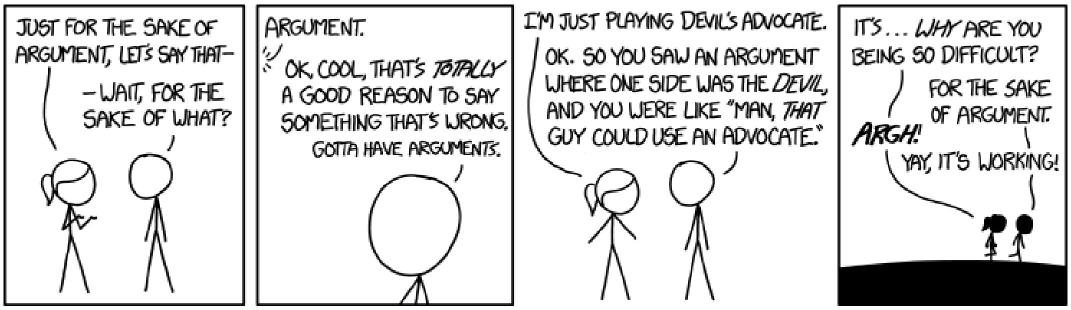
Primer Certamen
Fundamentos de Informática II

14 de noviembre de 2015



1. Interesa calcular el número s_n de palabras formadas por a, b, c que no contienen símbolos repetidos (no contienen aa, bb ni cc). Explique cómo obtener una fórmula cerrada para s_n.

   (20 puntos)

2. Una permutación π tal que $\pi^2 = e$ se llama *involución*. Puede demostrarse que el número de involuciones de largo n, anotado I_n, tiene función generatriz exponencial:

   $$\begin{aligned} \widehat{I}(z) &= \sum_{n \geq 0} I_n \frac{z^n}{n!} \\ &= \mathrm{e}^{z + z^2/2} \end{aligned}$$

   Derivando $\widehat{I}(z)$ obtenga una ecuación diferencial, e interprétela en términos de una recurrencia para los I_n.

   (25 puntos)

3. Se acerca la navidad, con lo que un sansano emprendedor planea crear guirnaldas, formadas por 30 adornos navideños elegidos entre 10 posibilidades. Su investigación de mercado demuestra que se venden mejor mientras más tipos de adornos diferentes tienen. Siendo sansano, tiene curiosidad de cuántas guirnaldas formadas con el máximo número de adornos pueden crearse. Explique cómo calcular este número usando funciones generatrices.

   (20 puntos)

4. Considere el multiconjunto $\mathscr{C} = \{a_1^2, \ldots, a_n^2\}$ (n tipos de elementos, cada uno 2 veces). ¿De cuántas maneras se puede ordenar si no pueden aparecer elementos iguales adyacentes?
   Pista: Medite sobre considerar la combinación $a_i a_i$ como un nuevo símbolo A_i mientras saborea un PIE.

   (25 puntos)

5. Explique cómo calcular cuántas soluciones enteras tiene la ecuación:

   $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$

   si $0 \leq x_1 \leq 3$, $0 \leq x_2 \leq 7$, $0 \leq x_3 \leq 15$, $0 \leq x_4 \leq 5$.

   (15 puntos)

6. Obtenga la función generatriz ordinaria de la suma:

   $$s_n = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{k}{2^k}$$

   (20 puntos)

Torpedo oficial

Extracción de coeficientes

Sean $A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ y $B(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$:

$$[z^n]\,(\alpha A(z) + \beta B(z)) = \alpha\,[z^n]\,A(z) + \beta\,[z^n]\,B(z)$$

$$[z^n]\;A(z)\cdot B(z) = \sum_{0\leq k\leq n} a_k b_{n-k} \qquad \sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k} a_k = [z^n]\;\frac{1}{1-z}\,A\left(\frac{z}{1-z}\right)$$

Algunas series notables

En lo que sigue, $m, n, k \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\frac{1}{1-az} = \sum_{k\geq 0} a^k z^k \qquad \frac{1-z^{m+1}}{1-z} = \sum_{0\leq k\leq m} z^k \qquad (1+z)^\alpha = \sum_{k\geq 0}\binom{\alpha}{k} z^k \qquad \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n\geq 0} n z^n$$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha^{\underline{k}}}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k\binom{n+k-1}{n-1} \qquad \binom{1/2}{k} = \frac{(-1)^{k-1}}{k2^{2k-1}}\binom{2n-2}{k-1} \quad (k\geq 1) \qquad \binom{-1/2}{k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\binom{2k}{k}$$

$$e^z = \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!} \qquad e^{u+iv} = e^u(\cos v + i\sin v) \qquad \ln(1-z) = -\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n}$$

Secuencias notables

Números de Fibonacci:

$$F_0 = 0 \quad F_1 = 1 \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad F_n = \frac{\tau^n - (1-\tau)^n}{\sqrt{5}} \quad \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803$$

$$\sum_{n\geq 0} F_n z^n = \frac{z}{1-z-z^2} \qquad \sum_{n\geq 0} F_{n+1} z^n = \frac{1}{1-z-z^2}$$

Conjuntos: Cuentan número de conjuntos de k elementos elegidos entre n

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{0}{k} = [k=0] \qquad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\sum_{k,n}\binom{n}{k} x^k y^n = \frac{1}{1-(1+x)y} \qquad \sum_{n}\binom{n}{k} z^n = \frac{z^k}{(1-z)^{k+1}} \qquad \sum_{n}\binom{n+k}{k} z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}}$$

Multiconjuntos: Cuentan multiconjuntos de k elementos elegidos entre n

$$\left(\!\!\binom{n}{0}\!\!\right) = 1 \quad \left(\!\!\binom{0}{k}\!\!\right) = [k=0] \qquad \left(\!\!\binom{n+1}{k+1}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n}{k+1}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n+1}{k}\!\!\right) \qquad \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n-1+k}{n-1}$$

$$\sum_{k,n}\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) x^k y^n = \frac{1-x}{1-x-y} \qquad \sum_{k\geq 0}\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) x^k = \frac{1}{(1-x)^n} \qquad \sum_{n\geq 0}\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) y^n = \frac{y^{[k>0]}}{(1-y)^k}$$