Pauta de Corrección

Certamen Recuperativo Algoritmos y Complejidad

8 de mayo de 2017

1. El método de Newton aplicado a la ecuación:

   $$x^2 - a = 0$$

   queda como:

   $$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \\ &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \end{aligned}$$

   Una condición suficiente para que una iteración de la forma $x_{n+1} = g(x_n)$ converja es que en el intervalo de interés $|g(x)| \leq c < 1$ para algún c. En nuestro caso:

   $$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x_n^2}\right) \end{aligned}$$

   Solo si usamos un punto de partida x_0 muy pequeño esto es mayor o igual a 1 en valor absoluto:

   $$\left|\frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right)\right| = 1$$

   lleva a la cota:

   $$x > \sqrt{\frac{a}{3}}$$

   Un valor inicial cómodo que asegura convergencia es $x_0 = a$.

Puntajes

Total		25
Iteración de Newton, simplificar	8	
Análisis de convergencia	10	
Sugerencia de x_0	7	

2. Cada punto por turno.

   a) Habiendo 3 parámetros, podemos aspirar a que sea exacto para polinomios de grado hasta 2.

   b) Planteamos un sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\int_{-1} 11 \,\mathrm{d}x = 0 = A_- + A_0 + A_+ \\
\int_{-1} 1x \,\mathrm{d}x = 1 = A_- \cdot \frac{-2}{3} + A_0 \cdot 0 + A_+ \cdot \frac{2}{3} \\
\int_{-1} 1x^2 \,\mathrm{d}x = 0 = A_- \cdot \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + A_0 \cdot 0^2 + A_+ \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2
\end{aligned}
$$

   Solución a este sistema es:

$$
A_- = \frac{3}{4} \quad A_0 = \frac{1}{2} \quad A_+ = \frac{3}{4}
$$

   Notamos que:

$$
\int_{-1} 1x^3 \,\mathrm{d}x = 0
$$

   con lo que accidentalmente el método es exacto para polinomios hasta de grado 3. Pero ahí se nos acaba la suerte:

$$
\begin{aligned}
\int_{-1} 1x^4 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{5} \\
A_- \cdot \left(\frac{-2}{3}\right)^4 + A_0 \cdot 0^4 + A_+ \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{8}{27}
\end{aligned}
$$

   Esto es un 25 % de error.

Puntajes

Total			25
a) Grado máximo		10	
Son tres parámetros	5		
Esperamos grado 2	5		
b) Armar sistema de ecuaciones		15	

3. Vemos que interesa el largo del intervalo $[i, j-1]$ en el tiempo de ejecución. Sea $T(k)$ el tiempo de ejecución de SlowHeap(i, j) cuando $j - i = k$. Del algoritmo, la recurrencia exacta es:

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil - 1) + O(n)$$

Podemos aplicar el teorema maestro a la recurrencia aproximada:

$$T(n) = 2T(n/2) + O(n)$$

Esto es $a = 2$, $b = 2$, $f(n) = O(n)$, el valor crítico es $\log_2 2 = 1$. Se aplica el cuarto caso del teorema maestro, con $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} T(n) &= \Theta(n^{\log_2 2} \log^{0+1} n) \\ &= \Theta(n \log n) \end{aligned}$$

Puntajes

Total		30
Plantear la recursión	10	
Aplicar el teorema maestro	20	

4. Si consideramos las denominaciones $d_0, \dots, d_m$ y la cantidad n, las formas de dar cambio se dividen en dos grupos:

   Las que incluyen d_m: Es una moneda más que la mejor manera de dar cambio de $n - d_m$ con las denominaciones $d_0, \dots, d_m$

   Las que no incluyen d_m: Es la mejor manera de dar cambio de n con las denominaciones $d_0, \dots, d_{m-1}$

   Esto da la recurrencia para $c[m, n]$, el número mínimo de monedas de $d_0, \dots, d_m$ para dar cambio de n:

   $$c[m,n] = \text{mín}\{1 + c[m, n - d_m], c[m-1, n]\} \qquad c[m,0] = 0, c[0,n] = n$$

   Las condiciones de contorno son que si no hay nada que dar, no damos monedas; si solo tenemos disponibles monedas $d_0 = 1$, lo único que podemos hacer es entregar n monedas de uno.

   Podemos registrar lo anterior en un arreglo, que llenamos para $m = 0, 1, \dots$ para los distintos $n = 0, 1, \dots$

Puntajes

Total		30
Plantear la recurrencia	15	
Explicar arreglo y orden de llenado	15	

HvB/$\LaTeX\,2_\varepsilon$