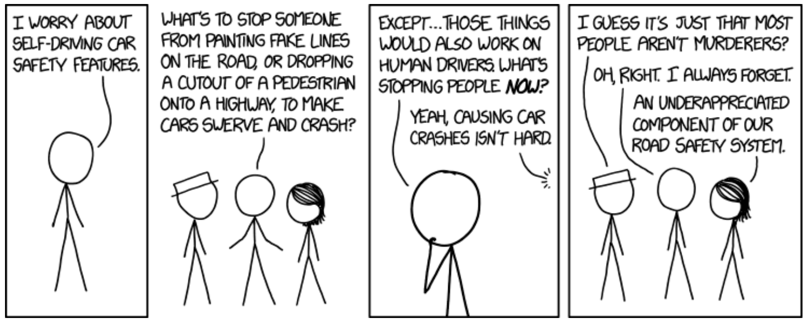
Primer Certamen
Algoritmos y Complejidad

5 de mayo de 2018



1. Considere la iteración de punto fijo $x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$, donde a es una constante positiva. a) ¿Cuál es el punto fijo, si lo hay? b) ¿Para qué valores de a para los que hay punto fijo converge cerca del punto fijo? c) Dado un valor de a para el cual converge, ¿para qué valores iniciales x_0 converge?

   (25 puntos)

2. Siempre puede usarse la iteración de punto fijo $x_{n+1} = x_n + \alpha f(x_n)$ con x_0 adecuado para hallar un cero de f. ¿Cuál es el mejor valor posible de α, si f tiene un cero simple en x^*, y si consideramos únicamente la convergencia “cerca del cero”?

   (15 puntos)

3. Sean puntos reales $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Para estimar la integral, interpolamos mediante un polinomio e integramos éste, lo que da una fórmula como:

   $$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{0 \le k \le n} A_k f(x_k)$$

   Con los polinomios:

   $$\ell_k(x) = \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \ne k}} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

   demuestre que:

   $$A_k = \int_{x_0}^{x_n} \ell_k(x)\,\mathrm{d}x$$

   (25 puntos)

4. Hay una colección de actividades, cada una de las cuales requiere ejecutarse por una unidad de tiempo en la única máquina disponible. La actividad i trae ganancia g_i si se completa antes de su plazo fatal f_i, en caso contrario no aporta nada. Se busca la secuencia de actividades a programar de forma de obtener la máxima ganancia. Demuestre que su algoritmo da una solución óptima. (30 puntos)

5. Considere la secuencia definida por:

   $$a_0 = a_1 = 1$$
   $$a_{n+2} = (3a_{n+1} + 2a_n) \bmod 42$$

   a) Demuestre que la forma recursiva obvia para calcular el valor de a_n toma tiempo exponencial.

   b) Describa un algoritmo eficiente para calcular los valores de a_n.

   (35 puntos)

HvB/LaTeX 2_ε