Pauta de Corrección

Primer Certamen
Algoritmos y Complejidad

28 de octubre de 2017

1. Sabemos que la iteración $x_{n+1} = g(x_n)$ converge a x^* si $|g'(x^*)| < 1$. Analizamos cada una de las opciones:

   a) Tenemos:

   $$\begin{aligned} g_a'(x) &= -1 + 2x \\ g_a'(\sqrt{3}) &= -1 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

   Sabemos que $\sqrt{3} > 1$, con lo que $|2\sqrt{3} - 1| > 1$. Este esquema diverge.

   b) Acá es:

   $$\begin{aligned} g_b'(x) &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2x^2} \\ g_b'(\sqrt{3}) &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2 \cdot 3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Esto indica que la convergencia es superlineal.
   En realidad, esto resulta de aplicar el método de Newton a $x^2 - 3 = 0$, la convergencia es cuadrática.

   c) Para este caso resulta:

   $$\begin{aligned} g_c'(x) &= \frac{1 \cdot (x+1) - (x+3) \cdot 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{-2}{(x+1)^2} \\ g_c'(\sqrt{3}) &= \frac{-2}{(1+\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{-2}{1 + 2\sqrt{3} + 3} \\ &= \frac{-2}{4 + 2\sqrt{3}} \\ &= -\frac{1}{2 + \sqrt{3}} \end{aligned}$$

Es claro que $0 < |g_c'(\sqrt{3})| < 1$, hay convergencia lineal

Como esto es menor a $1/2$, converge más rápido que bisección; pero no mucho.

Concluimos que la opción que converge más rápido es g_b.

Puntajes

Total			35
Criterio de convergencia		4	
a) Derivada en $\sqrt{3}$	4		
Magnitud mayor que uno, diverge	5		
b) Derivada en $\sqrt{3}$	4		
Magnitud cero, convergencia superlineal	5		
c) Derivada en $\sqrt{3}$	4		
Magnitud menor que uno, convergencia lineal	5		
Conclusión		4	

2. Expandiendo $f(x)$ y $f'(x)$ alrededor del cero x^* por Taylor:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2} f''(x^*)(x - x^*)^2 + O((x - x^*)^3) \\
&= \frac{1}{2} f''(x^*)(x - x^*)^2 + O((x - x^*)^3) \\
f'(x) &= f''(x^*)(x - x^*) + O((x - x^*)^2)
\end{aligned}
$$

Llamando $e_n = x_n - x^*$, podemos escribir la iteración de Newton:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
e_{n+1} &= e_n - \frac{\frac{1}{2} f''(x^*) e_n^2 + O(e_n^3)}{f''(x^*) e_n + O(e_n^2)} \\
&= e_n - \frac{1}{2} e_n (1 + O(e_n)) \\
&= \frac{1}{2} e_n + O(e_n^2)
\end{aligned}
$$

Tenemos convergencia lineal.

Puntajes

Total		25
Aproximar f, f' alrededor del cero x^*	6	
Plantear iteración de Newton en términos de e_n	7	
Simplificar expresión para el error	7	
Conclusión	5	

3. Ambas partes están relacionadas, pero las tratamos separadamente:

   a) Hay cuatro coeficientes, podemos aspirar a una fórmula exacta para polinomios hasta cúbicos:

   $$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \\ p'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \end{aligned}$$

   Si coinciden los valores de la función y las derivadas con el polinomio es:

   $$\begin{aligned} f(-1) &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \\ f(1) &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ f'(-1) &= a_1 - 2a_2 + 3a_3 \\ f'(1) &= a_1 + 2a_2 + 3a_3 \end{aligned}$$

   b) La integral que buscamos es:

   $$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} p(x)\,\mathrm{d}x &= \left(a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \frac{1}{4} a_3 x^4 \right) \Big|_{-1}^{1} \\ &= 2a_0 + \frac{2}{3} a_2 \end{aligned}$$

   Sumando las primeras dos ecuaciones para los coeficientes y restando las últimas dos resulta:

   $$\begin{aligned} f(-1) + f(1) &= 2a_0 + 2a_2 \\ f'(1) - f'(-1) &= 4a_2 \end{aligned}$$

   O sea, la fórmula de cuadratura es:

   $$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx f(-1) + f(1) + \frac{1}{3}(f'(-1) - f'(1))$$

   Alternativamente, vemos que la fórmula incluye 4 parármetros, con lo que a lo más esperamos que sea válida para polinomios cúbicos. Planteamos así:

   $$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x = 2 &= A_{-1} \cdot 1 + A_1 \cdot 1 + B_{-1} \cdot 0 + B_1 \cdot 0 \\ \int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = 0 &= A_{-1} \cdot (-1) + A_1 \cdot 1 + B_{-1} \cdot 1 + B_1 \cdot 1 \\ \int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} &= A_{-1} \cdot 1 + A_1 \cdot 1 + B_{-1} \cdot (-2) + B_1 \cdot 2 \\ \int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x = 0 &= A_{-1} \cdot (-1) + A_1 \cdot 1 + B_{-1} \cdot 3 + B_1 \cdot 3 \end{aligned}$$

Tenemos el sistema:

$$\begin{aligned}
A_{-1} + A_1 &&&= 2 \\
-A_{-1} + A_1 + B_{-1} + B_1 &&&= 0 \\
A_{-1} + A_1 - 2B_{-1} + 2B_1 &&&= 2/3 \\
-A_{-1} + A_1 + 3B_{-1} + 3B_1 &&&= 0
\end{aligned}$$

Restando la segunda ecuación de la tercera, vemos que $B_{-1} = -B_1$; esto en la segunda ecuación nos da $A_{-1} = A_1$, con la primera ecuación es $A_{-1} = A_1 = 1$; de la primera y la tercera ecuaciones queda $2 + 2B_1 + 2B_1 = 2/3$, o sea $B_{-1} = -B_1 = 1/3$. La cuadratura es:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = f(-1) + f(1) + \frac{1}{3}(f'(-1) - f'(1))$$

Puntajes

Total		35
Plantear el polinomio cúbico	10	
Valores, derivadas, integral del polinomio	15	
Combinar para obtener fórmula de cuadratura	10	

4. Los temas son independientes:

   a) Un ejemplo es tener plantas en $\{0, 5, 10\}$, con clientes en $\{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$, y $d = 4$. La estrategia voraz planteada elige la planta 5 (atiende a los cuatro clientes $3, 4, 6, 7$, las otras atienden solo a tres), luego agrega 0 y 10 (hay que atender a 1 y 9). Estas son tres plantas; pero los clientes pueden atenderse con las dos plantas 0 y 10 únicamente.

   b) Nuestras tres propiedades son:

   Greedy Choice: En una solución óptima el cliente más a la izquierda es atendido por una planta. Si esa planta es la más a la derecha capaz de atenderlo, es nuestra elección. Si no, la elección voraz a lo menos es capaz de atender a los mismos clientes que la planta que atiende a ese cliente en la solución óptima.

   Inductive Substructure: Sea P el problema original, $\widehat{p}$ la planta elegida por el criterio voraz, y el problema P' lo que queda al eliminar $\widehat{p}$ con los clientes atendidos por $\widehat{p}$. Una solución viable a P', o sea, una colección de plantas entre las restantes, nunca puede entrar en conflicto con $\widehat{p}$, podemos combinar una solución a P' con $\widehat{p}$ para dar una solución a P.
   En realidad, en este caso simplemente no hay restricciones "cruzadas", esto se cumple automáticamente.

   Optimal Substructure: Consideremos una solución óptima Π^* al problema P. Por **Greedy Choice**, podemos suponer sin pérdida de generalidad que Π^* incluye la elección voraz $\widehat{p}$. Sea P' el problema que queda al eliminar $\widehat{p}$ y los clientes que atiende de P. Sea Π' una solución óptima para P', por **Inductive Substructure** es compatible con $\widehat{p}$; el tamaño de esa solución es:

   $$\begin{aligned} |\Pi' \cup \{\widehat{p}\}| &= |(\Pi^* \smallsetminus \{\widehat{p}\}) \cup \{\widehat{p}\}| \\ &= |\Pi^*| \end{aligned}$$

   y esta combinación es óptima.

   Como se cumplen las tres propiedades, el algoritmo da una solución óptima.

Puntajes

Total		30
a) Contraejemplo válido	10	
b) Algoritmo voraz	20	
Greedy choice	5	
Industive substructure	5	
Optimal substructure	5	
Se cumplen las propiedades, da un óptimo	5	

HvB/LaTeX 2_ε