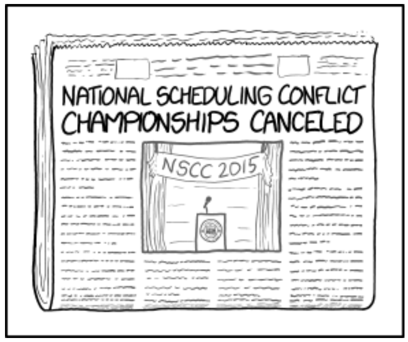
Certamen Recuperativo
Algoritmos y Complejidad

8 de julio de 2017



1. Describa cómo usar el método de Newton para calcular $\sqrt{a}$ para $a > 0$. ¿Qué valor inicial usa? ¿Para qué valores iniciales x_0 converge?

(25 puntos)

2. Se desea construir una fórmula de cuadratura de la forma:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx A_- f(-2/3) + A_0 f(0) + A_+ f(2/3)$$

   a) ¿Cuál es el grado máximo de un polinomio para el cual puede ser exacta?

   b) Explique cómo obtener los valores de los coeficientes A_-, A_0, A_+.

(25 puntos)

3. Un *heap* es un árbol binario casi completo en el cual cada elemento es menor que cada uno de sus hijos (de tenerlos). Se plantea el algoritmo 1 para construir un *heap* del rango $a[i..j]$ de un arreglo a de n elementos. Se invoca SlowHeap$(0, n-1)$. Plantee la recurrencia que describe el tiempo de ejecución de SlowHeap con un arreglo de n

Algoritmo 1: SlowHeap

function SlowHeap(i, j)
  if $i = j$ **then**
    return Nodo sin hijos conteniendo $a[i]$
  Busque m en $i \leq m \leq j$ tal que $a[m]$ es el mínimo del rango
  Intercambie $a[m]$ con $a[j]$
  $p_l \leftarrow$ SlowHeap$(i, \lfloor (i+j-1)/2 \rfloor)$
  $p_r \leftarrow$ SlowHeap$(\lfloor (i+j-1)/2 \rfloor + 1, j-1)$
  return Nodo conteniendo $a[j]$ con hijos p_l y p_r

elementos, y obtenga su tiempo de ejecución en orden de magnitud.

(30 puntos)

4. Dadas denominaciones de monedas $d_0 = 1 < d_1 < \cdots < d_k$, el problema de cambio es hallar el mínimo número de monedas para entregar la cantidad n. Plantee un algoritmo eficiente para obtener el mínimo número de monedas requerido. Note que el algoritmo voraz de entregar lo que se pueda de la máxima denominación no siempre funciona, por ejemplo con denominaciones $1, 5, 20, 25$ para 40 da $25, 5, 5, 5$ (4 monedas), el óptimo es $20, 20$ (2 monedas).

(30 puntos)

Teorema maestro

Al dividir un problema de tamaño n en a problemas de tamaño n/b que se resuelven recursivamente, el trabajo de dividir y combinar soluciones es $f(n) > 0$:

$$t(n) = a t(n/b) + f(n) \quad t(1) = t_1$$

cuya solución es:

$$t(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & f(n) = O(n^c) \text{ para } c < \log_b a \\ \Theta(n^{\log_b a}) & f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^\alpha n) \text{ con } \alpha < -1 \\ \Theta(n^{\log_b a} \log\log n) & f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^\alpha n) \text{ con } \alpha = -1 \\ \Theta(n^{\log_b a} \log^{\alpha+1} n) & f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^\alpha n) \text{ con } \alpha > -1 \\ \Theta(f(n)) & f(n) = \Omega(n^c) \text{ con } c > \log_b a \text{ y } a f(n/b) < k f(n) \text{ para } n \text{ grande con } k < 1 \end{cases}$$

Algunas series notables

En lo que sigue, $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$\frac{1}{1-az} = \sum_{n\geq 0} a^n z^n \qquad \frac{1-z^{m+1}}{1-z} = \sum_{0\leq n\leq m} z^n$$

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} z^n \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha^{\underline{n}}}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{1/2}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n 2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} \quad (\text{si } n \geq 1) \qquad \binom{-1/2}{n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \qquad \binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{n-1}$$

$$\frac{1}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k\geq 0} \binom{n+k}{n} z^k = \frac{1}{n!} \sum_{k\geq 0} (k+1)(k+2)\cdots(k+n) z^k = \frac{1}{n!} \sum_{k\geq 0} (k+1)^{\bar{n}} z^k$$

$$\sum_{n\geq 0} \binom{n}{k} z^n = \frac{z^k}{(1-z)^{k+1}}$$

Probabilidades

Teorema (Linearidad del valor esperado)**.** *Sean X_1, X_2 variables aleatorias, α y β constantes arbitrarias. Entonces:*

$$\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha \mathbb{E}[X] + \beta \mathbb{E}[Y]$$

Decimos que dos variables X e Y son *independientes* si para todo par de valores x e y:

$$\Pr[(X = x) \wedge (Y = y)] = \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = y] \tag{1}$$

Una colección de variables es *independiente a pares* si para todo $i \neq j$ y todo par de valores x_i, x_j:

$$\Pr[(X_i = x_i) \wedge (X_j = x_j) = \Pr[X_i = x_i] \cdot \Pr[X_j = x_j] \tag{2}$$

Una colección de variables es *mutuamente independiente* si para todo subconjunto $S \subseteq N$ y toda colección de valores x_i:

$$\Pr[(X_{i_1} = x_{i_1}) \wedge (X_{i_2} = x_{i_2}) \wedge \cdots \wedge (X_{i_s} = x_{i_s})] = \Pr[X_{i_1} = x_{i_1}] \cdot \Pr[X_{i_2} = x_{i_2}] \cdots \Pr[X_{i_s} = x_{i_s}] \tag{3}$$