Ayudantía 3 - Algoritmos y Complejidad
Interpolación y Cuadratura

Sassy Complexes

1. Introducción

Muchas veces olvidamos que los computadores no piensan como nosotros. A pesar de que a nosotros nos gusten las funciones avanzadas y complejas el computador en general prefiere trabajar con casos más generales.

Como el computador sabe que cualquier función puede escribirse como una serie polinomial, le gusta aproximar las funciones utilizando polinomios a costa de un pequeño error (el cual existiría de todas maneras debido a la representación de punto flotante).

2. Interpolación

A partir de valores **exactos** de una función **desconocida**, buscamos el polinomio de menor grado que cumpla con todos esos valores, de esta forma aproximando la función desconocida con una conocida.

Teorema: Existe exactamente un polinomio de grado menor o igual a n que pase por $n+1$ puntos.

Polinomio de grado n solo puede tener n ceros.

3. Como Interpolar

3.1. Sistemas de ecuaciones

Suponiendo $p_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ que interpola $n+1$ puntos, creamos un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned}
p(x_0) &= y_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + ... + a_n x_0^2 \\
p(x_1) &= y_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + ... + a_n x_1^2 \\
&\vdots \\
p(x_n) &= y_n = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + ... + a_n x_n^2
\end{aligned}$$

Que matricialmente se escribe:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de Vandermonde}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Con igual cantidad de ecuaciones e incógnitas, el sistema de ecuaciones tiene solución única si y solo si det $\neq 0$.

Ejemplo: Si tenemos el polinomio $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, entonces la ecuación con la matriz de Vandermonde es:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

3.2. Lagrange

Consiste en usar el polinomio:

$$\begin{aligned} p(x) =& f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \dots + \\ & f(x_n)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})} \\ =& \sum_{0\le k\le n} f(x_k) \prod_{0\le j\le n, j\ne k} \frac{x-x_j}{x_n-x_j} \end{aligned} \tag{1}$$

como interpolación de f. Si evalúa p en alguno de los x_k con $k \in \{1,2,3,\dots,n\}$ que nos entregan , $p(x_k) = f(x_k)$ y el polinomio es de grado n.

Se define

$$l_i(x) = \prod_{0\le j\le n, j\ne i} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \tag{2}$$

el cual tiene la particularidad

$$l_i(x_j) = [i = j] = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \ne i \end{cases}$$

En la práctica, la fórmula (1) requiere $O(n^2)$ computación para calcular $p(x)$, por lo que no es buena.

Ejemplo:

Sean los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) a interpolar. El polinomio interpolador será:

$$P_1(x) = y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

Entonces:

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}$$
$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)}$$

Y el polinomio que interpola finalmente resulta:

$$P_1(x) = y_1\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)} + y_2\frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)}$$

3.3. Lagrange-Baricentrico

Forma alternativa a la Forma de Lagrange:

$$p(x) = \frac{\displaystyle\sum_{0\le j\le n} w_j \frac{f(x_j)}{x - x_j}}{\displaystyle\sum_{0\le j\le n} \frac{w_j}{x - x_j}}$$

donde

$$w_j = \frac{1}{\displaystyle\sum_{\substack{0\le k\le n\\ k\ne j}} (x_j - x_k)}$$

Y necesitaremos sólo $O(n)$ operaciones cada vez que se quiera evaluar el polinomio.

3.4. Newton

Q_k es la interpolación de grado k de f.

$$\begin{aligned}
Q_0(x) &= f(x_0) = a_0\\
Q_1(x) &= f(x_0) + (x_1 - x_0)\underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{Q_0(x_1)}\\
Q_2(x) &= f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{f(x_2) - Q_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}\\
&\vdots\\
Q_k(x) &= Q_{k-1}(x) + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})a_k
\end{aligned} \tag{3}$$

donde

$$a_k = \frac{f(x_k) - Q_{k-1}(x_k)}{\displaystyle\prod_{0\le i\le k-1} (x_k - x_i)}$$

3.4.1. Diferencias divididas

Sea $f[x_1 \quad \cdots \quad x_n]$ el coeficiente del término x^{n-1} en el único polinomio que interpola (x_i, y_i). Entonces, el polinomio interpolador según diferencias divididas de Newton es:

$$\begin{aligned}
P_{n-1}(x) = f[x_1] &+ f[x_1 \quad x_2](x - x_1)\\
&+ f[x_1 \quad x_2 \quad x_3](x - x_1)(x - x_2)\\
&\ \vdots\\
&+ f[x_1 \quad \cdots \quad x_n](x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})
\end{aligned}$$

Las diferencias divididas se calculan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
f[x_i] &= y_i\\
f[x_i \quad x_{i+1}] &= \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}\\
f[x_i \quad x_{i+1} \quad x_{i+2}] &= \frac{f[x_{i+1} \quad x_{i+2}] - f[x_i \quad x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}\\
f[x_i \quad x_{i+1} \quad x_{i+2} \quad x_{i+3}] &= \frac{f[x_{i+1} \quad x_{i+2} \quad x_{i+3}] - f[x_i \quad x_{i+1} \quad x_{i+2}]}{x_{i+3} - x_i}
\end{aligned}$$

4. Error de Interpolación

Interesa ver como depende el error de los puntos de interpolación escogidos. El error entre la función f y el polinomio interpolador p se calcula de la siguiente manera:

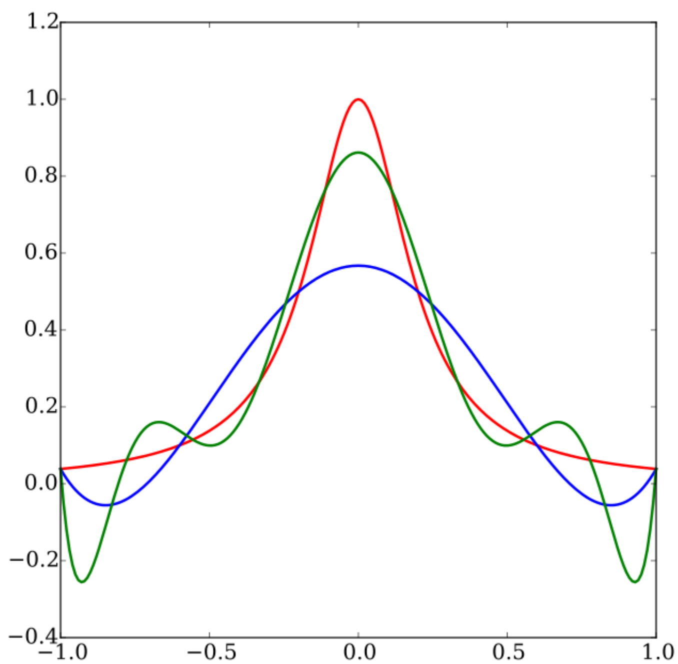
$$\left|p(x)-f(x)\right| = \underbrace{\left|\prod (x-x_j) f^{(n+1)}(\xi)\frac{1}{(n-1)!}\right|}_{\text{error}} \tag{4}$$

El peor caso para el error es:

$$|f(x)-P(x)| \leq \max_x \left|\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n-1)!} f^{(n+1)}(c)\right|$$

4.1. Fenómeno de Runge

Se puede usar un polinomio para interpolar cualquier cantidad de puntos, pero nada asegura que el polinomio se comporte de una forma “estetica y bonita”. Por ejemplo, si interpolamos sobre puntos equiespaciados ocurre el llamado fenomeno de Runge donde el polinomio interpolado empieza a ocilar erraticamente en los bordes.



5. Interpolación de Chebyshev

La interpolación de Chebyshev se refiere a una forma particular de definición de los puntos de interpolación, tal que el error de interpolación es minimizado. La idea es reducir el efecto del fenomeno de Runge, dandole mas puntos de interpolacion a los bordes. Requiere poder controlar los puntos que vamos a interpolar.

5.1. Puntos de Chebyshev

La elección de los números reales $-1 \leq x_1, \cdots, x_n \leq 1$ que hace el valor de

$$\max_{x\in[-1,1]} |(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$$

sea mínimo es

$$x_i = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right), \quad i = 1, \cdots, n$$

donde x_i son los ceros del **polinomio de Chebyshev**.

Usando estos puntos se obtiene el siguiente mínimo:

$$\max_{x\in[-1,1]} |(x-x_1)\cdots(x-x_n)| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Por lo tanto, el error de interpolación queda acotado de la siguiente forma:

$$\left|p(x) - f(x)\right| \leq \left|\frac{1}{2^{n-1}} f^{(n+1)}(\xi)\frac{1}{(n-1)!}\right|$$

5.2. Polinomios de Chebyshev

Estos se definen recursivamente como

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Además, como $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$, sabemos que los valores que puede tomar están entre -1 y 1.

Los ceros del polinomio los podemos obtener resolviendo

$$\begin{aligned} T_n(x) &= 0 \\ \cos(n\arccos(x)) &= 0 \\ n\arccos(x_i) &= (2i-1)\frac{\pi}{2}, i = 1, \cdots, n \\ x_i &= \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right), \quad i = 1, \cdots, n \end{aligned}$$

5.3. Cambio de intervalo

Llevaremos la interpolación de Chebyshev de $[-1,1]$ a $[a,b]$. Desplazaremos los puntos originales a este nuevo intervalo haciendo:

$$\tilde{x}_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right), \quad i = 1, \cdots, n$$

quedando el siguiente error de interpolación:

$$\left|p(x) - f(x)\right| \leq \left|\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^n}{2^{n-1}} f^{(n+1)}(\xi)\frac{1}{(n-1)!}\right|$$

6. Cuadratura

Cuadratura significa encontrar el área. En palabras simples, cuadratura solo es una palabra bonita para referirse a la integración. Todo en esta parte del curso gira en torno a encontrar:

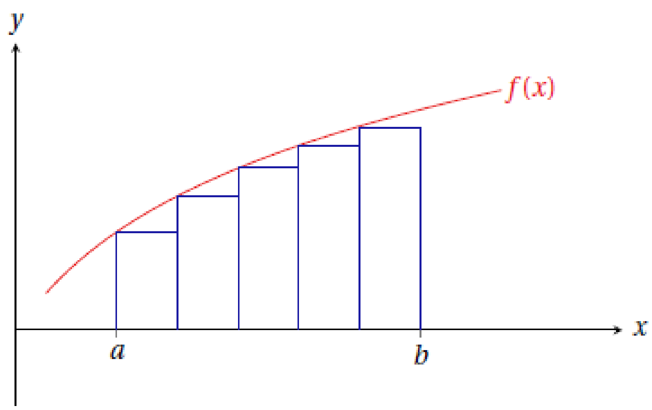
$$\int_a^b f(x)dx$$

Puede sonar fome pero el estudio de estos problemas llevo a grandes avances en las matemáticas, por ejemplo el calculo del área del circulo, π.

En este curso veremos los métodos númericos, o sea AQUELLOS QUE TRABAJAN CON NÚMEROS. Estos nos dan resultados aproximados dentro de tolerancias.

6.1. Polinomio de grado 0 -Metodo del Rectangulo - Sumas de Riemann

Dibuja rectangulitos.



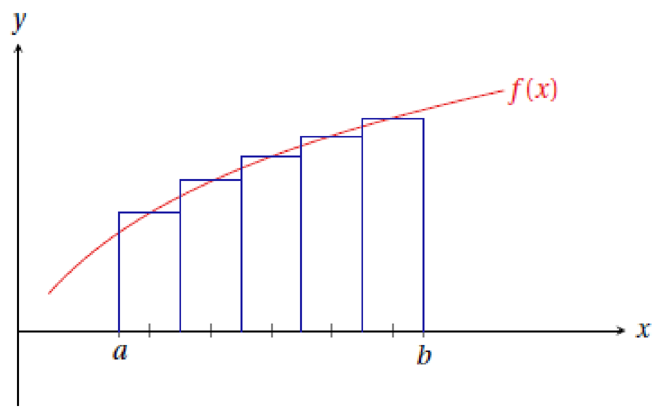
Va por la siguiente formula:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)(x_{j+1} - x_j)$$

Si los puntos de cuadratura/interpolación son equiespaciados.

$$x_{j+1} - x_j = \Delta x$$
$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x \cdot \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)$$

Este método toma como punto de evaluación las esquinas izquierdas del rectángulo, pero podría usted tomar los centros de los rectángulos.



6.2. Punto medio

Escoger el punto medio del rectángulo:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x \sum_{0\leq i<n} f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)$$

6.3. Polinomio de grado 1 - Regla del Trapezoide

Aproximar la función usando trapecios.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x \sum_{i} \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$$

6.4. Polinomio de grado 2 - Regla de Simpson

Por 3 puntos solo pasa una parábola. Tomando en cuenta lo anterior, se aproxima la función haciendo pasar una parábola por 3 puntos, cada 2 puntos consecutivos.

Para sacar el área bajo la función, calculamos el área bajo cada parábola de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x \sum_{i\%2=0} \frac{f(x_i)+4f(x_{i+1})+f(x_{i+2})}{3}$$

6.5. Cuadratura Gaussiana

Escoger los puntos en vez de agregar más. Supongamos que queremos encontrar 2 puntos de cuadratura en la ecuación:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1)$$

Como queremos encontrar valores para a_0, a_1, x_0, x_1, esperamos que la ecuación sea exacta para polinomios hasta de grado $2\times 2-1=3$, es decir, exacta para $1, x, x^2, x^3$. Entonces, formando el sistema de ecuaciones de la siguiente manera

$$\int_{-1}^{1} x^k dx = a_0 x_0^k + a_1 x_1^k \ , \ \ k \in \{1,2,3,4\}$$

obtenemos:

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} dx = 2 = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) = a_0 \times 1 + a_1 \times 1 = a_0 + a_1 \\ \int_{-1}^{1} x dx = 0 = a_0 x_0 + a_1 x_1 \\ \int_{-1}^{1} x^2 dx = \dfrac{2}{3} = a_0 x_0^2 + a_1 x_1^2 \\ \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 = a_0 x_0^3 a_1 x_1^3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema resulta:

$$a_0 = 1 \ , \ \ a_1 = 1 \ , \ \ x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \ , \ \ x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Lo anterior se puede extender a n puntos de cuadratura con $0 \leq i \leq n-1$:

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \sum_{0 \leq i < n} w_i f(x_i)$$

Ejercicios

1. Encontrar una cantidad n (de puntos de Chebyshev) que permita construir un polinomio interpolador $Q_n(x)$para la función $f(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ de tal manera que el error de interpolación para cualquier $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ sea:

$$|f(x) - Q_n(x)| \leq K$$

Donde K es una constante positiva cualquiera.
Nota: No es necesario que encuentre una expresión explícita para n.

Solución

Primero vemos que si utilizamos n puntos de Chevyshev, la productoria estará acotada por:

$$\begin{aligned} \left| \prod_{1 \leq i \leq n} (x - x_i) \right| &\leq \frac{\left(\frac{2-\frac{1}{2}}{2}\right)^n}{2^{n-1}} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{2^{n-1}} \\ &= 2\left(\frac{3}{8}\right)^n \end{aligned}$$

Por otro lado, se busca la $n+1$ derivada de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\frac{x}{2} \\ f'(x) &= \frac{1}{x} \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2} \\ f'''(x) &= \frac{2}{x^3} \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{6}{x^3} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} \\ f^{(n+1)}(x) &= (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

Fijándose sólo en el valor absoluto vemos que, en el intervalo $[\frac{1}{2}, 2]$, $f^{(n+1)}(x)$ está acotada por sus valores en los extremos:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(1/2) \geq f^{(n+1)}(x) \geq f^{(n+1)}(2) \qquad &\text{con } n \text{ par.} \\ f^{(n+1)}(1/2) \leq f^{(n+1)}(x) \leq f^{(n+1)}(2) \qquad &\text{con } n \text{ impar.} \end{aligned}$$

Ahora nos remitimos a los valores absolutos:

$$\begin{aligned} \left|f^{(n+1)}(2)\right| &\leq \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq \left|f^{(n+1)}(1/2)\right| \\ \frac{n!}{2^{n+1}} &= \leq \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq \frac{n!}{(\frac{1}{2})^{n+1}} \\ \frac{n!}{2^{n+1}} &= \leq \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq 2^{n+1}n! \\ \frac{n!}{2^{n+1}} &= \leq \left|f^{(n+1)}(\zeta)\right| \leq 2^{n+1}n! \end{aligned}$$

Sabemos entonces que:

$$\left|\prod_{1\le i\le n}(x-x_i)\right| \le \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{2^{n-1}} \qquad \text{y} \qquad \left|f^{(n+1)}(\zeta)\right| \le 2^{n+1}n!$$

Por lo tanto, el valor absoluto del error:

$$\left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\zeta)\prod_{1\le i\le n}(x-x_i)\right| \le \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{2^{n-1}}\cdot 2^{n+1}n! = \frac{4\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n+1}$$

Entonces, bastaría elegir n suficientemente grande para que:

$$\frac{4\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n+1} \le K$$

2. Encontrar el polinomio interpolador de los puntos $(-1,1),(2,3)\,y(4,0)$ utilizando diferencias divididas. Suponga que ahora le piden interpolar agregando el punto (a,b). Calcule el nuevo polinomio interpolador reciclando su trabajo anterior.

   Solución

$$\begin{array}{r|llll}
-1 & 1 & & \\
 & & \frac{3-1}{2-(-1)} = \frac{2}{3} & \\
2 & 3 & & \frac{\frac{-3}{2}-\frac{2}{3}}{4-(-1)} = \frac{-13}{30} \\
 & & \frac{0-3}{4-2} = \frac{-3}{2} & \\
4 & 0 & &
\end{array}$$

$$P_2(x) = 1 + \frac{2}{3}(x-(-1)) + \frac{-13}{30}(x-(-1))(x-2)$$

   Agregar otro punto es agregar un piso mas a la piramide:

$$P_3(x) = P_2(x) + \frac{\frac{\frac{\mathbf{b-0}}{\mathbf{a-4}}-\frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{2}}}{\mathbf{a-2}}-\frac{\mathbf{-13}}{\mathbf{30}}}{\mathbf{a}-(\mathbf{-1})}(x-(-1))(x-2)(x-4)$$

   por:

$$\begin{array}{r|lllll}
-1 & 1 & & & \\
 & & \frac{3-1}{2-(-1)} = \frac{2}{3} & & \\
2 & 3 & & \frac{\frac{-3}{2}-\frac{2}{3}}{4-(-1)} = \frac{-13}{30} & \\
 & & & & \frac{\frac{\frac{\mathbf{b-0}}{\mathbf{a-4}}-\frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{2}}}{\mathbf{a-2}}-\frac{\mathbf{-13}}{\mathbf{30}}}{\mathbf{a}-(\mathbf{-1})} \\
 & & \frac{0-3}{4-2} = \frac{-3}{2} & & \\
 & & & \frac{\frac{\mathbf{b-0}}{\mathbf{a-4}}-\frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{2}}}{\mathbf{a-2}} & \\
4 & 0 & & & \\
 & & \frac{\mathbf{b-0}}{\mathbf{a-4}} & & \\
\mathbf{a} & \mathbf{b} & & &
\end{array}$$

3. Se quiere interpolar, utilizando puntos de Chebyshev, la función $f(x) = e^{2x}$ en el intervalo $[0,r]$, encuentre una cota para el número mínimo de puntos necesarios para que el error sea menor que $\mathfrak{E}$ en dicho intervalo.

   Solución

   Tomando la fórmula del error de interpolación:

$$E(x) = f(x) - Q_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\zeta)\cdot\prod_{1\le j\le n}(x-x_j)$$

Sabemos que por tratarse de puntos de chebyshev:

$$\left|\prod_{1\leq j\leq n}(x-x_j)\right| \leq \frac{(r-0)^n}{2^{2n-1}} = \frac{r^n}{2^{2n-1}}$$

Ahora debemos encontrar una cota para:

$$f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1}e^{2x}$$

Como esta función es positiva y creciente en el intervalo $[0,r]$, su máximo estará en $x=r$, por lo tanto:

$$|f^{(n)}(x)| \leq |f^{(n)}(r)| = 2^n e^{2r}$$

Entonces, el error en dicho intervalo, está acotado por:

$$\begin{aligned}|E(x)| &= \left|\frac{1}{n!}\right| \cdot \left|f^{(n)}(\zeta)\right| \cdot \left|\prod_{1\leq j\leq n}(x-x_j)\right| \\ &\leq \frac{1}{n!}2^n e^{2r}\frac{r^n}{2^{2n-1}} \\ &= \frac{e^{2r}}{(n+1)!}\frac{r^n}{2^{n-1}}\end{aligned}$$

Simplemente hay que elegir un n tal que:

$$\frac{e^{2r}r^n}{n!\cdot 2^{n-1}} \leq \mathfrak{E}$$

4. Considere los puntos $(0,0);(1,0);(2,0);(3,0);(4,24)$. Encuentre el polinomio interpolador usando Lagrange y Diferencias Dividas.¿Qué método es más directo en este caso? ¿Por qué?

Solución
Diferencias Divididas:

$$\begin{array}{c|ccccccccc} 0 & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ 1 & 0 & & 0 & & \\ & & 0 & & 0 & \\ 2 & 0 & & 0 & & 1 \\ & & 0 & & 4 & \\ 3 & 0 & & 12 & & \\ & & 24 & & & \\ 4 & 24 & & & & \end{array}$$

obteniendo el polinomio $x(x-1)(x-2)(x-3)$.

Lagrange:

$$0\cdot L_0 + 0\cdot L_1 + 0\cdot L_2 + 0\cdot L_3 + 24\cdot\frac{(x-3)(x-2)(x-1)x}{4!} = x(x-1)(x-2)(x-3)$$

Lagrange resulta más directo ya que la mayor parte de las imágenes son 0, por lo que solo hay que calcular uno de los polinomios de Lagrange.

5. Suponga una formula de cuadratura de la forma:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = a_{-1}f(-1) + a_1 f(1) + b_{-1}f'(-1) + b_1 f'(1)$$

a) Plantee ecuaciones para los coeficientes del polinomio interpolador de máximo grado posible en términos de $f(-1), f(1), f'(-1), f'(1)$

b) Evalúe la integral para el polinomio interpolador, use las ecuaciones anteriores para hallar los coeficientes.

Solución

a) Hay cuatro coeficientes, podemos aspirar a una fórmula exacta para polinomios cúbicos:

$$\begin{aligned} p(x) &= c_0 + c_1 x + x_2 x^2 + c_3 x^3 \\ p'(x) &= c_1 + 2x_2 x + 3c_3 x^2 \end{aligned}$$

Los hacemos coincidir con los valores de la función:

$$\begin{aligned} f(-1) = p(-1) &= c_0 - c_1 + c_2 - c_3 \\ f(1) = p(1) &= c_0 + c_1 + c_2 + c_3 \\ f'(-1) = p'(-1) &= c_1 - 2c_2 + 3c_3 \\ f'(1) = p'(1) &= c_1 + 2c_2 + 3c_3 \end{aligned}$$

b) Integramos el polinomio interpolador exacto:

$$\int_{-1}^{1} p(x)dx = \left(c_0 x + \frac{1}{2}c_1 x^2 + \frac{1}{3}c_2 x^3 + \frac{1}{4}c_3 x^3\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 2c_0 + \frac{2}{3}c_2$$

De las ecuaciones de los coeficientes:

$$\begin{aligned} 2c_0 + 2c_2 &= f(-1) + f(1) \\ 4c_2 &= f'(1) - f'(-1) \end{aligned}$$

Queda:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(-1) + f(1) + \frac{f'(-1) - f'(1)}{3}$$