Anotações de Cálculo

Anghie

May 2024

Conteúdo

1 Limite

1.1 Definição

O limite é uma forma de conseguir encontrar um valor proximo a um outro valor onde uma função dê um resultado proximo. Ou seja, definimos uma distância para o resultado (ϵ) que nos fala uma distância para a entrada (δ).

$$f(a) = L \to \lim_{x \to a} f(x) = L$$

Assim, matemáticamente falando, podemos falar que o limite é definido como:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} \to 0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon$$

1.2 Resolução

Para resolver um limite, tentamos substituir x por x_0 porém o valor de x nunca seria de fato igual a x_0, o que permite por exemplo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x + 1}{x} = \infty$$

no caso acima claramente vemos que ao substituir x por $x_0 = 0$ iriamos ter que $\frac{2(0)+1}{0}$, o que na matemática normal é indefinido, porém como o x só se aproxima de 0, na realidade não estamos dividindo por 0, e sim por um número muito próximo a 0, o que permite a realização da conta

2 Derivada

2.1 Definição

2.2 Resolução

A derivada é calculada da seguinte forma:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Também podemos falar que $h = x - x_0$, portanto, podemos mostrar a derivada como:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$h \to 0$ pois $x \to x_0$ e $h = x - x_0$

2.3 Regra da Cadeia

Toda derivada pode ser representada da seguinte forma:

$$\frac{df(g(x))}{dg(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

No caso de $g(x)$ ser igual a x, então a derivada é igual a:

$$\frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \cdot 1 = \frac{df(x)}{dx}$$

2.4 Regra do Tombo

A regra do tombo é uma das mais usadas, junto da regra da cadeia, ela pega, por exemplo: $f(x) = ax^n$ e através de um "tombo", conseguimos a derivada de $f(x)$, como podemos ver abaixo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{df(x)}{dx} = nax^{n-1}$$

caso, queiramos derivar novamente, o tombo permite o seguinte:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = (n-1) \cdot nax^{(n-1)-1} = (n-1) \cdot nax^{n-2}$$

Aqui podemos identificar um padrão, $\forall k \in \mathbb{R}$ sendo $k \leq n$:

$$\frac{d^k f(x)}{dx^k} = [\prod_{j=0}^{k-1} (n-j)] \cdot x^{(n-k)}$$

2.5 L'Hôpital

O teorema de L'Hôpital é um dos teoremas mais amados pelos estudantes, visto que ele permite resolver limites indeterminaveis usando derivadas, ou seja, quando no limite obtemos $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \to 1} \frac{2}{2x - 2} = \frac{2}{0} = \infty$$

Se fossemos resolver o mesmo limite sem o uso de L'Hopital teriamos que fazer:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0} = \infty$$

2.6 Regra do Produto

Ao derivarmos um produto devemos realizar a seguinte fórmula:

$$\frac{df(x) \cdot g(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

2.7 Regra do Quociente

Se quisermos derivar uma fração qualquer, como por exemplo a $\frac{f(x)}{g(x)}$ teremos como sua derivada a seguinte equação:

$$\frac{d\frac{f(x)}{g(x)}}{dx} = \frac{\frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{dg(x)}{dx}}{g^2(x)}$$

Exemplo: $f(x) = \frac{1}{x}$, considere $1 = f(x)$ e $x = g(x)$ substituindo na equação acima temos:

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}) = \frac{\frac{d}{dx}1 \cdot x - 1 \cdot \frac{d}{dx}x}{x^2} = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Porém, neste caso poderiamos ter usado a regra do tombo, pois $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, logo:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dx^{-1}}{dx} \to -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

2.8 Máximos e Mínimos Locais

Um máximo/mínimo local será um ponto c em um intervalo $]a, b[$ dentro do domínio da função onde $\nexists x \in \,]a, b[\, \in dom(f)$ tal que $\overset{\text{máx}}{f(c)} > f(x)$ ou $\overset{\text{mín}}{f(c)} < f(x)$. Conseguimos descobrir os máximos e mínimos locais através dos pontos críticos da função que a derivada dá.

Pontos Críticos

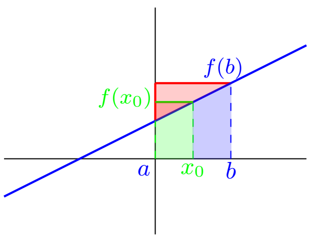
Para descobrir os pontos críticos de uma função, primeiro derivamos a mesma, depois tentamos obter as raízes da derivada

2.9 Concavidade

2.10 Assíntotas

3 Integral

A integral de uma função é uma forma de descobrir qual a área da função em certo intervalo. Seja $f(x)$ dada pelo seguinte gráfico e o intervalo seja $[a, b]$, uma representação simplória da integral seria:



A formula da área, A, no intervalo $[a, b]$ de $f(x)$ é:

$$(b - a) \cdot \int_a^b f(x)dx = A$$

3.1 Teorema Fundamental do Cálculo

Seja $\mathbb{I}$ intervalo fechado, limitado e que seja infito. Sejam $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ contínua e $F : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ uma função. São equivalentes.

a) $\exists a \in \mathbb{I} : F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$

b) F é derivável e $F'(x) = f(x) \forall x \in \mathbb{I}$ onde x não está nas extremidades de $\mathbb{I}$

Demonstração

Vamos provar que o item b implica o item a. Considere G, f e F

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Pela primeira parte:

$$G'(x) = f(x)$$

$$[F(x) - G(x)]' = f(x) - f(x) = 0$$

Logo G e F se diferem por uma constante. Note que $G(a) = 0$. Ou seja a constate é $F(a)$

$$\therefore F(x) = F(a) + G(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$$

hahahahahahaha