Análisis de Series de Tiempo

Mario J. P. López

Departamento de Matemáticas
Universidad El Bosque

2020

Sección 1 | Identificación de Modelos

Identificación de modelos

Considerando el modelo ARIMA(p,d,q) general

$$(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p)(1 - B)^d Z_t = \theta_0 + (1 - \theta_1 B - \cdots \theta_q B^q)$$

la metodología de identificación de modelos se refiere a

- identificar las transformaciones requeridas (estabilización de varianza y diferenciación)
- decidir si se incluye el parámetro determinístico θ_0 cuando $d \geq 1$
- los órdenes apropiados de p y q para el modelo.

Identificación de modelos

Pasos para la idetificación

- Graficar la serie de tiempo
- Seleccionar una transformación de potencia apropiada.
- Seleccionar un orden de diferenciación apropiado.
- Calcular y examinar el comportamiento de la ACF y la PACF muestral para la serie transformada y diferenciada para identificar los órdenes p y q en el modelo, teniendo en cuenta las características teóricas.

Identificación de modelos

Pasos para la idetificación

Proceso	ACF	PACF
AR(p)	Decaimiento exponencial o como ondas amortiguadas	Se corta luego del rezago p
MA(q)	Se corta luego del rezago q	Decaimiento exponencial o como ondas amortiguadas
ARMA(p,q)	Decae luego del rezago $(q-p)$	Decae luego del rezago $(p-q)$

Identificación de modelos

Pasos para la identificación

- Para determinar si el parámetro θ_0 debe estar incluido en el modelo se puede realizar una prueba t dividiendo la media muestral $\widehat{W}$ de la serie diferenciada $W = (1 - B)^d \, Z_t$ con su error estándar aproximado

$$S_{\bar{W}} = \left[\frac{\hat{\gamma}_0}{n} \left(1 + 2\hat{\rho}_1 + \cdots ` + 2\hat{\rho}_k \right) \right]^{1/2}$$

donde $\hat{\gamma}_0$ es la varianza muestral y $\hat{\rho}_1, \ldots, \hat{\rho}_k$ son las primeras k autocorrelaciones muestrales significativas de $\{W_t\}$. Así si la estadística es no significativa entonces no se incluye a θ_0 en el modelo.

Identificación de modelos

Función de autocorrelación muestral extendida

- Dadas las dificultades de identificación de modelos ARMA con p y q distintos de cero, es necesario un método de identificación de modelos mixtos ARMA más allá de la ACF y la PACF. Este es el caso de la **función de autocorrelación muestral extendida** (EACF).
- Considere el modelo

$$(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p)\, Z_t = (1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q)\, a_t$$

de donde

$$Y_t = (1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p)\, Z_t$$

sigue un modelo MA(q).

Identificación de modelos

Función de autocorrelación muestral extendida

- Suponga que se tienen n observaciones disponibles de un proceso ARMA(p,q), con p conocido y $q > 0$ desconocido, si se ajusta vía mínimos cuadrados un modelo AR(p) a los datos, esto es

$$Z_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_1 Z_{t-i} + e_t, \qquad t = p+1, \ldots, n$$

con e_t el término de error, los estimadores de mínimos cuadrados $\hat{\phi}_i^{(0)}$ de ϕ_i, $i = 1, \ldots, p$, serán inconsistentes y los residuales estimados

$$\hat{e}_t^{(0)} = Z_t - \sum_{i=0}^{p} \hat{\phi}_i^{(0)} Z_{t-i}$$

no serán ruido blanco.

Identificación de modelos

Función de autocorrelación muestral extendida

- Considere ahora el modelo

$$Z_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_1 Z_{t-i} + \beta_1 \hat{e}^{(0)}_{t-1} + e_t, \qquad t = p+2, \ldots, n$$

Si $q > 1$, los estimadores de mínimos cuadrados $\hat{\phi}^{(1)}_i$ de ϕ_i, $i = 1, \ldots, p$, serán inconsistentes y los residuales estimados $\hat{e}^{(1)}_t$ no serán ruido blanco. Este proceso puede continuar hasta que se consigan estimadores consistentes para ϕ_i y los $\hat{e}^{(m)}_t$ sean ruido blanco.

Identificación de modelos

Función de autocorrelación muestral extendida

En la páctica el verdadero valor de p no se conoce, pero un procedimiento sugerido consiste en un conjunto de regresiones iteradas para determinar los órdenes p y q. Así, se define la m-ésima EACF $\rho_j^{(m)}$ de Z_t como la función de autocorrelación muestral de $\hat{e}_t^{(m)}$ del modelo ajustado

$$Z_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_1 Z_{t-i} + \sum_{k=0}^{m} \beta_{k+1} \hat{e}_{t-k+1}^{(k)} + e_t, \qquad t = p+m+2, \ldots, n$$

Identificación de modelos

Función de autocorrelación muestral extendida

arregladas en una tabla como sigue:

	MA				
AR	0	1	2	3	$\cdots$
0	$\hat{\rho}_1^{(0)}$	$\hat{\rho}_2^{(0)}$	$\hat{\rho}_3^{(0)}$	$\hat{\rho}_4^{(0)}$	$\cdots$
1	$\hat{\rho}_1^{(1)}$	$\hat{\rho}_2^{(1)}$	$\hat{\rho}_3^{(1)}$	$\hat{\rho}_4^{(1)}$	$\cdots$
2	$\hat{\rho}_1^{(2)}$	$\hat{\rho}_2^{(2)}$	$\hat{\rho}_3^{(2)}$	$\hat{\rho}_4^{(2)}$	$\cdots$
3	$\hat{\rho}_1^{(3)}$	$\hat{\rho}_2^{(3)}$	$\hat{\rho}_3^{(3)}$	$\hat{\rho}_4^{(3)}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

con

$$\hat{\rho}_j^{(m)} \xrightarrow{P} \begin{cases} 0, & 0 \leq m - p < j - q \\ X \neq 0, & \text{e.o.p.} \end{cases}$$