# Correção P2 de Fundamentos da Matemática

Pedro Luís Anghievisck

Junho - 2024

## Conteúdo

# 1 Correção do exercício 1

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções e conjuntos $C_1, C_2 \subset A$ e $Y_1, Y_2 \subset B$. Identifique cada afirmação como verdadeira ou falsa. Justifique:

### Item *a*

$$[\text{ F }] : f(C_1 \cup C_2) = f(C_1) \cup f(C_2) \text{ e } f(C_1 \cap C_2) = f(C_1) \cap f(C_2)$$

A afirmação anterior é falsa, pois podemos observar que $f$ pode não ser injetora, o que significa que $\exists x \in C_1$ e $x \notin C_2 : f(x) = f(y)$, onde $y \in C_2$ e $y \notin C_1$ o que implica que, como $x$ e $y$ não estão em $C_1 \cap C_2$, $f(C_1 \cap C_2) \neq f(C_1) \cap f(C_2)$.

Visto que $x \in C_1 \to f(x) \in f(C_1)$ e $y \in C_2 \to f(y) \in f(C_2)$, mas $x \notin C_2 \to f(x) \notin f(C_2) \to f(x) \notin f(C_1 \cap C_2)$ de mesma forma: $y \notin C_1 \to f(y) \notin f(C_1) \to f(y) \notin f(C_1 \cap C_2)$. Por fim, sabemos que como $f(x) = f(y), f(x)$ e $f(y) \in f(C_1) \cap f(C_2)$.

O que nos mostra que realmente:

$$f(C_1 \cap C_2) \neq f(C_1) \cap f(C_2)$$

# 2 Exercício 2 alternativo

Seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $[0, +\infty[$. Mostre que a relação $f \leq g$ definida por

$$f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

é uma ordem parcial em $\mathcal{F}$ e determine o mínimo de $\mathcal{F}$ segundo essa ordem.

Logo, para $\leq$ ser uma relação de ordem parcial, é preciso mostrar que dado dois elementos do conjunto, a relação deve ser reflexiva, transitiva e antiassimétrica, respectivamente:

$$\forall x \in \mathbb{R},$$
$$\forall a(x) \in \mathcal{F}, a(x) \leq a(x)$$

$$\forall a(x), b(x), c(x) \in \mathcal{F} : a(x) \leq b(x), b(x) \leq c(x) \to a(x) \leq c(x)$$
$$\forall a(x), b(x) \in \mathcal{F} : a(x) \leq b(x) \text{ e } b(x) \leq a(x) \to a(x) = b(x)$$

Note que para obtermos um mínimo precisamos achar uma função com valor fixo ao menor valor do domínio, que no nosso caso é o próprio 0, visto que o contradomínio de todas as funções é $[0, +\infty[$, portanto, seja $f(x) \in \mathcal{F} : f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ assim temos:

$$f(x) \leq g(x), \quad \forall g(x) \in \mathcal{F} \text{ e } \forall x \in \mathbb{R} \to f(x) < g(x) \text{ ou } f(x) = g(x)$$

# 3 Correção do exercício 3 e item alternativo

Escolha UMA das umas afirmações abaixo e prove por indução.

I) Para todo natural $n$, 9 divide $4^n + 15n - 1$.

II) Para todo natural $n$, 3 divide $n^3 - n$.

III) Para todo natural $n \neq 0$, $3^n$ divide $4^{3^{n-1}} - 1$

### Correção do item *III*

Proposição:

$$P(x) : \forall x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} 3^x | 4^{3^{x-1}} - 1$$

Caso 0:

$$3^1 | 4^{3^{1-1}} - 1 = 3 | 4^1 - 1 \to 3|3$$

Assumindo caso $P(n)$, façamos $P(n+1)$:

$$3^{n+1} | 4^{3^{n+1-1}} - 1 = (3^n \cdot 3) | 4^{3^n} - 1$$
$$= 3^n \cdot 3 | (4^{3^{n-1}} \cdot 4^3) - 1 = 3^n | 4^3 \cdot (1^{1^{n-1}} \cdot 1) - 1$$
$$= 3^n | 4^{3^{n-1}} - 1 \to P(n)$$

Assim, $P(n+1)$ vale, portanto, $\forall x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $3^x$ divide $4^{3^{x-1}} - 1$

### Item alternativo *II*

Proposição:

$$P(x) : \forall x \in \mathbb{N} \rightarrow 3|x^3 - x = 3|x(x^2 - 1) = 3|x(x+1)(x-1)$$

Caso n = 0 vale pois:

$$P(0) : 3|0^3 - 0 = 3|0$$

Assumindo que $P(n)$, façamos $P(n+1)$:

$$\begin{aligned} P(n+1) = 3|(n+1)[(n+1)+1][(n+1)-1] \\ = 3|(n+1)(n+2)n = 3|(n^2+2n+n+2)n \\ = 3|n^3+3n^2+2n \end{aligned}$$

É possível observar que 3 sempre dividirá $3n^2$, já que $n^2$ está sendo multiplicado por 3, o que o torna um múltiplo de 3, assim precisamos provar que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 2n$ é um múltiplo de 3, pois todo múltiplo de 3 mais outro múltiplo de 3 resulta em um múltiplo de 3. Portanto precisamos provar que:

$$B(x) : 3|x^3 + 2x, \forall x \in \mathbb{N}$$

Assim, através do *PIF* (Princípio da Indução Infinita), iremos provar $B(x)$.
Caso n = 0:

$$B(0) : 3|0^3 + 2 \cdot 0 = 3|0$$

Assumindo $B(n)$, faremos $B(n+1)$:

$$\begin{aligned} 3|(n+1)^3 + 2\cdot(n+1) = 3|(n^3+3n^2+3n+1)+(2n+2) \\ = 3|n^3+3n^2+5n+3 = 3|n^3+5n \\ = 3|n^3+2n+3n = 3|n^3+2n \rightarrow \ B(n) \text{ vale} \end{aligned}$$

Como visto acima, usamos mais uma vez do fato que múltiplos de 3 somados resultam em outro múltiplo de 3, e chegamos a conclusão que queriamos. Assim provando $B(x)$ pelo *PIF*, acabamos também provando $P(x)$. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, 3 divide $n^3 - n$.

## 4 Exercício 4

Em minha prova, caiu a seguinte versão da questão:

$$f((a,b),c) = f(a, b\cdot c)$$

E em minha resolução eu acabei provando e usando a outra versão:

$$f(a,b)\cdot f(a,c) = f(a, b+c)$$

Por isso, não incluirei a resolução a outra versão da 4.