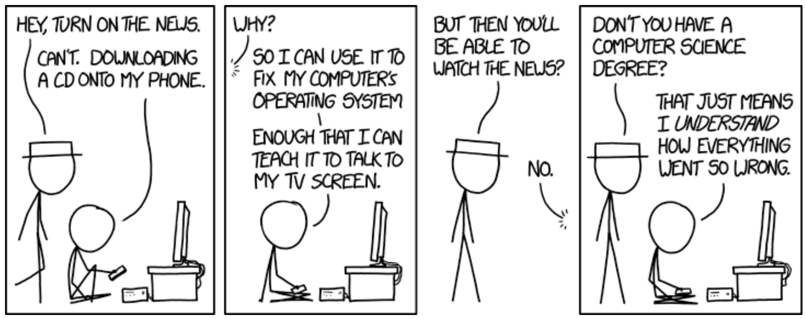
Segundo Certamen
Algoritmos y Complejidad

3 de diciembre de 2016



1. Para cierto problema cuenta con tres algoritmos alternativos:

   Algoritmo A: Resuelve el problema dividiéndolo en cinco problemas de la mitad del tamaño, los resuelve recursivamente y combina las soluciones en tiempo lineal.

   Algoritmo B: Resuelve un problema de tamaño n resolviendo recursivamente dos problemas de tamaño $n-1$ y combina las soluciones en tiempo constante.

   Algoritmo C: Divide el problema de tamaño n en nueve problemas de tamaño $n/3$, resuelve los problemas recursivamente y combina las soluciones en tiempo $O(n^2)$.

   ¿Cuál elije si n es grande, y porqué?

   (35 puntos)

2. Cierto algoritmo requiere trabajar con matrices cuadradas. Lamentablemente no se puede predecir cuál es el tamaño final requerido, por lo que ocasionalmente necesita extenderlas. Proponga un esquema eficiente de extensión de las matrices, y obtenga el costo amortizado al extender las matrices desde 1×1 hasta $n \times n$.

   (30 puntos)

3. En un arreglo a se dice que la posición i es un *mínimo local* si $a[i]$ es menor a sus vecinos, o sea si $a[i-1] > a[i]$ y $a[i] < a[i+1]$. Decimos que 0 es un mínimo local si $a[0] < a[1]$, y similarmente $n-1$ si $a[n-2] > a[n-1]$ (los extremos tienen un único vecino). Dado un arreglo a de n números distintos, diseñe un algoritmo eficiente basado en dividir y conquistar para hallar un mínimo local (pueden haber varios). Justifique su algoritmo, y derive su complejidad aproximada.

   (30 puntos)

4. Suponga que tiene un algoritmo de Monte Carlo, que siempre se ejecuta en tiempo T pero que responde correctamente solo con probabilidad $2/3$. Nótese que siempre responde “sí” o “no”, pero en ambos casos la respuesta está errada $1/3$ de las veces. Explique cómo calcular el número de corridas k para que la probabilidad de error sea menos de ϵ.
   Pista: Use variables indicadoras X_i con $X_i = 1$ si la corrida i retorna el resultado correcto, $X_i = 0$ en caso contrario; buscamos que el promedio de ellas (mayoría en k corridas) sea al menos $1/2$.

   (30 puntos)

Teorema maestro

Al dividir un problema de tamaño nb en a problemas de tamaño n, que se resuelven recursivamente, donde el trabajo que se hace al dividir y luego combinar soluciones está dado por cn^d, resulta la recurrencia:

$$t(nb) = at(n) + cn^d \quad t(1) = t_1$$

cuya solución es:

$$t(n) \sim \begin{cases} \frac{c}{b^d - a} \cdot n^d & a < b^d \\ \frac{c}{a} n^d \log_b n & a = b^d \\ \left(t_1 + \frac{c}{a - b^d}\right) \cdot n^{\log_n a} & a > b^d \end{cases}$$

Algunas series notables

En lo que sigue, $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$\frac{1}{1 - az} = \sum_{n \geq 0} a^n z^n \qquad \frac{1 - z^{m+1}}{1 - z} = \sum_{0 \leq n \leq m} z^n$$

$$(1 + z)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} z^n \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha^{\underline{n}}}{n!} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{1/2}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n 2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} \quad (\text{si } n \geq 1) \qquad \binom{-1/2}{n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \qquad \binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{n-1}$$

$$\frac{1}{(1 - z)^{n+1}} = \sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{n} z^k = \frac{1}{n!} \sum_{k \geq 0} (k+1)(k+2) \cdots (k+n) z^k = \frac{1}{n!} \sum_{k \geq 0} (k+1)^{\bar{n}} z^k$$

$$\sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} z^n = \frac{z^k}{(1 - z)^{k+1}}$$

Fracciones parciales

Un truco para dividir en fracciones parciales:

$$f(z) = \frac{az + b}{(1 - dz)(1 - ez)} = \frac{A}{1 - dz} + \frac{B}{1 - ez}$$

Se obtiene A mediante:

$$\lim_{z \to 1/d} (1 - dz) f(z) = A$$

Cotas en probabilidad

Teorema (Markov)**.** *Si X es una variable aleatoria no negativa, y $c > 0$:*

$$\Pr[X > c] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{c}$$

Teorema (Chebyshev)**.** *Si X es una variable aleatoria de media $\mathbb{E}[X] = \mu$ y varianza $\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \sigma^2$, para $c > 0$:*

$$\Pr[(X - \mu)^2 > c\sigma] \leq \frac{1}{c^2}$$

Teorema (Chernoff)**.** *Sean X_i variables aleatorias, $0 \leq X_i \leq 1$ para todo i, definamos $X = \sum X_i$ y $\mu = \mathbb{E}[X]$. Si $c > 1$ con $\beta(u) = u \ln u - u + 1$ se cumplen:*

$$\Pr[X \geq c\mu] \leq \mathrm{e}^{-\beta(c)\mu}$$

$$\Pr[X \leq \mu / c] \leq \mathrm{e}^{-\beta(1/c)\mu}$$