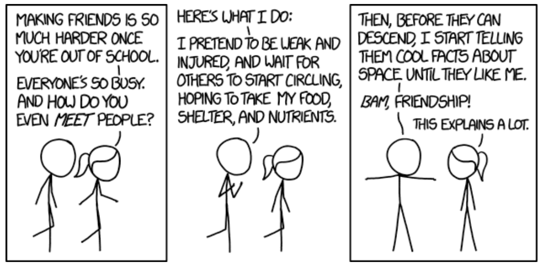
Certamen Recuperativo
Algoritmos y Complejidad

27 de diciembre de 2017



1. Todas las funciones siguientes tienen $\sqrt{3}$ como punto fijo. ¿Cuál es la que converge más rápido cerca de $\sqrt{3}$?

$$g_a(x) = x(x+1) - 3 \qquad g_b(x) = \frac{3}{x} \qquad g_c(x) = \frac{x^3+3}{x(x+1)}$$

(30 puntos)

2. Considere el algoritmo 1. ¿Cuántas veces come maní si se llama Beer(n)? ¿Cuánta cerveza bebe?

Algoritmo 1: El algoritmo Beer

```
procedure Beer(n)
    if n = 1 then
        Eat some peanuts
    else
        Pick m with 1 ≤ m ≤ n − 1
        Beer(m)
        Drink a pint of beer
        Beer(n − m)
    end
```

Pista: Las funciones $p(n)$ y $b(n)$ son lineales en n

(25 puntos)

3. Las técnicas de algoritmos voraces, backtracking y programación dinámica son generalmente aplicables a los mismos problemas. Explique cuándo aplicar cada uno de ellos, dando criterios claros.

(20 puntos)

4. La cadena *Empanadas to go* quiere instalarse en múltiples puntos a lo largo de Chile (consideramos que está en $\mathbb{R}^1$), los lugares posibles están posiciones $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ordenadas de Punta Arenas a Arica). La ganancia estimada al instalar un restaurante en el punto i es g_i, por política de la empresa nunca deben haber dos restaurantes a menos de d kilómetros de distancia. Sea $\mathrm{OPT}(k)$ la máxima ganancia considerando solo las posiciones $1, \ldots, k$.

   a) En estos términos, indique lo que nos interesa obtener, y un caso base.
   b) Escriba una recurrencia para OPT.
   c) Usando los puntos $4a$ y $4b$, implemente la recurrencia eficientemente en pseudocódigo.

(30 puntos)

5. La empresa McWidget se siente orgullosa de su producto, instaló carteles que muestran el número de ítem producidos. George Akeley está encargado de actualizarlos, gasta v en el viaje para visitar los carteles y d por cada dígito que cambia (o sea, al cambiar de 21 a 22 gasta $c+d$, al cambiar 99 a 100 gasta $c+3d$). Halle el costo amortizado por cada ítem producido.

(30 puntos)

HvB/LaTeX 2_ε

Teorema maestro

Al dividir un problema de tamaño n en a problemas de tamaño n/b que se resuelven recursivamente, el trabajo de dividir y combinar soluciones es $f(n) > 0$:

$$t(n) = a t(n/b) + f(n) \quad t(1) = t_1$$

cuya solución es:

$$t(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & f(n) = O(n^c) \text{ para } c < \log_b a \\ \Theta(n^{\log_b a}) & f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^\alpha n) \text{ con } \alpha < -1 \\ \Theta(n^{\log_b a} \log\log n) & f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^\alpha n) \text{ con } \alpha = -1 \\ \Theta(n^{\log_b a} \log^{\alpha+1} n) & f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^\alpha n) \text{ con } \alpha > -1 \\ \Theta(f(n)) & f(n) = \Omega(n^c) \text{ con } c > \log_b a \text{ y } a f(n/b) < k f(n) \text{ para } n \text{ grande con } k < 1 \end{cases}$$

Algunas series notables

En lo que sigue, $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$\frac{1}{1-az} = \sum_{n \geq 0} a^n z^n \qquad \frac{1-z^{m+1}}{1-z} = \sum_{0 \leq n \leq m} z^n$$

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} z^n \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha^{\underline{n}}}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{1/2}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n 2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} \quad (\text{si } n \geq 1) \qquad \binom{-1/2}{n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \qquad \binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{n-1}$$

$$\frac{1}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{n} z^k = \frac{1}{n!} \sum_{k \geq 0} (k+1)(k+2)\cdots(k+n) z^k = \frac{1}{n!} \sum_{k \geq 0} (k+1)^{\overline{n}} z^k$$

$$\sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} z^n = \frac{z^k}{(1-z)^{k+1}}$$