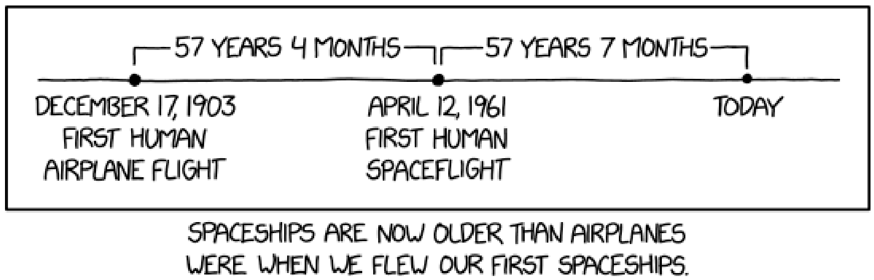
Segundo Certamen
Algoritmos y Complejidad

22 de diciembre de 2018



1. Un vehículo parte del punto 0 y debe llegar al punto F. Tiene un estanque con capacidad para viajar d kilómetros sin recargar. Dadas posiciones $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de estaciones de servicio, demuestre que el algoritmo de recargar combustible cada vez en la estación más lejana que puede alcanzar minimiza el número de paradas.

   (25 puntos)

2. Para cierto problema de tamaño n cuenta con tres algoritmos alternativos. ¿Cuál elije si n es grande, y porqué?

   Algoritmo A: Ordena los datos dados (el costo de esto es $\Theta(n \log n)$), divide en 3 problemas de tamaño $n/3$ y combina en tiempo constante.

   Algoritmo B: Resuelve recursivamente 2 problemas de tamaño $n-1$ y $n-2$ y combina las soluciones en tiempo constante.

   Algoritmo C: Divide el problema de tamaño n en 5 problemas de tamaño $n/4$ y combina las soluciones en tiempo $\Theta(n^2)$.

   (35 puntos)

3. En un río hay ciudades en las posiciones $a_1, \ldots, a_n$ en su ribera izquierda y $b_1, \ldots, b_n$ en la ribera derecha. Hay que conectar el máximo de ciudades con puentes, si se permite solo conectar a_i con b_i de manera que no se crucen puentes (las posiciones en ambas riberas no necesariamente vienen en orden). Plantee programación dinámica (la recurrencia con sus condiciones de borde, cómo almacenar los resultados intermedios, cuál es el resultado final y el orden de cálculo) para resolver este problema.

   (30 puntos)

4. Alice, Bob y Charlie discuten sobre cómo elegir al azar con igual probabilidad entre $1, 2, 3$. Proponen lanzar una moneda que da cara (*heads*, H) con probabilidad p o sello (*tails*, T):

   Alice: Lanzar dos veces, responder 1 si resulta HH, 2 si es TH, 3 para HT, y repetir si resulta TT.

   Bob: Lanzar dos veces, responder el número de H más uno.

   Charlie: Lanzar tres veces. Si sale una única H, responder en qué lanzamiento apareció. Si no, repetir.

   ¿Para qué valores de $0 < p < 1$, si los hay, es correcto cada uno de los tres?

   (30 puntos)

5. La estructura *fila ordenada* maneja operaciones orderedpush(x), que elimina los elementos menores a x del inicio y los reemplaza por x, y la operación pop(), que elimina el primer elemento de la fila. Si se construye mediante una lista enlazada, agregando y eliminando del principio, demuestre que las operaciones tienen costo amortizado $O(1)$.

   (30 puntos)

HvB/LaTeX 2_ε

Torpedo

Teorema maestro

Al dividir un problema de tamaño n en a problemas de tamaño n/b que se resuelven recursivamente, si el trabajo de dividir y combinar soluciones es $f(n) > 0$, el tiempo para resolver un problema de tamaño n es, para $\alpha = \log_b a$:

$$t(n) = a t(n/b) + f(n) \quad t(1) = t_1$$

cuya solución es:

$$t(n) = \begin{cases} \Theta(n^\alpha) & f(n) = O(n^c) \text{ para } c < \alpha \\ \Theta(n^\alpha) & f(n) = \Theta(n^\alpha \log^\beta n) \text{ con } \beta < -1 \\ \Theta(n^\alpha \log\log n) & f(n) = \Theta(n^\alpha \log^\beta n) \text{ con } \beta = -1 \\ \Theta(n^\alpha \log^{\beta+1} n) & f(n) = \Theta(n^\alpha \log^\beta n) \text{ con } \beta > -1 \\ \Theta(f(n)) & f(n) = \Omega(n^c) \text{ con } c > \alpha \text{ y } a f(n/b) < k f(n) \text{ para } n \text{ grande con } k < 1 \end{cases}$$

Algunas series notables

En lo que sigue, $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$\frac{1}{1-az} = \sum_{k\geq 0} a^k z^k \qquad \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \sum_{0\leq k\leq n} z^k \qquad \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{k\geq 0} k z^k$$

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} z^n \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha^{\underline{n}}}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{1/2}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n 2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} \quad (\text{si } n \geq 1) \qquad \binom{-1/2}{n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \qquad \binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{n-1}$$

$$\frac{1}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k\geq 0} \binom{n+k}{n} z^k = \frac{1}{n!} \sum_{k\geq 0} (k+1)(k+2)\cdots(k+n) z^k = \frac{1}{n!} \sum_{k\geq 0} (k+1)^{\overline{n}} z^k$$

$$\sum_{n\geq 0} \binom{n}{k} z^n = \frac{z^k}{(1-z)^{k+1}}$$

Números de Fibonacci:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad F_0 = 0, F_1 = 1 \qquad \sum_{n\geq 0} F_n z^n = \frac{z}{1-z-z^2} \qquad \sum_{n\geq 0} F_{n+1} z^n = \frac{1}{1-z-z^2}$$

$$F_n = \frac{\tau^n - \phi^n}{\sqrt{5}} \qquad \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803 \quad \phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \tau = -1/\tau \approx -0{,}61803$$