Análisis de convergencia paso a paso

Notación asintótica

Este documento contiene versiones más largas y *(ojalá)* más comprensibles de las demostraciones de los órdenes y radios de convergencia mostrados en el apunte.

Para entender las operaciones aquí descritas, primero debe entender bien la notación asintótica $O(k(x))$, cuando los términos $x \to 0$. En la segunda parte del ramo, análisis de algoritmos trabajaremos con notación asintótica $O(k(x))$, cuando los términos $x \to \infty$.

En particular se usa aquí, y puede resultar confusa, la propiedad:

$$\frac{\alpha}{\beta + O(\phi(x))} = \frac{\alpha}{\beta}(1 + O(\phi(x)))$$

Definición de convergencia

Al buscar:

$$f(x^\star) = 0$$

Conforme se van realizando iteraciones $x_0, x_1, ..., x_n, ...$ se busca ir reduciendo el error $e_0, e_1, ..., e_n, ...$ en cada una.

El error en el paso n está dado por:

$$e_n = x_n - x^\star$$

Convergencia lineal

Interesa encontrar un radio S, cuando $n \to \infty$ (generalmente es posible encontrarlo ahí porque la funcion comienza a comportarse más homogéneamente) entre un error y el error anterior:

$$\left|\frac{e_{n+1}}{e_n}\right| = \left|\frac{x_{n+1} - x^\star}{x_n - x^\star}\right| = C$$

Notar que si $C > 1$ entonces los errores van creciendo y no hay convergencia.

Convergencia de órden superior

Si podemos demostrar que el radio de convergencia lineal C es 0, eso implica la presencia de un órden superior de convergencia:

$$\left|\frac{e_{n+1}}{(e_n)^p}\right| = S$$

Donde p indica el órden y S indica el radio, que debe ser un número finito.

En particular, cuando $p = 2$ se dice que hay *convergencia cuadrática* y cuando $1 < p < 2$ se dice que hay *convergencia superlineal*.

Serie de Taylor

Para lograr estas demostraciones, tenemos que relacionar x_{n+1}, x_n y $x^\star$, para ese fin conviene descomponer la *Serie de Taylor* de una función $f(x)$ para x_n, alrededor de $x^\star$:

$$f(x_n) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x^\star)(x_n - x^\star)^i$$
$$f(x_n) = f(x^\star) + f'(x^\star)(x_n - x^\star) + \frac{1}{2} f''(x^\star)(x_n - x^\star)^2 + \frac{1}{6} f'''(x^\star)(x_n - x^\star)^3 + ...$$

Podemos cortar hasta el término k sabiendo que existe $x^\star < \zeta < x$ tal que:

$$f(x_n) = \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{1}{i!} f^{(i)}(x^\star)(x_n - x^\star)^i\right) + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\zeta)(x_n - x^\star)^{k+1}$$

Y podemos escribir el último término como $O((x_n - x^\star)^{k+1}) = O(e_n^{k+1})$ (esto se hace porque cuando $n \to \infty$ ese término se hace muy pequeño comparado con los demás):

$$f(x_n) = \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{1}{i!} f^{(i)}(x^\star)(x_n - x^\star)^i\right) + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\zeta)(x_n - x^\star)^{k+1}$$
$$f(x_n) = \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{1}{i!} f^{(i)}(x^\star)(x_n - x^\star)^i\right) + O((x_n - x^\star)^{k+1})$$
$$f(x_n) = \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{1}{i!} f^{(i)}(x^\star) e_n^i\right) + O(e_n^{k+1})$$

Por ejemplo, si se busca cortar hasta $k = 2$:

$$f(x_n) = f(x^\star) + f'(x^\star)e_n + \frac{1}{2}f''(x^\star)e_n^2 + O(e_n^3)$$

Convergencia lineal de una IPF

Si la función $f(x)$ es una iteración de punto fijo $g(x)$ que usamos para encontrar su punto fijo $x^\star$, cumple con $g(x^\star) = x^\star$ y, como también la usamos para actualizar x_n también cumple con $g(x_n) = x_{n+1}$:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x^\star + g'(x^\star)e_n + \frac{1}{2}g''(x^\star)e_n^2 + O(e_n^3) \\ x_{n+1} - x^\star &= g'(x^\star)e_n + \frac{1}{2}g''(x^\star)e_n^2 + O(e_n^3) \\ e_{n+1} &= g'(x^\star)e_n + \frac{1}{2}g''(x^\star)e_n^2 + O(e_n^3) \end{aligned}$$

Y desde aquí podemos relacionar e_{n+1} y e_n, es muy importante tener en cuenta que se pueden hacer estos últimos pasos, porque g es nuestra **iteración de punto fijo**, no la función a la que le queremos calcular una raíz (que llamaremos $h(x)$).

Para el caso de una iteración de punto fijo cualquiera, tenemos:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= g'(x^\star)e_n + \frac{1}{2}g''(x^\star)e_n^2 + O(e_n^3) \\ e_{n+1} &= g'(x^\star)e_n + O(e_n^2) \\ \frac{e_{n+1}}{e_n} &= g'(x^\star) + O(e_n) \end{aligned}$$

Y cuando $n \to \infty$, osea, estamos muy cerca de la raíz tenemos el radio de convergencia lineal:

$$\begin{aligned} \frac{e_{n+1}}{e_n} &= g'(x^\star) \\ \left|\frac{e_{n+1}}{e_n}\right| &= |g'(x^\star)| \end{aligned}$$

El método de Newton, pese a ser una iteración de punto fijo, converge con orden cuadrático, es posible *desbloquear* órdenes superiores asegurando que el radio de convergencia lineal C sea igual a 0. El método de Newton logra esto asegurando $g'(x^\star) = 0$. Podemos comprobar que:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= x - \frac{h(x)}{h'(x)} \\
g'(x) &= 1 - \frac{h'(x)h'(x) - h(x)h''(x)}{(h'(x))^2} \\
g'(x^\star) &= 1 - \frac{h'(x^\star)h'(x^\star) - h(x^\star)h''(x^\star)}{(h'(x^\star))^2} \\
g'(x^\star) &= 1 - \frac{h'(x^\star)h'(x^\star) - 0 \cdot h''(x^\star)}{(h'(x^\star))^2} \\
g'(x^\star) &= 1 - 1 = 0
\end{aligned}
$$

Notar si, que estas operaciones sólo son válidas si $h'(x^\star) \neq 0$, de otra manera el resultado no es 0 y el método de Newton converge de manera lineal.

Sabiendo que $g'(x^\star) = 0$ para el método de Newton, podemos volver a la expansión de la serie de Taylor:

$$
\begin{aligned}
e_{n+1} &= g'(x^\star)e_n + \frac{1}{2}g''(x^\star)e_n^2 + O(e_n^3) \\
e_{n+1} &= \frac{1}{2}g''(x^\star)e_n^2 + O(e_n^3) \\
\frac{e_{n+1}}{e_n^2} &= \frac{1}{2}g''(x^\star) + O(e_n) \\
\frac{e_{n+1}}{e_n^2} &= \frac{1}{2}g''(x^\star) \qquad \text{cuando } n \to \infty
\end{aligned}
$$

Y tenemos un órden de convergencia cuadrático. Si queremos dejar esto en términos de $h(x^\star)$, una opción sería obtener la segunda derivada de $g(x)$ y evaluarla en $x^\star$, pero también podríamos haber llegado a este resultado a partir de modificar la fórmula original y expandir la serie de Taylor de $h(x)$ y la de $h'(x)$ alrededor de $x^\star$:

$$
\begin{aligned}
g(x_n) &= x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} \\
x_{n+1} &= x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} \\
x_{n+1} - x^\star &= x_n - x^\star - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} \\
e_{n+1} &= e_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} \\
e_{n+1} &= e_n - \frac{h(x^\star) + h'(x^\star)e_n + \frac{1}{2}h''(x^\star)e_n^2 + O(e_n^3)}{h'(x^\star) + h''(x^\star)e_n + O(e_n^2)} \\
e_{n+1} &= e_n - \frac{0 + h'(x^\star)e_n + \frac{1}{2}h''(x^\star)e_n^2 + O(e_n^3)}{h'(x^\star) + h''(x^\star)e_n + O(e_n^2)} \\
e_{n+1} &= e_n - e_n\frac{h'(x^\star) + \frac{1}{2}h''(x^\star)e_n + O(e_n^2)}{h'(x^\star) + h''(x^\star)e_n + O(e_n^2)} \\
e_{n+1} &= e_n\frac{\frac{1}{2}h''(x^\star)e_n + O(e_n^2)}{h'(x^\star) + h''(x^\star)e_n + O(e_n^2)} \\
e_{n+1} &= e_n\frac{\frac{1}{2}h''(x^\star)e_n}{h'(x^\star) + h''(x^\star)e_n + O(e_n^2)} + O(e_n^3) \\
e_{n+1} &= e_n\frac{\frac{1}{2}h''(x^\star)e_n}{h'(x^\star) + O(e_n)} + O(e_n^3) \\
e_{n+1} &= e_n\frac{\frac{1}{2}h''(x^\star)e_n}{h'(x^\star) + O(e_n)} + O(e_n^3) \\
e_{n+1} &= e_n^2\frac{\frac{1}{2}h''(x^\star)}{h'(x^\star) + O(e_n)} + O(e_n^3) \\
e_{n+1} &= e_n^2\frac{\frac{1}{2}h''(x^\star)}{h'(x^\star)(1 + O(e_n))} + O(e_n^3) \\
e_{n+1} &= e_n^2\frac{\frac{1}{2}h''(x^\star)}{h'(x^\star)}(1 + O(e_n)) + O(e_n^3) \\
e_{n+1} &= e_n^2\frac{\frac{1}{2}h''(x^\star)}{h'(x^\star)} + O(e_n^3) \\
\frac{e_{n+1}}{e_n^2} &= \frac{\frac{1}{2}h''(x^\star)}{h'(x^\star)} + O(e_n) \\
\left|\frac{e_{n+1}}{e_n^2}\right| &= \left|\frac{h''(x^\star)}{2h'(x^\star)}\right| \qquad \text{cuando } n \to \infty
\end{aligned}
$$

Convergencia del método de la secante

WIP.

Convergencia de otros métodos

Convergencia del método de la bisección

En el paso 0 del método de la bisección, se sabe que la solución está en el intervalo $[a, b]$, de largo $b - a$, este intervalo se reduce a la mitad en cada paso, por lo que en el paso i, el largo del intervalo será:

$$l_i = \frac{b-a}{2^i}$$

Si tenemos que terminar la iteración en el paso i, nuestra aproximación será la mitad del intervalo $(a_i + b_i)/2$, para que así nuestro error máximo sea $|e_i| = l_i/2$.

Así, el radio de convergencia lineal queda:

$$\left|\frac{e_{n+1}}{e_n}\right| = \frac{l_{i+1}/2}{l_i/2} = \frac{(b-a)/2^{i+2}}{(b-a)/2^{i+1}} = \frac{1}{2}$$

Convergencia de Regula-falsi

A partir de la fórmula tenemos:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} \\
x_{n+1} - x^\star &= x_n - x^\star - f(x_n)\frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} \\
e_{n+1} &= e_n - f(x_n)\frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} \\
e_{n+1} &= e_n - f(x_n)\frac{x_n - x^\star - x_0 + x^\star}{f(x_n) - f(x_0)} \\
e_{n+1} &= e_n - f(x_n)\frac{e_n - e_0}{f(x_n) - f(x_0)}
\end{aligned}$$

Expandiendo la serie de Taylor para los $f(x_n)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
f(x_n) &= f(x^\star) + f'(x^\star)e_n + O(e_n^2) \\
f(x_n) &= 0 + f'(x^\star)e_n + O(e_n^2)
\end{aligned}$$

Reemplazando en la igualdad:

$$
\begin{aligned}
e_{n+1} &= e_n - (f'(x^\star)e_n + O(e_n^2))\frac{e_n - e_0}{f'(x^\star)e_n + O(e_n^2) - f(x_0)}\\
e_{n+1} &= e_n - (f'(x^\star)e_n + O(e_n^2))\frac{e_n - e_0}{O(e_n) - f(x_0)}\\
e_{n+1} &= e_n - (f'(x^\star)e_n + O(e_n^2))\frac{e_n - e_0}{-f(x_0)}(1 + O(e_n))\\
e_{n+1} &= e_n - (f'(x^\star)e_n + O(e_n^2))\left(\frac{e_0}{f(x_0)} + O(e_n)\right)\\
e_{n+1} &= e_n - e_n(f'(x^\star) + O(e_n))\left(\frac{e_0}{f(x_0)} + O(e_n)\right)\\
e_{n+1} &= e_n - e_n\left(\frac{e_0 f'(x^\star)}{f(x_0)} + O(e_n)\right)\\
\frac{e_{n+1}}{e_n} &= 1 - \frac{e_0 f'(x^\star)}{f(x_0)} + O(e_n)\\
\left|\frac{e_{n+1}}{e_n}\right| &= \left|1 - \frac{e_0 f'(x^\star)}{f(x_0)}\right| \qquad \text{cuando } n \to \infty
\end{aligned}
$$

Esto nos permite saber cuándo convergeremos más rápidamente que con el método de la bisección, bajo el supuesto de que queremos realizar infinitos pasos.