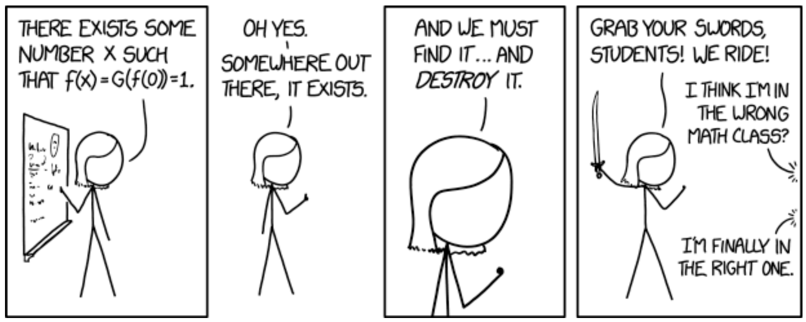
Primer Certamen
Algoritmos y Complejidad

28 de octubre de 2017



1. Todas las funciones siguientes tienen $\sqrt{3}$ como punto fijo. ¿Cuál es la que converge más rápido cerca de $\sqrt{3}$?

$$g_a(x) = 3 - x(1-x)$$
$$g_b(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2x}$$
$$g_c(x) = \frac{x+3}{x+1}$$

(35 puntos)

2. Determine el orden de convergencia del método de Newton a x^* si la función tiene un cero doble en x^* (vale decir, $f(x^*) = f'(x^*) = 0$).

(25 puntos)

3. Suponga una fórmula de cuadratura de la forma:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = A_{-1} f(-1) + A_1 f(1) + B_{-1} f'(-1) + B_1 f'(1)$$

   a) Plantee ecuaciones para los coeficientes del polinomio interpolador de máximo grado posible en términos de $f(-1)$, $f(1)$, $f'(-1)$ y $f'(1)$.

   b) Evalúe la integral para el polinomio interpolador, y use las ecuaciones anteriores para hallar los coeficientes.

(35 puntos)

4. El problema de *ubicación de plantas* en una dimensión considera posiciones de un número finito de clientes en una recta, en las posiciones $\{c_i\}$, y un número finito de posiciones posibles de plantas, $\{p_i\}$, donde la planta i puede atender a los clientes entre las posiciones $p_i - d$ y $p_i + d$ (d es un valor fijo). Hay una potencial ubicación de planta a distancia a lo más d de cada cliente. Se busca atender a todos los clientes con el mínimo de plantas.

   a) Demuestre que la estrategia voraz de ir eligiendo ubicaciones para plantas de manera de atender al máximo número de clientes no atendidos aún no siempre da un óptimo.

   b) Demuestre que la estrategia voraz de ordenar clientes y posiciones de plantas de izquierda a derecha, y elegir siempre la posición de la planta más a la derecha capaz de atender al cliente más a la izquierda sin atención da un óptimo.

(30 puntos)

Torpedo

Proposición. *El error de interpolación mediante polinomios para los puntos distintos* $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ *cumple:*

$$f(x) - Q_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta) \prod_{0 \le j \le n} (x - x_j)$$

donde $a < \zeta < b$.

Proposición. *Si* $p_n(x)$ *es un polinomio mónico de grado* n*, entonces:*

$$\operatorname*{máx}_{-1 \le x \le 1} |p_n(x)| \ge 2^{1-n}$$

Definición. *Los polinomios de Chebyshev se definen por:*

$$T_0(x) = 1 \quad T_1(x) = x \quad T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Proposición. *Para* $x \in [-1, 1]$*:*

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

El polinomio T_n *es de grado* n*, y el coeficiente de* x^n *en* T_n *es* 2^{n-1} *si* $n \ge 1$.

Definición. *Los polinomios de Lagrange para los puntos* $x_0, \ldots, x_n$ *son los polinomios:*

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \ne i}} (x - x_j) / \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \ne i}} (x_i - x_j)$$

Estos cumplen:

$$\ell_i(x_j) = [i = j]$$

Proposición. *El polinomio único de grado a lo más* n *que interpola los puntos* (x_i, y_i) *para* $0 \le i \le n$ *está dado por:*

$$Q_n(x) = \sum_{0 \le j \le n} \ell_j(x) y_j$$