,dt = \int_0^{\infty} t(e^{-\frac{1}{3}t} - 2e^{-\frac{2}{3}t} + e^{-t})\,dt.$$

$$= 3 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{3}{2} + 1 = 5.5$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\infty} \lambda t e^{-\lambda x}\,dt = \frac{1}{\lambda} \\ &\lambda = \frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{1}{3} t e^{-\frac{1}{3}t}\,dt = 3$$

b) $T = \min\{T_i\}$

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P(\min\{T_i\} \leq t)$$
$$= 1 - P(\min\{T_i\} > t) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{3} T_i > t)$$
$$= 1 - P(T_1 > t)\,P(T_2 > t)\,P(T_3 > t)$$

$$P(T_i > t) = 1 - F_{Ti}(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{3}t}, & t > 0 \end{cases}$$

$$F_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1 - e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$$

$$E(T) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_T(t)\,dt$$
$$= \int_0^{\infty} t e^{-t}\,dt$$
$$= 1$$

5. Fie vectorul aleator continuu (X, Y) cu funcţia de densitate $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Determinaţi:
a) funcţia de repartiţie a vectorului aleator (X, Y);
b) funcţiile de repartiţie ale variabilelor aleatoare X şi Y;
c) funcţii de densitate ale variabilelor aleatoare X şi Y;
d) dacă variabilele aleatoare X şi Y sunt independente sau dependente.

6. Funcţia de repartiţie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a unei variabile aleatoare continue X are expresia:

$$F(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & 0 \le x < 2 \\ d, & x < 0 \\ e, & x \ge 2. \end{cases}$$

Determinaţi $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, dacă: i) $P(1 < X < 2) = \frac{1}{2}$; ii) $E(X) = 1$.

5

5. Fie vectorul aleator continuu (X, Y) cu funcţia de densitate $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Determinaţi:
a) funcţia de repartiţie a vectorului aleator (X, Y);
b) funcţiile de repartiţie ale variabilelor aleatoare X şi Y;
c) funcţii de densitate ale variabilelor aleatoare X şi Y;
d) dacă variabilele aleatoare X şi Y sunt independente sau dependente.

a)

$$P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(s,t)dt \right) ds \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$= \begin{cases} \int_0^x \left(\int_0^y 2e^{-s-2t} dt \right) ds \\ 0 \end{cases}$$

$$\int_0^x \left(\int_0^y 2e^{-s-2t} dt \right) ds = \int_0^x \left(2e^{-s} \left(-\frac{e}{2} \right)^{-2t} \right) \Big|_0^y ds$$

$$= \cancel{2}\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)(e^{-2y}-1)\int_0^x e^{-s} ds$$

$$= (1-e^{-2y})(-e^{-s})\Big|_0^x = (1-e^{-2y})(1-e^{-x})$$

b)

$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F_{(X,Y)}(x,y), \quad F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F_{(X,Y)}(x,y).$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 1-e^{-2y}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases}$$

c)

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases}$$

d)

P. 13. *Variabilele aleatoare continue X (cu funcţia de densitate f_X) şi Y (cu funcţia de densitate f_Y) sunt independente, dacă şi numai dacă*

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R},$$

$x>0,\ y>0$, $\quad 2e^{-x}e^{-2y} = 2e^{-x-2y}$ ✓

rest, $\quad 0 \quad = 0$ ✓