Análisis de Series de Tiempo

Mario José Pacheco López

Universidad El Bosque
Departamento de Matemáticas
Programa de Estadística

Febrero - junio de 2020

Índice

Sección 1 | Definiciones

Definiciones

Proceso estocástico

- Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $Z(w,t)$, donde w pertenece al espacio muestral y t a un conjunto índice (generalmente $\mathbb{Z}$).
- Para w fijo, $Z(w,t)$, como función de t, es una realización del proceso estocástico. Así una serie de tiempo es una realización de un cierto proceso estocástico.
- Para un conjunto finito de v.a. $\{Z_{t_1}, Z_{t_2}, ..., Z_{t_n}\}$ de un proceso estocástico $\{Z(w,t) : t = 0, \pm 1, \pm 2, ...\}$, se define la función de distribución $n-$dimensional como

$$F(z_{t_1}, ..., z_{t_n}) = p\{w : z(w,t_1) \leq z_{t_1}, ..., z(w,t_n) \leq z_{t_n}\}$$

Definiciones

Proceso estacionario

- Un proceso se dice estacionario en distribución de $n-$ésimo orden si su función de distribución $n-$dimensional es

$$F\left(z_{t_1}, ..., z_{t_n}\right) = F\left(z_{t_1+k}, ..., z_{t_n+k}\right) \quad (1)$$

  para cualquier $n-$tupla $(t_1, ..., t_n)$ y k entero.
- Un proceso se dice estrictamente estacionario si (1) es cierto para cualquier n $(= 1, 2, ...)$. Además si (1) se cumple para $n = m$, entonces también se cumple para $n \leq m$.

Definiciones

Funciones de media y varianza

- Generalmente se suprime la variable w y se escribe $Z(w,t)$ simplemente como $Z(t)$ o Z_t. Además el proceso es llamado de valor real si este sólo toma valores reales.
- Para un proceso de valor real $\{Z_t : t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ se define la función de medias del proceso como:

$$\mu_t = E(Z_t)$$

- La función de varianza

$$\sigma_t^2 = E(Z_t - \mu_t)^2$$

Definiciones

Funciones de covarianza y correlación

- La función de covarianza entre Z_{t_1} y Z_{t_2}

$$\gamma\left(t_1, t_2\right) = E\left(Z_{t_1} - \mu_{t_1}\right)\left(Z_{t_2} - \mu_{t_2}\right)$$

- La función de correlación entre Z_{t_1} y Z_{t_2}

$$\rho\left(t_1, t_2\right) = \frac{\gamma\left(t_1, t_2\right)}{\sigma_{t_1}\sigma_{t_2}}$$

Definiciones

Propiedades en procesos estrictamente estacionarios

- Para un proceso estrictamente estacionario $\mu_t = \mu$, siempre que $E\left(\mid Z_t \mid < \infty\right)$ y $\sigma_t^2 = \sigma^2$, si $E\left(Z_t^2\right) < \infty$, para todo t.
- Además dado que $F\left(z_{t_1}, z_{t_2}\right) = F\left(z_{t_1+k}, z_{t_2+k}\right)$ para cualquier enteros t_1, t_2 y k,

$$\gamma\left(t_1, t_2\right) = \gamma\left(t_1 + k, t_2 + k\right), \quad \rho\left(t_1, t_2\right) = \rho\left(t_1 + k, t_2 + k\right)$$

- Haciendo $t_1 = t - k$ y $t_2 = t$, se tiene que

$$\begin{aligned} \gamma\left(t_1, t_2\right) &= \gamma\left(t - k, t\right) = \gamma\left(t, t + k\right) = \gamma_k \\ \rho\left(t_1, t_2\right) &= \rho\left(t - k, t\right) = \rho\left(t, t + k\right) = \rho_k \end{aligned}$$

- Así, para un proceso estrictamente estacionario con primeros dos momentos finitos, la función de covarianza y correlación entre Z_t y Z_{t+k} depende únicamente de la diferencia k entre los tiempos.

Definiciones

Proceso débilmente estacionario

- Un proceso es llamado *débilmente estacionario* de orden n, si todos sus momentos conjuntos hasta de orden n son finitos e invariantes en el tiempo.
- Un proceso *débilmente estacionario de segundo orden* tendrá media y varianza constantes y sus funciones de covarianza y correlación solamente dependerán del número de períodos que separan los términos del proceso.
- Esta clase de proceso es también llamado proceso estacionario en sentido amplio o proceso estacionario en covarianza o simplemente estacionario.

Definiciones

Ejemplo

Considere la secuencia $Z_t = A\sin(wt+\theta)$, con A una v.a. de media 0 y varianza 1 y $\theta \sim U[-\pi,\pi]$ independiente de A. Entonces

$$
\begin{aligned}
E(Z_t) &= E(A)\,E(\sin(wt+\theta)) = 0\\
E(Z_t, Z_{t+k}) &= E\left\{A^2 \sin(wt+\theta)\sin(w(t+k)+\theta)\right\}\\
&= E\left(A^2\right) E\left\{\frac{1}{2}\left[\cos(wk) - \cos(w(2t+k)+2\theta)\right]\right\}\\
&= \frac{1}{2}\cos(wk) - \frac{1}{2}E\left\{\cos(w(2t+k)+2\theta)\right\}\\
&= \frac{1}{2}\cos(wk) - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(w(2t+k)+2\theta)\,\frac{1}{2\pi}d\theta\\
&= \frac{1}{2}\cos(wk) - \frac{1}{8\pi}\left[\sin(w(2t+k)+2\theta)\right]_{-\pi}^{\pi}\\
&= \frac{1}{2}\cos(wk)
\end{aligned}
$$

Definiciones

Funciones de autocovarianza y autocorrelación

Para un proceso estacionario $\{Z_t\}$ escribimos

$$\gamma_k = cov\left(Z_t, Z_{t+k}\right) = E\left(Z_t - \mu\right)\left(Z_{t+k} - \mu\right)$$

y

$$\rho_k = \frac{cov\left(Z_t, Z_{t+k}\right)}{\sqrt{Var\left(Z_t\right) Var\left(Z_{t+k}\right)}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

donde $\gamma_0 = Var\left(Z_t\right) = Var\left(Z_{t+k}\right)$. Como función de k, γ_k se denomina la función de autocovarianza y ρ_k la función de autocorrelación (ACF).

Definiciones

Propiedades

1. $\gamma_0 = Var\,(Z_t)$; $\rho_0 = 1$
2. $\mid \gamma_k \mid \leq \gamma_0$; $\mid \rho_k \mid \leq 1$
3. $\gamma_k = \gamma_{-k}$; $\rho_k = \rho_{-k}$, para todo k.
4. γ_k y ρ_k son semidefinidas positivas en el sentido que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\gamma_{|t_i-t_j|} \geq 0$$

y

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\rho_{|t_i-t_j|} \geq 0$$

para cualquier $t_1, t_2, ..., t_n$ y $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ reales.

Definiciones

Demostración

1. Trivial
2. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\gamma_k^2 \quad \leq \quad E\left(Z_t-\mu\right)^2 E\left(Z_{t+k}-\mu\right)^2=\gamma_0^2$$

3. De la definición de γ_k

$$\gamma_k=E\left(Z_t-\mu\right)\left(Z_{t+k}-\mu\right)=E\left(Z_{(t+k)-k}-\mu\right)\left(Z_{(t+k)}-\mu\right)=\gamma_{-k}$$

4. Sea $X=\sum_{i=1}^n \alpha_i Z_{t_i}$, entonces

$$0 \leq Var(X)=\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j cov\left(Z_{t_i}, Z_{t_j}\right)=\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \gamma_{|t_i-t_j|}$$

Definiciones

Función de autocorrelación parcial

- Se usa para medir el grado de correlación entre Z_t y Z_{t+k} luego de remover la dependencia lineal con las variables intermedias

$$Corr\left(Z_t, Z_{t+k} \mid Z_{t+1}, Z_{t+2}, \ldots, Z_{t+k-1}\right)$$

- Puede ser obtenida considerando el siguiente modelo de regresión para la variable Z_{t+k} de un proceso de media cero

$$Z_{t+k} = \phi_{k1} Z_{t+k-1} + \phi_{k2} Z_{t+k-2} + \cdots + \phi_{kk} Z_t + e_{t+k}$$

con e_{t+k} incorrelado con Z_{t+k-j} para $j \geq 1$.

- Multiplicando por Z_{t+k-j} y tomando esperanza se tiene

$$\begin{aligned} \gamma_j &= \phi_{k1}\gamma_{j-1} + \phi_{k2}\gamma_{j-2} + \cdots + \phi_{kk}\gamma_{j-k} \\ \rho_j &= \phi_{k1}\rho_{j-1} + \phi_{k2}\rho_{j-2} + \cdots + \phi_{kk}\rho_{j-k} \end{aligned}$$

Definiciones

Función de autocorrelación parcial

- Para $j = 1, 2, ..., k$ se tiene el sistema

$$
\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_{k1}\rho_0 + \phi_{k2}\rho_1 + \cdots + \phi_{kk}\rho_{k-1} \\
\rho_2 &= \phi_{k1}\rho_1 + \phi_{k2}\rho_0 + \cdots + \phi_{kk}\rho_{k-2} \\
&\vdots \\
\rho_k &= \phi_{k1}\rho_{k-1} + \phi_{k2}\rho_{k-2} + \cdots + \phi_{kk}\rho_0
\end{aligned}
$$

- Usando la regla de Cramer para $k = 1, 2, ...$ se tiene

$$
\phi_{11} = \rho_1, \quad \phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}, \quad \phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}
$$

Definiciones

Función de autocorrelación parcial

- En general

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

- Como una función de k, ϕ_{kk} es denominada función de autocorrelación parcial (PACF) entre Z_t y Z_{t+k}.

Definiciones

Proceso ruido blanco, RB

- Un proceso $\{a_t\}$ es llamado RB si este es una secuencia de v.a. incorreladas de una distribución fija con media constante $E\left(a_t\right) = \mu_a$, usualmente asumida como cero, varianza constante $Var\left(a_t\right) = \sigma_a^2$ y
$$\gamma_k = cov\left(a_t, a_{t+k}\right) = 0$$
para todo $k \neq 0$.
- De este modo, todo proceso RB es estacionario con función de autocovarianza
$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_a^2 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Definiciones

Proceso ruido blanco, RB.

- Función de autocorrelación

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

- Función de autocorrelación parcial

$$\phi_{kk} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

- Un proceso RB se dice Gausiano si su función de distribución conjunta es normal. En adelante se hace referencia solo a procesos ruido blanco Gausianos de media cero.

Definiciones

Estimación de la media

- Un estimador natural para la media $\mu = E\left(Z_t\right)$ de un proceso estacionario es $\bar{Z} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t$, con

$$E\left(\bar{Z}\right) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} E\left(Z_t\right) = \frac{1}{n} n\mu = \mu$$

- Además

$$\begin{aligned} Var\left(\bar{Z}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} Cov\left(Z_t, Z_s\right) = \frac{\gamma_0}{n^2}\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \rho_{(t-s)} \\ &= \frac{\gamma_0}{n^2}\sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(n- \mid k \mid\right)\rho_k = \frac{\gamma_0}{n}\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(1 - \frac{\mid k \mid}{n}\right)\rho_k \end{aligned}$$

donde $k = t - s$.

Definiciones

Estimación de la media

- Así, si

$$lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{\mid k\mid}{n}\right)\rho_k\right]$$

es finito, entonces $Var\left(\bar{Z}\right)\to 0$ conforme $n\to\infty$, y $\bar{Z}$ es un estimador consistente de μ. Esto es,

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}Z_t=\mu$$

en media cuadrática. Si esto se cumple se dice que el proceso es ergódico en media. Una condición suficiente para que este resultado se cumpla es que $\rho_k\to 0$ conforme $k\to\infty$.

Definiciones

Estimación de la función de autocovarianza muestral

Un estimador para la función de autocovarianza es,

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} \left(Z_t - \bar{Z}\right)\left(Z_{t+k} - \bar{Z}\right)$$

o

$$\hat{\hat{\gamma}} = \frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} \left(Z_t - \bar{Z}\right)\left(Z_{t+k} - \bar{Z}\right)$$

Definiciones

Estimación de la función de autocovarianza muestral

Pero,

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{n-k}\left(Z_t-\bar{Z}\right)\left(Z_{t+k}-\bar{Z}\right) &= \sum_{t=1}^{n-k}\left[\left(Z_t-\mu\right)-\left(\bar{Z}-\mu\right)\right]\left[\left(Z_{t+k}-\mu\right)-\left(\bar{Z}-\mu\right)\right] \\
&= \sum_{t=1}^{n-k}\left(Z_t-\mu\right)\left(Z_{t+k}-\mu\right)-\left(\bar{Z}-\mu\right)\sum_{t=1}^{n-k}\left(Z_t-\mu\right) \\
&\quad -\left(\bar{Z}-\mu\right)\sum_{t=1}^{n-k}\left(Z_{t+k}-\mu\right)+(n-k)\left(\bar{Z}-\mu\right)^2 \\
&\approx \sum_{t=1}^{n-k}\left(Z_t-\mu\right)\left(Z_{t+k}-\mu\right)-(n-k)\left(\bar{Z}-\mu\right)^2
\end{aligned}$$

Definiciones

Estimación de la función de autocovarianza muestral

así,

$$
\begin{aligned}
E\left(\hat{\gamma}_k\right) &\approx \gamma_k - \frac{k}{n}\gamma_k - \left(\frac{n-k}{n}\right) Var\left(\bar{Z}\right) \\
E\left(\hat{\hat{\gamma}}_k\right) &\approx \gamma_k - Var\left(\bar{Z}\right)
\end{aligned}
$$

De esta forma ambos estimadores son sesgados, pero si se omite el efecto de la estimación de μ representado en $Var\left(\bar{Z}\right)$ entonces $\hat{\hat{\gamma}}_k$ tiene un menor sesgo que $\hat{\gamma}_k$.

Definiciones

Estimación de la función de autocorrelación

Cuando un proceso es Gausiano, Bartlett (1946) muestra que

$$
\begin{aligned}
Cov\left(\hat{\gamma}_k, \hat{\gamma}_{k+j}\right) &\approx \frac{1}{n}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\gamma_i\gamma_{i+j} + \gamma_{i+k+j}\gamma_{i-k}\right) \\
Var\left(\hat{\gamma}_k\right) &\approx \frac{1}{n}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\gamma_i^2 + \gamma_{i+k}\gamma_{i-k}\right)
\end{aligned}
$$

Definiciones

Estimación de la función de autocorrelación

También

$$Cov\left(\hat{\hat{\gamma}}_k, \hat{\hat{\gamma}}_{k+j}\right) \approx \frac{1}{n-k}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\gamma_i\gamma_{i+j} + \gamma_{i+k+j}\gamma_{i-k}\right)$$

$$Var\left(\hat{\gamma}_k\right) \approx \frac{1}{n-k}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\gamma_i^2 + \gamma_{i+k}\gamma_{i-k}\right)$$

Así, la varianza de $\hat{\gamma}_k$ es menor que la de $\hat{\hat{\gamma}}_k$ y decimos que el proceso es ergódico en función de autocovarianza cuando

$$lim_{n\to\infty}\hat{\gamma}_k = \gamma_k$$

Definiciones

Estimación de la función de autocorrelación

- Para una serie observada, la función de autocorrelación muestral (ACF) se define como

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- Para un proceso estacionario Gausiano, Bartlett (1946) muestra que para $k > 0$ y $k + j > 0$,

$$\begin{aligned} Cov\left(\hat{\rho}_k, \hat{\rho}_{k+j}\right) \backsimeq\; & \frac{1}{n} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\rho_i \rho_{i+j} + \rho_{i+k+j} \rho_{i-k}\right. \\ & -2\rho_k \rho_i \rho_{i-k-j} - 2\rho_{k+j} \rho_i \rho_{i-k} \\ & \left. +2\rho_k \rho_{k+j} \rho_i^2\right) \end{aligned}$$

Definiciones

Estimación de la función de autocorrelación

- Para n grande, $\hat{\rho}_k$ es aproximadamente normal con media ρ_k y varianza

$$Var\left(\hat{\rho}_k\right) \simeq \frac{1}{n} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\rho_i^2 + \rho_{i+k}\rho_{i-k} - 4\rho_k\rho_i\rho_{i-k} + 2\rho_k^2\rho_i^2\right)$$

- Para procesos en que $\rho_k = 0$ para $k > m$

$$Var\left(\hat{\rho}_k\right) \simeq \frac{1}{n} \left(1 + 2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 + \cdots + \rho_m^2\right)$$

En la práctica los valores de ρ_i son desconocidos y se remplazan por $\hat{\rho}_i$.

Definiciones

Estimación de la función de autocorrelación

Para un proceso RB $\{a_t\}$ con cuartos momentos finitos y n grande la ACF muestral, $\hat{\rho}_k$, para $k = 1, 2, ..., K$, donde K es fijo pero arbitrario, está distribuida aproximadamente normal con media cero y desviación estándar

$$\sigma_{\hat{\rho}_k} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Definiciones

Estimación de la función de autocorrelación parcial

- La función de autocorrelación muestral $\hat{\phi}_{kk}$ se obtiene sustituyendo ρ_i por $\hat{\rho}_i$ en la pacf teórica. También puede calcularse de forma recursiva como:

$$
\begin{aligned}
\hat{\phi}_{11} &= \hat{\rho}_1 \\
\hat{\phi}_{k+1,k+1} &= \frac{\hat{\rho}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \hat{\phi}_{kj}\hat{\rho}_{k+1-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k} \hat{\phi}_{kj}\hat{\rho}_j} \\
\hat{\phi}_{k+1,j} &= \hat{\phi}_{kj} - \hat{\phi}_{k+1,k+1}\hat{\phi}_{k,k+1-j}
\end{aligned}
$$

con $j = 1, ..., k$.

- Bajo la hipótesis de que el proceso es RB, la varianza de $\hat{\phi}_{kk}$ se puede aproximar como

$$Var\left(\hat{\phi}_{kk}\right) \simeq \frac{1}{n}$$

Sección 2 | Representaciones

Representaciones

Las representaciones autorregresiva y de medias móviles para expresar un proceso de series de tiempo son las más usadas en el análisis de series de tiempo.

Representaciones

Representación de medias móviles

En esta el proceso Z_t se escribe como combinación lineal de una secuencia de variables aleatorias incorreladas,

$$\begin{aligned} Z_t &= \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \cdots \\ &= \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j} \end{aligned}$$

con $\psi_0 = 1$ y $\{a_t\}$ ~RB con media cero y $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$.
Introduciendo el operador de retraso $B^j x_t = x_{t-j}$, podemos escribir el proceso como

$$\dot{Z}_t = \psi(B) a_t$$

donde $\dot{Z}_t = Z_t - \mu$ y $\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$.

Representaciones

Propiedades

$$\begin{aligned} E\left(Z_t\right) &= \mu \\ Var\left(Z_t\right) &= \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 \end{aligned}$$

y

$$E\left(a_t Z_{t-j}\right) = \begin{cases} \sigma_a^2 & \text{para } j = 0 \\ 0 & \text{para } j > 0 \end{cases}$$

Representaciones

Propiedades

Además

$$\begin{aligned}\gamma_k &= E\left(\dot{Z}_t \dot{Z}_{t+k}\right)\\ &= E\left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\psi_i\psi_j a_{t-i}a_{t+k-j}\right)\\ &= \sigma_a^2\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i\psi_{i+k}\end{aligned}$$

y

$$\rho_k = \frac{\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i\psi_{i+k}}{\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i^2}$$

Representaciones

Propiedades

Claramente las funciones de autocovarianza y autocorrelación son funciones solo de la diferencia en el tiempo k. Sin embargo, dado que estas envuelven sumas infinitas, para que sea estacionario se debe mostrar que γ_k sea finito para todo k.

$$\begin{aligned} |\gamma_k| &= \left| E\left(\dot{Z}_t \dot{Z}_{t+k}\right) \right| \\ &\leq \left[Var\left(Z_t\right) Var\left(Z_{t+k}\right)\right]^{1/2} \\ &= \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 \end{aligned}$$

por esta razón $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ es una condición necesaria para que el proceso sea estacionario.

Representaciones

Función generadora de autocovarianza

Para una secuencia γ_k, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, la la fga se define como

$$\gamma(B) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k B^k$$

donde la varianza del proceso, γ_0, es el coeficiente de B^0 y la autocovarianza de orden k, γ_k, es el coeficiente tanto de B^k como de B^{-k}. Para la representación de medias móviles

$$\gamma(B) = \sigma_a^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+k} B^k = \sigma_a^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_i \psi_j B^{j-i}$$

$$= \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i B^{-i} = \sigma_a^2 \psi(B) \psi\left(B^{-1}\right)$$

donde $j = i + k$ y $\psi_j = 0$ para $j < 0$.

Representaciones

Representación autoregresiva

En este se hace una regresión entre el valor Z_t y los valores en el pasado, esto es,

$$\dot{Z}_t = \pi_1 \dot{Z}_{t-1} + \pi_2 \dot{Z}_{t-2} + \cdots + a_t$$

o equivalentemente

$$\pi(B)\,\dot{Z}_t = a_t$$

donde

$$\pi(B) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j$$

y

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} |\, \pi_j \,| < \infty$$

Representaciones

Procesos invertibles

- Un proceso es llamado invertible si puede ser escrito en esta forma. Box- Jenkins muestran que cuando se está pronosticando, un proceso no invertible no tiene sentido.
- Para que un proceso MA estacionario sea invertible, es decir, tenga una representación AR, es necesario que las raíces del polinomio $\psi(B) = 0$ caigan todas fuera del circulo unidad.
- No todo proceso invertible es necesariamente estacionario. Para que un proceso invertible sea estacionario, es decir tenga una representación MA, es necesario que las raíces del polinomio $\pi(B) = 0$ caigan todas fuera del círculo unidad.

Representaciones

Modelos

Aunque las representaciones MA y AR son útiles, ellas contienen un número infinito de parámetros que en la práctica no es posible estimar. Por tanto, la modelación de un fenómeno requiere usar un número finito de parámetros. De aquí surgen los modelos:

- Autorregresivos de orden p, AR(p):

$$Z_t = \theta_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$$

- De Medias Móviles de orden q, MA(q):

$$Z_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$$

Representaciones

Modelos

En la práctica, si nos restringimos a trabajar exclusivamente con un modelo MA o un modelo AR, el número de parámetros necesario puede ser excesivamente grande, frente al número disponible de datos recolectados para el análisis. Una alternativa natural es el modelo autorregresivo y de medias móviles ARMA(p,q):

$$\begin{aligned} Z_t &= \theta_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + a_t \\ &\quad -\theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q} \end{aligned}$$

Esta clase de modelos es parsimoniosa, en el sentido que puede explicar el fenómeno con modelos potentes que tienen muy pocos parámetros.