Seminar 2

① Calculați limita șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pentru:

a) $x_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\,(n+1-n)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}\left(1+\underbrace{\sqrt{1+\cancel{\tfrac{1}{n}}}}_{1}\right)} = \frac{1}{2}.$$

b) $x_n = \dfrac{n+\sin n}{n+\cos n}$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\sin n}{n+\cos n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\left(1+\frac{\sin n}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{\cos n}{n}\right)}.$$

Vom arăta că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$.

* Criteriul majorării pt. șiruri convergente:

Dacă (x_n) e un șir de nr. reale și $\exists x\in\mathbb{R}$ ~~a.î.~~ și șirul (α_n) a.î. $|x_n - x| \le \alpha_n$, $\forall n$ cu $\alpha_n \to 0$, atunci $x_n \to x$.

În particular, dacă $|x_n| \le \alpha_n$ și $\alpha_n \to 0$, $\forall n \Rightarrow x_n \to 0$.

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right| \le \frac{1}{|n|} = \frac{1}{n} \to 0, \text{ deci } \frac{\sin n}{n} \to 0.$$

Analog $\dfrac{\cos n}{n} \to 0$

$\Rightarrow l = 1.$

c) $x_n = \frac{(\sqrt{2}+1)^n}{(\sqrt{2})^n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{2}+1)^n}{(\sqrt{2})^n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{2}+1)^n}{(\sqrt{2})^n\left[1+\underbrace{\frac{1}{(\sqrt{2})^n}}_{\to 0}\right]} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \Big(\underbrace{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}_{>1}\Big)^n = +\infty.$$

② Justificați cu definiția valoarea limitelor:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$

Șirul (x_n), $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ are limita 0 dacă

$\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0 : |x_n - 0| < \varepsilon$
$\Updownarrow$
$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| < \varepsilon.$

Fie $\varepsilon>0$ arbitrar. Căutăm n_0.

$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2}$, deci $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon^2}.$

$\left[[x] \leq x < [x] + 1. \right]$

Verificăm.

Pt. $\varepsilon>0$ arbitrar ales, $\exists n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1$ a.î. $\forall n \geq n_0 : \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| < \varepsilon.$

$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$

$n \geq n_0 \Rightarrow$
$\sqrt{n} \geq \sqrt{n_0} \Rightarrow$
$\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n_0}}$

$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| < \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon.$

$n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$
$\Downarrow$
$\sqrt{n_0} > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}} = \frac{1}{\varepsilon}$
$\Downarrow$
$\frac{1}{\sqrt{n_0}} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$

ε a fost ales arbitrar $\Rightarrow$ afirmația are loc pt. $\forall \varepsilon>0 \Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty.$

Șirul (x_n), $x_n = \frac{n^2}{n+1}$ are limita ∞ dacă

$\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0 : x_n > \varepsilon.$

Fie $\varepsilon>0$ arbitrar ales. Căutăm n_0 a.î. $x_n > \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$.

$\Leftrightarrow \frac{n^2}{n+1} > \varepsilon.$

(*)

$n^2 > \varepsilon n + \varepsilon$

$n^2 - \varepsilon n - \varepsilon > 0$

$\Delta = \varepsilon^2 + 4\varepsilon > 0$

$n_1 = \dfrac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\varepsilon}}{2}$

$n_2 = \dfrac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 + 4\varepsilon}}{2}$

n	$-\infty$	n_2		n_1	∞
$n^2 - \varepsilon n - \varepsilon$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow n \in \left(\dfrac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\varepsilon}}{2}, +\infty\right)$

Putem lua $n_0 = \left[\dfrac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\varepsilon}}{2}\right] + 1 > \dfrac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\varepsilon}}{2}$,

deci $n_0^2 - \varepsilon n_0 - \varepsilon > 0 \Rightarrow$

Verificăm: $\dfrac{n_0^2}{n_0 + 1} > \varepsilon$.

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar ales. Atunci $\exists n_0 = \left[\dfrac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\varepsilon}}{2}\right] + 1 > \dfrac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\varepsilon}}{2}$ a.î. $\forall n \geq n_0$

$x_n = \dfrac{n^2}{n+1} > \dfrac{n_0^2}{n_0 + 1} > \varepsilon.$

Cum ε a fost ales arbitrar $\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$.

③ Studiați convergența șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și calculați limita sa acolo unde e posibil (metode: monotonie și mărginire, criteriul cleștelui, subșiruri, șir fundamental).

a) $x_n = a^n$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = a.$$

• $\boxed{a=1,\ a=0 \Rightarrow \text{șirurile constante } 1 \text{ și } 0.}$

• $a<1 \Rightarrow$ șir descresc.

• $a>1 \Rightarrow$ șir cresc.

Cazul 1: $\boxed{a>1.}$

Fie $\varepsilon>0$ arbitrar ales. Avem de arătat că $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0$,

$$a^n > \varepsilon.$$

Căutăm n_0.

$$a^n > \varepsilon \Leftrightarrow \ln a^n > \ln \varepsilon \Leftrightarrow n \ln a > \ln \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln a}.$$

Deci, $n_0 = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln a}\right] + 1.$

Verificăm: Pt. ~~n_0~~ ε arbitrar ales, $\exists n_0 = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln a}\right] + 1 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$

$$\underline{x_n} = a^n \geq a^{n_\varepsilon} = a^{\left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln a}\right]+1} \underline{>} a^{\frac{\ln \varepsilon}{\ln a}} = e^{\ln a^{\frac{\ln \varepsilon}{\ln a}}} = e^{\frac{\ln \varepsilon}{\ln a} \cdot \ln a} =$$

$$= e^{\ln \varepsilon} = \underline{\varepsilon}.$$

ε arbitrar $\Rightarrow$ prop. are loc pentru orice $\varepsilon>0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$, $a>1$.

Cazul 2: $\boxed{a \leq -1}$

$$x_{2n} = a^{2n} = (a^2)^n \quad \lim_{n\to\infty} x_{2n} = \begin{cases} +\infty, & a<-1 \\ 1, & a=-1 \end{cases}$$

$$x_{2n+1} = a^{2n+1} = a \cdot (a^2)^n \quad \lim_{n\to\infty} x_{2n} = \begin{cases} a\cdot\infty = -\infty, & a<-1 \\ a\cdot 1 = -1, & a=-1. \end{cases}$$

Cazul 3: $\boxed{a\in(-1,1),\ a\neq 0}$

Vom arăta că $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=0. \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}$ a.î. $|a^n-0|<\varepsilon \Leftrightarrow$
$|a^n|<\varepsilon.$

Căutăm n_0.

Fie $\varepsilon>0$ arbitrar ales.

$$|a^n|=|a|^n \overset{a\neq 0}{\Rightarrow} |a|^n<\varepsilon \Leftrightarrow \ln|a|^n<\ln\varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|a|}$$

$\ln|a|<0$

$$\to n_0=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|a|}\right]+1.$$

Verificăm: Pt. ε arb. ales, $\varepsilon>0$, $\exists n_0=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|a|}\right]+1$ a.î. $\forall n\geq n_0$
$\Downarrow |a|<1$
$|a|^n\leq |a|^{n_0}$

$$|a^n|=|a|^n\leq |a|^{n_0}=|a|^{\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|a|}\right]+1}\underset{|a|<1}{\leq}|a|^{\frac{\ln\varepsilon}{\ln|a|}}=$$

$$=e^{\ln|a|^{\frac{\ln\varepsilon}{\ln|a|}}}=e^{\frac{\ln\varepsilon}{\ln|a|}\cdot\ln|a|}=e^{\ln\varepsilon}=\varepsilon.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=0.$

$$\text{Așadar, } \lim_{n\to\infty} a^n=\begin{cases} +\infty, & a>1\\ 1, & a=1\\ 0, & a\in(-1,1)\\ \nexists, & a\leq -1.\end{cases}$$

b) $x_n=\frac{2^n}{n!}$

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}=\frac{2^n}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}=\frac{n+1}{2}\geq 1,\ n\geq 1,\text{ deci } x_n\geq x_{n+1}\Rightarrow$$

șir descrescător.

E mărg. superior de $x_1=2$ și fiind pozitiv, inferior de 0,

deci e convergent.

Vom arăta prin inducție că $\frac{2^n}{n!}<\frac{1}{n}$, $\forall n\geq 6.$ $\Leftrightarrow$

$P(1)$: $2^6<5! \Leftrightarrow 64<120$, „A". $\quad 2^n<\frac{n!}{n}=(n-1)!$

Pp. $P(k)$ adev, k arbitrar, $k \geq 6$ și dem. că $P(k+1)$ adev.

$$2^k < (k-1)!$$

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 < (k-1)! \cdot 2 \underset{k\geq 6}{<} (k-1)! \cdot k = k!$$

Deci, conform Princ. Ind. Matem., $P(n)$ adev., $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$.

$$0 < x_n < \frac{1}{n}$$

$$\searrow \quad 0 \quad \swarrow$$

$$\overset{\text{Crit. clestelui}}{\Longrightarrow} \quad x_n \to 0.$$

c) $x_n = \sqrt[n]{n}$.

$$l = \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}. \text{ Logaritmăm:}$$

$$\ln l = \frac{1}{n} \cdot \ln n = \frac{\ln n}{n}.$$

Fie șirul $y_n = \dfrac{\ln n}{n}$.

Metoda 2 (cu def.). Vom arăta că $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0$: $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$.
Fie $\varepsilon > 0$ arb. Atunci, $\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$
$\sqrt[n]{n} > 1$. Deci $a_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$.
$\sqrt[n]{n} = 1 + a_n \Rightarrow n = (1+a_n)^n =$
$= 1 + n \cdot a_n + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 + \dots + a_n^n \Rightarrow$
$n > \frac{n(n-1)}{2} \cdot a_n^2 \Leftrightarrow 0 < a_n^2 < \frac{2}{n-1} \Leftrightarrow$
$0 < |a_n| < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \Leftrightarrow$

Aplicăm Teorema Stolz-Cesaro. Dacă

Fie $(a_n)_{n \geq m}$, $(b_n)_{n \geq m}$ 2 șiruri de nr. reale.

(i) șirul (b_n) e strict monoton și nemărginit;

~~(ii) ...~~

(ii) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$.

$0 < |\sqrt[n]{n} - 1| < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$, $\forall n \geq 2$.
Cum $\sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0$, avem că
$\left|\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right| < \varepsilon$, deci $\forall \varepsilon > 0$,
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0$, $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$,
deci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

În cazul nostru: $(a_n)_{n\geq 1}$ $a_n = \ln n$, $(b_n)_{n \geq 1}$ $b_n = n$.

$\sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n-1} < \varepsilon^2 \Leftrightarrow n-1 > \frac{2}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$
$n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon^2} + 1\right] + 1$.

(i) $b_n = n$ e strict cresc. și nemărginit.

(ii) $b_n = n \neq 0$, $\forall n \geq 1$.

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+1)-\ln n}{n+1-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \ln 1 = 0$

Deci, $y_n \to 0$, $\ln l = 0 \Rightarrow l = 1$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

d) $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Vom arăta că șirul e convergent.

*monotonia

Folosim inegalitatea mediilor $A \geq G$, u.:

A= media aritmetică, G= media geometrică pt. $a_1, \dots, a_n \geq 0$:

$\dfrac{a_1+\dots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$, egalitate dacă $a_1 = \dots = a_n$.

Luăm nr. $1, \underbrace{1+\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}+1}_{n \text{ ori}}$ $\Rightarrow$

$\dfrac{1+\overbrace{\left(\frac{1}{n}+1\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}+1\right)}^{n \text{ ori}}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \Rightarrow$

$\dfrac{1+n\cdot\frac{n+1}{n}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \Rightarrow \dfrac{n+2}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow$ 3.

$x_{n+1} \geq x_n$. $\Rightarrow$ șir crescător. (1)

*mărginirea

* Cum (x_n) e strict crescător $\Rightarrow x_1 \leq x_n$, $\forall n \geq 1$.

$x_1 = (1+1)^1 = 2$

$\Rightarrow x_n \geq 2$, $\forall n \geq 1$.

Vom arăta că $x_n < 3$, $\forall n \geq 1$.

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{\text{lui Newton}}{\overset{\text{binomul}}{=}} 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{1}{n^n}$.

$\dfrac{C_n^k}{n^k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!\cdot n^k} = \dfrac{\overbrace{(n-k+1)\cdot\ldots\cdot n}^{k \text{ nr.}}}{k!\cdot n^k} = \dfrac{1}{k!}\cdot\dfrac{n-k+1}{n}\cdot\dfrac{n-k+2}{n}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n}{n}$

$< \dfrac{1}{k!}\cdot\dfrac{n}{n}\cdot\dfrac{n}{n}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n}{n} = \dfrac{1}{k!}$.

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{k!}+\dots+\frac{1}{n!}$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$ avem că $k! \geq 2^{k-1}$ (inducție),

deci $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$.

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\underbrace{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}}_{\text{p.g. cu } q=\frac{1}{2}} = 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} =$$

$$= 1+2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1+2-\frac{1}{2^{n-1}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

Deci $x_n \in [2,3)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și e mărginit. (2)

$\overset{(1),(2)}{\Longrightarrow}$ (x_n) e convergent, cu bine-cunoscuta limită „e".

e) $x_n = 1+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{n!}$

$x_{n+1}-x_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \Rightarrow$ șir crescător. (1)

Am arătat înainte că $1+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3$.

Așadar (x_n) e mărg. inf. de $x_1=2$ și sup. de 3 (2)

$\overset{(1),(2)}{\Longrightarrow}$ (x_n) convergent.

Tot la d), am arătat că $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq x_n \Rightarrow \boxed{e \leq x_n. \ (*)}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{C_n^1}{n}+\frac{C_n^2}{n^2}+\dots+\frac{C_n^k}{n^k}+\dots+\frac{C_n^n}{n^n} > 1+\frac{C_n^1}{n}+\dots+\frac{C_n^k}{n^k} =$$

$$= 1+\frac{n!}{(n-1)!\cdot n}+\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!\cdot n^2}+\dots+\frac{n!}{k!(n-k)!\cdot n^k} = 1+1+\frac{\cancel{n}(n-1)}{2!\cdot n^{\cancel{2}}}+\dots+\frac{\cancel{n}(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!\cdot n^{\cancel{k}}}$$

$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$

Trecând la $\lim\limits_{n\to\infty}$ avem:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\dots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right] \Rightarrow$

$e \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} \rightarrow \boxed{e \geq x_k \ (**)}$

$\overset{(*)}{\underset{(**)}{\Longrightarrow}}$ $x_n \to e$ când $n \to \infty$.

f) $x_n = \frac{\sin(1!)}{1\cdot 2} + \frac{\sin(2!)}{2\cdot 3} + \dots + \frac{\sin(n!)}{n(n+1)}$

Un şir (x_n) de nr. reale s.n. fundamental dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, a.î. $\forall n \geq n_0$, $\forall p \in \mathbb{N}$: $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Un şir e convergent $\Leftrightarrow$ e fundamental.

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar ales.

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\frac{\sin(1!)}{1\cdot 2} + \dots + \frac{\sin(n!)}{n(n+1)} + \frac{\sin((n+1)!)}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{\sin((n+p)!)}{(n+p)(n+p+1)} - \frac{\sin(1!)}{1\cdot 2} - \dots - \frac{\sin(n!)}{n(n+1)}\right| =$$

$$= \left|\frac{\sin((n+1)!)}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{\sin((n+p)!)}{(n+p)(n+p+1)}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{\sin((n+1)!)}{(n+1)(n+2)}\right| + \dots + \left|\frac{\sin((n+p)!)}{(n+p)(n+p+1)}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} = \frac{1}{n+1} - \cancel{\frac{1}{n+2}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n+p}} - \frac{1}{n+p+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Cum şirul cu termenul general $\frac{1}{n+1}$ e convergent la 0, avem că $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0$: $\left|\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon$, deci $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

În concluzie x_n e fundamental, deci convergent.

g) $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$, $x_1 > 0$.

Pt. șirurile recurente, la început trecem abuziv la limită în relația de recurență.

1) Dacă $\nexists$ soluții, șirul e divergent (+ DEMONSTRAȚIE!)

2) Dacă $\exists$ soluții, în cazul în care șirul e convergent, limita sa e obligatoriu una dintre aceste soluții.

3) Limita ne ajută de obicei la mărginire.

$l = \frac{l}{2} + \frac{1}{l} \quad | \cdot 2l \qquad 2l^2 - l^2 - 2 = 0$

~~$l^2 - 2l = 0 \Rightarrow l = 0$, nu se poate~~

~~$l = 2.$~~

$l^2 = 2 \Rightarrow l = \pm\sqrt{2}.$

Evident $x_n > 0$, deoarece $x_1 > 0$ și $x_n = \frac{x_{n-1}}{2} + \frac{1}{x_{n-1}}$.

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{x_n} - \frac{x_n}{2} = \frac{2 - x_n^2}{2x_n} = \frac{(\sqrt{2} - x_n)(\sqrt{2} + x_n)}{2x_n} \quad (1)$$

$$x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} - \sqrt{2} = \frac{x_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}x_n}{2x_n} =$$

$$\frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n} > 0 \Rightarrow x_{n+1} > \sqrt{2} \text{ și implicit și } x_n > \sqrt{2}$$

$\Rightarrow x_{n+1} - x_n < 0$, deci șirul e descrescător.

Cum (x_n) e mărg. sup. de 1 și inf. de 0 (are termenii pozitivi)

$\Rightarrow (x_n)$ convergent cu $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.

④ Determinați mulțimea punctelor limită, limita inferioară și limita superioară pt.:

a) $x_n = (-1)^n n \sin \frac{n\pi}{2}$.

* n - par, $n = 2k$

$x_{2k} = (-1)^{2k} \cdot 2k \cdot \sin \frac{2k\pi}{2} = (-1)^{2k} \cdot 2k \cdot \sin k\pi = 0$

* n - impar, $n = 2k+1$

$x_{2k+1} = (-1)^{2k+1} \cdot (2k+1) \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi}{2}$

$= \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

$k = 2m$: k-par $\to \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

k-impar $\to \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$, $k = 2m+1$

$x_{4m+1} = -(4m+1) \cdot 1 = -(4m+1) \xrightarrow[m\to\infty]{} -\infty$

$x_{4m+3} = -(4m+3) \cdot (-1) = 4m+3 \xrightarrow[m\to\infty]{} +\infty$

$Lim\, x_n = \{-\infty, 0, +\infty\}$ $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

b) $x_n = \left(1 + \frac{\cos(n\pi)}{n}\right)^n$

* n-par, $n = 2k$: $\cos 2k\pi = 1$ $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$, $n \to \infty$.

* n-impar, $n = 2k+1$: $\cos(2k+1)\pi = -1$ $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \underset{[1^\infty]}{=} e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n} - 1\right)\cdot n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n}{n}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$Lim\, x_n = \{\frac{1}{e}, e\}$ $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{e}$; $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = e$.