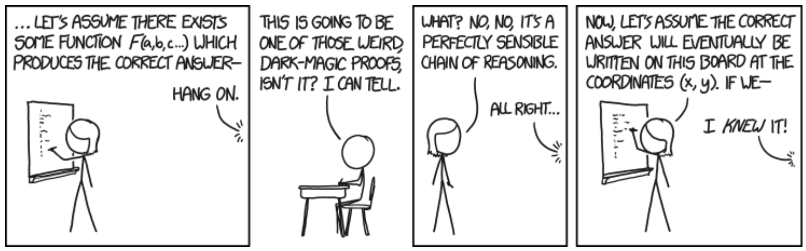
Segundo Certamen
Algoritmos y Complejidad

3 de julio de 2017



1. Se dan n puntos x_i en la recta, que deben cubrirse con el mínimo número de intervalos unitarios $[s_i, s_i + 1]$ (el intervalo cubre todos los x que caen dentro del intervalo). Plantee un algoritmo eficiente para resolver este problema.

   (30 puntos)

2. Para cierto problema cuenta con tres algoritmos alternativos:

   Algoritmo A: Resuelve el problema reduciéndolo a dos problemas de un tercio del tamaño original cada uno y los resuelve recursivamente En un problema de tamaño n obtener los problemas menores y combinar las soluciones toma tiempo $O(n \log n)$.

   Algoritmo B: Resuelve un problema de tamaño n resolviendo recursivamente dos problemas de tamaño $n - 1$ y combina las soluciones en tiempo constante.

   Algoritmo C: Divide el problema de tamaño n en tres problemas de tamaño $2n/3$, resuelve los problemas recursivamente y combina las soluciones en tiempo lineal.

   ¿Cuál elije si n es grande, y porqué?

   (30 puntos)

3. Para cierta aplicación requiere mantener una lista de elementos, sobre la que se efectúan dos operaciones:

   insert(*k*): Inserta un nuevo elemento de valor k a la lista. Tiene costo 1.

   sum(): Suma los elementos de la lista, los elimina y los reemplaza por un elemento que es la suma. El costo es n si la lista tiene n elementos.

   Demuestre que el costo amortizado de insert(k) es $O(1)$, y que el costo amortizado de sum() es $O(1)$.

   (35 puntos)

4. Un filtro de Bloom es una estructura probabilista eficiente para almacenar un conjunto. Dado un universo de elementos $\mathscr{U}$, un tamaño de tabla m (una tabla de m bits, numerados 0 a $m - 1$, inicialmente todos 0) y k funciones hash $h_i \colon \mathscr{U} \to [0, m - 1]$ (que suponemos ideales e independientes) para registrar que $x \in \mathscr{U}$ está en el conjunto ponemos en 1 los bits de la tabla en las posiciones $h_i(x)$ para $1 \le i \le k$.

   a) Halle la probabilidad que luego de insertar n elementos, un bit dado sigue en 0.

   b) Halle la probabilidad de un falso positivo (los bits en las posiciones $h_i(x)$ son todos 1, pero no se ha agregado x al conjunto) cuando el conjunto contiene n elementos.

   (30 puntos)

Teorema maestro

Al dividir un problema de tamaño n en a problemas de tamaño n/b que se resuelven recursivamente, el trabajo de dividir y combinar soluciones es $f(n) > 0$:

$$t(n) = at(n/b) + f(n) \quad t(1) = t_1$$

cuya solución es:

$$t(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & f(n) = O(n^c) \text{ para } c < \log_b a \\ \Theta(n^{\log_b a}) & f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^\alpha n) \text{ con } \alpha < -1 \\ \Theta(n^{\log_b a} \log\log n) & f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^\alpha n) \text{ con } \alpha = -1 \\ \Theta(n^{\log_b a} \log^{\alpha+1} n) & f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^\alpha n) \text{ con } \alpha > -1 \\ \Theta(f(n)) & f(n) = \Omega(n^c) \text{ con } c > \log_b a \text{ y } af(n/b) < kf(n) \text{ para } n \text{ grande con } k < 1 \end{cases}$$

Algunas series notables

En lo que sigue, $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$\frac{1}{1-az} = \sum_{n \geq 0} a^n z^n \qquad \frac{1-z^{m+1}}{1-z} = \sum_{0 \leq n \leq m} z^n$$

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} z^n \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha^{\underline{n}}}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{1/2}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n 2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} \quad (\text{si } n \geq 1) \qquad \binom{-1/2}{n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \qquad \binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{n-1}$$

$$\frac{1}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{n} z^k = \frac{1}{n!} \sum_{k \geq 0} (k+1)(k+2)\cdots(k+n) z^k = \frac{1}{n!} \sum_{k \geq 0} (k+1)^{\overline{n}} z^k$$

$$\sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} z^n = \frac{z^k}{(1-z)^{k+1}}$$

Probabilidades

Teorema (Linearidad del valor esperado)**.** *Sean X_1, X_2 variables aleatorias, α y β constantes arbitrarias. Entonces:*

$$\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha \mathbb{E}[X] + \beta \mathbb{E}[Y]$$

Decimos que dos variables X e Y son *independientes* si para todo par de valores x e y:

$$\Pr[(X = x) \wedge (Y = y)] = \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = y] \tag{1}$$

Una colección de variables es *independiente a pares* si para todo $i \neq j$ y todo par de valores x_i, x_j:

$$\Pr[(X_i = x_i) \wedge (X_j = x_j) = \Pr[X_i = x_i] \cdot \Pr[X_j = x_j] \tag{2}$$

Una colección de variables es *mutuamente independiente* si para todo subconjunto $S \subseteq N$ y toda colección de valores x_i:

$$\Pr[(X_{i_1} = x_{i_1}) \wedge (X_{i_2} = x_{i_2}) \wedge \cdots \wedge (X_{i_s} = x_{i_s})] = \Pr[X_{i_1} = x_{i_1}] \cdot \Pr[X_{i_2} = x_{i_2}] \cdots \Pr[X_{i_s} = x_{i_s}] \tag{3}$$