

# Seminarul 1

## Noțiuni de combinatorică

**1. Principiul fundamental de numărare:** numărul de perechi de obiecte în care primul obiect poate fi ales în  $m$  moduri și al doilea în  $n$  moduri ( $m, n \in \mathbb{N}$ ) este  $m \cdot n$ .

*Exemplu:* În câte moduri poate o persoană să îmbrace 2 cămăși distincte și 3 blugi diferiți? R:  $2 \cdot 3 = 6$ .

**2. Aranjamente de  $n$  luate câte  $k$**  ( $k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq k$ ): alegeri de  $k$  obiecte distincte și ordonate din  $n$  obiecte distincte date.

$$\begin{aligned} A_n^k &= \text{“numărul de aranjamente de } n \text{ obiecte luate câte } k\text{”} \\ &= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

*Exemplu:* Câte coduri cu 3 cifre distincte se pot forma folosind cifrele: 0, 1, 2, 3, 4? R:  $A_5^3 = \frac{5!}{2!}$ .

**3. Permutări de  $n$**  ( $n \in \mathbb{N}$ ): aranjamente de  $n$  luate câte  $n$ .

$$P_n = \text{“numărul de permutări de } n \text{ obiecte”} = A_n^n = n!.$$

*Observație:* Prin convenție,  $0! = 1$ .

*Exemplu:* În câte moduri se pot așeza 4 persoane pe o bancă? R:  $P_4 = 4!$ .

**4. Combinări de  $n$  luate câte  $k$**  ( $k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq k$ ): alegeri de  $k$  obiecte distincte și neordonate din  $n$  obiecte distincte date, i.e., alegeri de submulțimi de  $k$  elemente ale unei mulțimi de  $n$  elemente.

$$\begin{aligned} C_n^k &= \text{“numărul de combinații de } n \text{ elemente luate câte } k\text{”} \\ &= \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \end{aligned}$$

*Exemplu:* Câte echipe de handbal se pot forma dintr-un grup de 9 persoane? R:  $C_9^7 = C_9^2$ .

**5. Numărul de funcții** de la o mulțime  $A$  cu  $k$  elemente la o mulțime  $B$  cu  $n$  elemente este  $n^k$  ( $k, n \in \mathbb{N}^*$ ).  
*Observație:* O funcție poate fi identificată cu  $k$  alegeri de obiecte nu neapărat distincte (i.e., un obiect poate fi ales de mai multe ori), dar ordonate, din  $n$  obiecte distincte date. Astfel, putem spune că *funcțiile sunt aranjamente cu repetiții*.

*Exemplu:* În câte moduri se pot împărți o portocală, un kiwi și o banană la 4 copii? Un copil poate primi mai multe fructe, chiar toate.

R: Funcțiile  $f: \{\text{“portocală”, “kiwi”, “banană”}\} \rightarrow \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$  se pot construi în  $4^3 = 64$  moduri.

**6. Permutări cu repetiții:** Considerăm  $n$  obiecte care pot fi împărțite în  $k$  grupuri ( $n, k \in \mathbb{N}^*, k \leq n$ ). Primul grup are  $n_1$  obiecte identice, al 2-lea grup are  $n_2$  obiecte identice, ..., al  $k$ -lea grup are  $n_k$  obiecte identice ( $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}, n_1 + \dots + n_k = n$ ). Două obiecte alese arbitrar sunt distincte dacă și numai dacă provin din grupuri diferite. Numărul de permutări ale acestor  $n$  obiecte este

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

*Exemple:* 1) Într-o urnă sunt trei bile albe și patru bile roșii. În câte moduri se pot aranja aceste bile într-un rând? R:  $\frac{7!}{3!4!} = 35$ .

2) Câte anagrame ale cuvântului “MISSISSIPPI” sunt posibile? R:  $\frac{11!}{1!4!4!2!} = 34650$ .

**7. Combinări cu repetiții de  $n$  luate câte  $k$**  ( $n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}$ ): alegeri de  $k$  obiecte, nu neapărat distincte (i.e., un obiect poate fi ales de mai multe ori), neordonate, din  $n$  obiecte distincte date (i.e., aranjamente cu repetiții în care neglijăm ordinea). Numărul lor este

$$C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

*Exemplu:* 1) În câte moduri se pot împărți 5 bile identice la 3 copii (C1, C2, C3)? (Un copil poate primi o bilă/mai multe bile/niciuna.) R: Exemple de distribuire a bilelor copiilor (“o” reprezintă o *bilă*):

C1	C2	C3
oo		ooo
o	o	ooo
ooo	oo	
		ooooo

Identificăm configurațiile mai sus cu șiruri de 5 biți, unde 0 reprezintă o bilă, 1 reprezintă separatorul dintre două grupuri de bile (unele grupuri pot fi vide) pe care le au doi copii succesivi:

0011000  
0101000  
0001001  
1100000

Astfel, reformulăm întrebarea: în câte moduri se pot distribui 5 cifre egale cu 0 și 2 cifre egale cu 1 pe 7 poziții? R:  $C_7^5 = C_7^2 = \frac{7!}{5!2!} = 21$ .

2) O cofetărie are 7 sortimente de înghețată. În câte moduri poate un client să își aleagă sortimentele pentru 3 cornete? (Fiecare cornet are câte un glob de înghețată.) R:  $\frac{9!}{3!6!} = 84$ .

**8. Definiția clasică a probabilității:** într-un experiment în care cazurile posibile, finite la număr, au aceleași șanse de a se realiza, probabilitatea unui eveniment  $E$  este

$$P(E) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile lui } E}{\text{numărul cazurilor posibile}}.$$

## Probleme

1. În câte moduri se pot așeza pe un raft 5 culegeri de matematică, 3 culegeri de informatică și 4 romane, știind că fiecare carte are un autor diferit, astfel încât:
  - a) cărțile de același tip să fie alăturate?
  - b) doar romanele să fie neapărat alăturate?
  - c) doar culegerile de matematică, respectiv de informatică, să fie neapărat alăturate?
2. a) Câte coduri care conțin 5 caractere conțin exact 3 cifre și 2 majuscule se pot tasta pe o tastatură engleză? Exemple: 01DD0, A21Z0, 999XX.  
b) Câte coduri cu 5 caractere care conțin exact 3 cifre distincte 2 câte 2 și 2 majuscule diferite se pot tasta pe o tastatură engleză? Exemplu: A21Z0.
3. X participă la un spectacol alături de un grup de prieteni format din  $m$  fete și  $n$  băieți ( $m, n \in \mathbb{N}^*$ ,  $m \geq 2$ ). X și prietenii săi au primit bilete pe un singur rând, pe care îl vor ocupa în întregime. Biletele lor au fost distribuite aleator. Care este probabilitatea ca X să aibă două vecine?
4. În câte moduri se pot așeza în linie caracterele următoare: A, A, A, B, B, 0, 0, 0, 1? Dar în cerc?
5. Câte plăcuțe de înmatriculare cu 7 caractere sunt posibile în România? Grupurile 00 și 000 nu sunt permise, Q nu este permis și orice grup de 3 litere care începe cu O sau I nu este permis. Exemple: CJ-01-YYR, IF-12-XYZ, B-101-ABC.
6. 7 călușari,  $c_1, c_2, \dots, c_7$ , se așează în cerc, într-o ordine aleatoare. Care este probabilitatea ca  $c_1$  și  $c_7$  să fie vecini?
7. a) Câte soluții  $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^* \times \dots \times \mathbb{N}^*$  are ecuația  $x_1 + \dots + x_k = n$  ( $k, n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq k$ )?  
b) Câte soluții  $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$  are ecuația  $x_1 + \dots + x_k = n$  ( $k, n \in \mathbb{N}^*$ )?
8. Câte coduri binare sunt formate din 10 cifre și nu au două cifre alăturate egale cu 1?