Seminarul 3

1. Un patron deţine 3 magazine, m_1, m_2, m_3, care au 50, 75, respectiv 100, de angajaţi, din care 50%, 60%, respectiv 70%, sunt femei. Patronul alege aleator un angajat pentru un bonus la salariu. Care este probabilitatea ca angajatul norocos să lucreze la magazinul m_3, ştiind că acesta este bărbat?

2. O persoană are în buzunar 2 zaruri roşii şi 3 zaruri albastre, dintre care alege aleator unul. Dacă a ales un zar roşu, atunci aruncă zarul ales de 3 ori, iar dacă a ales un zar albastru, atunci aruncă zarul ales de 2 ori. Calculaţi probabilitatea ca suma punctelor obţinute în urma aruncărilor să fie 10.

3. Se aruncă un zar. Fie N numărul care a apărut. Apoi, zarul este aruncat de N ori. Care este probabilitatea ca N=3, ştiind că:
a) numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt diferite?
b) numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt egale?

4. O urnă conține o bilă cu cifra 1, două bile cu cifra 2, trei bile cu cifra 3 și patru bile cu cifra 4. Se extrag aleator fără repunerea bilei patru bile pentru a forma un cod X cu 4 cifre. Calculați probabilitățile evenimentelor $X = 1234$ și $X = 4321$.

• **Modelul binomial:** În cadrul unui experiment pot să apară evenimentele A (*succes*) sau $\bar{A}$ (*insucces*). Un succes are loc cu $P(A) = p$, un insucces are loc cu $P(\bar{A}) = 1 - p$. Probabilitatea de a obţine k succese în n repetări independente ale experimentului este

$$b(k; n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0, \ldots, n\}.$$

▷ Acest model corespunde distribuţiei binomiale.

5. Probabilitatea ca un cip, de un anumit tip, să fie defect este 0,06. O componentă pentru calculator are instalate 12 astfel de cipuri. Componenta este funcţională dacă cel puţin 11 sunt operaţionale. 4 componente independente sunt instalate într-un calculator. Calculați probabilitățile evenimentelor:
A:“O componentă este funcțională.”
B:“Exact două componente sunt funcționale în calculator.”
C:“Cel puțin o componentă este funcțională în calculator.”

• **Modelul urnei cu r culori şi bilă returnată:**

$$\begin{aligned} b(k_1, \ldots, k_r; n) &= \text{probabilitatea de a obţine } k_i \text{ bile cu culoarea } i,\ i = \overline{1, r}, \\ &\ \text{din } n \text{ extrageri } \textit{cu returnarea} \text{ bilei extrase} \\ &= \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!} \cdot p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}, \end{aligned}$$

unde p_i =probabilitatea de a extrage o bilă cu culoarea i, $i = \overline{1, r}$.
▷ Cazul $r = 2$ corespunde distribuţiei binomiale.

6. O persoană tastează aleator 11 litere minuscule pe o tastatură engleză. Care este probabilitatea ca literele tastate să poată fi permutate astfel încât să se obţină cuvântul *abracadabra*?

① m_1, m_2, m_3 - magazine
50, 75, 100 - angajați
50%, 60%, 70% femei
1 angajat → bonus

A: „Angajatul lucrează la m_3"
B: „angajatul este bărbat"

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$P(B) = \frac{nf}{np} = \frac{25+30+30}{225} = \frac{85}{225}$$

$$P(A\cap B) = \frac{30}{225}$$

$$P(A|B) = \frac{\cancel{30}^{6}}{\cancel{225}} \cdot \frac{\cancel{225}}{\cancel{85}_{17}} = \frac{6}{17}$$

② 2 zaruri roșii, 3 zaruri albastre
1 zar ales – roșu (aruncă de 3 ori)
– albastru (– „ – 2 ori)

S: „suma obținută este 10"
A: „zarul ales este albastru"
B: „ – „ – roșu"

$$P(S) = P(S|A)\,P(A) + P(S|B)\cdot P(B)$$ formula prob. totale

Ω spațiu de selecție
$\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ partiție $H_1 = A$ $H_2 = B$

$$P(A) = \frac{3}{5} \qquad P(S|A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(B) = \frac{2}{5} \qquad P(S|B) = \frac{27}{6^3} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$$

$10 = 6+3+1$ 3! $4+3+3$ 3
$6+2+2$ 3
$5+4+1$ 3!
$5+3+2$ 3!
$4+4+2$ 3

$$P(S) = \frac{1}{\cancel{12}_{4}} \cdot \frac{\cancel{3}}{5} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$$

③ 1 zar aruncat ⇒ apare N
aruncă zarul de n ori

$P(N=i)=\frac{1}{6}$, $i=\overline{1,6}$

$P(D\mid N=i)=\frac{A_6^i}{6^i}$

$P(D/N=1)=0$

a) $P(N=3\mid D)$

D: „nr. obținute să fie diferite"

b) $P(N=3\mid F)$

F: „nr obținute sunt egale"

Formula Bayes: $P(N=3\mid D)=\frac{P(D\mid N=3)\cdot P(N=3)}{P(D)}$

$$P(D)=\sum_{i=1}^{6}P(D\mid N=i)\,P(N=i)$$

$$P(N=3\mid D)=\frac{\frac{A_6^3}{6^3}\cdot\cancel{\frac{1}{6}}}{\sum_{i=2}^{6}\frac{A_6^i}{6^i}\cdot\cancel{\frac{1}{6}}}$$

b) $$P(N=3\mid F)=\frac{P(F\mid N=3)\cdot P(N=3)}{P(F)}$$

$P(F\mid N=1)=1$

$P(F/N=i)=\frac{6}{6^i}$, $i=\overline{2,6}$

$$P(N=3\mid F)=\frac{\frac{1}{6^2}\cdot\frac{1}{6}}{\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{6^{i-1}}\cdot\frac{1}{6}}$$

④ ① 1 bilă ② 2 bile ③ 3 bile ④ 4 bile

fără repunere 4 bile $X=x_1x_2x_3x_4$

$P(X=1234)=?$

$P(X=4321)=?$

$$P(X=1234) = P(X_1=1, X_2=2, X_3=3, X_4=4)$$
$$= P(X_1=1) \cdot P(X_2=2 | X_1=1) \cdot P(X_3=3 | X_1=1, X_2=2)$$
$$\cdot P(X_4=4 | X_1=1, X_2=2, X_3=3)$$
$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{9}_3} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{4}}{7} = \frac{1}{210}$$

$$P(X=4321) = P(X_1=4) \cdot P(X_2=3 | X_1=4) \cdot P(X_3=2 | X_1=4, X_2=3)$$
$$\cdot P(X_4=1 / X_1=4, X_2=3, X_3=2)$$
$$= \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{210}$$

Model binomial

A: succes $\quad p = P(A)$
$\overline{A} \quad 1-p = P(\overline{A})$ } în urma experiment

repetăm experiment de n ori, de k ori succes

$$b(k, n) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^k$$

⑤ $1-p = 0,06 \Rightarrow p = 0,94$

o componentă → 12 cipuri

funcțională – 11 din 12 funcționale

A: o componentă funcțională

a) $P(A) = b(11, 12) + b(12, 12) = C_{12}^{11} \cdot (0,94)^{11} \cdot 0,06^{11} + C_{12}^{12} \cdot (0,94)^{12} \cdot (0,06)^0$

b) 4 componente $\Rightarrow$ calculator

B: „exact 2 comp sunt funcționale"

$$P(B) = b(4,2) = C_4^2 \cdot q^2 (1-q)^2$$

c) C: „cel puțin o componentă e funcțională"

$$P(C) = b(1,4) + b(2,4) + b(3,4) + b(4,4)$$

$$= 1 - P(\overline{C}) = 1 - b(0,4)$$

$$= \sum_{k=1}^{4} C_4^k \cdot q^k \cdot (1-q)^{4-k} = 1 - (1-q)^4$$

$$q = P(A) = 12 \cdot (0,94)^{11} \cdot 0,06 + (0,94)^{12}$$

- **Modelul urnei cu r culori şi bilă returnată:**

n extrageri

p_i = prob. de a extrage bilă de culoare i, $i = \overline{1,r}$

prob. de a extrage k_i bile de culoare i

$$b(k_1, \ldots, k_r; n) = \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_r!} \cdot p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$$

$\triangleright$ Cazul $r = 2$ corespunde distribuţiei binomiale.

6. O persoană tastează aleator 11 litere minuscule pe o tastatură engleză. Care este probabilitatea ca literele tastate să poată fi permutate astfel încât să se obţină cuvântul *abracadabra*?

A

$$p_i = p = \frac{1}{26}; \quad i = \overline{1,26}$$

$$P(A) = b(\underset{a}{5}, \underset{b}{2}, \underset{r}{2}, \underset{c}{1}, \underset{d}{1}; 11) = \frac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{1}{26}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{26}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{26}\right)^2 \cdot \frac{1}{26} \cdot \frac{1}{26}$$

$$= \frac{11!}{5! \cdot 2 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{26}\right)^{11}$$

• **Modelul urnei cu bile de 2 culori şi bilă nereturnată:** fie $n_1, n_2, n \in \mathbb{N}$ cu $n \leq n_1 + n_2$ şi fie $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $k \leq n_1$ şi $n - k \leq n_2$; considerând o urnă, care are iniţial n_1 bile albe şi n_2 bile negre, avem

$$\begin{aligned} p(k;n) &= \text{probabilitatea de a obţine } k \text{ bile albe din } n \text{ extrageri } \textit{fără returnarea} \text{ bilei extrase,} \\ & \text{în care ordinea de extragere a bilelor nu contează} \\ &= \frac{C_{n_1}^k \cdot C_{n_2}^{n-k}}{C_{n_1+n_2}^n}. \end{aligned}$$

▷ Acest model corespunde **distribuţiei hipergeometrice**.

7. Dintr-un pachet standard de 52 de cărţi de joc se extrag aleator fără returnare 13 cărţi (*bridge hand*). Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:
a) A:“Nu se extrage nicio treflă.”
b) B:“Se extrag 5 inimi.”
c) C:“Se extrage cel mult un as.”

• **Modelul urnei cu r culori şi bilă nereturnată:** fie n_i =numărul iniţial de bile cu culoarea i din urnă, $i = \overline{1,r}$;

$$\begin{aligned} p(k_1,\ldots,k_r;n) &= \text{probabilitatea de a obţine } k_i \text{ bile cu culoarea } i,\ i=\overline{1,r}, \\ & \text{din } n = k_1 + \ldots + k_r \text{ extrageri } \textit{fără returnarea} \text{ bilei extrase,} \\ & \text{în care ordinea de extragere a bilelor de diverse culori nu contează} \\ &= \frac{C_{n_1}^{k_1} \cdot \ldots \cdot C_{n_r}^{k_r}}{C_{n_1+\ldots+n_r}^n}. \end{aligned}$$

▷ Cazul $r = 2$ corespunde **distribuţiei hipergeometrice**.
Observaţie: Extragerea fără returnare (engl. *sampling without replacement*) este folosită în **metoda validării încrucişate** (engl. *k-fold cross validation*): În cazul validării încrucişate eşantionul original de date este împărțit aleatoriu în k sub-eşantioane de dimensiuni egale. Din cele k sub-eşantioane, un singur sub-eşantion este folosit ca date de validare pentru testarea modelului, iar celelalte $k-1$ sub-eşantioane sunt utilizate ca date de antrenament. Procesul de validare încrucişată se repetă de k ori, fiecare dintre cele k sub-eşantioane fiind utilizat exact o dată ca date de validare.

8. O echipă formată din 4 cercetători este aleasă aleator dintr-un grup de 4 matematicieni, 3 informaticieni şi 5 fizicieni. Care este probabilitatea ca echipa să fie formată din 2 matematicieni, 1 informatician şi 1 fizician?

9. Un zar este aruncat de cinci ori. Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:
a) A:“exact două numere sunt pare.”
b) B:“1 apare de două ori, 3 apare o dată şi 6 apare de două ori.”
c) C: “exact două numere sunt prime, un număr este egal cu 1, iar celelalte două sunt egale cu 4”.

10. Într-un club sunt $4N$ persoane din 4 oraşe diferite, câte N din fiecare oraş ($N \in \mathbb{N}$, $N \geq 4$). Cinci persoane sunt alese aleator. Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:
a) A: “exact 4 persoane din cele alese sunt din acelaşi oraş”.
b) B: “3 persoane din cele alese sunt din acelaşi oraş, iar celelalte 2 sunt dintr-un alt oraş”.

↝ hipergeometrică

• **Modelul urnei cu bile de 2 culori şi bilă nereturnată:** fie $n_1, n_2, n \in \mathbb{N}$ cu $n \leq n_1 + n_2$ şi fie $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $k \leq n_1$ şi $n - k \leq n_2$; considerând o urnă, care are iniţial n_1 bile albe şi n_2 bile negre, avem

$$\begin{aligned} p(k;n) &= \text{probabilitatea de a obţine } k \text{ bile albe din } n \text{ extrageri } \textit{fără returnarea} \text{ bilei extrase,} \\ &\quad\ \text{în care ordinea de extragere a bilelor nu contează} \\ &= \frac{C_{n_1}^{k} \cdot C_{n_2}^{n-k}}{C_{n_1+n_2}^{n}}. \end{aligned}$$

▷ Acest model corespunde **distribuţiei hipergeometrice**.

n_1 de culoare 1

n_2 de culoare 2

n extrageri, $n \leq n_1 + n_2$

$$p(k;n) = \frac{C_{n_1}^{k_1} \cdot C_{n_2}^{k_2}}{C_{n_1+n_2}^{n}}$$

▷ Acest model corespunde **distribuţiei hipergeometrice**.

7. Dintr-un pachet standard de 52 de cărţi de joc se extrag aleator fără returnare 13 cărţi (*bridge hand*). Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:

a) A: "Nu se extrage nicio treflă."

b) B: "Se extrag 5 inimi."

c) C: "Se extrage cel mult un as."

a) $p(A) = \dfrac{C_{13}^{0} \cdot C_{39}^{13}}{C_{52}^{13}}$

52 : 4 = 13 cărţi treflă

b) $P(B) = \dfrac{C_{13}^{5} \cdot C_{39}^{8}}{C_{52}^{13}}$

c) $P(C) = \dfrac{C_{4}^{1} \cdot C_{48}^{12}}{C_{52}^{13}} + \dfrac{C_{4}^{0} \cdot C_{48}^{13}}{C_{52}^{13}}$

• **Modelul urnei cu r culori şi bilă nereturnată:** fie n_i =numărul iniţial de bile cu culoarea i din urnă, $i = \overline{1,r}$;

$$\begin{aligned} p(k_1,\ldots,k_r;n) &= \text{probabilitatea de a obţine } k_i \text{ bile cu culoarea } i,\ i=\overline{1,r}, \\ &\quad\ \text{din } n = k_1 + \ldots + k_r \text{ extrageri } \textit{fără returnarea} \text{ bilei extrase,} \\ &\quad\ \text{în care ordinea de extragere a bilelor de diverse culori nu contează} \\ &= \frac{C_{n_1}^{k_1} \cdot \ldots \cdot C_{n_r}^{k_r}}{C_{n_1+\ldots+n_r}^{n}}. \end{aligned}$$

generalizare model cu 2 culori

▷ Cazul $r = 2$ corespunde **distribuţiei hipergeometrice**.

Observaţie: Extragerea fără returnare (engl. *sampling without replacement*) este folosită în **metoda validării încrucişate** (engl. *k-fold cross validation*): În cazul validării încrucişate eşantionul original de date este împărţit aleatoriu în k sub-eşantioane de dimensiuni egale. Din cele k sub-eşantioane, un singur sub-eşantion este folosit ca date de validare pentru testarea modelului, iar celelalte $k-1$ sub-eşantioane sunt utilizate ca date de antrenament. Procesul de validare încrucişată se repetă de k ori, fiecare dintre cele k sub-eşantioane fiind utilizat exact o dată ca date de validare.

8. O echipă formată din 4 cercetători este aleasă aleator dintr-un grup de 4 matematicieni, 3 informaticieni şi 5 fizicieni. Care este probabilitatea ca echipa să fie formată din 2 matematicieni, 1 informatician şi 1 fizician?

$$P(\text{„}2\text{ mat., } 1\text{ inf, } 1\text{ fiz"}) = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_5^1}{C_{12}^4}$$

10. Într-un club sunt $4N$ persoane din 4 oraşe diferite, câte N din fiecare oraş ($N \in \mathbb{N}$, $N \geq 4$). Cinci persoane sunt alese aleator. Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:

a) A: "exact 4 persoane din cele alese sunt din acelaşi oraş".

b) B: "3 persoane din cele alese sunt din acelaşi oraş, iar celelalte 2 sunt dintr-un alt oraş".

A: „4 din 5 pers sunt din același oraș"

$$A_4^2 \cdot \frac{C_N^4 \cdot C_N^1 \cdot C_N^0 \cdot C_N^0}{C_{4N}^5}$$

c) C: “3 persoane din cele alese sunt din acelaşi oraş, iar fiecare din celelalte 2 persoane este dintr-un oraş diferit de al celorlalte persoane alese”.

11. O persoană întârzie la serviciu într-o zi ploioasă cu probabilitatea 0,2, iar într-o zi senină cu probabilitatea 0,1. Conform prognozei meteo, în următoarea zi va ploua cu probabilitate 0,8. Care este probabilitatea ca:
a) persoana să ajungă ziua următoare la timp la serviciu?
b) ziua următoare să fie ploioasă, ştiind că persoana ajunge la timp la serviciu?

12. Un magazin achiziționează un anumit tip de plăci de bază livrate în cutii cu câte 100 de componente fiecare. Presupunem că 40% din cutii au câte 3 plăci defecte (le vom spune de tipul B_1), iar 60% din cutii au câte 2 plăci defecte (le vom spune de tipul B_2). Un angajat al magazinului testează 2 plăci dintr-o cutie aleasă aleator.

a) Știind că plăcile testate sunt ditr-o cutie $B1$, calculați probabilitatea ca cel puțin o placă testată nu este defectă.

b) Calculați probabilitatea ca cel puțin o placă testată să fie defectă.