Seminarul 2

1. Un pachet cu 25 de componente electronice este livrat unui magazin. Înainte de a accepta pachetul, 6 componente alese aleator sunt testate. Dacă toate 6 îndeplinesc standardele specifice, atunci pachetul este acceptat. Altfel, pachetul este returnat. Știind că 4 din cele 25 de componente sunt defecte, care este probabilitatea ca pachetul să fie returnat?

2. 5 bile numerotate consecutiv de la 1 la 5 sunt aşezate orizontal în mod aleator. Determinaţi:
a) probabilitatea ca prima şi ultima bilă să aibă numere pare;
b) probabilitatea ca primele două bile să aibă numere impare;
c) probabilitatea ca bilele cu numere pare să fie alăturate;
d) probabilitatea ca cel puţin două bile alăturate să aibă aceeaşi paritate.

3. Un agent de vânzări trimite 10 emailuri distincte cu reclame alegând aleator pentru fiecare email un destinatar dintr-o listă de 20 de persoane. Care este probabilitatea ca prima persoană din listă să primească 5 emailuri?

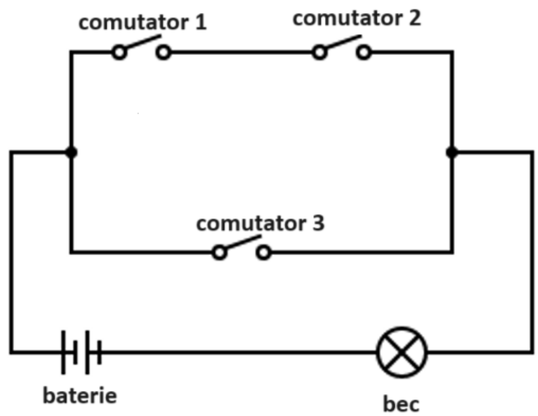
4. Fie M o submulțime cu 3 elemente alese aleator (fără returnare) ale mulțimii $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ și fie N o submulțime cu 2 elemente alese aleator (fără returnare) ale mulțimii $\{0, 1, 7, 8\}$. Fie $U = M \cup N$. Calculați probabilitățile evenimentelor:
A:“U conține doar numere impare.”
B:“U conține doar numere consecutive.”
C:“$\{0, 4\} \subset U$.”
D:“U conține cel puțin 2 numere pare.”

5. 9 persoane se îmbarcă aleatoriu într-un tren cu 3 vagoane. Calculaţi probabilitatea ca:
a) în primul vagon să fie exact 3 persoane?
b) în fiecare vagon să fie 3 persoane?
c) într-un vagon să fie 1 persoană, iar în celelalte două vagoane să fie câte 4 persoane?
d) în fiecare vagon să fie cel puţin o persoană?

6. La o petrecere sunt 8 femei şi 8 bărbaţi. Florina şi Bogdan sunt în acest grup de prieteni. Cele 16 persoane se aşează aleator pe 16 fotolii într-un rând.
a) Care este probabilitatea ca doi bărbaţi şi două femei să nu stea alături?
b) Care este probabilitatea ca doi bărbaţi şi două femei să nu stea alături şi Florina şi Bogdan să stea alături?

7. Patru programe antivirus sunt testate independent prin scanarea unui fișier infectat. Programele detectează virusul cu probabilitățile corespunzătoare: $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}$. Calculați probabilitățile următoarelor evenimente:
A:“Toate programele detectează virusul.”
B:“Exact un program detectează virusul.”
C:“Exact trei programe detectează virusul.”
D:“Cel mult un program detectează virusul.”
E:“Cel puțin un program detectează virusul.”

8. În diagrama de mai jos, fiecare din cele 3 comutatoare *independente* este fie închis cu probabilitatea $\frac{1}{2}$, fie deschis cu probabilitatea $\frac{1}{2}$. Calculați probabilitatea ca circuitul să fie închis (i.e., becul să fie aprins).



1. Un pachet cu 25 de componente electronice este livrat unui magazin. Înainte de a accepta pachetul, 6 componente alese aleator sunt testate. Dacă toate 6 îndeplinesc standardele specifice, atunci pachetul este acceptat. Altfel, pachetul este returnat. Știind că 4 din cele 25 de componente sunt defecte, care este probabilitatea ca pachetul să fie returnat?

A : „coletul este returnat"

$\overline{A}$: „contrar este acceptat"

$P(A) = 1 - P(\overline{A})$

$n_f = C_{21}^{6}$

$n_p = C_{25}^{6}$

$P(A) = 1 - \dfrac{C_{21}^{6}}{C_{25}^{6}}$

probabilitatea ca pachetul să fie returnat?

2. 5 bile numerotate consecutiv de la 1 la 5 sunt aşezate orizontal în mod aleator. Determinaţi:
a) probabilitatea ca prima şi ultima bilă să aibă numere pare;
b) probabilitatea ca primele două bile să aibă numere impare;
c) probabilitatea ca bilele cu numere pare să fie alăturate;
d) probabilitatea ca cel puţin două bile alăturate să aibă aceeaşi paritate.

(2)

1 2 3 4 5

a) A : „prima și ultima bilă nr pare"

$n_p = 5!$

$n_f = 2 \cdot 3!$

$P(A) = \dfrac{2 \cdot 3!}{5!} = \dfrac{1}{10}$

b) B : „primele 2 impare"

$n_f = A_3^2 \cdot 3!$

$P(A) = \dfrac{A_3^2 \cdot 3!}{5!} = \dfrac{3}{10}$

c) C : „bilele pare sunt alăturate"

(2 4) 1 3 5

(4 2)

4 poziții

$n_f = 2 \cdot 4!$

$P(C) = \dfrac{2 \cdot 4!}{5!} = \dfrac{2}{5}$

d) D: „cel puțin 2 bile alăturate să aibă aceeași paritate"

$P(D) = 1 - P(\bar{D})$ im pa im pa im

$P(\bar{D}) = 2! \cdot 3!$

$$P(D) = 1 - \frac{2 \cdot 3!}{5!} = \frac{9}{10}$$

3. Un agent de vânzări trimite 10 emailuri distincte cu reclame alegând aleator pentru fiecare email un destinatar dintr-o listă de 20 de persoane. Care este probabilitatea ca prima persoană din listă să primească 5 emailuri?

10 emailuri 20 de persoane

A: „prima persoană din listă primește 5 emailuri"

$f : \{m_1, \dots, m_{10}\} \to \{p_1, \dots, p_{20}\}$

$n_p = 20^{10}$ $n_f = C_{10}^{5} \cdot 19^{5}$

$$P(A) = \frac{C_{10}^{5} \cdot 19^{5}}{20^{10}}$$

4. Fie M o submulțime cu 3 elemente alese aleator (fără returnare) ale mulțimii $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ și fie N o submulțime cu 2 elemente alese aleator (fără returnare) ale mulțimii $\{0, 1, 7, 8\}$. Fie $U = M \cup N$. Calculați probabilitățile evenimentelor:
A:“U conține doar numere impare.”
B:“U conține doar numere consecutive.”
C:“$\{0, 4\} \subset U$.”
D:“U conține cel puțin 2 numere pare.”

$M \subset \{2, 3, 4, 5, 6\}$, card $M = 3$

$N \subset \{0, 1, 7, 8\}$, card $N = 2$

$U = M \cup N$.

A - eveniment imposibil

$P(A) = 0$

B) $n_p = C_5^3 \cdot C_4^2$ $\qquad n_f = 2.$

$\{0, 1, 2, 3, 4\}$

$P(B) = \dfrac{2}{C_5^3 \cdot C_4^2}$ $\qquad \{4, 5, 6, 7, 8\}$

c) $\{0, 4\} \subset U$

$n_f = C_4^2 \cdot C_3^1$ $\qquad P(C) = \dfrac{C_4^2 \cdot C_3^1}{C_5^3 \cdot C_4^2}$

D) cel puțin / cel mult $\Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A})$

$\bar{D}$: „U conține cel mult un nr. par"

toate impare (imposibil)

un nr par, 4 impare

$N = \{1, 7\}$, $M = \{2, 3, 5\}$ sau $\qquad P(\bar{D}) = \dfrac{3}{60} = \dfrac{1}{20}$

$\{3, 4, 5\}$ sau

$n_f = 3$ $\qquad \{3, 5, 6\}$ $\qquad P(D) = 1 - \dfrac{1}{20} = \dfrac{19}{20}$

5. 9 persoane se îmbarcă aleatoriu într-un tren cu 3 vagoane. Calculaţi probabilitatea ca:
a) în primul vagon să fie exact 3 persoane?
b) în fiecare vagon să fie 3 persoane?
c) într-un vagon să fie 1 persoană, iar în celelalte două vagoane să fie câte 4 persoane?
d) în fiecare vagon să fie cel puţin o persoană?

a) A: „în primul vagon exact 3 persoane"

$n_p = 3^9$

$f : \{P_1, P_2, \ldots, P_9\} \to \{v_1, v_2, v_3\}$

$n_f = C_9^3 \cdot 2^6$ $\qquad P(A) = \dfrac{C_9^3 \cdot 2^6}{3^9}$

b) $n_f = C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3$ $\qquad$ $p(B) = \dfrac{C_9^3 \cdot C_6^3}{3^9}$

c) C: „Un vagon 1 persoană, iar celelalte două câte 4 persoane"

$n_f = 3 \cdot 9 \cdot C_8^4$ $\qquad$ $P(C) = \dfrac{3 \cdot 9 \cdot C_8^4}{3^9}$

d) D: „în fiecare vagon să fie cel puțin o persoană"

$\overline{D}$: „cel puțin un vagon este gol"

$n_f = 3 + 3(2^9 - 2) = 3 \cdot 2^9 - 3 = 3(2^9 - 1)$

2 vagoane goale $\to$ 3 moduri

1 vagon gol $\to 3 \cdot (2^9 - 2)$ moduri

$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - \dfrac{3(2^9 - 1)}{3^9}$

d) în fiecare vagon să fie cel puţin o persoană!

6. La o petrecere sunt 8 femei şi 8 bărbaţi. Florina şi Bogdan sunt în acest grup de prieteni. Cele 16 persoane se aşează aleator pe 16 fotolii într-un rând.
a) Care este probabilitatea ca doi bărbaţi şi două femei să nu stea alături?
b) Care este probabilitatea ca doi bărbaţi şi două femei să nu stea alături şi Florina şi Bogdan să stea alături?

a) A: „2 femei și 2 bărbați să nu stea alături"

8f, 8b

f b f b ... f b

b f b f ... b f

$n_p = 16!$

$n_f = 8! \cdot 8! \cdot 2$ $\qquad$ $P(A) = \dfrac{2 \cdot 8! \cdot 8!}{16!}$

b) B: „FB stau alături, două femei, doi bărbați să nu stea alături"

fb ... FB fb fb   8 cazuri
bf ... BF bf ... bf   8 cazuri
fb ... BF b ... fb   7 cazuri
bf ... BF ... bf   7 cazuri

$\}$ 30 de cazuri

$m_f = 30 \cdot 7! \cdot 7!$

7. Patru programe antivirus sunt testate independent prin scanarea unui fișier infectat. Programele detectează virusul cu probabilitățile corespunzătoare: $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}$. Calculați probabilitățile următoarelor evenimente:
A:"Toate programele detectează virusul."
B:"Exact un program detectează virusul."
C:"Exact trei programe detectează virusul."
D:"Cel mult un program detectează virusul."
E:"Cel puțin un program detectează virusul."

$P(V_1) = \frac{3}{4}, \; P(V_2) = \frac{1}{4}, \; P(V_3) = \frac{2}{4}, \; P(V_4) = \frac{1}{4}$

a) $A = V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4$

$P(A) = P(V_1) \cdot P(V_2) \cdot P(V_3) \cdot P(V_4) = \frac{6}{4^4} = \frac{3}{128}$

b) $B = (V_1 \cap \overline{V_2} \cap \overline{V_3} \cap \overline{V_4}) \cup (\overline{V_1} \cap V_2 \cap \overline{V_3} \cap \overline{V_4}) \cup$
$(\overline{V_1} \cap \overline{V_2} \cap V_3 \cap \overline{V_4}) \cup (\overline{V_1} \cap \overline{V_2} \cap \overline{V_3} \cap V_4)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ când $A \cap B = \emptyset$

$P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{4} +$
$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4}$

$= \frac{54 + 6 + 18 + 6}{256} = \frac{84}{256} = \frac{42}{128} = \frac{21}{64}$

d) $D = B \cup F$

F ↳ niciun program

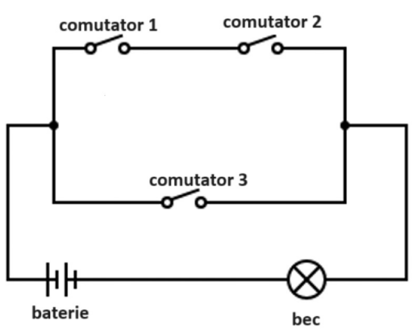
$P(D) = P(B) + P(F)$

$P(F) = P(\overline{V_1} \cap \overline{V_2} \cap \overline{V_3} \cap \overline{V_4}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{128}$

$P(D) = \frac{21}{64} + \frac{9}{128}$

e) $P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - P(F)$

8. În diagrama de mai jos, fiecare din cele 3 comutatoare *independente* este fie închis cu probabilitatea $\frac{1}{2}$, fie deschis cu probabilitatea $\frac{1}{2}$. Calculați probabilitatea ca circuitul să fie închis (i.e., becul să fie aprins).



c_i - comutator i

$i = 1,2,3$

$P(c_i) = \frac{1}{2}$

$P(A) = P(c_1 \cap c_2) + P(c_3) - P(c_1 \cap c_2 \cap c_3)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$