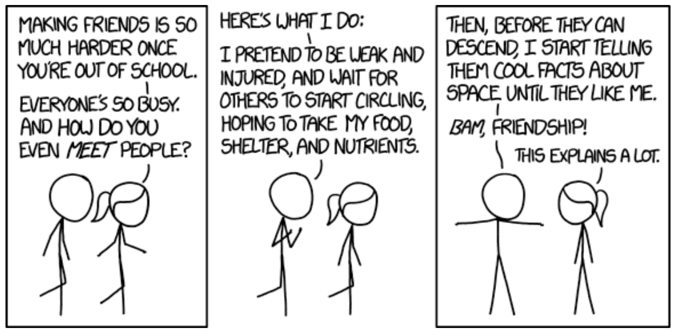
Certamen Recuperativo
Algoritmos y Complejidad

5 de diciembre de 2016



1. Los babilonios usaban el siguiente algoritmo: dado el valor a, elegían un valor inicial x_0 y calculaban:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

   a) En caso de converger, ¿a qué valor converge en términos de a?

   b) ¿Para qué valores iniciales x_0 converge?

(25 puntos)

2. Las técnicas de algoritmos voraces, backtracking y programación dinámica son generalmente aplicables a los mismos problemas. Explique cuándo es mejor cada uno de ellos, dando ejemplos.

(25 puntos)

3. La nueva cadena *Dish at Step* quiere instalarse en múltiples puntos a lo largo de Chile (para los efectos presentes, consideramos que está en $\mathbb{R}^1$), los lugares posibles están en las posiciones $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ordenadas de Punta Arenas a Arica). Se puede instalar solo un restaurante en cada lugar, la ganancia estimada al instalar uno en el punto i es g_i. Por política de la empresa nunca deben haber dos restaurantes a menos de d kilómetros de distancia. Sea $\mathrm{OPT}(k)$ la máxima ganancia considerando solo las posiciones $1, \ldots, k$.

   a) En estos términos, indique lo que nos interesa obtener, y un caso base.

   b) Escriba una recurrencia para OPT.

   c) Usando los puntos 3*a* y 3*b*, implemente la recurrencia eficientemente en pseudocódigo.

(25 puntos)

4. Se dan k listas ordenadas de n elementos, y se pide intercalarlas para obtener una única lista ordenada. Analice las siguientes alternativas:

   a) Intercalar las primeras dos listas, intercalar el resultado con la tercera, y así sucesivamente hasta terminar el trabajo.

   b) Usar un esquema de dividir y conquistar.

(30 puntos)

5. Se dan dos polinomios $r(x)$ y $s(x)$ sobre $\mathbb{F}_p$ (básicamente, enteros módulo un primo p; estos cumplen las propiedades conocidas de los números reales y los polinomios se comportan en forma afín) expresados de distinta forma (por ejemplo, como productos de factores, en la forma del polinomio interpolador de Lagrange o como lista de coeficientes). Interesa determinar si son iguales. Diseñe un algoritmo de Monte Carlo para comparar polinomios en $O(n)$ operaciones si son de grado n. Dé una cota a la probabilidad de error.

(20 puntos)

HvB/$\LaTeX\,2_\varepsilon$

Teorema maestro

Al dividir un problema de tamaño nb en a problemas de tamaño n, que se resuelven recursivamente, donde el trabajo que se hace al dividir y luego combinar soluciones está dado por cn^d, resulta la recurrencia:

$$t(nb) = a t(n) + c n^d \qquad t(1) = t_1$$

cuya solución es:

$$t(n) \sim \begin{cases} \frac{c}{b^d - a} \cdot n^d & a < b^d \\ \frac{c}{a} n^d \log_b n & a = b^d \\ \frac{(b^d - a) t_1 - c}{a} \cdot n^{\log_b a} & a > b^d \end{cases}$$

Algunas series notables

En lo que sigue, $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$\frac{1}{1 - az} = \sum_{n \ge 0} a^n z^n \qquad \frac{1 - z^{m+1}}{1 - z} = \sum_{0 \le n \le m} z^n$$

$$(1 + z)^\alpha = \sum_{n \ge 0} \binom{\alpha}{n} z^n \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha^{\underline{n}}}{n!} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{1/2}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n 2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} \quad (\text{si } n \ge 1) \qquad \binom{-1/2}{n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \qquad \binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{n-1}$$

$$\frac{1}{(1 - z)^{n+1}} = \sum_{k \ge 0} \binom{n+k}{n} z^k = \frac{1}{n!} \sum_{k \ge 0} (k+1)(k+2) \cdots (k+n) z^k = \frac{1}{n!} \sum_{k \ge 0} (k+1)^{\bar{n}} z^k$$

$$\sum_{n \ge 0} \binom{n}{k} z^n = \frac{z^k}{(1 - z)^{k+1}}$$

Fracciones parciales

Un truco para dividir en fracciones parciales:

$$f(z) = \frac{az + b}{(1 - dz)(1 - ez)} = \frac{A}{1 - dz} + \frac{B}{1 - ez}$$

Se obtiene A mediante:

$$\lim_{z \to 1/d} (1 - dz) f(z) = A$$

Cotas en probabilidad

Teorema (Markov)**.** *Si X es una variable aleatoria no negativa, y $c > 0$:*

$$\Pr[X > c] \le \frac{\mathbb{E}[X]}{c}$$

Teorema (Chebyshev)**.** *Si X es una variable aleatoria de media $\mathbb{E}[X] = \mu$ y varianza $\operatorname{var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \sigma^2$, para $c > 0$:*

$$\Pr[(X - \mu)^2 > c\sigma] \le \frac{1}{c^2}$$

Teorema (Chernoff)**.** *Sean X_i variables aleatorias, $0 \le X_i \le 1$ para todo i, definamos $X = \sum X_i$ y $\mu = \mathbb{E}[X]$. Si $c > 1$ con $\beta(u) = u \ln u - u + 1$ se cumplen:*

$$\Pr[X \ge c\mu] \le \mathrm{e}^{-\beta(c)\mu}$$

$$\Pr[X \le \mu / c] \le \mathrm{e}^{-\beta(1/c)\mu}$$