# Pauta tarea 1
Algoritmos y Complejidad

*«La curiosidad mató al gato…»*

Algorithm Knaves

2018-09-11

A pesar que el enunciado no lo dice explícitamente, son cuatro problemas. Los métodos a discutir (salvo bisección) aproximan la función mediante una recta, esto hace suponer que una aproximación cuadrática será suficiente:

$$\begin{aligned}
f(x^* + h) &= f(x^*) + f'(x^*)h + \frac{1}{2} f''(x^*)h^2 + O(h^3) \quad (|h| \le \epsilon) \\
&= \frac{1}{2} f''(x^*)h^2 + O(h^3) \quad (|h| \le \epsilon) \\
&= \frac{1}{2} f''(x^*)h^2(1 + O(h)) \quad (|h| \le \epsilon)
\end{aligned}$$

Lo último ya que suponemos un cero doble en $x^*$, $f(x^*) = f'(x^*) = 0$ y $f''(x^*) \neq 0$.

a) El método de bisección supone dos puntos $x_1$ y $x_2$ tales que $f(x_1)$ y $f(x_2)$ tengan signos distintos. Si $x^*$ es un cero doble, en un entorno de $x^*$ la función $f$ tiene el mismo signo. El método no es aplicable.

b) Para el método de *regula falsi* partimos con la misma expresión usada en clase. Solo tiene sentido aproximar el valor de la función en $x_n$, el punto móvil:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \frac{x_0 f(x_n) - x_n f(x_0)}{f(x_n) - f(x_0)} \\
e_{n+1} &= \frac{e_0 f(x_n) - e_n f(x_0)}{f(x_n) f(x_0)} \\
&= \frac{e_0 \left(\frac{1}{2} f''(x^*) e_n^2 + O(e_n^3)\right) - e_n f(x_0)}{\left(\frac{1}{2} f''(x^*) e_n^2 + O(e_n^3)\right) - f(x_0)} \\
&= \frac{-e_n f(x_0) + O(e_n^2)}{-f(x_0) + O(e_n^2)} \\
&= e_n + O(e_n^2)
\end{aligned}$$

Esto dice que el error esencialmente no cambia en una iteración, el método no converge (o converge muy lento).

c) El caso del método de Newton se analiza en el apunte (aguinaldo de Fiestas Patrias, tiqui-tiqui-ti).

d) Para el método de la secante, partimos con la misma expresión usada en clase para analizar convergencia:

$$\begin{aligned}
x_{n+2} &= \frac{x_n f(x_{n+1}) - x_{n+1} f(x_n)}{f(x_{n+1}) - f(x_n)} \\
e_{n+2} &= \frac{e_n \left(\frac{1}{2} f''(x^*) e_{n+1}^2 + O(e_{n+1}^3)\right) - e_{n+1} \left(\frac{1}{2} f''(x^*) e_n^2 + O(e_n^3)\right)}{\frac{1}{2} f''(x^*) e_{n+1}^2 + O(e_{n+1}^3) - \frac{1}{2} f''(x^*) e_n^2 + O(e_n)^3)} \\
&= e_n e_{n+1} \frac{e_{n+1} - e_n + O(e_n^2 + e_{n+1}^2)}{e_{n+1}^2 - e_n^2 + O(e_n^3 + e_{n+1}^3)}
\end{aligned}$$

Suponemos que converge o al menos el error se mantiene acotado, con lo que $e_{n+1} = O(e_n)$. Así numerador y denominador se pueden expresar:

$$\begin{aligned}
e_{n+1} - e_n + O(e_n^2 + e_{n+1}^2) &= (e_{n+1} - e_n)(1 + O(e_n)) \\
e_{n+1}^2 - e_n^2 + O(e_n^3 + e_{n+1}^3) &= (e_{n+1}^2 - e_n^2)(1 + O(e_n))
\end{aligned}$$

Así resulta al factorizar:

$$\begin{aligned}
e_{n+2} &= e_n e_{n+1} \frac{1}{e_n + e_{n+1}} (1 + O(e_n)) \\
&= e_n e_{n+1} \frac{1}{e_n} (1 + O(e_n)) \\
&= e_{n+1} (1 + O(e_n))
\end{aligned}$$

Nuevamente, convergencia muy lenta si es que la hay.