Seminar 1 - 11 oct

Noțiuni de combinatorică

1) <u>Principiul fundamental al numărului</u>

Nr. de perechi de obiecte în care primul obiect poate fi ales în m moduri, este $n \cdot m$ $(n, m \in \mathbb{N})$

2) <u>Aranjamente de n luate câte k $(n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}, k \leq n)$</u>

În câte moduri se pot alege k obiecte distincte, ordonate din n obiecte distincte date $n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

ex: Câte coduri cu 3 cifre distincte se pot forma cu 1, 5, 3, 7, 9?

3) <u>Permutări de n $(n \in \mathbb{N})$</u> = aranjamente de n luate câte n

$P_n = n!$ Sunt $A_n^n = n!$

4) <u>Combinări de n luate câte k</u>

În câte moduri se pot alege k obiecte distincte neordonate din n obiecte distincte date

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

5) Funcții definite pe o mulțime A cu k elemente, cu valori în B, cu n elemente $(k, n \in \mathbb{N})$ sunt în număr de n^k

ex: $f: \{\text{măr}, \text{kiwi}, \text{banană}\} \to \{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5\}$ 5^3 moduri

6) <u>Aranjamente cu repetiții</u>

În câte feluri poți alege k obiecte, nu neapărat distincte ordonate, din n obiecte distincte date

7) Permutări cu repetiții

ex: 3 bile roșii, 4 bile albe, 5 bile albastre $\Rightarrow$ R: $\frac{12!}{3!\cdot 4!\cdot 5!}$

n obiecte, împărțite în k grupuri ($n, k \in \mathbb{N}^*$, $k \le n$)

grup 1 $\Rightarrow$ n_1 obiecte identice

grup 2 $\rightarrow$ n_2 obiecte identice

$\vdots$

grup k $\rightarrow$ n_k obiecte identice

$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

* Oricare 2 obiecte alese din grupuri diferite sunt distincte

8) Combinări cu repetiții de n luate câte k ($n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$)

Alegeri de k obiecte, nu neapărat distincte, neordonate, din n obiecte date distincte

ex: cofetărie – 7 sortimente de înghețată, 3 cornete a câte un glob

În câte moduri pot fi alese?

$$C_{n+k-1}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} \qquad C_9^3 = \frac{7\cdot \cancel{8}^{4}\cdot \cancel{9}^{3}}{\cancel{6}} = 7\cdot 12 = 84$$

Exerciții

① În câte moduri se pot așeza pe un raft 5 culegeri de mate, 3 culegeri de info și 4 romane, știind că fiecare are un autor diferit

a.î.

a) cărțile de același tip să fie alăturate

b) doar romanele să fie alăturate (neapărat)

c) cărțile de mate și info să fie neapărat alăturate

a) $3!\cdot 4!\cdot 5!$ b) $4!\cdot 9!$ c) $5!\cdot 3!\cdot 4!$

② Câte plăcuțe de înmatriculare cu 7 caract. sunt posibile în RO.

→ județe + Buc

→ cu 3 cifre la Buc.

CJ 01 AAB

B 121 XYZ

26 litere (- Q) ⇒ 25 litere

00, 000 nu sunt permise

Q nu este permis

i, o nu sunt permise pe prima poz.

$41 \cdot 99 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 23$

$999 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 23$

③ X - persoană participă la spectacol alături de un grup de prieteni (m - fete, n - băieți) $m \geq 2, n \geq 1$, au ocupat un singur rând. În câte moduri se pot așeza, a.î. X să aibe 2 vecini.

$(n+m-1)-2$

Grupul fată X fată : A_m^2 moduri

$m+n+1 \Rightarrow m-2$ fete, n - băieți, grupul $(m+n-1)!$

$(m+n-1)! \cdot A_m^2$

④ În câte moduri se pot așeza în linie caract. AAABBOOO1. Dar în cerc?

$$\frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 1!} = 5040$$

pt cerc : cu 9 mai puține

$$\Rightarrow \frac{1}{9} \cdot \frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 1!}$$

⑤ Câte coduri binare sunt formate din 10 cifre și nu au 2 cifre alăturate egale cu 1

k cifre de 1, $k = \overline{0,5}$ $\Rightarrow$ $10-k$ cifre de 0

$$\_0\_0\_0\_0\_0\_0\_ \qquad C_7^4$$

$10 - k + 1$ spații în care plasez k cifre de 1 $\quad C_{11-k}^{k}$

$$C_{11}^0 + C_{10}^1 + C_9^2 + C_8^3 + C_7^4 + C_6^5$$

6 a) Câte soluții $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^* \times \dots \times \mathbb{N}^*$ are ec.

$x_1 + \dots + x_k = n$ ($k, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq k$)

b) Câte soluții $(x_1 \dots x_k) \in \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$ are ec.

$x_1 + \dots x_k = n$ ($k, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq k$)

a) $||||$ - n bețe, $k-1$ semne de $+$, $n-1$ spații

b) $n+1$ soluții, $k-1$ semne $+$, pot pune mai multe semne în aceeași spații

$$C_{n+k-1}^{k-1}$$