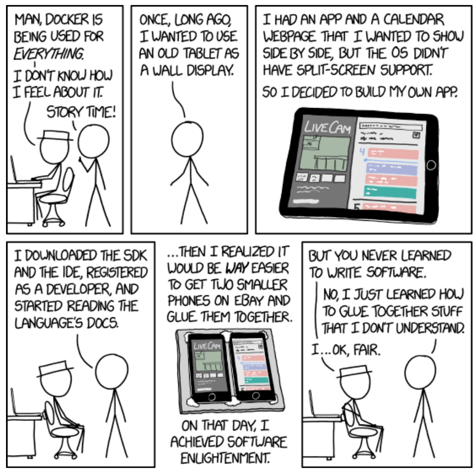
Segundo Certamen
Algoritmos y Complejidad

18 de agosto de 2018



1. Considere el problema de suma combinatoria: Dado un arreglo ordenado de menor a mayor a de n números enteros positivos (no contiene repeticiones), escriba un programa que vía *backtracking* que escriba todas las maneras de obtener la suma S, si los elementos de a pueden usarse varias veces.

   (25 puntos)

2. Se proponen tres algoritmos para resolver un problema: A resuelve una instancia de tamaño n resolviendo 8 de tamaño $n/2$ y combinando en tiempo $O(n^3)$, B resuelve 10 de tamaño $n/3$ y combina en tiempo $\Theta(n^2 \log n)$, mientras C resuelve 9 de tamaño $n/3$ y combina en tiempo $O(n^2 \log n)$. ¿Cuál es preferible? Justifique.

   (30 puntos)

3. Dado un arreglo no ordenado de n elementos diferentes, se procesan en orden m consultas sobre si está o no presente un elemento. Dependiendo de n y m, ¿cómo determina cuándo conviene buscar en el arreglo desordenado o primero ordenarlo y usar búsqueda binaria?

   Suponga que ordenar el arreglo toma tiempo $2(n+1)\ln n$, búsqueda binaria toma $2\ln n$, búsqueda lineal n si falla y $n/2$ si tiene éxito (suponga 60 % éxitos y 40 % fallas).

   (25 puntos)

4. Considere la secuencia definida por $a_{n+2} = (3a_{n+1} + 2a_n) \bmod 42$, $a_0 = a_1 = 1$

   a) Demuestre que la forma recursiva obvia para calcular el valor de a_n toma tiempo exponencial.

   b) Describa un algoritmo eficiente para calcular los valores de a_n.

   (25 puntos)

5. En una evaluación experimental comparan varias funciones de hashing para las palabras únicas en una edición de la biblia.. Suponiendo direccionamiento cerrado, como medidas de rendimiento de la función consideran el largo promedio de las colas y su largo máximo. ¿Son medidas relevantes? Justifique.

   (15 puntos)

Torpedo oficial

Teorema maestro

Al dividir un problema de tamaño n en a problemas de tamaño n/b que se resuelven recursivamente, el trabajo de dividir y combinar soluciones es $f(n) > 0$:

$$t(n) = at(n/b) + f(n) \quad t(1) = t_1$$

Sea $\alpha = \log_b a$, entonces la solución es:

$$t(n) = \begin{cases} \Theta(n^\alpha) & f(n) = O(n^c) \text{ para } c < \alpha \\ \Theta(n^\alpha) & f(n) = \Theta(n^\alpha \log^\beta n) \text{ con } \beta < -1 \\ \Theta(n^\alpha \log\log n) & f(n) = \Theta(n^\alpha \log^\beta n) \text{ con } \beta = -1 \\ \Theta(n^\alpha \log^{\beta+1} n) & f(n) = \Theta(n^\alpha \log^\beta n) \text{ con } \beta > -1 \\ \Theta(f(n)) & f(n) = \Omega(n^c) \text{ con } c > \alpha \text{ y } af(n/b) < kf(n) \text{ para } n \text{ grande con } k < 1 \end{cases}$$

Algunas series notables

En lo que sigue, $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$\frac{1}{1-az} = \sum_{n \geq 0} a^n z^n \qquad \frac{1-z^{m+1}}{1-z} = \sum_{0 \leq n \leq m} z^n$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad F_0 = 0, F_1 = 1 \qquad \sum_{n \geq 0} F_n z^n = \frac{z}{1-z-z^2} \qquad \sum_{n \geq 0} F_{n+1} z^n = \frac{1}{1-z-z^2}$$

$$F_n = \frac{\tau^n - \phi^n}{\sqrt{5}} \qquad \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803 \quad \phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \tau = -1/\tau \approx -0{,}61803$$

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} z^n \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha^{\underline{n}}}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\frac{1}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{n} z^k = \frac{1}{n!} \sum_{k \geq 0} (k+1)(k+2)\cdots(k+n) z^k = \frac{1}{n!} \sum_{k \geq 0} (k+1)^{\overline{n}} z^k$$

$$\sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} z^n = \frac{z^k}{(1-z)^{k+1}}$$

Probabilidades

Teorema (Linearidad del valor esperado)**.** *Sean X_1, X_2 variables aleatorias, α y β constantes arbitrarias. Entonces:*

$$\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha \mathbb{E}[X] + \beta \mathbb{E}[Y]$$

Decimos que dos variables X e Y son *independientes* si para todo par de valores x e y:

$$\Pr[(X = x) \wedge (Y = y)] = \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = y] \tag{1}$$

Una colección de variables es *independiente a pares* si para todo $i \neq j$ y todo par de valores x_i, x_j:

$$\Pr[(X_i = x_i) \wedge (X_j = x_j) = \Pr[X_i = x_i] \cdot \Pr[X_j = x_j] \tag{2}$$

Una colección de variables es *mutuamente independiente* si para todo subconjunto $S \subseteq N$ y toda colección de valores x_i:

$$\Pr[(X_{i_1} = x_{i_1}) \wedge (X_{i_2} = x_{i_2}) \wedge \cdots \wedge (X_{i_s} = x_{i_s})] = \Pr[X_{i_1} = x_{i_1}] \cdot \Pr[X_{i_2} = x_{i_2}] \cdots \Pr[X_{i_s} = x_{i_s}] \tag{3}$$