Seminar 5

① Justificați afirmațiile:

i) $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Vom aplica T. Lagrange pe $[n, n+1]$ $n\in\mathbb{N}^*$ pt. fc. $f(x) = \ln x$, $x > 0$.

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o fc. care:

i) e cont. pe $[a,b]$

ii) e derivabilă pe (a,b)

Atunci $\exists\, x_0 \in (a,b)$ a.î. $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Cum f cont. pe $[n,n+1]$ și deriv. pe $(n,n+1)$ $\Rightarrow$

$\exists\, c \in (n, n+1)$ a.î. $f'(c) = \frac{f(n+1)-f(n)}{n+1-n}$ $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{c} = \frac{\ln(n+1) - \ln n}{1} \quad (*)$$

Cum $n < c < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n} \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{1}{n+1} \overset{**}{<} \ln(n+1) - \ln n \overset{*}{<} \frac{1}{n}$

ii) Șirul $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ e convergent.

* monotonia

$c_{n+1} - c_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} + \ln n$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \underbrace{\left(\ln(n+1) - \ln n\right)}_{\overset{**}{>} \frac{1}{n+1}} < 0$$

$\Rightarrow$ șirul $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ e descrescător.

* mărginirea

- (c_n) mărg. sup. de $c_1 = 1$.

$\overset{*}{\Rightarrow}$ $\frac{1}{1} > \ln 2 - \ln 1$

$\frac{1}{2} > \ln 3 - \ln 2$

...

$\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n$ $\quad (+)$

$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) \Rightarrow$

$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln(n+1) - \ln n > 0$

Deci șirul e mărg. inf. de 0

Așadar, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent. Limita sa este $\gamma \simeq 0,57$ (constanta lui Euler)

② Determinați mulțimea punctelor de acumulare A' pentru:

a) $A = \{\frac{1}{2^n}, n\in\mathbb{N}\}$. b) $A = \mathbb{Q}$.

Spunem că $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ este punct de acumulare al mulț. A dacă $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nr. din $A\setminus\{x_0\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Scriem $x_0\in A'$, iar A' e mulț. pct. de acumulare ale lui A.

a) $\boxed{x_0=0}$; $x_n = \frac{1}{2^n}, \forall n\in\mathbb{N}$ $(x_n)\subset A\setminus\{0\}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Deci $0\in A'$ și e singurul $\Rightarrow A' = \{0\}$.

b) Fie $y\in\overline{\mathbb{R}}$. Atunci conform faptului că ~~sunt~~ orice nr. real e limita unui șir de nr. raționale (vezi Seminar 1) știm că $\exists (s_n)\subset\mathbb{Q}\setminus\{y\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = y$, deci $y\in\mathbb{Q}'$. Cum $y\in\overline{\mathbb{R}}$ a fost ales arbitrar $\Rightarrow \mathbb{Q}' = \overline{\mathbb{R}}$.

③ Verificați dacă funcțiile următoare își ating valorile extreme și determinați aceste valori:

a) $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$.

Fie $f:A\to\mathbb{R}$ o fc. și $f(A) = \{y\in\mathbb{R} \mid \exists x\in A \text{ a.î. } f(x)=y\}$ = imaginea fc. f.

Atunci valorile extreme ale lui f sunt $\inf f(A)$ și $\sup f(A)$.

Spunem că f își atinge extremele pe A dacă $\exists x_1, x_2\in A$ a.î. $f(x_1) = \inf f(A)$ $(=\min f(A))$

$f(x_2) = \sup f(A)$ $(=\max f(A))$

T. Weierstrass : Dacă $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ e continuă pe $[a,b]$, atunci f e mărginită și își atinge marginile pe $[a,b]$.

! * În cazul nostru nu putem aplica T. Weierstrass pt. că f nu e definită pe interval închis. !

$f(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$

$f'(x) = -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{-1-x-1+x}{(1-x)(1+x)} = \frac{-2}{\underbrace{(1-x)(1+x)}_{>0}} < 0$, deci $f \searrow$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln \frac{2}{0_+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln 0_+ = -\infty$

f cont.

$\Rightarrow \text{Im} f = (-\infty, \infty)$

$\inf f(A) = -\infty$

$\sup f(A) = +\infty$

deci f nu își atinge extremele.

b) $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0 \\ x, & x \in (0,1] \end{cases}$

f nu e cont. în 0, deoarece $f(0) = \frac{1}{2} \neq 0 = l_d(0)$, deci nu putem aplica T. Weierstrass.

$\text{Im} f = \{\frac{1}{2}\} \cup (0,1] = (0,1] = f(A)$

$\inf f(A) = 0 \to$ nu se atinge

$\sup f(A) = 1 = f(1) \to$ se atinge

c) $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \sqrt{1-x^2}$.

f cont. pe $[-1,1]$, definită pe $[-1,1]$ $\overset{\text{T. Weierstrass}}{\Longrightarrow}$ f mărginită și își atinge marginile.

$f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

x	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

$f(-1) = 0$

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$f(1) = 0$

Deci $f(A) = \left[-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$

$\inf f(A) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\qquad \sup f(A) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Metoda 2.
Cum $x \in [-1, 1]$ considerăm $x = \sin t$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$.

$f(t) = \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t}$
$= \sin t \cdot \underbrace{|\cos t|}_{\geq 0} =$
$= \frac{1}{2} \sin 2t.$

$\frac{1}{2} \underbrace{\sin 2t}_{\in [-1,1]} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$\inf f(A) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$
$2t = -\pi/2 \Rightarrow t = -\pi/4 \Rightarrow$
$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sup f(A) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2t = \pi/2$
$\Rightarrow t = \pi/4 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

④ (Caracterizarea monotoniei cu ajutorul derivatei)

Fie $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ o fc. derivabilă pe (a,b). Au loc afirmațiile:

a) f crescătoare pe $(a,b) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a,b)$

b) f descrescătoare pe $(a,b) \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a,b)$

c) Dacă $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ strict crescătoare pe (a,b)

d) Dacă $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ strict descrescătoare pe (a,b).

În general, reciprocele af. c) și d) nu sunt adev. Justificați!

Dem: a) Pp. f crescătoare pe (a,b) („$\Rightarrow$")

Atunci $f'(x) = \lim\limits_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Cum f crescătoare $\Rightarrow$ $f(y) - f(x)$ și $y - x$ au aceeași semn, deci $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a,b)$

(„$\Leftarrow$") Pp. $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a,b)$

Cum condițiile T. Lagrange sunt îndeplinite pe $[x, y]$, $\underline{x < y}$ cu $x, y \in (a,b)$ $\Rightarrow \exists c \in (x,y)$ a.î. $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) \geq 0$,

deci $\underline{f(y) \geq f(x)} \Rightarrow f$ crescătoare pe (a,b)

b) ("⇒") Pp. f descrescătoare pe (a,b).

Atunci $f'(x) = \lim\limits_{y \to x} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Cum f descrescătoare ⇒

$f(y)-f(x)$ și $y-x$ au semne contrare, deci $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a,b)$

("⇐") Pp. $f'(x) \underset{(*)}{\leq} 0$, $\forall x \in (a,b)$

Fie $\underline{\underline{x<y}}$, $x,y \in [a,b)$. Aplicăm T. Lagrange pe $[x,y]$ ⇒

$\exists c \in (x,y)$ a.î. $f'(c) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \underset{(*)}{\leq} 0$, deci $f(y) \leq f(x)$ ⇒ $x<y$

f descrescătoare pe (a,b)

c) se demonstrează similar cu a) ("⇐")

Exemplu de fc. strict cresc., dar pt. care derivata nu e strict pozitivă:

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5$.

Dacă $x<y \overset{10^5}{\Longrightarrow} x^5 < y^5$, deci f e strict crescătoare.

Totuși $f'(x) = 5x^4$ și $f'(0) = 0$, deci $f'(x) \not> 0$.

d) se demonstrează similar cu b) ("⇐")

Exemplu de fc. strict descresc, dar pt. care derivata nu e strict negativă:

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^5$

Pt. $x<y \Rightarrow x^5 < y^5 \Rightarrow -y^5 < -x^5 \Rightarrow f(y) < f(x)$,

deci f strict descrescătoare.

Totuși $f'(x) = -5x^4$ și $f'(0) = 0$, deci $f'(x) \not< 0$.

5 Determinați punctele de extrem local ale funcțiilor de la Ex. 3.

a) $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$.

f deriv. pe $(-1,1)$ $\Rightarrow$ $f'(x)=[\ln(1-x)-\ln(1+x)]'=\frac{-2}{(1-x)(1+x)}\neq 0$, deci

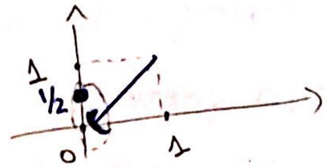
f nu are pct. critice, în consecință ~~și~~ nici pct. de extrem local în $(-1,1)$.

(Pct. de extrem din interiorul intervalului A pt. care $f:A\to\mathbb{R}$ se găsesc printre pct. critice, adică rădăcinile derivatei).

b) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=0\\ x, & x\in(0,1]\end{cases}$

f e derivabilă pe $(0,1)$ și $f'(x)=1\neq 0$ $\forall x\in(0,1)$, deci

f nu are pct. de extrem local în $(0,1)$.



Totuși, $f(1)=1\Rightarrow 1$ pct. de maxim local.

Verificăm și pt. 0.

Pp. că e pct. de maxim local. Atunci

$\exists\delta>0$ a.î. $\forall x\in(0-\delta,0+\delta)\cap A$: $f(0)\geq f(x)$.

$\Leftrightarrow$ $\exists\delta>0$ a.î. $\forall x\in(-\delta,\delta)\cap[0,1]$: $\frac{1}{2}\geq f(x)$.

Luăm $\delta=\frac{1}{4}$.

$\Rightarrow$ $\forall x\in(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})\cap[0,1]=[0,\frac{1}{4})$: $\frac{1}{2}\geq f(\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$, adevărat.

Deci 0 e pct. de maxim local.

c) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$.

Din tabelul de pe pag. 4 avem că -1, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sunt pct. de maxim local, iar 1 și $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ pct. de minim local.

⑥ Regula lui l'Hopital

Fie $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $V \subseteq \mathbb{R}$ o vecinătate a lui x_0 și $f, g : V \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ 2 funcții cu proprietățile:

i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0 \ (+\infty)$

ii) f, g derivabile pe $V \setminus \{x_0\}$

iii) $g'(x) \neq 0, \forall x \in V \setminus \{x_0\}$.

iv) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

atunci $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

Calculați limitele folosind regula lui l'Hopital:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x} \underset{l'H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left[-(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]'}{1.} = \underbrace{-\lim\limits_{x \to 0} \left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]'}_{= -\lim\limits_{x \to 0} h'(x)}$

Fie $\boxed{h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$.

$$h'(x) = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \cdot \frac{\ln(1+x)' \cdot x - \ln(1+x) \cdot x'}{x^2}$$

$$= e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \cdot \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(1+x)}{x^2} =$$

$$= e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \cdot \frac{x - [\ln(1+x)] \cdot (1+x)}{x^2(x+1)}$$

Calculăm $\lim\limits_{x \to 0} h'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}}_{e} \cdot \underbrace{\dfrac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^3 + x^2}}_{\to -\frac{1}{2}\ (**)}$

$\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1$ (limită remarcabilă sau l'Hopital) (*)

(*) Pt. termenul $e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$ avem că $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, deci

$$\lim_{x \to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^1 = e$$

(**) Pt. termenul $\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^3+x^2}$ aplicăm L'Hopital: $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^3+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\ln(1+x)-(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}}{3x^2+2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\ln(1+x)}{3x^2+2x} \underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} -\frac{\frac{1}{1+x}}{6x+2} = -\frac{1}{2}.$$

Deci $\lim_{x\to 0} h'(x) = e\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{e}{2}$ și limita inițială este $\frac{e}{2}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x} = \frac{e}{2}.$$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

* dacă $\alpha<0$, atunci $-\alpha>0$, deci $x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$ cu $-\alpha>0$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{-\alpha}\cdot e^x} \underset{\beta=-\alpha>0}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^\beta\cdot e^x} = 0$$

* dacă $\alpha=0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

* dacă $\alpha>0$:

1) $\alpha = n\in\mathbb{N}^*$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{n\cdot x^{n-1}}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} \underset{L'H}{=} \dots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!\cdot 1}{e^x} = 0$$

2) $\alpha \neq n\in\mathbb{N}^*$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^x} \underset{L'H}{=} \dots = \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-p)\cdot x^{\alpha-p-1}}{e^x}$$

de la un moment dat având că $\alpha-p-1<0$, deci din

nou: $$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-p)}{x^{-\alpha+p+1}\cdot e^x} \underset{-\alpha+p+1=\beta>0}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-p)}{x^\beta\cdot e^x} = 0$$