Certamen Recuperativo
Algoritmos y Complejidad

23 de agosto de 2018

1. Se desea una fórmula de cuadratura para un $0 < x_0 \leq 1$ de la forma:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx A_- f(-x_0) + A_0 f(0) + A_+ f(x_0)$$

   a) ¿Cuál es el grado máximo de un polinomio para el cual puede ser exacta si x_0 es un valor dado?

   b) Explique cómo obtener los valores de los coeficientes A_-, A_0, A_+.

   c) ¿Cómo obtiene el mejor valor posible de x_0? ¿Cuál es el grado máximo de un polinomio para el cual es exacta?

(25 puntos)

2. Un *heap* es un árbol binario en el cual cada elemento es menor que sus hijos. El algoritmo 1 construye uno del rango $a[i..j]$ de un arreglo; se invoca SlowHeap$(0, n-1)$. Dé la recurrencia para el tiempo de ejecución y resuélvala.

Algoritmo 1: SlowHeap

```
function SlowHeap(i, j)
    if i = j then
        return Nodo sin hijos conteniendo a[i]
    end
    Busque m en i ≤ m ≤ j tal que a[m] es el mínimo del rango ;    Intercambie a[m] con a[j]
    p_l ← SlowHeap(i, ⌊(i + j − 1)/2⌋) ;    p_r ← SlowHeap(⌊(i + j − 1)/2⌋ + 1, j − 1)
    return Nodo conteniendo a[j] con hijos p_l y p_r
```

(30 puntos)

3. McWidget tiene carteles en varios sitios que muestran el número de *widget* producidos. George Akeley gasta v en el viaje para actualizar los carteles y d por cada dígito que cambia (o sea, cambiar de 21 a 22 cuesta $v + d$, 99 a 100 cuesta $v + 3d$). Halle el costo amortizado por ítem producido.

(30 puntos)

4. Dan un algoritmo que responde «Sí» o «No». Si responde «Sí», esto siempre es correcto; si responde «No» está correcto con probabilidad al menos $1/n$ si la entrada es de tamaño n. Este algoritmo toma tiempo $\Theta(n^2)$ para entradas de tamaño n.

   a) Clasifique este algoritmo y su error.

   b) ¿Cuántas veces hay que ejecutarlo para garantizar probabilidad al menos $1 - 1/\mathrm{e}$ de que la respuesta es correcta?

(30 puntos)

HvB/LaTeX 2_ε

Teorema maestro

Al dividir un problema de tamaño n en a problemas de tamaño n/b que se resuelven recursivamente, si el trabajo de dividir y combinar soluciones es $f(n) > 0$, el tiempo para resolver un problema de tamaño n es, para $\alpha = \log_b a$:

$$t(n) = at(n/b) + f(n) \quad t(1) = t_1$$

cuya solución es:

$$t(n) = \begin{cases} \Theta(n^\alpha) & f(n) = O(n^c) \text{ para } c < \alpha \\ \Theta(n^\alpha) & f(n) = \Theta(n^\alpha \log^\beta n) \text{ con } \beta < -1 \\ \Theta(n^\alpha \log \log n) & f(n) = \Theta(n^\alpha \log^\beta n) \text{ con } \beta = -1 \\ \Theta(n^\alpha \log^{\beta+1} n) & f(n) = \Theta(n^\alpha \log^\beta n) \text{ con } \beta > -1 \\ \Theta(f(n)) & f(n) = \Omega(n^c) \text{ con } c > \alpha \text{ y } af(n/b) < kf(n) \text{ para } n \text{ grande con } k < 1 \end{cases}$$

Algunas series notables

En lo que sigue, $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$\frac{1}{1-az} = \sum_{n \geq 0} a^n z^n \qquad \frac{1-z^{m+1}}{1-z} = \sum_{0 \leq n \leq m} z^n$$

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} z^n \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha^{\underline{n}}}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{1/2}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n 2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} \quad (\text{si } n \geq 1) \qquad \binom{-1/2}{n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \qquad \binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{n-1}$$

$$\frac{1}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{n} z^k = \frac{1}{n!} \sum_{k \geq 0} (k+1)(k+2)\cdots(k+n) z^k = \frac{1}{n!} \sum_{k \geq 0} (k+1)^{\bar{n}} z^k$$

$$\sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} z^n = \frac{z^k}{(1-z)^{k+1}}$$

Cotas en probabilidad

Teorema (Markov)**.** *Si X es una variable aleatoria no negativa, y $c > 0$:*

$$\Pr[X > c] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{c}$$

Teorema (Chebyshev)**.** *Si X es una variable aleatoria de media $\mathbb{E}[X] = \mu$ y varianza $\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \sigma^2$, para $c > 0$:*

$$\Pr[(X-\mu)^2 > c\sigma] \leq \frac{1}{c^2}$$

Teorema (Chernoff)**.** *Sean X_i variables aleatorias, $0 \leq X_i \leq 1$ para todo i, definamos $X = \sum X_i$ y $\mu = \mathbb{E}[X]$. Si $c > 1$ con $\beta(u) = u \ln u - u + 1$ se cumplen:*

$$\Pr[X \geq c\mu] \leq \mathrm{e}^{-\beta(c)\mu}$$

$$\Pr[X \leq \mu/c] \leq \mathrm{e}^{-\beta(1/c)\mu}$$

Un límite clásico

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$$