Pauta de Corrección

Primer Certamen
Fundamentos de Informática II

14 de noviembre de 2015

1. Sea s_n el número de palabras de interés. Sabemos que $s_1 = 3$, y una secuencia de largo n puede extenderse de 2 formas (los símbolos que no son el último). Esto da la recurrencia:

   $$s_{n+1} = 2s_n \qquad s_1 = 3$$

   La solución a esta recurrencia es bastante obvia:

   $$s_n = s_0 \cdot 2^n$$

   Sabemos que $s_1 = 3$, con lo que:

   $$s_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

Puntajes

Total		20
Plantear recurrencia	10	
Solución de la recurrencia	10	

2. Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\widehat{I}(z) &= e^{z+z^2/2} \\
\widehat{I}'(z) &= e^{z+z^2/2} \cdot (1+z) & &= (1+z)\cdot \widehat{I}(z)
\end{aligned}
$$

Extraemos coeficientes:

$$
\begin{aligned}
n![z^n]\widehat{I}'(z) &= n![z^n](1+z)\cdot \widehat{I}(z) \\
I_{n+1} &= I_n + n![z^{n-1}]\widehat{I}(z) \\
&= I_n + n! I_{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \\
&= I_n + n I_{n-1}
\end{aligned}
$$

Para completar la recurrencia, necesitamos valores iniciales. Es claro que:

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \frac{\widehat{I}(0)}{0!} \\
&= 1 \\
I_1 &= \frac{\widehat{I}'(0)}{1!} \\
&= \frac{(1+0)\widehat{I}(0)}{1} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

y resulta:

$$
I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1) I_n \qquad I_0 = I_1 = 1
$$

Puntajes

Total		25
Derivada, en términos de $\widehat{I}(z)$	5	
Extraer coeficientes	10	
Recurrencia	6	
Valores iniciales	4	

3. Son secuencias ordenadas (los adornos están “rotulados” con su posición). Queremos que ninguno quede fuera, y para simplificar consideremos guirnaldas de cualquier largo. Cada uno de los adornos queda representado por la función generatriz:

$$\frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \mathrm{e}^z - 1$$

Para los 10 tipos de adornos, la función generatriz es el producto, y nos interesa:

$$\begin{aligned}
30!\,[z^{30}]\,(\mathrm{e}^z - 1)^{10} &= 30!\,[z^{30}] \sum_{0 \leq k \leq 10} \binom{10}{k} (-1)^{10-k} \mathrm{e}^{kz} \\
&= 30! \left(\sum_{0 \leq k \leq 10} (-1)^k \binom{10}{k} \frac{k^{30}}{30!} \right) \\
&= \sum_{0 \leq k \leq 10} (-1)^k \binom{10}{k} k^{30}
\end{aligned}$$

Da la suma:

$$629\,137\,189\,252\,738\,366\,241\,450\,572\,800$$

Puntajes

Total		20
Funciones generatrices exponenciales	7	
Función generatriz para cada tipo de adorno	5	
Función generatriz de guirnaldas	3	
Extraer coeficiente de interés	5	

4. Aplicamos la receta del principio de inclusión y exclusión, usando el Tao para calcular los casos individuales:

   Universo: Todas las posibles formas de ordenar los elementos.

   Propiedades: Diremos que un ordenamiento tiene la propiedad i si los a_i están juntos.

   Resultado: Interesa el número de órdenes sin símbolos iguales juntos.

   Si hay r símbolos juntos, elegimos éstos entre n; luego por el Tao, distribuyendo $2(n-r)$ símbolos a_i y r pares:

$$\begin{aligned}
N_r &= \binom{n}{r}\binom{2n-r}{\underbrace{2,2,\dots,}_{n-r}\underbrace{1,1,\dots}_{r}} \\
&= \binom{n}{r}\frac{(2n-r)!}{(2!)^{n-r}(1!)^r} \\
&= \binom{n}{r}\frac{(2n-r)!}{2^{n-r}}
\end{aligned}$$

   con lo que:

$$N(z) = \sum_{0\le r\le n}\binom{n}{r}\frac{(2n-r)!}{2^{n-r}}z^r$$

   y resulta:

$$\begin{aligned}
e_0 &= N(-1) \\
&= \sum_{0\le r\le n}(-1)^r\binom{n}{r}\frac{(2n-r)!}{2^{n-r}} \\
&= (-1)^n\sum_{0\le r\le n}(-1)^r\binom{n}{r}\frac{(n+r)!}{2^r}
\end{aligned}$$

   Lo último aprovechando la simetría de los coeficientes binomiales y el cambio de índice $r \mapsto n-r$.

Puntajes

Total		25
Receta del principio de inclusión y exclusión	9	
Aplicar el Tao para cálculo de N_r	8	
Aplicar fórmula mágica para e_0	5	
Expresión	4	

5. Usamos funciones generatrices. Cada variable queda representada según su rango. Como el límite para x_3 no incide, podemos omitirlo:

$$
\begin{aligned}
&x_1\colon 1 + z + z^2 + z^3 && = (1 - z^4)/(1 - z) \\
&x_2\colon 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 && = (1 - z^8)/(1 - z) \\
&x_3\colon 1 + z + z^2 + \cdots && = 1/(1 - z) \\
&x_4\colon 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 && = (1 - z^6)/(1 - z)
\end{aligned}
$$

Interesa:

$$
\begin{aligned}
[z^{12}]\frac{(1 - z^4)(1 - z^6)(1 - z^8)}{(1 - z)^4} &= [z^{12}](1 - z^4 - z^6 - z^8 + z^{10} + z^{12} + \cdots)(1 - z)^{-4} \\
&= ([z^{12}] - [z^8] - [z^6] - [z^4] + [z^2] + [z^0])(1 - z)^{-4} \\
&= \binom{-4}{12} - \binom{-4}{8} - \binom{-4}{6} - \binom{-4}{4} + \binom{-4}{2} + \binom{-4}{0} \\
&= 182
\end{aligned}
$$

Puntajes

Total		15
Funciones de las variables	8	
Función generatriz para número de soluciones	4	
Extraer coeficiente buscado	3	

6. Aplicar el menú de propiedades de funciones generatrices. Partimos con:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{2^n} &= \frac{1}{1-z/2} \\
z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{2^n} &= \sum_{n\geq 0} \frac{nz^n}{2^n} \\
\frac{z}{2(1-z/2)} &= \\
\frac{1}{1-z} \frac{z}{2(1-z/2)} &= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{0\leq k\leq n} \frac{k}{2^k} \right) z^n
\end{aligned}
$$

De acá:

$$
\begin{aligned}
\sum_{0\leq k\leq n} \frac{k}{2^k} &= [z^n] \frac{z}{(1-z)(1-z/2)} \\
&= [z^n] \left(\frac{1}{1-z} - \frac{1}{2(1-z/2)} \right) \\
&= 1 - \frac{2^{-n}}{2} \\
&= 1 - \frac{1}{2^{n+1}}
\end{aligned}
$$

Puntajes

Total		25
Función generatriz de 2^{-n}	7	
Función generatriz de $n2^{-n}$	7	
Función generatriz de $\sum n2^{-n}$	7	
Extraer coeficiente para obtener la suma	4	

HvB/$\LaTeX\,2_\varepsilon$