Pauta de Corrección

Segundo Certamen
Algoritmos y Complejidad

3 de diciembre de 2016

1. Veamos cada algoritmo por turno.

   A: El tiempo de ejecución cumple:

   $$T_A(2n) = 5T_A(n) + cn$$

   Por el teorema maestro, con $a = 5$, $b = 2$, $d = 1$, estamos en el caso $a > b^d$:

   $$T_A(n) = \Theta(n^{\log_2 5})$$

   B: La recurrencia es:

   $$T_B(n) = 2T_B(n-1) + c \qquad T_B(0) = \dots$$

   Usando funciones generatrices, definimos:

   $$g(z) = \sum_{n \geq 0} T_B(n) z^n$$

   Tenemos por las propiedades del caso:

   $$\begin{aligned} \frac{g(z) - T_B(0)}{z} &= 2g(z) + \frac{c}{1-z} \\ g(z) &= \frac{T_B(0)}{1-2z} + \frac{cz}{(1-z)(1-2z)} \end{aligned}$$

   Usando el truco para fracciones parciales:

   $$\begin{aligned} \frac{z}{(1-z)(1-2z)} &= \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1-2z} \\ A &= \lim_{z \to 1} \frac{z}{1-2z} \\ &= -1 \\ B &= \lim_{z \to 1/2} \frac{z}{1-z} \\ &= 1 \end{aligned}$$

y queda:

$$\begin{aligned}
T_B(n) &= [z^n]g(z) \\
&= T_B(0)\cdot 2^n - c + c\cdot 2^n \\
&= (T_B(0)+c)\cdot 2^n - c \\
&= \Theta(2^n)
\end{aligned}$$

Más fácil: el valor de A, B es irrelevante, mientras sean diferentes de cero. Directamente vemos el resultado.

C: La recurrencia es:

$$T_C(3n) = 9T_C(n-1) + cn^2 \quad T_C(0) = \dots$$

Se aplica el teorema maestro, con $a = 9$, $b = 3$, $d = 2$, o sea es el caso $a = b^d$:

$$T_C(n) = \Theta(n^2 \log n)$$

En resumen:

$$\begin{aligned}
T_A(n) &= \Theta(n^{\log_2 5}) \\
T_B(n) &= \Theta(2^n) \\
T_C(n) &= \Theta(n^2 \log n)
\end{aligned}$$

Es claro que $\log_2 5 > 2$, para n muy grande gana C. Podría ser que para valores "razonables" de n tenga ventaja A. El algoritmo B está fuera de discusión para n grande.

Puntajes

Total		35
Análisis del algoritmo A	10	
Análisis del algoritmo B	10	
Análisis del algoritmo C	10	
Conclusiones	5	

2. Usando la misma estrategia de ir duplicando, el costo de una secuencia de n operaciones de extensión será:

$$\begin{aligned}
\sum_{0 \le k \le n} (2k - 1 + [k = 2^r]\, k^2) &= 2\frac{n(n+1)}{2} - n + \sum_{0 \le k \le n} [k = 2^r]\, k^2 \\
&= n(n+1) - n + \sum_{0 \le r \le \log_2 n} 2^{2r} \\
&\le n(n+1) - n + \log_2 n \cdot 2^{2 \log_2 n} \\
&= n^2(1 + \log_2 n)
\end{aligned}$$

El primer término es porque se llena una fila y una columna de la matriz al extender, el segundo es que hay que copiar los valores actuales a la nueva matriz al duplicar.

O sea, el costo amortizado es:

$$n(\log_2 n + 1) = \Theta(n \log n)$$

Puntajes

Total		30
Duplicar cada vez	5	
Plantear costo (aproximado) de la secuencia de n operaciones	10	
Obtener la suma	10	
Costo amortizado	5	

3. Para dividir y conquistar nos conviene dividir el arreglo en mitades iguales. En consecuencia, consideremos el elemento medio, $m = \lfloor n/2 \rfloor$ y sus vecinos. Hay tres posibilidades:

   a) Si $a[m-1] > a[m]$ y $a[m] < a[m+1]$, hemos hallado un mínimo local. Retorne m.

   b) Si $a[m-1] > a[m] > a[m+1]$, tiene que haber un mínimo local en la segunda mitad del arreglo (en el peor caso, todos los elementos disminuyen, y el último es mínimo local).

   c) En forma similar, si $a[m-1] < a[m] < a[m+1]$, tiene que haber un mínimo local en la primera mitad del arreglo (en el peor caso, todos los elementos aumentan, y el primero es mínimo local).

   Esto es similar a búsqueda binaria. La complejidad cumple:

   $$T(n) = T(n/2) + 1$$

   y el teorema maestro dice que $T(n) = \Theta(\log n)$.

Puntajes

Total		30
Dividir en mitades	5	
Tres casos	5	
Manejar cada caso (5 c/u)	15	
Complejidad	5	

4. Corremos el algoritmo hasta tener una probabilidad menor que ϵ de que la mayoría de el resultado equivocado. Siguiendo la pista, tenemos la variable aleatoria $X = X_1 + \cdots + X_n$, con los $0 \le X_i \le 1$ para todo $1 \le i \le n$. La mayoría queda expresada por el valor de X/n, si es mayor de $1/2$, gana el "correcto". Es claro que $E[X] = 2n/3$, interesa n tal que:

$$\Pr[X/n < 1/2] < \epsilon$$

Es aplicable la cota de Chernoff:

$$Pr[X < \mathbb{E}[X]/c] < \mathrm{e}^{-\beta(1/c)\mathbb{E}[X]}$$

Esto da:

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} &= \frac{1}{c} \cdot \frac{2n}{3} \\ c &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

de donde:

$$Pr[X < 1/2] < \mathrm{e}^{-\beta(3/4)\cdot 2n/3}$$

O sea:

$$\begin{aligned} \epsilon &\le \mathrm{e}^{-\beta(3/4)\cdot 2n/3} \\ \ln\epsilon &\le -\beta(3/4)\cdot 2n/3 \\ n &\ge \frac{3\ln\epsilon}{-2\beta(3/4)} \\ &= 39{,}807 \ln\frac{1}{\epsilon} \end{aligned}$$

Para $\epsilon = 10^{-k}$:

$$\begin{aligned} n &\ge 39{,}807 \cdot k \ln 10 \\ &= 91{,}660k \end{aligned}$$

Puntajes

Total		30
Aplicar pista, valor de X	10	
Planteo como probabilidad	10	
Aplicar cota inferior de Chernoff	10	

HvB/LaTeX 2_ε