Subiectul 1

LS: 8p

PS: 18

Nume

Grupa

1p.of. **1p oficiu**

Exercițiul 1

0,5 *(a)* ***(0,5p)*** *Care este legea și modelul matematic al dezintegrării radioactive?*

0,5 *(b)* ***(0,5p)*** *Determinați soluția modelului dezintegrării radioactive.*

0,5 *(c)* ***(0,5p)*** *Ce este timpul de înjumătățire? Exprimați soluția modelului în funcție de timpul de înjumătățire.*

0,5 **Exercițiul 2** ***(0,5p)*** *Definiți noțiunea de soluție pentru o ecuație diferențială de ordinul 1.*

Exercițiul 3 *Determinați soluțiile generale pentru ecuațiile:*

0,5 *(a)* ***(0,5p)*** $(x^2+1)\,y' + 2x\cdot y = 1$

1 *(b)* ***(1p)*** $y'' + 2y' + 10y = 10x + 2$

Exercițiul 4 ***(1p)*** *Determinați soluția problemei bilocale:*

−1p

$$\begin{cases} y'' - \frac{1}{x\ln(x)}y' &= 12x^2\ln(x) \\ y(1) &= -\frac{1}{4} \\ y(2) &= e^4 \end{cases}$$

1 **Exercițiul 5** ***(1p)*** *Se consideră problema Cauchy* $\begin{cases} y' &= x^2 + y \\ y(0) &= 0 \end{cases}$. *Scrieți formula lui Euler de calcul a valorilor soluției aproximante pentru o rețea de noduri echidistante. Pentru pasul* $h = 0.2$ *calculați primele trei valori aproximative ale soluției pe intervalul* $[0;1]$.

Exercițiul 6 *Se consideră sistemul*

$$\begin{cases} x'(t) = & xy - 1 \\ y'(t) = & x^2 - y^2 \end{cases}$$

Se cere:

0,5p *(a)* ***(0,5p)*** *Să se determine punctele de echilibru.*

1p *(b)* ***(1p)*** *Să se studieze stabilitatea acestora.*

Problema suplimentară:

1p **Exercițiul 7** ***(1p)*** *Să se determine soluția generală a sistemului:*

$$\begin{cases} y_1' = & 2y_1 - 5y_2 \\ y_2' = & 5y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

1. JPG

3) a) $(x^2+1)\cdot y' + 2x\cdot y = 1$

I Rezolvăm ecuația omogenă

$$(x^2+1)\cdot y' + 2x\cdot y = 0$$

$$(x^2+1)\cdot y' = -2\cdot xy \quad |:y \quad |:x^2+1 \qquad y\neq 0$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{2x}{x^2+1} \quad |\cdot dx$$

$$\frac{1}{y}\,dy = -\frac{2x}{x^2+1}\,dx \quad \Big|\int$$

$$\ln|y| = -\ln(x^2+1) + C_1 \quad , C_1\in\mathbb{R}$$

$$\ln|y| = \ln(C_2) - \ln(x^2+1)$$

$$|y| = \frac{C_2}{x^2+1} \qquad \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = \frac{0-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\boxed{y_0 = \frac{c}{x^2+1}} \quad , c\in\mathbb{R}$$

II Determinăm o soluție particulară

$$y_p = \frac{c(x)}{x^2+1}$$

$$y_p' = c'(x)\cdot\frac{1}{x^2+1} + \frac{c(x)\cdot(-2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$(x^2+1)\cdot\left[c'(x)\cdot\frac{1}{x^2+1}-\frac{2x\cdot c(x)}{(x^2+1)^2}\right]+2x\cdot\frac{c(x)}{x^2+1}=1$$

$$c'(x)-\cancel{\frac{2x\cdot c(x)}{x^2+1}}+\cancel{\frac{2x\cdot c(x)}{x^2+1}}=1$$

$$c'(x)=1 \quad /\int$$

$$\left.\begin{array}{l} c(x)=x+c \\ c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow c(x)=x \Rightarrow y_p=\frac{x}{x^2+1}$$

III Scriem soluția finală $y=y_0+y_p$

$$\boxed{y=\frac{c}{x^2+1}+\frac{x}{x^2+1}},\ c\in\mathbb{R}$$

b) $y''+2y'+10y=10x+2$

I Rezolvăm ecuația omogenă

$$y''+2y'+10y=0$$

scriem ecuația caracteristică

$$r^2+2r+10=0$$

$$\Delta=4-40=-36$$

$$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=6i \quad \begin{cases} r_1=\frac{-2+6i}{2}=-1+3i \\ r_2=-1-3i \end{cases} \quad \begin{array}{l}\alpha=-1\\ \beta=3\end{array}$$

$$y_1=e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x=e^{-x}\cdot\cos 3x$$

$$y_2=e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x=e^{-x}\cdot\sin 3x \qquad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

$$y_0=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{-x}\cos 3x+c_2e^{-x}\cdot\sin 3x$$

II Determinăm o soluție particulară

Cazul I - $\begin{matrix} b=10 \\ b\neq 0 \end{matrix} \Rightarrow a) \Rightarrow y_p = ax+b$

$y_p' = a$

$y_p'' = 0$

$\Rightarrow 0 + 2a + 10ax + 10b = 10x + 2$

$\Rightarrow \begin{cases} 10a = 10 \Rightarrow a = 1 \\ 2a+2b = 2 \Rightarrow b = 0 \end{cases} \Rightarrow y_p = x$

III Scriem soluția finală $y = y_0 + y_p$

$y = c_1 e^{-x} \cos 3x + c_2 e^{-x} \sin 3x + x$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

4) $\begin{cases} y'' - \dfrac{1}{x\ln x} y' = 12x^2 \ln x \\ y(1) = -\dfrac{1}{4} \\ y(2) = e^4 \end{cases}$

I Rezolvăm ecuația omogenă

$y'' - \dfrac{1}{x\ln x} y' = 0$

$z = y'$

$z' = y''$

$$z' - \frac{1}{x\ln x} z = 0$$

$$z' = \frac{1}{x\ln x} z \quad \Big| : z \quad z \neq 0 \quad \Big| \cdot dx$$

$$\frac{1}{z} dz = \frac{1}{x\ln x} dx \quad \Big| \int$$

$$\ln|z| = \ln(\ln x) + c$$

$$\ln|z| = \ln(\ln x) + \ln c_1$$

$$|z| = c_1 \cdot \ln x$$

$$z_0 = c \cdot \ln x \, , \; c \in \mathbb{R}$$

II Determinăm o soluție particulară

$$z_p = C(x) \cdot \ln(x)$$

$$z_p' = C'(x) \cdot \ln x + C(x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$C'(x) \cdot \ln x + \cancel{C(x) \cdot \frac{1}{x}} - \cancel{\frac{1}{x \ln x} \cdot C(x) \cdot \ln x} = 12x^2 \cancel{\ln x}$$

$x \neq 1$

$$C'(x) = 12x^2 \Big| \int$$

$$\left.\begin{matrix} C(x) = 4x^3 + C_1 \\ C_1 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow C(x) = 4x^3$$

$$\Rightarrow z_p = 4x^3 \cdot \ln x$$

III Scriem soluția finală $z = z_0 + z_p$

$t = c \cdot \ln x + 4x^3 \cdot \ln x \quad , c \in \mathbb{R}$

$y' = c \cdot \ln x + 4x^3 \cdot \ln x \mid \int$

$y = c \underbrace{\int \ln x \, dx}_{I_1} + 4 \underbrace{\int x^3 \cdot \ln x \, dx}_{I_2}$

$I_1 = \int \ln x \, dx = \int x' \cdot \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$
$= x \ln x - x$

$I_2 = \int x^3 \ln x \, dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \int x^{\cancel{4}3} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \, dx$
$= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{16} \cdot x^4$

$y = x \ln x \cdot c - x \cdot c + \quad + x^4 \ln x - \frac{x^4}{4} + c_1$

$y(1) = -\frac{1}{4}$

$y(2) = e^4$

$y(1) = 0 - c + 0 - \frac{1}{4} + c_1 = -\frac{1}{4} \Rightarrow c = c_1$

$y(2) = e^4 \Rightarrow 2 \ln 2 \cdot c - 2c + 16 \ln 2 - 4 + c_1 = e^4$

$c(2 \ln 2 - 2 + 1) = e^4 + 4 - 16 \ln 2$

$c = \frac{e^4 + 4 - 16 \ln 2}{2 \ln 2 - 1} = c_1$

5) $\begin{cases} y' = x^2+y \\ y(0) = 0 \end{cases}$

I Rez pb Cauchy

$y' = x^2 + y$

$y' - y = x^2$

I) Rez ec omogenă

$y' - y = 0 \Leftrightarrow y' = y \overset{y \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{y} dy = dx$

$\ln |y| = x + c_1$

$y_0 = c \cdot e^x \, , c \in \mathbb{R}$

2) Det o sol part

$y_p = c(x) \cdot e^x$

$y_p' = c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x$

$c'(x) \cdot e^x + \cancel{c(x) \cdot e^x} - \cancel{c(x) \cdot e^x} = x^2$

$c'(x) = \frac{x^2}{e^x} \Big| \int$

$c(x) = \int \frac{x^2}{e^x} dx = \int (-e^{-x})' \cdot x^2 dx$

$= x^2 \cdot -e^{-x} + 2\int e^{-x} \cdot x \, dx$

$= x^2 \cdot -e^{-x} + 2\left(-e^{-x} \cdot x + \int e^{-x} dx\right) + C$

$= -x^2 \cdot e^{-x} - 2e^{-x} \cdot \cancel{x} - 2e^{-x} + \underset{0}{\overset{\parallel}{C}}$

$\overset{(px)}{=} e^{-x} \cdot (-x^2 - 2x - 2) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$

$y_p = (-1)(x^2 + 2x + 2)$

3) Scriem sol finală $y = y_0 + y_p$

$$\left.\begin{aligned} &y = C \cdot e^{x} - x^2 - 2x - 2 \\ &y(0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$y(0) = C - 0 - 0 - 2 = 0$

$\Rightarrow C = 2$

$\Rightarrow y(x) = 2e^{x} - x^2 - 2x - 2$

$h = 0,2 \Rightarrow N = 5$

$f(x, y) = x^2 + y$

$x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0$

$x_1 = 0,2 \Rightarrow y_1 = 0$

$x_2 = 0,4$

$x_3 = 0,6$

$y_{m+1} = y_m + (x_m^2 + y_m) \cdot h$

$y_1 = y_0 + (x_0^2 + y_0) \cdot h$

$\boxed{y_1} = 0 + 0 = 0$

$\boxed{y_2} = y_1 + (x_1^2 + y_1) \cdot h$

$= 0 + (0,2^2 + 0) \cdot 0,2$

$= (0,2)^3$

$\boxed{y_3} = y_2 + (x_2^2 + y_2) \cdot h$

$= (0,2)^3 + ((0,4)^2 + (0,2)^3) \cdot 0,2$

Calcule

7

6)
$$\begin{cases} x' = xy - 1 \\ y' = x^2 - y^2 \end{cases}$$

$xy = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{y}$

a) $\begin{cases} xy - 1 = 0 \Rightarrow xy = 1 \\ x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y \end{cases}$

$\frac{1}{y^2} - y^2 = 0$

$\frac{1}{y^2} = y^2 \Rightarrow y^4 = 1$

$y_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$

$y_2 = -1 \Rightarrow x_2 = -1$

$y_3 = i \Rightarrow x_3 = \frac{1}{i} = -i$

$y_4 = -i \Rightarrow x_4 = -\frac{1}{i} = i$

$x_1^*(1,1), x_2^*(-1,-1)$ – pct de echilibru

b) $J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$

$x_1^*(1,1)$ – pct de echil instabil de tip şa

I $J_f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = A$

$\lambda^2 + \lambda - 4 = 0$

$\Delta = 17$

$\sqrt{\Delta} = 17$

$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$

$\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}$

$\det(\lambda I_2 - A) = 0$

$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\lambda - 1)(\lambda + 2) - 2 = 0$

$\cancel{\lambda^2 - 3\lambda = 0} \quad \cancel{\lambda(\lambda - 3) = 0}$ $\cancel{\lambda_1 = 0}$ $\cancel{\lambda_2 = 3}$

8)

$J_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0$

$(\lambda+1)(\lambda-2) - 2 = 0$

$\lambda^2 - \lambda - 4 = 0$

$\Delta = 17$ $\quad \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{17}$ $\quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}$

$X_2^*(-1,-1)$ - pct de echil instabil de tip șa

7) $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 5y_2 \Rightarrow y_2 = \frac{2y_1 - y_1'}{5} \\ y_2' = 5y_1 + 2y_2 \end{cases}$

$y_2' = \frac{1}{5}(2y_1' - y_1'')$

$\frac{1}{5}(2y_1' - y_1'') = 5y_1 + \frac{4y_1 - 2y_1'}{5} \quad | \cdot 5$

$2y_1' - y_1'' = 25y_1 + 4y_1 - 2y_1'$

$y_1'' - 4y_1' + 29y_1 = 0$

$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$

$r^2 - 4r + 29 = 0$

$y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$

$\Delta = 16 - 116 = -100 \quad \sqrt{\Delta} = 10i$

$r_{1,2} = 2 \pm 5i \Rightarrow \alpha = 2, \ \beta = 5$

$y_1 = c_1 e^{2x}\cos 5x + c_2 e^{2x}\sin 5x; \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ g)

$$y_1' = c_1(2e^{2x}\cos 5x - 5e^{2x}\sin 5x) + c_2(2e^{2x}\sin 5x + 5e^{2x}\cos 5x)$$

$$y_2 = \frac{1}{5}\Big[\cancel{2c_1 e^{2x}\cos 5x} + \cancel{2c_2 e^{2x}\sin 5x} - \cancel{2c_1 e^{2x}\cos 5x} + c_1 5e^{2x}\sin 5x - \cancel{2c_2 e^{2x}\sin 5x} - 5c_2 e^{2x}\cos 5x\Big]$$

$$\boxed{y_2 = c_1 e^{2x}\sin 5x - c_2 e^{2x}\cos 5x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y_1' = e^{2x}\big(\sin 5x\,(2c_2 - 5c_1) + (2c_1 + 5c_2)\cos 5x\big)$$

$$y_1 = c_1 e^{2x}\cos 5x + c_2 e^{2x}\sin 5x$$

$$y_2 = \frac{1}{5}(2y_1 - y_1')$$

$$= \frac{1}{5}\big(\cancel{2c_1 e^{2x}}\cos 5x + \cancel{2c_2 e^{2x}\sin 5x} - \cancel{2c_2 e^{2x}\sin 5x} + 5e^{2x}c_1\sin 5x - \cancel{2e^{2x}c_1\cos 5x} - 5c_2 e^{2x}\cos 5x$$

10)

Subiectul 2

LS: 7/10p

PS: 0,25p

Nume

Grupa

1p.of. **1p oficiu**

Exercițiul 1 *Se consideră modelul de creștere a unei populații în care se face o recoltare constantă*

$$\begin{cases} x'(t) = & r \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right) - h \\ x(0) = & x_0 \end{cases}$$

Se cere:

0,5 *(a)* ***(0,5p)*** *În ce condiții asupra parametrilor $r, K, h \in \mathbb{R}_+$ ecuația admite două soluții de ech[…] pozitive distincte și care sunt acestea?*

1 *(b)* ***(1p)*** *Pentru $h = \frac{rK}{4}$ determinați și studiați stabilitatea soluțiilor de echilibru. Concluzie.*

0,25 **Exercițiul 2** ***(0,5p)*** *Definiți noțiunea de sistem fundamental de soluții pentru o ecuație diferen[…] liniară omogenă de ordinul 2.*

Exercițiul 3 *Determinați soluțiile generale pentru ecuațiile:*

0,5 *(a)* ***(0,5p)*** $y' - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot y = 4x^3 \cdot e^{\arcsin(x)}$

1 *(b)* ***(1p)*** $y'' + 6y' + 9y = (x+1) \cdot e^{-x}$

Exercițiul 4 ***(1p)*** *Determinați soluția problemei Cauchy:*

Nu

$$\begin{cases} y'' + tg(x) \cdot y' & = \cos(x) \\ y(0) & = 1 \\ y'(0) & = 0 \end{cases}$$

-0,5 **Exercițiul 5** ***(1p)*** *Se consideră problema Cauchy* $\begin{cases} y' & = x^2 - y^2 \\ y(0) & = 1 \end{cases}$. *Scrieți ecuația integrală Volt[…] echivalentă cu problema Cauchy, formula șirului aproximațiilor succesive și pentru funcția de start $y_0(x) \equiv 1$ calculați primele două aproximații succesive.*

Exercițiul 6 *Se consideră sistemul*

$$\begin{cases} x'(t) = & x(t) \\ y'(t) = & 3y(t) \end{cases}$$

Se cere:

1p *(a)* ***(1p)*** *Să se determine fluxul*

0,35p *(b)* ***(0,5p)*** *Să se determine portretul fazic și să se precizeze stabilitatea și tipul punctului de echili[…] (0;0).*

Problema suplimentară:

0,25p **Exercițiul 7** ***(1p)*** *Să se determine punctele de echilibru și să se studieze stabilitatea acestora pen[…] sistemul:*

$$\begin{cases} x'(t) = & y^3 + 1 \\ y'(t) = & x^2 + y \end{cases}$$

2. JPG

3)

a) $y' - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot y = 4x^3 \cdot e^{\arcsin x}$

I) Det sol ec omogene

$y' - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot y = 0$

$y' = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{1}{y} dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$\ln|y| = \arcsin x + c$

$|y| = e^{\arcsin x + c}$

$y_0 = c \cdot e^{\arcsin x}, \ c \in \mathbb{R}$

II) Det o sol part

$y_p = c(x) \cdot e^{\arcsin x}$

$y_p' = c'(x) \cdot e^{\arcsin x} + c(x) \cdot e^{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$c'(x) \cancel{e^{\arcsin x}} + \cancel{c(x) \cdot e^{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} - \cancel{c(x) \cdot e^{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

$= 4x^3 \cdot \cancel{e^{\arcsin x}}$

$c'(x) = 4x^3 \ | \int \Rightarrow c(x) = x^4 + c_1 \Rightarrow c(x) = x^4$

$\Rightarrow y_p = x^4 \cdot e^{\arcsin x}$

III Scriem sol final ct: $y = y_0 + y_p$

$y = c \cdot e^{\arcsin x} + x^4 \cdot e^{\arcsin x}$

$c \in \mathbb{R}$

b) $y'' + 6y' + 9y = (x+1)\cdot e^{-x}$

$\underline{I}$ Rez ec omogenă

$y'' + 6y' + 9y = 0$

scriem ec carac: $r^2 + 6r + 9 = 0$

$(r+3)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -3$

$y_1(x) = e^{rx} = e^{-3x}$

$y_2(x) = x\cdot e^{rx} = x\cdot e^{-3x}$

$y_0 = c_1 e^{-3x} + c_2 x\cdot e^{-3x}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\underline{II}$ Det o sol particulară

Cazul II - a) $\quad y_p = e^{rx}\cdot Q_m(x)$

$y_p = e^{-x}(ax+b)$

$y_p' = -e^{-x}(ax+b) + e^{-x}\cdot a$

$= e^{-x}(a-b-ax)$

$y_p'' = -e^{-x}(a-b-ax) + e^{-x}(-a)$

$= e^{-x}(-a-a+b+ax) = e^{-x}(ax+b-2a)$

$\cancel{e^{-x}}(\underline{ax}+b-2a+6a-6b-\underline{6ax}+\underline{9ax}+9b) = (x+1)\cancel{e^{-x}}$

$4ax + 4a + 4b = x + 1$

$\left\{\begin{array}{l} 4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \\ 4a+4b = 1 \Rightarrow b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y_p = \frac{x}{4}\cdot e^{-x}$

$\underline{III}$ Scriem sol finală: $y = y_0 + y_p$; $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-3x}\cdot x$

$+ \frac{x}{4}\cdot e^{-x}$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

4) $\begin{cases} y'' + tg(x) \cdot y' = \cos x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Not
$z = y'$
$z' = y''$
$\Rightarrow z' + tg x \cdot z = \cos x$

I Rez ec omogenă

$z' + tg x \cdot z = 0$

$\cancel{\int x' \cdot tg x \, dx = x \, tg x}$

$z' = -tg x \cdot z$

$\frac{1}{z} dz = -tg x \cdot dx \; | \int$

$\ln|z| = -\int x' \cdot tg x \, dx + c$

$\ln|z| = \ln(\cos x) + \ln C_1$

$|z| = C_1 \cos x$

$z_0 = C \cdot \cos x$

II Det sol particulară

$z_p = C(x) \cdot \cos x$

$z_p' = C'(x) \cos x + C(x) \cdot (-\sin x)$

$C'(x) \cos x + \cancel{C(x)(-\sin x)} + \cancel{tg x \cdot C(x) \cdot \cos x} = \cos x$

$C'(x) \cos x = \cos x \Rightarrow C'(x) = 1 \Rightarrow C(x) = x + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{C_1}} \Rightarrow C(x) = x$

$\Rightarrow z_p = x \cos x$

III Scriem sol finală : $z = z_0 + z_p = C \cdot \cos x + x \cos x$, $C \in \mathbb{R}$

$y' = C \cdot \cos x + x \cos x \; | \int$

$y = C \cdot \sin x + x \sin x + \cos x + C_1$

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C\cdot \cos 0 + 0 = 1 \Rightarrow C = 1 \\ 1 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = x\sin x + \cos x$$

5) $\begin{cases} y' = x^2 - y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$$y' = x^2 - y^2$$

$$y' + y^2 = x^2$$

I) Rez ~~sol~~ ec omogenă

$$y' + y^2 = 0$$

$$y' = -y^2$$

$$\frac{1}{y^2}\,dy = -dx$$

$$\cancel{\ln} + \frac{1}{y} = +x + C$$

$$\Rightarrow y_0 = \frac{1}{x+C}, \ C \in \mathbb{R}$$

II Det o sol particulară

$$y_p = \frac{1}{x + C(x)} \ ; \ y_p' = \frac{0 - (1 + C'(x))}{(x + C(x))^2}$$

$$\frac{-1 \cancel{+} C'(x)}{(x + C(x))^2} + \frac{1}{(x + C(x))^2} = x^2$$

$$-C'(x) = x^2 (x + C(x))^2$$

$$-C'(x) = x^2 (x^2 + 2x C(x) + C^2(x))$$

$c'(x) = -x^4 - 2x^3 c(x) - x^2 c^2_{(x)}$

$c(x) = z$

$z' = -x^4 - 2x^3 \cdot z - x^2 \cdot z^2$

$y(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$

$y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x y_n(s)\,ds$

$y(x) = 1 + \int_0^x \cancel{x^2 t}$

$\cancel{y_{n+1}(x) = y_n}$ $y(x) = y^0 + \int f(s, y(s))\,ds$

$y(x) = 1 + \int_0^x s^2 - y(s)^2\,ds$

$y(x) = 1 + \frac{x^3}{3} - \int_0^x y(s)^2\,ds$ ec integrală Volterra

șirul aprox succesive

$y_{n+1}(x) = 1 + \frac{x^3}{3} - \int_0^x y_n(s)^2\,ds$

$(a+b-c)(a+b-c) = a^2+b^2+c^2+2ab$
$-2ac-2bc$

$y_0 = 1$

$y_1(x) = 1 + \frac{x^3}{3} - \int_0^x 1\,ds$

$y_1(x) = 1 + \frac{x^3}{3} - x$

$y_2(x) = 1 + \frac{x^3}{3} - \int^x y_1(s)^2\,ds$

$y_2(x) = 1 + \frac{x^3}{3} - \int_0^x 1 + \frac{s^6}{9} + s^2 + \frac{2s^3}{3} - 2s - \frac{2s^4}{3}\,ds$

$$Y_2(x) = 1 + \frac{x^3}{3} - x - \frac{x^7}{63} - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{12} \cdot x^4 + x^2 + \frac{2}{15} \cdot x^5$$

6) $\begin{cases} x' = x \\ y' = 3y \\ x(0) = \eta_1 \\ y(0) = \eta_2 \end{cases}$

a) $x' = x \Leftrightarrow \frac{1}{x} dx = dt \Leftrightarrow \ln|x| = t + c_3$

$x = c_1 \cdot e^t, \ c_1 \in \mathbb{R}$

$y' = 3y \Leftrightarrow \frac{1}{y} dy = 3dt \Leftrightarrow \ln|y| = 3t + c_4$

$y = e^{3t} \cdot c_2, \ c_2 \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} x = c_1 \cdot e^t \\ y = c_2 \cdot e^{3t} \\ x(0) = \eta_1 \\ y(0) = \eta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \eta_1 \cdot e^t \\ y = \eta_2 \cdot e^{3t} \end{cases}$

$$\varphi(t, \eta_1, \eta_2) = (\eta_1 \cdot e^t, \eta_2 \cdot e^{3t})$$

$\left.\begin{array}{l} \varphi : I_{max} \cdot \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ I_{max} = \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

b) $\begin{cases} x = \eta_1 \cdot e^t \\ y = \eta_2 \cdot e^{3t} \end{cases}$ $\quad \frac{y}{x^3} = \underbrace{\frac{\eta_2}{\eta_1^3}}_{c} \Rightarrow \boxed{y = x^3 \cdot c}$

portretul fazic

$\frac{y}{x} = \frac{\eta_2}{\eta_1 = c} \cdot e^{2t} \Rightarrow \frac{y}{x} = c \cdot e^{2t}$

$y = c \cdot e^{2t} \cdot x$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\det(\lambda \cdot I_2 - A) = 0$

$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$

$\left.\begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^*(0,0)$

pct de echilibru instabil de tip nod

7) $\begin{cases} x' = y^3 + 1 \\ y' = x^2 + y \end{cases}$

$\begin{cases} y^3 + 1 = 0 \Rightarrow y^3 = -1 \Rightarrow y = -1 \\ x^2 + y = 0 \Rightarrow \end{cases} \Rightarrow x = \pm 1$

$x_1^* (1,-1); x_2^* (-1,-1)$ pct de echilibru

$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3y^2 \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$

I $(1,-1) = J_f(1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(\lambda I_2 - A) = 0$

$\begin{vmatrix} \lambda & -3 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \lambda(\lambda - 1) - 6 = 0$

$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$

$(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$

$\lambda_1 = 3$

$\lambda_2 = -2$

pct instabil de tip șa

7')

$\underline{II}\ (-1,-1)$

$$J_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I_2 - A) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -3 \\ 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda(\lambda-1)+6=0$$

$$\lambda - \lambda + 6 = 0$$

$$\Delta = 1-24 = -23 \qquad \sqrt{\Delta} = i\sqrt{23} \quad \begin{cases} \dfrac{1+i\sqrt{23}}{2} \\[2mm] \dfrac{1-i\sqrt{23}}{2} \end{cases}$$

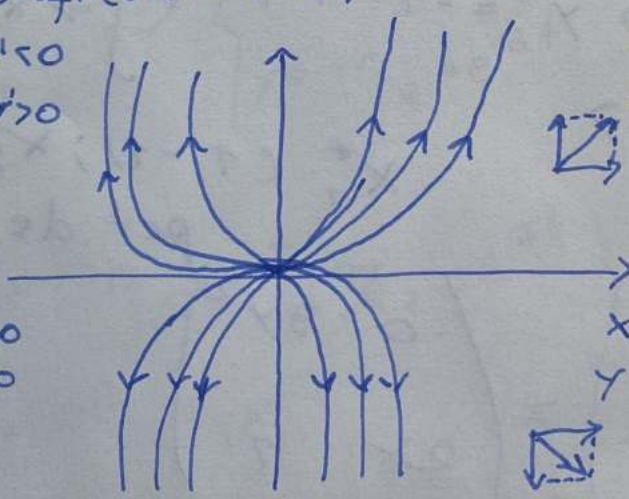
pct instabil de tip focus

Completare ex 6

Facem graficul $c \cdot x^3 = y$

$x<0 \Rightarrow x'<0$
$3y>0 \Rightarrow y'>0$

$x>0 \Rightarrow x>0$
$y>0 \Rightarrow 3y>0$
$\Rightarrow x'>0$
$y'>0$



$x<0 \Rightarrow x'<0$
$3y<0 \Rightarrow y'<0$

$x>0 \Rightarrow x>0 \Rightarrow x'>0$
$y<0 \Rightarrow 3y<0 \Rightarrow y'<0$

Şi la Volterra ar trb să dem că-l putem folosi

Subiectul 3

LS: 7/10p

PS: 0,25p

Nume [redacted]
Grupa

1p of. 1p oficiu

Exercițiul 1 *Se consideră modelul de creștere a unei populații în care se face o recoltare constantă*

$$\begin{cases} x'(t) = & r \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right) - h \\ x(0) = & x_0 \end{cases}$$

Se cere:

0,5 (a) **(0,5p)** *În ce condiții asupra parametrilor $r, K, h \in \mathbb{R}_+$ ecuația admite două soluții de echilibru pozitive distincte și care sunt acestea?*

1 (b) **(1p)** *Pentru $h = \frac{rK}{4}$ determinați și studiați stabilitatea soluțiilor de echilibru. Concluzie.*

0,25 **Exercițiul 2** *(0,5p) Definiți noțiunea de sistem fundamental de soluții pentru o ecuație diferențială liniară omogenă de ordinul 2.*

Exercițiul 3 *Determinați soluțiile generale pentru ecuațiile:*

0,5 (a) **(0,5p)** $y' - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot y = 4x^3 \cdot e^{\arcsin(x)}$

1 (b) **(1p)** $y'' + 6y' + 9y = (x+1) \cdot e^{-x}$

Exercițiul 4 *(1p) Determinați soluția problemei Cauchy:*

1p

$$\begin{cases} y'' + tg(x) \cdot y' & = \cos(x) \\ y(0) & = 1 \\ y'(0) & = 0 \end{cases}$$

-0,5 **Exercițiul 5** *(1p) Se consideră problema Cauchy* $\begin{cases} y' & = x^2 - y^2 \\ y(0) & = 1 \end{cases}$ *. Scrieți ecuația integrală Volterra echivalentă cu problema Cauchy, formula șirului aproximaților succesive și pentru funcția de start $y_0(x) \equiv 1$ calculați primele două aproximații succesive.*

Exercițiul 6 *Se consideră sistemul*

$$\begin{cases} x'(t) = & x(t) \\ y'(t) = & 3y(t) \end{cases}$$

Se cere:

1p (a) **(1p)** *Să se determine fluxul*

0,35p (b) **(0,5p)** *Să se determine portretul fazic și să se precizeze stabilitatea și tipul punctului de echilibru (0;0).*

Problema suplimentară:

0,25p **Exercițiul 7** *(1p) Să se determine punctele de echilibru și să se studieze stabilitatea acestora pentru sistemul:*

$$\begin{cases} x'(t) = & y^3 + 1 \\ y'(t) = & x^2 + y \end{cases}$$

$\boxed{3.\text{JPG}}$

3)

a) $(1-x^3)\cdot y' - 3x^2\cdot y = 1-4x^3$

I) Det sol omogenă

$(1-x^3)\cdot y' - 3x^2 y = 0$

$(1-x^3)\, y' = 3x^2 y$

$\frac{1}{y}\, dy = \frac{3x^2}{1-x^3}\, dx$

$\ln|y| = -\ln|1-x^3| + c_1$

$\ln|y| = \ln\frac{c_2}{1-x^3}$

$y_0 = \frac{c}{1-x^3}$; $c\in\mathbb{R}$

III Scriem soluția finală

$y = y_0 + y_p$

$y = \frac{c}{1-x^3} + x$; $c\in\mathbb{R}$

II) Det sol particulară

$y_p = \frac{c(x)}{1-x^3}$

$y_p' = \frac{c'(x)\cdot(1-x^3) + 3x^2\cdot c(x)}{(1-x^3)^2}$

$\frac{c'(x)\cdot\cancel{(1-x^3)} + \cancel{3x^2\cdot c(x)}}{\cancel{1-x^3}} - \cancel{\frac{3x^2\cdot c(x)}{1-x^3}} = 1-4x^3$

$c'(x) = 1-4x^3 \;/\int$

$c(x) = x - x^4 + c_0 = x - x^4 \Rightarrow y_p = \frac{x-x^4}{1-x^3} = x$

b) $y'' + 2y' + 5y = (4x+8)\cdot e^{-x}$

I Rez ec omogenă

$y'' + 2y' + 5y = 0$

scriem ec carac: $r^2 + 2r + 5 = 0$

$\Delta = 4 - 20 = -16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4i \quad \begin{cases} \to -1+2i \\ \to -1-2i \end{cases} \quad \begin{matrix} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{matrix}$

$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$

$y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$

$y_0 = c_1 e^{-x} \cos 2x + c_2 e^{-x} \sin 2x$

II Det o sol particulară

Caz II $\to$ a) $\Rightarrow y_p = e^{-x}(ax+b)$

$y_p' = -e^{-x}(ax+b) + e^{-x}\cdot a = e^{-x}(a - ax - b)$

$y_p'' = -e^{-x}(a - ax - b) + e^{-x}(-a) = e^{-x}(ax + b - 2a)$

$e^{-x}(ax + b \cancel{- 2a} \cancel{+ 2a} - 2ax - 2b + 5ax + 5b) = (4x+8)\cdot e^{-x}$

$\begin{cases} 4ax = 4 \Rightarrow a = 1 \\ 4b = 8 \Rightarrow b = 2 \end{cases} \Rightarrow y_p = e^{-x}(x+2)$

III Sol finală $\quad y = y_0 + y_p$

$y = c_1 e^{-x} \cos 2x + c_2 e^{-x} \sin 2x + e^{-x}(x+2)$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

4) $\begin{cases} y'' - \dfrac{e^x}{e^x+1} \cdot y' = e^{-x} + 1 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ $\quad z = y'$, $z' = y''$

$$z' - \frac{e^x}{e^x+1} \cdot z = e^{-x} + 1$$

I Rez ec omogenă

$$z' - \frac{e^x}{e^x+1} \cdot z = 0$$

$$z' = \frac{e^x}{e^x+1} \cdot z \quad \Big| :z \;\Big| \cdot dx \quad z \neq 0$$

$$\frac{1}{z}\, dz = \frac{e^x}{e^x+1}\, dx \quad \Big| \int$$

$$\ln|z| = \ln(e^x+1) + c_1$$

$$|z| = c_2 (e^x+1)$$

$$z_0 = c(e^x+1), \; c \in \mathbb{R}$$

II Det sol part

$$z_p = c(x) \cdot (e^x+1)$$

$$z_p' = c'(x)(e^x+1) + c(x) \cdot e^x$$

$$c'(x)\cancel{(e^x+1)} + \cancel{c(x) \cdot e^x} - \cancel{c(x) \cdot e^x} = e^{-x} + 1 = \frac{\cancel{e^x+1}}{e^x}$$

$$c'(x) = \frac{1}{e^x} \quad \Big| \int$$

$$c(x) = -e^{-x} + \underset{0}{c_1} \Rightarrow c(x) = -e^{-x}$$

$$z_p = -e^{-x}(e^x+1)$$

III) Scriem sol finală

$z = z_0 + z_p$

$z = C(e^x+1) - e^{-x}(e^x+1)$

$z = C \cdot e^x + C - 1 - e^{-x} = y' \quad | \int$

$y = C \cdot e^x + C \cdot x - x + e^{-x} + C_1$

$y' = C \cdot e^x + C - 1 - e^{-x}$

$\begin{cases} y(0) = 2 \Rightarrow C + 0 - 0 + 1 + C_1 = 2 \Rightarrow \boxed{C_1 = -1} \\ y'(0) = 2 \Rightarrow C + C - 1 - 1 = 2 \\ \quad 2C = 4 \Rightarrow \boxed{C = 2} \end{cases}$

5) $\begin{cases} y' = 4x^3 + xy^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$y(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds$

$y(x) = 0 + \int_0^x 4s^3 + s \cdot y(s)^2\,ds$

$y(x) = 0 + x^4 + \int_0^x s \cdot y(s)^2\,ds$

$\cancel{= 0 + x^4 + s \cdot \frac{y(s)^3}{3} \Big|_0^x - \frac{1}{3}\int_0^x y(s)^3\,ds}$

$\cancel{= 0 + x^4 + x \cdot \frac{y(x)^3}{3} - \frac{1}{3}\int_0^x y(s)^3\,ds}$

$$y_{n+1}(x) = x^4 + \int_0^x s \cdot y_n(s)^2\, ds$$

$y_0(x) = 0$

$$y_1(x) = x^4 + \int_0^x s \cdot 0\, ds = x^4 + \int_0^x 0\, ds = x^4$$

$$y_2(x) = x^4 + \int_0^x s \cdot y_1(s)^2\, ds$$

$$= x^4 + \int_0^x s \cdot s^8\, ds$$

$$= x^4 + \int_0^x s^9\, ds = x^4 + \frac{x^{10}}{10}$$

b) $\begin{cases} x'(t) = 2y(t) \\ y'(t) = -2x(t) \end{cases}$

$y = \frac{x'}{2}$ | derivăm

$y' = \frac{x''}{2} \Rightarrow x'' = -4x$

$x'' + 4x = 0$

Scriem ec carac

$$r^2 + 4 = 0 \quad r^2 = -4 \quad \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{matrix}$$

$$r = \pm 2i \begin{cases} x_1 = \cos 2x \\ x_2 = \sin 2x \end{cases} \Rightarrow x = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

$x' = -2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x$

$y = c_2 \cos 2x - c_1 \sin 2x$

$$\begin{cases} x = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \\ y = c_2 \cos 2x - c_1 \sin 2x \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = \eta_1 \\ y(0) = \eta_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \eta_1 \\ c_2 = \eta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \eta_1 \cos 2x + \eta_2 \sin 2x \\ y = \eta_2 \cos 2x - \eta_1 \sin 2x \end{cases}$$

$$f(t, \eta_1, \eta_2) = (\eta_1 \cos 2x + \eta_2 \sin 2x, \eta_2 \cos 2x - \eta_1 \sin 2x)$$

$$\left.\begin{array}{l} f: I_{max} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ I_{max} = \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y \\ \frac{dy}{dt} = -2x \end{cases}$:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x} \Leftrightarrow x\,dx = -y\,dy \mid \int$$

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + c$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$$

$(0,0)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I_2 - A) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda = \pm 2i$$

pct stabil de tip centru

6)

7) $\begin{cases} x' = 1 - x^2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1^* (1, -1) \\ x_2^* (-1, -1) \end{matrix}$

pct de echilibru

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I $(1, -1)$

$$J_f(1,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$\det(\lambda I_2 - A) = 0 \qquad \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$

$(\lambda+2)(\lambda-1) = 0 \quad \left[\begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \end{matrix} \right.$

pct instabil de tip şa

II $(-1, -1)$

$$J_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$\det(\lambda I_2 - A) = 0 \qquad \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = 1$

pct instabil de tip nod

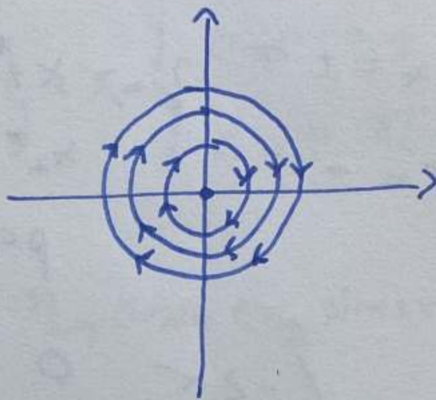
7)

Completare 6

Facem graficul lui $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$

$x > 0 \Rightarrow x' > 0$

$y > 0 \quad y' < 0$



Și la Volterra ar trb să dem că-l putem folosi

Subiectul 4

1) modelul creșterii unei populații cu recoltare constantă

a) În ce condiții asupra param k, K, h ecuația nu admite nicio sol de echilibru pozitivă?

b) pt $h < \frac{kK}{4}$ det și studiați stab. sol de echil (concluzie)

2) ~~sg~~ soluție pt o ec dif de ordin 2

3) a) $x \ln x \cdot y' - 2y = \ln x$

b) $y'' - 2y' + 5y = (8x+4)e^x$

4) $$\begin{cases} (x^2+3)y'' - 2x \cdot y' = -\frac{(x^2+3)^2}{x^2} \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 4 \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} y' = 3x^2 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$ se consideră pb Cauchy

- ecuația integrală Volterra
- formula șirului aprox succesive

și pt funcția de start $y_0(x) \equiv 1$ calculează primele 2 aproximații succesive

6) $$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = 4x(t) \end{cases}$$

a) fluxul

b) portret fazic

stabilitate + tipul pct $(0,0)$

7) $$\begin{cases} x'(t) = -x + xy \\ y'(t) = -4y + 8xy \end{cases}$$ punctele de echil + stabilitatea lor

~~*~~ suplimentar

4. SPG

3) a) $x\ln x \cdot y' - 2y = \ln x$

I Rez ec omogenă

$x\ln x \cdot y' - 2y = 0$

$x\ln x \cdot y' = 2y$

$\frac{1}{y}\, dy = 2 \cdot \frac{1}{x\ln x}\, dx$

$\ln|y| = 2\ln \ln x + C_1$

$\ln|y| = \ln \ln^2 x + \ln C_2$

$|y| = C_2 \cdot \ln^2 x$

$\boxed{y_0 = C \cdot \ln^2 x}$

II Det o sol part

$y_p = C(x) \cdot \ln^2 x$

$y_p' = C'(x) \cdot \ln^2 x + C(x) \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}$

$x\ln^3 x\, C'(x) + \cancel{C(x) \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x \cdot \ln x - 2C(x)\ln^2 x} = \ln x$

$C'(x) = \frac{1}{x\ln^2 x} \int$

Sv $= t = \ln x$

$dt = \frac{1}{x}\, dx$

$C(x) = \int \frac{1}{x\ln^2 x}\, dx = \int \frac{1}{t^2}\, dt = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\ln x}$ $\boxed{y_p = -\ln x}$

III Scriem soluția finală

$y = y_0 + y_p$

$y = C\ln^2 x - \ln x, \ C \in \mathbb{R}$

b) $y'' - 2y' + 5y = (8x+4)\cdot e^x$

I Rez ec omogenă

$y'' - 2y' + 5y = 0$

scriem ecuația caracteristică

$r^2 - 2r + 5 = 0$

$\Delta = 4 - 20 = -16 \quad \sqrt{\Delta} = 4i \quad r_1 = 1+2i, \quad r_2 = 1-2i$

$\alpha = 1 \quad y_{01} = e^x \cos 2x$

$\beta = 2 \quad y_{02} = e^x \sin 2x$

$y_0 = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x \,; \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

II Determinăm o sol particulară

Cazul II - b) $\Rightarrow y_p = e^x (ax+b)$

$y_p' = e^x(ax+b) + e^x \cdot a = e^x (ax+a+b)$

$y_p'' = e^x (ax+2a+b)$

$\cancel{e^x}\left(ax + \cancel{2a} + b - 2ax - \cancel{2a} - 2b + 5ax + 5b\right) = (8x+4)\cancel{\cdot e^x}$

$4ax + 4b = 8x + 4$

$a = 2$

$b = 1 \quad \Rightarrow y_p = e^x (2x+1)$

III Scriem rez final $y = y_0 + y_p$

$y = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x + e^x (2x+1)$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

4) $\begin{cases} (x^2+3)\,y'' - 2x\cdot y' = \dfrac{-(x^2+3)^2}{x^2} \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 4 \end{cases}$

$z = y' \quad z' = y'' \Rightarrow (x^2+3)\cdot z' - 2x\cdot z = \dfrac{-(x^2+3)^2}{x^2}$

I Rez ec omogonă

$(x^2+3)\cdot z' - 2x\cdot z = 0$

$\dfrac{1}{z}\,dz = \dfrac{2x}{x^2+3}\,dx \;\Big|\int$

$\ln|z| = \ln(x^2+3) + C_1$

$\ln|z| = \ln(x^2+3) + \ln(C_2)$

$|z| = C_2(x^2+3)$

$z_0 = C(x^2+3), \; C \in \mathbb{R}$

II Det sol part

$z_p = C(x)(x^2+3)$

$z_p' = C'(x)(x^2+3) + 2x\cdot C(x)$

$\cancel{(x^2+3)}^2 c'(x) + \cancel{2x(x^2+3)C(x) - 2x\cdot(x^2+3)C(x)}$

$= -\dfrac{\cancel{(x^2+3)}^2}{x^2} \Rightarrow c'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \;\Big|\int$

$c(x) = +\dfrac{1}{x}$ $\qquad z_p = \dfrac{x^2+3}{x}$

~~$c(x) = -\ln x + c_0 \Rightarrow c(x) = -\ln x \Rightarrow z_p = -\ln x\,(x^2+3)$~~

III Scriem sol finală

$$\cancel{z = z_0 + z_p = C(x^2+3) - \ln x (x^2+3) ;\ C \in \mathbb{R}}$$

$$\cancel{y' = z \quad | \int}$$

$$\cancel{y = C\left(\frac{x^3}{3} + 3x\right) - \int \ln x (x^2+3)\, dx}$$

$$\cancel{\int \ln x (x^2+3)\, dx = \int \ln x \left(\frac{x^3}{3} + 3x\right)' dx = \ln x \left(\frac{x^3}{3} + 3x\right.}$$

III $z = z_0 + z_p = C(x^2+3) + \frac{x^2+3}{x} = y' \quad | \int$

$$y = C\left(\frac{x^3}{3} + 3x\right) + \int x + \frac{3}{x}\, dx$$

$$y = C\left(\frac{x^3}{3} + 3x\right) + \frac{x^2}{2} + 3\ln x + C_1$$

$$\begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(1) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2} \\ C \cdot 4 + 4 = 4 \Rightarrow C = 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{x^2}{2} + 3\ln x - \frac{1}{2}$$

5) $\begin{cases} y' = 3x^2 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$$y(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$$

$$y(x) = 1 + \int_0^x 3s^2 + y(s)^2\, ds$$

$y(x) = 1 + x^3 + \int_0^x y(s)^2 ds$ - ec integrală Volterra

Șirul aprox:

$y_{n+1}(x) = 1 + x^3 + \int_0^x y_n(s)^2 ds$

$y_0(x) = 1$

$y_1(x) = 1 + x^3 + \int_0^x \underbrace{y_0(s)}_{1}{}^2 ds = 1 + x^3 + \int_0^x ds$

$= 1 + x^3 + x$

$y_2(x) = 1 + x^3 + \int_0^x y_1(s)^2 ds =$

$= 1 + x^3 + \int_0^x (s^3 + s + 1)^2 ds$

$= 1 + x^3 + \int_0^x s^6 + s^2 + s + 2s^4 + 2s^3 + 2s \, ds$

$= 1 + x^3 + \frac{x^7}{7} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{5}x^5 + \frac{2x^4}{4} + 2 \cdot \frac{x^2}{2}$

6) $\begin{cases} x'(t) = -y(t) \;|' \Rightarrow -x'' = y' \\ y'(t) = 4x(t) \end{cases}$

$\alpha = 0 ; \beta = 2$

$\boxed{x = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x}$

$x' = -2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x$

$\boxed{y = 2c_1 \sin 2x - 2c_2 \cos 2x}$

$\Rightarrow -x'' = 4x$

$x(0) = \eta_1$

$\Rightarrow x'' + 4x = 0$

$y(0) = \eta_2$

scriem ec carac

$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r^2 = 4$

$r = \pm 2i$

$$\begin{cases} \cancel{c_2 = \frac{n_1}{2}} \\ \cancel{-2c_2 = \frac{n_2}{2}} \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = n_1 \\ c_2 = \frac{-n_2}{2} \end{cases}$$

$$\varphi_c(t, n_1, n_2) = (n_1 \cos 2x - \frac{n_2}{2} \sin 2x,$$

$$2n_1 \sin 2x + n_2 \cos 2x)$$

$$\left.\begin{matrix} \varphi: I_{max} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ I_{max} = \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

b) $\left.\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = 4x \end{cases}\right\}:$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{4x}$$

$$4x\,dx = -y\,dy$$

$$2x^2 = -\frac{y^2}{2} + C$$

$$2x^2 + \frac{y^2}{2} = C$$

1) $\begin{cases} x' = -x + xy \\ y' = -4y + 8xy \end{cases}$

$\begin{cases} -x + xy = 0 \Rightarrow x = xy \Rightarrow y = 1 \\ -4y + 8xy = 0 \Rightarrow 8x = 4 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$

$x_1^* (\frac{1}{2}, 1) \quad x_2^* (0, 0)$

$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-1 & x \\ 8y & 8x-4 \end{pmatrix}$

I $(0,0)$

$J_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = A \quad \det(\lambda I_2 - A) = 0$

$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda+4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda+4) = 0 \quad \begin{matrix} -1 \\ -4 \end{matrix}$

local as stab de tip nod

II $(\frac{1}{2}, 1)$ $J_f = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 8 & 0 \end{pmatrix} = A$

$\det(\lambda I_2 - A) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} \\ -8 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0$

$\lambda^2 = 4$

$\lambda = \pm 2$

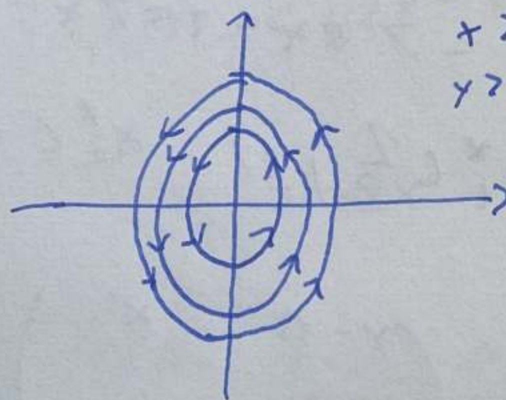
pct de echilibru instabil de tip șa

Completare 6

Facem graficul lui $2x^2 + \frac{y^2}{2} = C$

$x > 0 \Rightarrow x' < 0$

$y > 0 \Rightarrow y' > 0$



Și la Volterra ar trb dam că-l putem folosi

Nume Subiectul 5

Grupa

1p.of. 1p oficiu

Exercițiul 1 *Se consideră modelul pradă-prădător*

$$\begin{cases} x'(t) = & ax - bxy \\ y'(t) = & -cy + dxy \end{cases}$$

0 (a) **(0,5p)** *Care este semnificația parametrilor $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$?*

0 (b) **(0,5p)** *Determinați punctele de echilibru și studiați stabilitatea acestora;*

0 (c) **(0,5p)** *Determinați ecuația orbitelor din portretul fazic.*

0 **Exercițiul 2** **(0,5p)** *Definiți noțiunea de punct de echilibru asimptotic stabil pentru un sistem planar de ecuații diferențiale autonome.*

Exercițiul 3 *Determinați soluțiile generale pentru ecuațiile:*

0,5p (a) **(0,5p)** $(1 - x^3) \cdot y' - 3x^2 \cdot y = 1 - 4x^3$

1p (b) **(1p)** $y'' - 2y' + 5y = 5e^{2x}$

Exercițiul 4 **(1p)** *Determinați soluția problemei Cauchy:*

1p

$$\begin{cases} y'' - \dfrac{e^x}{e^x + 1} \cdot y' & = 0 \\ y(0) & = 1 \\ y'(0) & = 2 \end{cases}$$

0 **Exercițiul 5** **(1p)** *Se consideră problema Cauchy*

$$\begin{cases} y' & = 4x^3 + y^2 \\ y(0) & = 0 \end{cases}$$

Scrieți ecuația integrală Volterra echivalentă cu problema Cauchy, formula șirului aproximațiilor succesive și pentru funcția de start $y_0(x) \equiv 0$ calculați primele două aproximații succesive.

Exercițiul 6 *Se consideră sistemul*

$$\begin{cases} x'(t) = & 2y(t) \\ y'(t) = & -2x(t) \end{cases}$$

Se cere:

0 (a) **(1p)** *Să se determine fluxul*

0,25 (b) **(0,5p)** *Să se determine portretul fazic și să se precizeze stabilitatea și tipul punctului de echilibru $(0;0)$.*

5.JPG

3)

a) $(1-x^3)\cdot y' - 3x^2\cdot y = 1-4x^3$

I Rez ec omogenă

$(1-x^3)\cdot y' = 3x^2 y$

$\frac{1}{y}\,dy = \frac{3x^2}{1-x^3}\,dx \,\Big|\int$

$\ln|y| = -\ln|1-x^3| + C_1$

$\ln|y| = \ln\left|\frac{C_2}{1-x^3}\right|$

$y_0 = \frac{C}{1-x^3}, \quad C\in\mathbb{R}$

II Det o sol part

$y_p = \frac{C(x)}{1-x^3}$

$y_p' = \frac{C'(x)}{1-x^3} + C(x)\cdot\frac{0+3x^2}{(1-x^3)^2}$

$C'(x) + \cancel{\frac{C(x)\cdot 3x^2}{(1-x^3)}} - \cancel{\frac{3x^2\cdot C(x)}{1-x^3}} = 1-4x^3$

$C'(x) = 1-4x^3 \Rightarrow C(x) = x - x^4 + \underset{0}{c} = x-x^4$

$y_p = \frac{x(1-x^3)}{1-x^3} = x$

III Scriem sol finală

$y = y_0 + y_p \Rightarrow y = \frac{C}{1-x^3} + x, \quad C\in\mathbb{R}$

b) $y'' - 2y' + 5y = 5e^{2x}$

I Rez ec omogenă $y'' - 2y' + 5y = 0$

scriem ec caracteristică $r^2 - 2r + 5 = 0$

$\Delta = 4 - 20 = -16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4i$

$r_1 = 1 + 2i$ $\Rightarrow y_0 = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x$

$r_2 = 1 - 2i$

II Det o soluție particulară

Cazul II $\to$ a) $y_p = e^{2\cancel{x}} \cdot a$

$y_p' = e^{2x} \cdot 2a$

$y_p'' = e^{2x} \cdot 4a$

$\cancel{e^{2x}}(\cancel{4a} - \cancel{4a} + 5a) = 5 \cdot \cancel{e^{2x}} \Rightarrow a = 1$

$y_p = e^{2x}$

III Scriem sol finală $y = y_0 + y_p$

$y = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x + e^{2x}$

4) $\begin{cases} y'' - \dfrac{e^x}{e^x+1} \cdot y' = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ $z = y'$, $z' = y''$

$z' = \dfrac{e^x}{e^x+1} \cdot z$

$$\frac{1}{z}\,dz = \frac{e^x}{e^x+1}\cdot dx \,\Big|\int$$

$$\ln|z| = \ln(e^x+1) + c_1$$

$$\ln|z| = \ln(e^x+1) + \ln c_2$$

$$|z| = c_2(e^x+1)$$

$$z = c(e^x+1)$$

$$y' = c(e^x+1) \,\Big|\int$$

$$y = c\cdot\int e^x dx + c\cdot\int dx$$

$$y = c\cdot e^x + c\cdot x + c_1$$

$$y' = c(e^x+1)$$

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c+c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = 0 \\ 2c = 2 \Rightarrow c = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = e^x + x$$

5) $\begin{cases} y' = 4x^3 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$$y(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds \quad \text{- ec integrală Volterra}$$

$$y(x) = 0 + \int_0^x 4s^3 + y(s)^2\,ds$$

$$y(x) = x^4 + \int_0^x y(s)^2\,ds$$

$y_0(x) \equiv 0$

$$y_{n+1}(x) = x^4 + \int_0^x y_n(s)^2\, ds$$

$$y_1(x) = x^4 + \int_0^x \underbrace{y_0(s)^2}_{0}\, ds = x^4$$

$$y_2(x) = x^4 + \int_0^x y_1(s)^2\, ds =$$

$$y_2(x) = x^4 + \int_0^x \cancel{x}^8\, ds$$

$$y_2(x) = x^4 + \frac{x^9}{9}$$

6) $\begin{cases} x' = 2y \;\; |' \Rightarrow x'' = 2y' \Rightarrow y' = \dfrac{x''}{2} \\ y' = -2x \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{x''}{2} = -2x \Leftrightarrow x'' + 4x = 0$$

scriem ec caracteristică $r^2 + 4 = 0 \quad r_{1,2} = \pm 2i$

$$x = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

$$x' = -2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x$$

$$y = c_2 \cos 2x - c_1 \sin 2x$$

$\begin{cases} x(0) = \eta_1 \\ y(0) = \eta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \eta_1 \\ c_2 = \eta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \eta_1 \cos 2x + \eta_2 \sin 2x \\ y = \eta_2 \cos 2x - \eta_1 \sin 2x \end{cases}$

$$f(t, x_1, x_2) = (x_1 \cos 2t + x_2 \sin 2t,\ x_2 \cos 2t - x_1 \sin 2t)$$

$$\left.\begin{array}{l} f : I_{max} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ I_{max} = \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

fluxul

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x \end{array}\right. \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$$

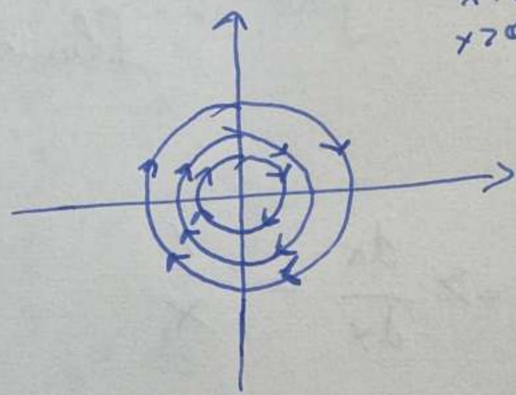
$$x\,dx = -y\,dy$$

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + c \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$$ - portretul fazic

Completare 6

Facem graficul lui $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$

$x>0$ $\quad$ $x'>0$
$y>0$ $\quad$ $y'<0$



Și la Volterra ar trb dem că-l putem folosi

Nume

Grupa

Subiectul
6 = 8

1. 1p oficiu

Exercițiul 1 *Se consideră modelul logistic (Verhulst) de creștere a unei populații*

$$\begin{cases} x'(t) = & r_0 \cdot x \cdot \left(1 - \dfrac{x}{K}\right) \\ x(0) = & x_0 \end{cases}$$

Se cere:

0 *(a) (0,5p) Care este semnificația parametrilor r_0 și K?*

0 *(b) (0,5p) Determinați soluția modelului;*

0 *(c) (0,5p) Determinați soluțiile echilibru și stabilitatea acestora.*

0 **Exercițiul 2** *(0,5p) Definiți noțiunea de punct de echilibru asimptotic stabil pentru o ecuație difere[...] autonomă de ordinul 1.*

Exercițiul 3 *Determinați soluțiile generale pentru ecuațiile:*

0,5p *(a) (0,5p)* $y' \cdot \cos(x) - 2y \cdot \sin(x) = 1$

0,5p *(b) (1p)* $y'' - 4y' + 8y = 8x - 4$

Exercițiul 4 *(1p) Determinați soluția problemei bilocale:*

1p

$$\begin{cases} (1+x^3) \cdot y'' - 3x^2 \cdot y' & = 0 \\ y(0) & = 0 \\ y(2) & = 6 \end{cases}$$

0 **Exercițiul 5** *(1p) Se consideră problema Cauchy* $\begin{cases} y' & = x + 2y \\ y(0) & = 1 \end{cases}$. *Scrieți formula lui Euler de cal[...] a valorilor soluției aproximante pentru o rețea de noduri echidistante. Pentru pasul $h = 0.1$ calcul[...] primele trei valori aproximative ale soluției pe intervalul $[0; 1]$.*

0 **Exercițiul 6** *Se consideră sistemul*

$$\begin{cases} x'(t) = & x - xy^2 \\ y'(t) = & x - y \end{cases}$$

Se cere:

(a) (0,5p) Să se determine punctele de echilibru

(b) (1p) Să se studieze stabilitatea acestora.

$\boxed{6.JPG} = \boxed{8.JPG}$

3) a) $y' \cdot \cos x - 2y \sin x = 1$

I Rez ec omogenă

$$y' \cdot \cos x = 2y \sin x$$

$$\frac{1}{y}\, dy = 2 tg x\, dx$$

$$\ln|y| = -2 \ln|\cos x| + \cancel{\ln}(c_1)$$

$$|y| = \frac{c_1}{\cos^2 x}$$

$$y_0 = \frac{c}{\cos^2 x}$$

II Det o sol part $y_p = \dfrac{c(x)}{\cos^2 x}$

$$y_p' = c'(x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + c(x) \cdot \frac{0 + 2\sin x \cancel{\cos x}}{\cos^{\cancel{4}\,3} x}$$

$$y_p' = c'(x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + c(x) \cdot \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

$$c'(x) \cdot \frac{1}{\cos x} + \cancel{c(x) \cdot \frac{2\sin x}{\cos^2 x}} - \cancel{\frac{c(x) \cdot 2\sin x}{\cos^2 x}} = 1$$

$$c'(x) = \cos x \;\Big|\int$$

$$c(x) = \sin x + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{c}} = \sin x \Rightarrow y_p = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

III Scriem soluția finală: $y = y_0 + y_p = \dfrac{c}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin x}{\cos^2 x};\ c \in \mathbb{R}$

b) $y'' - 4y' + 8y = 8x - 4$

I Rezec omogenă

$y'' - 4y' + 8y = 0$

scriem ec carac: $r^2 - 4r + 8 = 0$

$\Delta = 16 - 4 \cdot 8 = -16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4i < \begin{matrix} 2+2i \\ 2-2i \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} \alpha = 2 \\ \beta = 2 \end{matrix}$

$y_0 = C_1 e^{2x} \cos 2x + C_2 e^{2x} \sin 2x$

$\underline{\text{II}}$ Det o sol part

Caz I -> a $\quad y_p = ax + b$

$y_p' = a$

$y_p'' = 0$

$0 - 4a + 8ax + 8b = 8x - 4$

$\Rightarrow \begin{cases} 8a = 8 \Rightarrow a = 1 \\ 8b - 4a = -4 \Rightarrow b = 0 \end{cases} \Rightarrow y_p = x$

$\underline{\text{III}}$ Scriem sol finală $\quad y = y_0 + y_p = C_1 e^{2x} \cos 2x + C_2 e^{2x} \sin 2x + x$

4) $\begin{cases} (1+x^3) \cdot y'' - 3x^2 \cdot y' = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(2) = 6 \end{cases}$ $\qquad z = y'$

$\qquad z' = y''$

$(1+x^3) \cdot z' = 3x^2 \cdot z$

$\frac{1}{z} dz = \frac{3x^2}{x^3+1} dx$

$\ln|z| = \ln(x^3+1) + \ln c_1$

$|z| = c_1 (x^3+1)$

$z = c(x^3+1)$

$y' = c(x^3+1) \mid \int$

$y = c \cdot \frac{x^4}{4} + c \cdot x + c_1$

$\begin{cases} y(0)=0 \\ y(2)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0+0+c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ 4c+2c+0 = 6 \Rightarrow c = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow y = \frac{x^4}{4} + x$

5) $\begin{cases} y' = x+2y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$[0,1]$

$h = 0,1 \Rightarrow N = 10$

$x_0 = 0 \quad y_0 = 1$

$x_1 = 0,1 \quad y_1 = 1,2$

$x_2 = 0,2 \quad y_2 = 1,45$

$x_3 = 0,3 \quad y_3 = 1,76$

$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n) \cdot h$

$y_{n+1} = y_n + (x_n + 2y_n) \cdot h$

$y_1 = y_0 + (x_0 + 2y_0) \cdot h$

$= 1 + 0,2 = 1,2$

$y_2 = y_1 + (x_1 + 2y_1) \cdot h$

$= 1,2 + 2,5 \cdot 0,1$

$= 1,45$

$y_3 = y_2 + (x_2 + 2y_2) \cdot h$

$= 1,45 + 3,1 \cdot 0,1$

$= 1,45 + 0,31$

$= 1,76$

6) $\begin{cases} x' = x - xy^2 \\ y' = x - y \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - xy^2 = 0 \\ x - y = 0 \Rightarrow x = y \end{cases}$

$x - x^3 = 0$

$x(1 - x^2) = 0$

$x(1-x)(1+x) = 0$

$x_1^*(0,0)$; $x_2^*(1,1)$; $x_3^*(-1,-1)$ - 3 pct de echil

b) $J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y^2 & -2xy \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

I $x_1^*(0,0)$

$J_f(x_1^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A$

$\det(\lambda I_2 - A) = 0 \quad \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \quad \left[\begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array} \right.$ pct de echilibru instabil de tip șa

II $x_2^*(1,1)$

$$J_f(x_2^*) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A$$

$\det(\lambda I_2 - A) = 0$ $\quad \begin{vmatrix} \lambda & +2 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$

$\lambda(\lambda+1) + 2 = 0$

$\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$

$\Delta = 1-8 = -7 \quad \sqrt{\Delta} = i\sqrt{7}$

$\lambda_{1,2}$: $\dfrac{-1+i\sqrt{7}}{2}$, $\dfrac{-1-i\sqrt{7}}{2}$

pct de echilibru asimptotic stabil de tip focus

III $x_3^*(-1,-1)$

$$J_f(x_3^*) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A$$

analog ca la II

$\Rightarrow$ pct de echilibru local asimptotic stabil de tip focus

Nume . Subiectul 7

Grupa .

1p.of. 1p oficiu

Exercițiul 1 *Se consideră modelul matematic al răcirii corpurilor*

$$\begin{cases} T'(t) &= -k\cdot(T(t)-T_m) \\ T(0) = & T_0 \end{cases}$$

0 (a) *(0,5p) Care este semnificația parametrilor $k, T_m, T_0 \in \mathbb{R}_+$? Argumentați de ce $k>0$.*

0 (b) *(0,5p) Determinați soluția modelului;*

0 (c) *(0,5p) Determinați soluțiile de echilibru și studiați stabilitatea acestora.*

0 **Exercițiul 2** *(0,5p) Definiți noțiunea de soluție pentru o ecuație diferențială de ordinul 1.*

Exercițiul 3 *Determinați soluțiile generale pentru ecuațiile:*

0,75p (a) *(0,5p)* $y' - \frac{2}{x}y = -1$

1p (b) *(1p)* $y'' + 4y' + 5y = 2e^{-x}$

Exercițiul 4 *(1p) Determinați soluția problemei bilocale:*

0

$$\begin{cases} (3x-1)\cdot y'' - 3\cdot y' &= -3 \\ y(0) &= 0 \\ y(1) &= \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

0 **Exercițiul 5** *(1p) Se consideră problema Cauchy* $\begin{cases} y' &= xy \\ y(0) &= 1 \end{cases}$. *Scrieți formula lui Euler de calcul a valorilor soluției aproximante pentru o rețea de noduri echidistante. Pentru pasul $h = 0.1$ calculați primele trei valori aproximative ale soluției pe intervalul $[0;1]$.*

Exercițiul 6 *Se consideră sistemul*

$$\begin{cases} x'(t) = & y^3 - x \\ y'(t) = & x^3 - y \end{cases}$$

Se cere:

0 (a) *(0,5p) Să se determine punctele de echilibru*

0 (b) *(1p) Să se studieze stabilitatea acestora.*

7.JPG

3) a) $y' - \frac{2}{x} y = -1$

I Rez ec omogenă

$$y' - \frac{2}{x} y = 0$$

$$y' = \frac{2}{x} \cdot y$$

$$\frac{1}{y} dy = \frac{2}{x} dx$$

$$\ln|y| = 2 \ln|x| + \ln(c_1)$$

$$|y| = c_1 \cdot x^2$$

$$y_0 = c \cdot x^2$$

II Determinăm soluția particulară

$$y_p = c(x) \cdot x^2$$

$$y_p' = c'(x) \cdot x^2 + c(x) \cdot 2x$$

$$c'(x) \cdot x^2 + \cancel{c(x) \cdot 2x} - \frac{2}{\cancel{x}} \cdot \cancel{c(x)} \cdot x^{\cancel{2}} = -1$$

$$c'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$c(x) = \frac{1}{x} + \underset{0}{c_1} = \frac{1}{x} \Rightarrow y_p = x$$

III Scriem soluția finală $y = y_0 + y_p$

$$y = c \cdot x^2 + x, \quad c \in \mathbb{R}$$

b) $y'' + 4y' + 5y = 2 \cdot e^{-x}$

I Rez ec omogenă

$y'' + 4y' + 5y = 0$

scriem ec carac

$r^2 + 4r + 5 = 0$

$\Delta = 16 - 20 = -4$

$\sqrt{\Delta} = 2i$

$\frac{-4+2i}{2} = -2+i$

$\frac{-4-2i}{2} = -2-i$

$\alpha = -2$

$\beta = 1$

$y_0 = c_1 e^{-2x} \cos x + c_2 e^{-2x} \sin x$

II Det a sol part

Cazul II $\to$ a) $\Rightarrow$ $y_p = e^{-x} \cdot a$

$y_p' = -a \cdot e^{-x}$

$y_p'' = a \cdot e^{-x}$

$\cancel{e^{-x}}(a - 4a + 5a) = 2 \cdot \cancel{e^{-x}}$

$2a = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow y_p = e^{-x}$

III Scriem soluția finală $y = y_0 + y_p$

$= c_1 e^{-2x} \cos x + c_2 e^{-2x} \sin x + e^{-x}$

4) $\begin{cases} (3x-1)\cdot y'' - 3\cdot y' = -3 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = \frac{3}{2} \end{cases}$ $\quad z = y'$, $\quad z' = y''$

I Rez ec omogenă

$(3x-1)\cdot z' - 3z = 0$

$\frac{dz}{z} = \frac{3}{3x-1}\, dx$

$\ln|z| = \ln|3x-1| + \ln c_1$

$|z| = C_1 (3x-1)$

$z_0 = C(3x-1),\ C \in \mathbb{R}$

II ~~Rez~~ Det o sol part

$z_p = C(x)(3x-1)$

$z_p' = C'(x)(3x-1) + C(x)\cdot 3$

$(3x-1)^2 C'(x) + \cancel{3(3x-1)C(x)} - \cancel{3C(x)(3x-1)} = -3$

$C'(x) = \frac{-3}{(3x-1)^2} \quad | \int$

$C(x) = \frac{1}{3x-1} + \underset{0}{C_1} \Rightarrow z_p = 1$

III Scriem soluția finală $z = z_0 + z_p$

$z = C(3x-1) + 1$

$y = C\cdot\frac{3}{2}\cdot x^2 - C\cdot x + x + C_1$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ \frac{3}{2}c - c + 1 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\frac{3}{2}c - c = \frac{3}{2} - 1$$

$$c\left(\cancel{\frac{3}{2} - 1}\right) = \cancel{\frac{3}{2} - 1}$$

$$c = 1$$

$$y(x) = \frac{3x^2}{2}$$

$x_0 = 0 \quad y_0 = 1$
$x_1 = 0.1 \quad y_1 = 1$
$x_2 = 0.2 \quad y_2 = 1{,}01$
$x_3 = 0.3 \quad y_3 = 1{,}0302$

5) $$\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$[0,1]$

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n) \cdot h = y_n + x_n y_n h$$

$h = 0{,}1 \quad N = 10$

$$y_1 = y_0 + x_0 y_0 h = 1$$

$$y_2 = y_1 + x_1 y_1 h = 1 + 0{,}01 = 1{,}01$$

$$y_3 = y_2 + x_2 y_2 h = 1{,}01 + 0{,}2 \cdot 1{,}01 \cdot 0{,}1$$
$$= 1{,}01 + 0{,}0202$$
$$= 1{,}0302$$

6) $$\begin{cases} x' = y^3 - x \\ y' = x^3 - y \end{cases}$$

a) $$\begin{cases} y^3 - x = 0 \\ x^3 - y = 0 \Rightarrow y = x^3 \end{cases} \Rightarrow x^9 - x = 0$$

$$x(x^8 - 1) = 0$$

$$x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = 0$$

$x_1^*(0,0)$, $x_2^*(1,1)$, $x_3^*(-1,-1)$ pct de echilibru

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3y^2 \\ 3x^2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\underline{I}$ $(0,0) \Rightarrow J_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A$

$\det(\lambda I_2 - A) = 0$ $\quad \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$

$(\lambda+1)^2 = 0$ pct de echilibru asimptotic

$\lambda = -1$ stabil de tip nod

$\underline{II}$ $(1,1) \Rightarrow J_f \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = A$

$\det(\lambda I_2 - A) = 0$ $\quad \begin{vmatrix} \lambda+1 & -3 \\ -3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$

$(\lambda+1)^2 - 9 = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda \cancel{+} - 8 = 0$

$\Delta = 4 + 32 = 36 \quad \sqrt{\Delta} = 6 \begin{cases} \frac{-2+6}{2} = 2 \\ \frac{-2-6}{2} = -4 \end{cases}$

pct de echilibru instabil de tip șa

$\underline{III}$ $(-1,-1) \Rightarrow J_f \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = A$

analog $\underline{II}$ $\Rightarrow$ pct de echilibru instabil de tip șa

Subiectul 9

1) $\begin{cases} x'(t) = r_0 x\left(1 - \frac{x}{K}\right) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

numerea de

a) Determinați soluția modelului

b) pentru $r_0 > 0$ calculați $\lim_{t \to \infty} x(t)$

2. Definiți punct de echilibru asimpt. stabil pt. un sistem de ec. autonome.

3. Soluțiile pt:

a) $(\cos x)^2 y' - y = e^{\operatorname{tg} x}$

b) $y'' - 4y' + 8y = 8x^2 - 2$

4. $\begin{cases} y_1' = y_1 - 5y_2 \\ y_2' = 2y_1 - y_2 \end{cases}$ sol. generale.

5. $\begin{cases} y' = 2x + y \\ y(0) = 1 \\ h = 0.1 \end{cases}$ → Euler ⇒ calculați primele 3 valori aproximative a soluției pe intervalul $[0,1]$

6) $x'(t) = x - x^3$

a) Determinați punctele de echil + stabilitatea lor

b) portretul fazic.

9.JPG

3)

a) $\cos^2 x \cdot y' - y = e^{tg\, x}$

I Rez ec omogenă

$\cos^2 x \cdot y' = y$

$\frac{1}{y} dy = \frac{1}{\cos^2 x} dx$

$\ln|y| = tg\, x + c_1$

$y_0 = c \cdot e^{tg\, x}$; $c \in \mathbb{R}$

II Det sol part

$y_p = c(x) \cdot e^{tg\, x}$

$y_p' = c'(x) \cdot e^{tg\, x} + c(x) \cdot e^{tg\, x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$

$c'(x) \cdot \cancel{e^{tg}} \cdot \cos^2 x + \cancel{c(x) \cdot e^{tg\, x}} - \cancel{c(x) \cdot e^{tg\, x}} = \cancel{e^{tg\, x}}$

$c'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

$c(x) = tg\, x + \underset{0}{c_1} \Rightarrow y_p = tg \cdot e^{tg}$

III Scriem sol finală

$y = c \cdot e^{tg\, x} + tg\, x \cdot e^{tg\, x}$, $c \in \mathbb{R}$

b) $y'' - 4y' + 8y = 8x^2 - 2$

I Rez ec omogenă

$y'' - 4y' + 8y = 0$ scriem ec carac $r^2 - 4r + 8 = 0$

~~II~~ ~~A~~

$\Delta = 16 - 32 = -16$

$\sqrt{\Delta} = 4i \quad \left[\begin{array}{l} 2+2i \\ 2-2i \end{array} \right. \Rightarrow y_0 = c_1 e^{2x}\cos 2x + c_2 e^{2x}\sin 2x$

II Det o sol particulară

Caz I - a) $\Rightarrow y_p = ax^2+bx+c$

$y_p' = 2ax+b$

$y_p'' = 2a$

$2a - 8ax - \cancel{4}4b + 8ax^2 + 8bx + 8c = 8x^2 - 2$

$a = 1 \qquad x(8b-8a) = 0$

$b = 1 \qquad 2a - 4b + 8c = -2$

$c = 0 \qquad 2 - 4 + 8c = -2$

$y_p = x^2 + x$

III Scriem sol finală

$y = y_0 + y_p \Rightarrow y = c_1 e^{2x}\cos 2x + c_2 e^{2x}\sin 2x + x^2 + x$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

4) $\begin{cases} y_1' = y_1 - 5y_2 = \\ y_2' = 2y_1 - y_2 \Rightarrow \dfrac{y_2' + y_2}{2} = y_1 \end{cases}$

$y_1' = \dfrac{y_2'' + y_2'}{2} \Rightarrow y_2'' + \cancel{y_2'} = \cancel{y_2'} + y_2 - 5y_2$

$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i$

$\Rightarrow y_2 = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

$y_2' = -2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x$

$$y_1 = \frac{2c_2 \cos 2x - 2c_1 \sin 2x + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x}{2}$$

$$y_1 = \frac{\cos 2x\,(2c_2 + c_1) + \sin 2x\,(c_2 - 2c_1)}{2}$$

$$\frac{y_2'' + y_2'}{2} = \frac{y_2' + y_2}{2} - 5y_2$$

$y_2'' + \cancel{y_2'} = \cancel{y_2'} + y_2 - 10y_2$

$y_2'' + 9y_2 = 0$

$r^2 + 9 = 0$ $\quad r = \pm 3i \Rightarrow y_2 = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$

$\Rightarrow y_2' = -3c_1 \sin 3x + 3c_2 \cos 3x$

$$y_1 = \frac{3c_2 \cos 3x - 3c_1 \sin 3x + c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x}{2}$$

$$y_1 = \frac{\cos 3x\,(3c_2 + c_1) + \sin 3x\,(c_2 - 3c_1)}{2}$$

5) $\begin{cases} y' = 2x + y \\ y(0) = 1 \\ h = 0.1 \end{cases}$ $\quad h = 0.1$

$[0,1]$

$N = 10$

$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n) \cdot h$

$y_{n+1} = y_n + (2x_n + y_n) \cdot h$

$y_{m+1} = y_m + (2x_m + y_m)\cdot h$

$x_0 = 0 \quad y_0 = 1$

$x_1 = 0.1 \quad y_1 = 1{,}1$

$x_2 = 0.2 \quad y_2 = 1{,}23$

$x_3 = 0.3 \quad y_3 = 1{,}393$

$m = 0 \ ; h = 0.1$

$y_1 = y_0 + (2x_0 + y_0)\cdot h$

$y_1 = 1 + (0 + 1)\cdot 0{,}1$

$y_1 = 1{,}1$

$m = 1$

$y_2 = y_1 + (2x_1 + y_1)\cdot h$

$= 1{,}1 + (0{,}2 + 1{,}1)\cdot 0{,}1$

$= 1{,}1 + 1{,}3 \cdot 0{,}1$

$= 1{,}1 + 0{,}13$

$= 1{,}23$

$m = 2$

$y_3 = y_2 + (2x_2 + y_2)\cdot h$

$= 1{,}23 + (0{,}4 + 1{,}23)\cdot 0{,}1$

$= 1{,}23 + 1{,}63 \cdot 0{,}1$

$= 1{,}23 + 0{,}163$

$= 1{,}393$

6) $x' = x - x^3$

a) $x - x^3 = 0 \Rightarrow x(1 - x^2) = 0$

$x(1-x)(1+x) = 0$ — $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = -1$

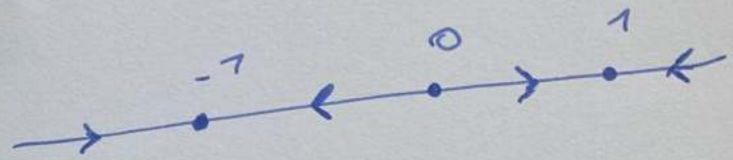
$f' = (x - x^3)' = 1 - 3x^2$

$f'(0) = 1 > 0 \Rightarrow$ instabil | $f'(1) = -2 < 0$ stabil | $f'(-1) = -2 < 0$ stabil

41

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
		$\longrightarrow$		$\longleftarrow$		$\longrightarrow$		$\longleftarrow$	

$x - x^3$



$f'(x) = 1 - 3x^2$

SUBIECT SD - gr. 214

Subiectul 10

① $\begin{cases} x'(t) = r_0 x\left(1 - \frac{x}{k}\right) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

a) soluția modelului

b) $r_0 > 0$, $\lim_{t \to \infty} x(t) = ?$ Concluzie.

② Definiți punctul de echilibru pentru un sistem planar.

③ a) $y' \sin(x) + 2y \cos(x) = 1$

b) $y'' - 4y' + 6y = 12x + 16$

④ $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} y' = 2x^2 + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ → sistemul lui Euler. Să scriem nu știu ce a lui Euler și să calculăm primele 3 valori.

⑥ $x'(t) = 2x - x^3$

a) Punctele de echilibru, stabilitatea.

b) Portretul fazic.

10.JPG

3) a) $y' \sin x + 2y \cos x = 1$

I Rez ec omogenă

$y' \sin x + 2y \cos x = 0$

$\frac{1}{y} dy = -2 \operatorname{ctg} x \, dx$

$\ln|y| = -2 \ln|\sin x| + C_1$

$y = \frac{C}{\sin^2 x}$

II Det o sol part

$y_p = \frac{C(x)}{\sin^2 x}$

$y_p' = C'(x) \frac{1}{\sin^2 x} + C(x) \cdot \frac{0 - 2 \sin x \cos x}{\sin^{3} x}$

$\frac{C'(x)}{\sin x} + \cancel{C(x) \cdot \frac{-2 \cos x \cdot \sin x}{\sin^3 x}} + \cancel{\frac{2 \cos x \, C(x)}{\sin^2 x}} = 1$

$C'(x) = \sin x$

$C(x) = -\cos x + C_0 \Rightarrow y_p = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$

III Scriem sol finală

$y = y_0 + y_p = \frac{C}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \quad C \in \mathbb{R}$

b) $y'' - 4y' + 6y = 12x + 16$

I Rez ec omogenă

$y'' - 4y' + 6y = 0$

scriem ec carac

$r^2 - 4r + 6 = 0$

$\Delta = 16 - 24 = -8 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2i\sqrt{2} <^{2+i\sqrt{2}}_{2-i\sqrt{2}}$

$y_0 = c_1 e^{2x} \cos(x\sqrt{2}) + c_2 e^{2x} \sin(x\sqrt{2})$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

II Det o sol part

$f(x) = 12x + 16$

Cazul I → a) $\Rightarrow y_p = ax + b$

$y_p' = a$

$y_p'' = 0$

$-4a + 6ax + 6b = 12x + 16$

$\begin{cases} 6a = 12 \Rightarrow a = 2 \\ 6b - 4a = 16 \Rightarrow b = 4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 \Rightarrow y_2 = 2y_1 - y_1' \\ \qquad\qquad\qquad\quad y_2' = 2y_1' - y_1'' \\ y_2' = y_1 + 2y_2 \end{cases}$

$\sqrt{\Delta} = 2i <^{2+i}_{2-i}$

$2y_1' - y_1'' = y_1 + 4y_1 - 2y_1'$

$y_1'' - 4y_1' + 5y_1 = 0 \Rightarrow y_1 = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \sin x$

$\Delta = 16 - 20 = -4$ $\cancel{y_1' = 2c_1 e}$

$y_1' = 2c_1 e^{2x}\cos x - c_1 e^{2x}\sin x + 2c_2 e^{2x}\sin x$
$+ c_2 e^{2x}\cos x$

$y_2 = 2c_1 \cancel{e^{2x}}\cos x + 2c_2 \cancel{e^{2x}}\sin x - 2c_1 \cancel{e^{2x}}\cos x +$
$c_1 e^{2x}\sin x - 2c_2 \cancel{e^{2x}}\sin x - c_2 e^{2x}\cos x$

$y_2 = c_1 e^{2x}\sin x - c_2 e^{2x}\cos x$

5) $\begin{cases} y' = 2x^2 + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ Euler

$h = 0.1$

$x_0 = 0 \quad y_0 = 1$
$x_1 = 0.1 \quad y_1 = 1{,}1$
$x_2 = 0.2 \quad y_2 = 1{,}212$
$x_3 = 0.3 \quad y_3 = 1{,}3412$

$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)\cdot h$

$y_{n+1} = y_n + (2x_n^2 + y_n)\cdot h$

$n = 0$

$y_1 = y_0 + (2x_0^2 + y_0)\cdot h$
$= 1 + (0 + 1)\cdot 0{,}1$
$= 1{,}1$

$n = 1$

$y_2 = y_1 + (2x_1^2 + y_1)\cdot h$
$= 1{,}1 + (0{,}02 + 1{,}1)\cdot 0{,}1$
$= 1{,}1 + 1{,}12\cdot 0{,}1$
$= 1{,}212$

$n = 3$

$y_3 = y_2 + (2x_2^2 + y_2)\cdot h$
$= 1{,}212 + (0{,}08 + 1{,}212)\cdot 0{,}1$
$= 1{,}212 + 1{,}292\cdot 0{,}1$
$= 1{,}212 + 0{,}1292$
$= 1{,}3412$

6) $x' = 2x - x^3$

a) $2x - x^3 = 0$

$x(2 - x^2) = 0$

$x(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x) = 0 \Rightarrow x_1^* = 0, \quad x_2^* = \sqrt{2}, \quad x_3^* = -\sqrt{2}$ - pct de echil

$f' = (2x - x^3)' = 2 - 3x^2$

$f'(0) = 2 > 0$ - instabil

$f'(\sqrt{2}) = -4 < 0$ - stabil

$f'(-\sqrt{2}) = -4 < 0$ - stabil

b)

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$ $\longrightarrow$	0	$-$ $\longleftarrow$	0	$+$ $\longrightarrow$	0	$-$ $\longleftarrow$	

- portret fazic

4)