Seminarul 6

1. Într-un joc, se aruncă trei monede. Un jucător câștigă 1 euro pentru fiecare apariție a unui cap și pierde 8 euro în cazul apariției a trei pajuri. Calculați pentru suma de bani a jucătorului: funcția de repartiție, valoarea medie și deviația standard.

2. Un jucător de darts ocheşte discul roşu (denumit "bullseye") cu centrul în centrul ţintei şi diametru 1 cm. La o aruncare, distanţa dintre centrul ţintei şi punctul nimerit de săgeata jucătorului urmează distribuţia uniformă pe intervalul $[a, b]$, unde $0 \leq a < b$, cu valoarea medie $\frac{3}{2}$ cm şi deviaţia standard $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm. Aruncările jucătorului sunt independente. Determinaţi:
a) probabilitatea ca jucătorul să nimerească discul roşu;
b) probabilitatea ca jucătorul să nimerească de 2 ori discul roşu din 10 aruncări.

Funcţia de densitate pentru distribuţia uniformă $Unif[a, b]$ este $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$.

3. Fie $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$ și Ω spațiul de selecție. Fie $(X_n)_n$ un şir de variabile aleatoare independente definite pe Ω, care au aceeaşi distribuţie ca X.
a) Fie, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, v.a. $Y_n(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } X_n(\omega) \leq 3 \\ 0, & \text{dacă } X_n(\omega) > 3 \end{cases}$, $\omega \in \Omega$.

Ce distribuţie are Y_n? Spre ce valoare converge a.s. şirul $\left(\frac{1}{n}(Y_1 + ... + Y_n)\right)_n$?
b) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, fie

$$Z_n : \Omega \to [0, 1] \qquad Z_n(\omega) = \frac{\#\{i \in \{1, \dots, n\} : X_i(\omega) \leq 3\}}{n}.$$

Ce relație avem între $Y_1 + ... + Y_n$ și Z_n? Folosind a), determinați limita a.s. pentru $(Z_n)_n$.

4. Durata (în minute) a unei plăţi pentru o factură la un ghişeu într-o bancă urmează distribuţia continuă $Unif[1, 3]$. Ştiind că duratele oricăror plăţi sunt independente, demonstraţi că:
i) media aritmetică a duratelor plăţilor a n facturi converge a.s. la 2 minute, când $n \to \infty$.
ii) media geometrică a duratelor plăţilor a n facturi converge a.s. la $\frac{3\sqrt{3}}{e}$ minute, când $n \to \infty$.
iii) media armonică a duratelor plăţilor a n facturi converge a.s. la $\frac{2}{\ln 3}$ minute, când $n \to \infty$.

5. Un computer este conectat la două imprimante: I_1 and I_2. Computerul trimite printarea unui document lui I_1 cu probabilitatea 0,4, respectiv lui I_2 cu probabilitatea 0,6. Ştiind că a fost aleasă imprimanta I_1, un poster $A2$ este printat în T_1 secunde, unde T_1 are distribuţia $Exp(\frac{1}{5})$. Ştiind că a fost aleasă imprimanta I_2, un poster $A2$ este printat în T_2 secunde, unde T_2 are distribuţia uniformă $Unif[4, 6]$. Un inginer solicită printarea unui poster A2 de pe computer.
a) Calculaţi probabilitatea ca timpul de printare a posterului să fie mai mică decât 5 secunde.
b) Calculaţi valoarea medie pentru timpul (în secunde) de printare a posterului.

6. Fie v.a. $U \sim Unif[1, 3]$. Să se calculeze $E(U^2)$. Folosind rezultatul obţinut, să se justifice de ce U^2 *nu* urmează distribuţia $Unif[1, 9]$!

7. Fie v.a. independente $U_1, U_2 \sim Unif[0, 3]$. Să se calculeze $V(U_1 + U_2)$. Folosind rezultatul obţinut, să se justifice de ce $U_1 + U_2$ *nu* urmează distribuţia $Unif[0, 6]$!

8. Timpii de funcţionare (în ore) a două baterii sunt două variabile aleatoare independente $X \sim Unif[0, 2]$ şi $Y \sim Exp(1)$. Fie $T = \min\{X, Y\}$ timpul de funcţionare a bateriilor legate în serie. Calculaţi: $P(X < 0{,}5)$, $P(T > 1)$, $P(T < 1|X \geq 1)$.

Seminarul 6

1. Într-un joc, se aruncă trei monede. Un jucător câștigă 1 euro pentru fiecare apariție a unui cap și pierde 8 euro în cazul apariției a trei pajuri. Calculați pentru suma de bani a jucătorului: funcția de repartiție, valoarea medie și deviația standard.

X ~ a suma de bani a jucatorului

$$X \sim \begin{pmatrix} -8 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

distributie de probabilitate

Functia de repartitie

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{\substack{i \in I \\ x_i \le x}} P(X = x_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ x_i \le X}}^{4} P(X = x_i) \qquad x_i \in \{-8, 1, 2, 3\}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -8 \\ \frac{1}{8}, & -8 \le x < 1 \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}, & 2 \le x < 3 \\ 1, & 3 \le x \end{cases}$$

$$E(X) = \sum_{i \in I} x_i P(X = x_i) = (-8) \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

varianta

$$E(X^2) = \sum_{i \in I} x_i^2 P(X = x_i) = (-8)^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} = 11$$

$V(x) = 11 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{43}{4}$

$Std(X) = \sqrt{V(x)} = \frac{\sqrt{43}}{2}$ deviație standard

și deviația standard.

2. Un jucător de darts ocheşte discul roşu (denumit "bullseye") cu centrul în centrul ţintei şi diametru 1 cm. La o aruncare, distanţa dintre centrul ţintei şi punctul nimerit de săgeata jucătorului urmează distribuţia uniformă pe intervalul $[a, b]$, unde $0 \leq a < b$, cu valoarea medie $\frac{3}{2}$ cm şi deviaţia standard $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm. Aruncările jucătorului sunt independente. Determinaţi:

a) probabilitatea ca jucătorul să nimerească discul roşu;

b) probabilitatea ca jucătorul să nimerească de 2 ori discul roşu din 10 aruncări.

Funcţia de densitate pentru distribuţia uniformă $Unif[a, b]$ este $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$.

$X \sim Unif[a,b] \quad 0 \leq a < b$

$E(X) = \frac{3}{2}$ cm, $Std(X) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm

a) $P(X \leq 0{,}5)$

$Unif[a,b]$ var. aleatoare continuă $\to$ funcție densitate

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [a,b] \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t\, f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\, dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\, dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{b^2 - ab + a^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{4(b^2 + ab + a^2) - 3(b^2 + 2ab + a^2)}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$Std(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} \frac{b+a}{2} = \frac{3}{2} \\ \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$P(X \le 0{,}5) = \int_{-\infty}^{0{,}5} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0{,}5} \frac{1}{3-0}\,dx = \frac{x}{3}\Big|_{0}^{0{,}5} = \frac{1}{6}$$

b) A : „jucatorul nimerește de 2 ori discul roșu din 10 aruncări"

$$P(A) = C_{10}^{2} p^2 (1-p)^2 = C_{10}^{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 = 45 \cdot \frac{5^8}{6^{10}}$$

$Y \sim Bino(10, p)$

3. Fie $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$ și Ω spațiul de selecție. Fie $(X_n)_n$ un şir de variabile aleatoare independente definite pe Ω, care au aceeaşi distribuţie ca X.

a) Fie, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, v.a. $Y_n(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } X_n(\omega) \le 3 \\ 0, & \text{dacă } X_n(\omega) > 3 \end{cases}$, $\omega \in \Omega$.

Ce distribuţie are Y_n? Spre ce valoare converge a.s. şirul $\left(\frac{1}{n}(Y_1 + \dots + Y_n)\right)_n$?

b) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, fie

$$Z_n : \Omega \to [0,1] \qquad Z_n(\omega) = \frac{\#\{i \in \{1,\dots,n\} : X_i(\omega) \le 3\}}{n}.$$

Ce relație avem între $Y_1 + \dots + Y_n$ și Z_n? Folosind a), determinați limita a.s. pentru $(Z_n)_n$.

a) $n \in \mathbb{N}^*$, v.a. (var aleatoare) $Y_n(\omega) = \begin{cases} 1, & X_n(\omega) \le 3 \\ 0, & X_n(\omega) > 3 \end{cases}$

↳ omega

$\omega \in \Omega$

Ce distribuție are Y_n?

$Y_n \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ $\quad Y_n \sim Bernoulli\,(P(X \le 3))$

$$\frac{1}{n}(Y_1 + \dots + Y_n) \xrightarrow{a.s.} ?$$

$$P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$$

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X$$

$$LTNM \Rightarrow \frac{1}{n}(X_1 + \dots + Y_n) \xrightarrow{a.s.} E(Y_1) = 0{,}6$$

b) $n \in \mathbb{N}^*$ → nr. de indici (cardinal)

$$Z_n : \Omega \to [0,1], \quad Z_n(\omega) = \frac{\#\{i \in \{1,\dots,n\} : X_i(\omega) \le 3\}}{n}$$

$$\frac{1}{n}(Y_1 + \dots + Y_n) = Z_n, \quad Z_n \xrightarrow{a.s.} 0{,}6$$

Ce relație avem între $Y_1 + ... + Y_n$ și Z_n? Folosind a), determinați limita a.s. pentru $(Z_n)_n$.

4. Durata (în minute) a unei plăţi pentru o factură la un ghişeu într-o bancă urmează distribuţia continuă $Unif[1, 3]$. Ştiind că duratele oricăror plăţi sunt independente, demonstraţi că:

i) media aritmetică a duratelor plăţilor a n facturi converge a.s. la 2 minute, când $n \to \infty$.

ii) media geometrică a duratelor plăţilor a n facturi converge a.s. la $\frac{3\sqrt{3}}{e}$ minute, când $n \to \infty$.

iii) media armonică a duratelor plăţilor a n facturi converge a.s. la $\frac{2}{\ln 3}$ minute, când $n \to \infty$.

X = v.a. durata unei plăți ptr. o factură

$X = Unif\,[1,3]$

$(X_n)_n$ cu distribuție $Unif\,[1,3]$, independente

i) $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \xrightarrow{a.s.} 2$ min, $n \to \infty$

$$E(X) = \frac{b+a}{2} = \frac{3+1}{2} = 2 \text{ minute}$$

LTNM (P16, pag 46) $\Rightarrow \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \xrightarrow{a.s.} E(X) = 2$ min.

ii) $\sqrt[n]{X_1 \cdot \dots \cdot X_n} \xrightarrow{a.s.} \frac{3\sqrt{3}}{e}$ minute, $n \to \infty$

$$\sqrt[n]{X_1 \cdot \dots \cdot X_n} = (X_1 \cdot \dots \cdot X_n)^{\frac{1}{n}} = e^{\ln (X_1 \cdots X_n)^{\frac{1}{n}}}$$

$$= e^{\frac{1}{n}(\ln X_1 + \dots + \ln X_n)}$$

$$E(\ln X) = \int_{-\infty}^{\infty} \ln x \, f(x)\, dx = \int_1^3 \frac{\ln x}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 x' \ln x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\, x \ln x \Big|_1^3 - \frac{1}{2}\, x \Big|_1^3$$

$$= \frac{3\ln 3}{2} - 1$$

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \xrightarrow{a.s.} e^{\frac{3\ln 3}{2}-1} = e^{\frac{3\ln 3}{2}} \cdot e^{-1} = \frac{3\sqrt{3}}{e}$$

$\hookrightarrow \ln\sqrt{3^3}$

LTNM

$(\ln x_n)_n$ indep, aceeași distribuție

c) $\dfrac{n}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}}$ → media armonică

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}} = \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)} \xrightarrow{a.s.} \frac{1}{\frac{\ln 3}{2}} = \frac{2}{\ln 3}$$

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \xrightarrow{a.s.} \frac{2}{\ln 3}$$

$$E\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^3 \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\ln x\Big|_1^3 = \frac{\ln 3}{2}.$$

iii) media armonică a duratelor plăţilor a n facturi converge a.s. la $\frac{2}{\ln 3}$ minute, când $n \to \infty$.

5. Un computer este conectat la două imprimante: I_1 and I_2. Computerul trimite printarea unui document lui I_1 cu probabilitatea 0,4, respectiv lui I_2 cu probabilitatea 0,6. Ştiind că a fost aleasă imprimanta I_1, un poster $A2$ este printat în T_1 secunde, unde T_1 are distribuţia $Exp(\frac{1}{5})$. Ştiind că a fost aleasă imprimanta I_2, un poster $A2$ este printat în T_2 secunde, unde T_2 are distribuţia uniformă $Unif[4,6]$. Un inginer solicită printarea unui poster A2 de pe computer.

a) Calculaţi probabilitatea ca timpul de printare a posterului să fie mai mică decât 5 secunde.

b) Calculaţi valoarea medie pentru timpul (în secunde) de printare a posterului.

A: „comp trimite doc. la I_1"

$P(A)=0,4$ $\qquad P(\overline{A})=0,6$

$T_1 = Exp\left(\frac{1}{5}\right)$, $\quad T_2 = Unif\,[4,6]$

T timpul de printare a unui poster A2.

a) $P(T \le 5) = P(T\le 5 \mid A)\cdot P(A) + P(T\le 5 \mid \overline{A})\cdot P(\overline{A})$

$= P(T_1 \le 5)\cdot P(A) + P(T_2 \le 5)\cdot P(\overline{A})$

$$P(T_1 \leq 5) = \int_{-\infty}^{5} f_{T_1}(x)\,dx$$

$$f_{T_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x}, & x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(T_1 \leq 5) = \int_0^5 \frac{1}{5} \cdot e^{-\frac{1}{5}x}\,dx$$

$$= -e^{-\frac{1}{5}x}\Big|_0^5 = -e^{-1} + e^0$$

$$= 1 - \frac{1}{e}$$

. . . . .

. . . . .

$$P(T \leq 5) \simeq 0{,}55$$