

高等学校试用教材

GongCheng Lixue

工 程 力 学

[材料力学]

莫淑华	习宝琳	主编
姜宝林	王秋生	主审

人 民 交 通 出 版 社

内 容 提 要

本书是黑龙江省高等学校试用教材, 主要包括: 拉伸和压缩, 圆轴的扭转, 梁的弯曲, 联接件的强度计算, 应力状态和强度理论, 组合变形杆件的强度计算, 冲击应力和交变应力, 压杆稳定, 材料力学问题的数值解法等, 可供工程专科、电大、夜大、函大及中专学校学生使用, 也可供工程技术人员参考。

高等学校试用教材

工程力学

[材料力学]

莫淑华 习宝琳 主编

姜宝林 王秋生 主审

版式设计: 崔凤莲 责任校对: 张莹

人民交通出版社出版发行

(100013 北京和平里东街 10 号)

各地新华书店经销

人民交通出版社印刷厂印刷

开本: 850× 1168 $\frac{1}{32}$ 印张: 8.75 字数: 23.5 千

1998 年 8 月 第 1 版

1998 年 8 月 第 1 版 第 1 次印刷

印数: 0001- 3050 册 定价: 17.00 元

ISBN 7-114-03016-9

· TB · 00013

《工程力学》[材料力学] 编委会名单

名誉主任：	王光远	董 浩			
主 任：	杜善义	何钟怡			
副 主 任：	王致清	张 桥	苏 群		
委 员：	赵经文	王殿富	方广盛	王祥林	欧进萍
	王 彪	姜宝林	莫淑华	习宝琳	徐 胜
	王秋生				
主 编：	莫淑华	习宝琳			
主 审：	姜宝林	王秋生			

前 言

本书是受黑龙江省高等教育力学专业委员会的委托,适应教育改革的需要,为我省高等学校工程专科基础力学课程编写的教材。

编写过程中,我们一方面严格遵循国家教委最新制定的高等学校工程专科基础力学课程的教学基本要求,并根据高等学校工程专科培养应用型人才的教育特点,努力以马克思主义世界观作指导,以“掌握基本概念,强化应用”,提高综合问题分析能力为主要目的;另一方面针对多年来基础力学课程本身在教学中存在的一些问题,对传统的体系作了必要的调整及优化,以通用的功能模块形式建立起新的课程内容体系。本书力求做到内容精炼、简明,结构严谨、合理,理论联系工程实际。本书采用符号均为 GB 3100 ~ 3102—93《量和单位》中规定的符号。

本书的主要特点:

(1) 将基础力学中的理论力学、材料力学统一为工程力学,划分成四个功能模块,即静力学、材料力学、动力学、工程力学实验,可适用于工程专科一般专业的基础力学课程。

(2) 加强了矢量分析与计算,应用数学手段,简化力学分析过程,侧重工程实际应用,强化综合问题的分析方法。

(3) 增加力学问题的数值解法,提高应用计算机解决工程实际问题的能力。

(4) 增设工程力学实验,强化学生从事工程实际的动手能力,加强用电测法、光测法等解决工程强度问题。

本书按功能模块分为四册,总学时约为 160 ~ 180 学时,可供工程专科、电大、夜大、函大及相近层次的学校等根据不同专业需

要,任意组合选用。通过本书的学习,读者能够解决工程实际问题中的一般力学问题,并为进一步阅读或学习其它力学著作打好基础。本书也供工程技术人员参考。

参加本书编写工作的人员有:莫淑华、习宝琳、王淑娟、蔡青、孙林、洪晓晖、姜艳、陆夏美、史红、郭玉敏、于英。

参加本书计算机调制及绘图的人员有:赵晓晨等。

在编写本书的过程中得到了黑龙江省教委、黑龙江省力学学会及有关学校、领导的大力支持和兄弟院校的热情指导和帮助,同时,还吸取了有关资料中的部分内容,在此表示衷心的感谢。

哈尔滨工业大学的赵经文教授、王殿富教授和东北林业大学的方广盛教授复审了书稿,西安交通大学的张陵教授对本书提出了许多宝贵的改进意见,在此谨致谢意。

由于水平有限,难免有不足和欠妥之处,欢迎读者提出宝贵意见。

目 录

引言	1
第一章 拉伸和压缩	3
§ 1-1 拉伸和压缩的概念	3
§ 1-2 轴力 轴力图	3
§ 1-3 拉杆(或压杆)横截面上的应力	6
§ 1-4 拉杆(或压杆)的变形 胡克定律	8
§ 1-5 材料在拉伸和压缩时的力学性质	11
§ 1-6 拉伸和压缩时的强度计算	16
§ 1-7 拉杆(或压杆)斜截面上的应力拉压破坏分析	19
§ 1-8 应力集中的概念	20
§ 1-9 拉压静不定问题	22
习题	27
第二章 圆轴的扭转	33
§ 2-1 概述	33
§ 2-2 扭矩和扭矩图	34
§ 2-3 切应力互等定理 剪切胡克定律	37
§ 2-4 圆轴扭转时的应力和变形	40
§ 2-5 圆轴扭转时的强度和刚度条件	45
§ 2-6 圆轴扭转时的破坏分析	48
习题	50
第三章 梁的弯曲	55
§ 3-1 概述	55
§ 3-2 梁横截面上的内力——切力和弯矩	58

§ 3-3	弯矩、切力、分布载荷集度之间的关系	63
§ 3-4	对称弯曲梁横截面上的正应力	66
§ 3-5	轴惯性矩 平行移轴公式	71
§ 3-6	对称弯曲梁横截面的切应力	74
§ 3-7	弯曲强度条件及其应用	79
§ 3-8	弯曲变形 挠曲线近似微分方程	82
§ 3-9	积分法求梁的变形	84
§ 3-10	叠加法求梁的变形	89
§ 3-11	梁的刚度条件及其应用	94
§ 3-12	提高梁强度和刚度的主要措施	95
§ 3-13	简单静不定梁	99
	习题	101
第四章 联接件的强度计算		
§ 4-1	概述	110
§ 4-2	剪切与挤压的实用计算	111
§ 4-3	铆钉(或螺栓)联接承受偏心载荷时的强度计算	116
	习题	120
第五章 应力状态和强度理论		
§ 5-1	应力状态的概念	125
§ 5-2	平面应力状态分析	125
§ 5-3	三向应力状态的应力圆 最大切应力	133
§ 5-4	三向应力状态下应力与应变的关系应变比能	136
§ 5-5	强度理论简介	140
	习题	145
第六章 组合变形杆件的强度计算		
§ 6-1	概述	148
§ 6-2	拉(压)弯组合变形	148
§ 6-3	弯扭组合变形	153

习题.....	159
第七章 冲击应力 交变应力.....	164
§ 7-1 冲击应力	164
§ 7-2 交变应力的概念	169
§ 7-3 材料的持久极限	172
§ 7-4 影响构件持久极限的主要因素构件的 持久极限	175
习题.....	180
第八章 压杆稳定.....	182
§ 8-1 压杆稳定的概念 临界压力	182
§ 8-2 临界应力 经验公式	185
§ 8-3 压杆稳定性校核提高压杆稳定性的措施	189
习题.....	192
第九章 材料力学问题的数值解法.....	195
§ 9-1 轴向拉、压静定问题的数值解法	195
§ 9-2 直杆扭转静定问题的数值解法	203
§ 9-3 弯曲静定问题的数值解法	211
§ 9-4 组合变形的数值解法	224
附 录 型钢表.....	243
习题答案.....	259

引 言

机器或工程结构都是由许多零件或构件组成。当机器或工程结构工作时,每个零件或构件将承受一定的外力(载荷),为保证机器或工程结构能正常地工作,每个零件或构件都应具有足够的承载能力,其承载能力由以下三方面来衡量。

在外力作用下,零件或构件应具有抵抗破坏的能力,即应具有足够的强度。

在外力作用下,零件或构件应具有抵抗变形的能力,使其不发生过大的变形,即应具有足够的刚度。

在外力作用下,零件或构件应具有保持其原有平衡状态的能力,即应具有足够的稳定性。

零件或构件的承载能力,不仅与其几何尺寸和形状有关,还与所用材料的力学性质有关。一般说来,选用较大横截面尺寸或选用较好材料,能使零件或构件具有足够的承载能力,保证机器或工程结构安全工作。但这与降低消耗、减轻自重和节约资金相矛盾。

综上所述,材料力学是研究构件承载能力的科学,即研究构件强度、刚度和稳定性计算的科学。其任务是:在保证构件既安全又经济的条件下,为构件选择合适的材料、确定合理的截面形状和尺寸,为工程技术人员提供必要的理论基础和计算方法。

构件均由变形固体材料制成。变形固体材料的组成和微观结构是相当复杂的,其性质也是多方面的。在材料力学中,就变形固体材料与研究构件强度、刚度和稳定性有关的主要性质作出一些假设,将变形固体材料抽象为一种理想的材料模型。采用这些假设可使问题的分析与计算得以简化。其具体假设如下:

均匀连续性假设 这个假设认为组成变形固体的材料毫无空

隙地充满了变形固体的几何空间,而且变形固体内各点的力学性质完全相同。

各向同性假设 这个假设认为,变形固体材料在不同的方向上具有相同的力学性质。

小变形条件 小变形是指构件受力后产生的变形与构件的原始尺寸相比较十分微小。

实际构件形状多种多样,当构件的长度远大于其横向尺寸,则称其为杆。杆件各横截面形心的连线称为杆的轴线。轴线为直线,且各横截面形状和大小不变的杆,称为等截面直杆,简称等直杆。材料力学的研究对象主要是等直杆。

根据杆的受力情况,其变形形式有:拉伸和压缩、剪切、扭转、弯曲,以及组合变形。

第一章 拉伸和压缩

§ 1-1 拉伸和压缩的概念

如图 1-1 所示吊架的斜杆 AB 受到拉力 F_1 作用, 而水平杆 BC 受到压力 F_2 作用, 又如起重钢绳、油压机的立柱等, 在工作时也受到拉力或压力作用。上述杆件的外形和加载方式虽不相同, 但均可画成图 1-1 所示的计算简图。这类杆件所受外力的作用线与杆的轴线重合, 杆件的变形为轴向伸长或缩短。这种变形称为轴向拉伸变形或轴向压缩变形, 简称拉伸或压缩变形。

图 1-1

§ 1-2 轴力 轴力图

杆件工作时承受的载荷与支反力, 对于一个杆件来说都属于它的外力。在外力作用下, 杆件发生变形, 杆件各部分之间发生相对位置改变, 由此而引起杆件各部分之间的相互作用称为杆件的内力。由于变形固体有弹性, 内力能抵抗外力引起的变形, 故内力与杆件的刚度密切相关。内力随外力的增加而变大, 达到一定限度

时,就会导致杆件的破坏,故内力与杆件的强度密切相关。可见,研究杆件的内力是非常重要的。

研究杆件的内力采用截面法。为了求图 1-2a 所示处于平衡状态杆件横截面 m- m 上的内力,需要将该截面上的内力显示出来。

图 1-2

为此用一平面假想地将杆沿截面 m- m 截开,分为 I 和 II 两部分。因每个部分仍应处于平衡状态,故 I、II 部分之间在截面 m- m 上必然有相互作用的力,以保持各自的平衡, I 与 II 部分之间的相互作用力就是杆件在截面 m- m 上的内力,该内力可根据 I 或 II 部分中的任意部分的平衡条件求得,即用平衡方程由已知外力求得该截面上的内力。由均匀连续假设可知,内力是一个分布内力系,应用平衡方程只能求得该分布内力系的合力 N。如取 I 部分为研究对象,列平衡方程(图 1-2b)

$$\sum F_x = 0, \quad N - F = 0 \quad N = F$$

由于合力 N 的作用线与杆的轴线重合,故称 N 为轴力。若轴力的指向与横截面的外法线方向一致时,则杆件产生拉伸变形,该轴力称为拉力;反之称为压力。通常将拉力规定为正,压力规定为负。用截面法求轴力时,可先假设为拉力。

若沿杆轴线作用的外力较多时,则杆件各部分的横截面上的轴力不同。这时应分别用截面法求出每段杆的轴力,并用轴力图表示出轴力沿杆轴线的变化情况。轴力图的做法是:选取一个坐标系,其横坐标轴与杆轴线平行,用横坐标表示杆横截面的位置,用纵坐标表示相应横截面上的轴力;将拉力(正值)画在横坐标轴的上侧,压力(负值)画在横坐标的下侧。

例 1-1 求图 1-3a 所示杆件的轴力,并画出轴力图。已知 F_1

$$= 3\text{kN}, F_2 = 2\text{kN}。$$

图 1-3

解: (1) 求支座反力 由杆 ABC 整体的平衡条件 $\sum X = 0$, 求得固定端处的支反力 F_A (图 1-3b)

$$F_A = F_1 - F_2 = 3 - 2 = 1\text{kN}$$

(2) 求各段杆的轴力: 沿截面 I-I 将 AC 杆截开, 取左段为研究对象, 用 N_1 表示该截面的轴力, 如图 1-3c 所示。由其平衡条件 $\sum X = 0$, 求得

$$N_1 = F_A = 1\text{kN}(\text{拉力})$$

沿截面 II-II 将杆 AC 截开, 取左段为研究对象, 用 N_2 表示该截面上的轴力, 如图 1-3d 所示。由该段的平衡条件 $\sum X = 0$, 求得

$$N_2 = F_A - F_1 = 1 - 3 = -2\text{kN}(\text{压力})$$

(3) 画轴力图 由求得的 N_1 和 N_2 , 按一定的比例尺画出轴力图, 如图 1-3 e 所示。

截面法求内力的步骤归纳如下: 沿着所求内力的截面, 假想地将杆截成两部分; 选取其中任意一部分为研究对象; 并画出另一部分对该部分的作用力; 必须假设该内力为正值拉力; 根据所研究部分的平衡条件, 由已知外力确定未知内力。

§ 1-3 拉杆(或压杆)横截面上的应力

1. 应力的概念

截面法只能求得某截面上分布内力系的合力,一般情况下,分布内力系并非均匀分布,为了描述截面上某点处受力的强弱程度和分布内力系的情况,引入应力的概念。设在截面上某点 K 的周围取微面积 A , A 上内力的合力为 P ,如图 1-4a 所示,则比值

$$p_m = \frac{P}{A} \quad (1-1)$$

表示出 A 上内力的强弱程度, p_m 称为 A 上的平均应力,或称为

图 1-4

内力的平均集度。因内力并非均匀分布,故平均应力 p_m 随所取 A 的大小而变化,为了精确地反映出 K 点处内力的强弱程度,应使 A 无限缩小,使之逼近 K 点,平均应力的极限(用 p 表示)

$$p = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{P}{A} = \frac{dP}{dA}$$

才能真实地表明 K 点处的内力集度,称为 K 点的应力。

K 点的应力 p 是一个矢量。一般情况下,它既不垂直于截面,也不与截面相切。常将 p 分解为垂直于截面的分量 和与截面相切的分量 ,如图 1-4b 所示。 称为正应力, 称为切应力,而 p 称为全应力,三者之间的关系为

$$p^2 = \quad^2 + \quad^2$$

在国际单位制中,应力的基本单位是 N/m^2 (牛顿/米²),称为帕斯卡,简称帕,其符号为 Pa 。在工程中通常使用兆帕,其符号为

MPa, $1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ N/mm}^2$ 。有时还使用吉帕, 其符号为 GPa, $1 \text{ GPa} = 10^9 \text{ Pa}$ 。

2. 拉杆(或压杆)横截面上的应力

取一横截面面积为 A 的等直杆, 在其表面画上与杆轴线垂直的直线 m-m 和 n-n, 如图 1-5a 所示。然后施加拉力 F 使其变形, 可以看到, 直线 m-m 和 n-n 分别平移至 m'-m' 和 n'-n' 的位置。根据观察到的变形现象, 从变形的可能性出发, 作出如下假设, 横截面在变形后仍为垂直于杆轴线的平面。该假设称为平面假设。

图 1-5

设想拉杆是由无数条纵向纤维所组成, 由平面假设可知, 拉杆任意两个横截面间的所有纵向纤维只产生伸长变形, 且各条纵向纤维伸长量相等。前者说明横截面上只有正应力; 后者说明横截面上各点的正应力相等, 其分布情况如图 1-5b 所示。于是, 直杆拉伸时横截面上的正应力为

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

上式也适用于直杆压缩情况。正应力符号规则与轴力符号规则相同, 即正号表示拉应力, 负号表示压应力。

例 1-2 试计算如图 1-6a 所示杆横截面上的最大正应

图 1-6

力。已知 $d_1 = 20 \text{ mm}$, $d_2 = 30 \text{ mm}$, $F_1 = 20 \text{ kN}$, $F_2 = 50 \text{ kN}$ 。

解: 1. 作出杆的轴力图, 如图 1-6b 所示。

2. 计算各段杆的应力 每段杆的应力分别为

$$= \frac{N_1}{A_1} = \frac{20 \times 10^3}{20^2 / 4} = 63.7 \text{ MPa (拉应力)}$$

图 1-7

$$= \frac{N_2}{A_2} = - \frac{30 \times 10^3}{30^2 / 4} = - 42.5 \text{ MPa (压应力)}$$

由计算结果可知, 杆内最大正应力为 63.7 MPa , 发生在 AB 段, 是拉应力。

例 1-3 如图 1-7a 所示支架, 其水平圆杆直径 $d = 30 \text{ mm}$, 矩形截面斜杆的尺寸为 $60 \times 100 \text{ mm}^2$, $\tan = 3/4$, $F = 24 \text{ kN}$ 。试求各杆的正应力。

解: 由图 1-7b 所示受力图, 用平衡条件可求得 $N_1 = 32 \text{ kN}$, $N_2 = - 40 \text{ kN}$ 。

各杆的正应力分别为

$$\begin{aligned} &= \frac{N_1}{A_1} = \frac{32 \times 10^3}{30^2 / 4} = 45.3 \text{ MPa (拉应力)} \\ &= \frac{N_2}{A_2} = - \frac{40 \times 10^3}{60 \times 100} = - 6.67 \text{ MPa (压应力)} \end{aligned}$$

§ 1-4 拉杆(或压杆)的变形 胡克定律

直杆受到轴向拉力(或压力)作用时, 将使杆轴向伸长(或缩

短)和横向尺寸减小(或增大),其变形情况如图 1-8 所示。杆长度的改变量为

$$\Delta l = l_1 - l$$

Δl 称为杆的纵向绝对变形,其大小与杆原长 l 等有关。为了度量杆的变形程度,必须计算单位长度的变形量。对于轴力为常数的等直杆。其变形处处相同,因此可用比值

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

表示杆的纵向变形程度,称为杆的纵向线应变,或称为纵向正应变,它是一个无量纲的量。

图 1-8

同理,横向变形程度用比值

$$\mu = \frac{\Delta a}{a} = \frac{a_1 - a}{a}$$

来表示,称为横向应变。

实验表明,在弹性范围内横向应变与纵向应变成正比,即

$$\mu = -\nu \epsilon$$

式中,比例常数 ν 称为横向变形系数,或称为泊松比,它是一个无量纲的量,其数值与材料有关。

实验表明,当杆件横截面上的正应力 σ 未超过某极限值时,杆件的绝对变形量 Δl 与轴力 N 、杆长 l 成正比,与杆横截面面积 A 成反比,引进比例常数 E ,可有

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \tag{1-2}$$

将式 $\sigma = N/A$ 及 $\epsilon = \Delta l/l$ 代入上式,得

$$\sigma = E \epsilon$$

以上两式均称为胡克定律。式中 E 称为材料拉压弹性模量, 是表示材料力学性质的弹性常数, 其量纲与应力相同。

由式(1-2)可知: 当杆件轴力、长度相同时, 分母 EA 越大, 绝对变形越小, 说明杆件不易变形, 故将 EA 称为杆件的拉伸或压缩刚度。

例 1-4 试求图 1-9a 所示杆的总长度改变量。已知 $A_{AB} = A_{BC} = 500 \text{ mm}^2$, $A_{CD} = 200 \text{ mm}^2$, $E = 200 \text{ GPa}$, $a = 100 \text{ mm}$, $F_1 = 30 \text{ kN}$, $F_2 = 10 \text{ kN}$ 。

解: 杆的轴力图如图 1-9b 所示。杆的总变形量应等于各段杆变形量的代数和, 即

$$\begin{aligned} \Delta l &= \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} \\ &= \frac{N_{AB} l_{AB}}{EA_{AB}} + \frac{N_{BC} l_{BC}}{EA_{BC}} + \frac{N_{CD} l_{CD}}{EA_{CD}} \\ &= \frac{100}{200 \times 10^3} \left(\frac{20 \times 10^3}{500} + \frac{-10 \times 10^3}{500} + \frac{-10 \times 10^3}{200} \right) \\ &= -0.015 \text{ mm} \end{aligned}$$

计算结果为负值, 说明整个杆的变形为缩短。

图 1-9

例 1-5 某拉杆材料的弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$, 其原长 $l = 80 \text{ mm}$, 横截面面积 $A = 80 \text{ mm}^2$ 。若杆的纵向绝对变形 $\Delta l = 0.03 \text{ mm}$, 试求杆所受到的拉力及杆横截面上的正应力。

解: 由式 $\Delta l = Nl/EA$ 及 $N = F$, 得到杆所受到的拉力为

$$F = \frac{\Delta l}{l} EA = \frac{0.03}{80} \times 200 \times 10^3 \times 80 = 6 \text{ kN}$$

由式 $\sigma = N / A$ 及 $N = F$, 得到杆横截面上的应力为

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{6 \times 10^3}{80} = 75 \text{ MPa}$$

§ 1-5 材料在拉伸和压缩时的力学性质

材料受力时,在强度和变形方面表现出来的性质,称为材料的力学性质或机械性质。材料的力学性质通过试验来测定。常温、静载下的拉伸试验是最基本的试验。常温指室温,静载指加载速度平稳缓慢,一般拉伸速度 $10\text{N}/\text{mm}^2 \cdot \text{s}$ 。

为便于比较试验结果,试样(试件)的形状必须按照国家标准《金属拉伸试验法》(GB 228—86)的规定来加工。金属材料圆截面试样如图 1-10a 所示,中间等直部分的长度 l_0 称为标距,标距 l_0 与横截面直径 d_0 有两种比例,即

图 1-10

$$l_0 = 10d_0 \quad \text{和} \quad l_0 = 5d_0$$

对矩形截面试样(图 1-10b),标距 l_0 与横截面面积 A_0 之间的关系,规定为

$$l_0 = 11.3 \sqrt{A_0} \quad \text{和} \quad l_0 = 5.65 \sqrt{A_0}$$

1. 低碳钢材料拉伸时的力学性质

试验时,将试样装在试验机上后,平稳缓慢地加载直至拉断,并记录试样受到的逐渐增加的拉力 F 和在标距 l_0 内产生的相应变形 Δl 。将对应的 F 和 Δl 绘出 $F-\Delta l$ 曲线,这曲线称为拉伸图,

如图 1-11 所示。

拉伸图与试样的尺寸有关。为了消除试样尺寸的影响, 将试验中的一系列 F 和 l 的数值分别除以试样原横截面面积 $A_0 = d_0^2/4$ 和标距 l_0 , 得出一系列的 σ 和 ϵ 值, 绘制出 $\sigma - \epsilon$ 曲线, 该曲线称为应力-应变曲线, 如图 1-12 所示。

图 1-11

图 1-12

从图 1-12 看出, 低碳钢试样拉伸的全过程大致可分为以下几个阶段:

弹性阶段 在 OB 段内, 若卸去载荷, 则加载时产生的变形将全部消失。这说明在 OB 段内试样只产生弹性变形, 故 OB 段称为弹性阶段。对应于 B 点的应力 σ_e , 是材料只产生弹性变形时的最高应力, 称为弹性极限。

弹性阶段主要是一段直线 OA, 对应于 A 点的应力 σ_p 表示应力与应变成正比的最高应力值, 称为材料的比例极限。由此可见, 应力不超过比例极限时, 材料服从胡克定律。

弹性极限与比例极限二者意义虽有不同, 但由试验测得的数值却很接近, 实用中常认为二者数值相等。Q235 钢材的比例极限约为 200 MPa。

屈服阶段 应力超过弹性极限之后, 试样除产生弹性变形外, 还产生塑性变形, 而且在 $\sigma - \epsilon$ 曲线上 BC 段呈水平锯齿形状。这说明应力几乎不增加, 而应变有显著增加, 这种现象称为屈服或流动, 故 BC 段称为屈服阶段。屈服阶段内, 首次下降的应力值称为

材料的屈服极限,用 σ_s 表示。Q235 钢材的屈服极限值约为 235 MPa。如果试样表面光滑,材料屈服时可看到试样表面上有与轴线约成 45° 的条纹线,称为滑移线。

强化阶段 屈服阶段之后,曲线呈上凸形状,说明材料又恢复了抵抗变形的能力。欲使试样继续变形,必须增加拉力,这种现象称为材料的强化,故 CE 段称为强化阶段。强化阶段的最高点 E 所对应的应力称为材料的强度极限,用 σ_b 表示。Q235 钢材的拉伸强度极限约为 400 MPa。

局部变形阶段 过 E 点后,试样变形集中于某一局部,产生颈缩现象,如图 1-13a 所示。由于颈缩处横截面面积急剧减小,使试样继续变形所需的拉力也相应减小,用原始横截面面积算出的应力 $\sigma = F/A_0$ 也随之下落,达到 F 点时试样被拉断。其断口呈杯状,如图 1-13b 所示。

试样拉断后,弹性变形消失,而塑性变形依然保留,试样的标距 l_0 变为 l_1 。用百分比表示的比值

$$= \frac{l_1 - l_0}{l_0} \times 100\%$$

称为材料的伸长率。Q235 钢材的伸长率约为 25% ~ 27%。

图 1-13

试样拉断后,颈缩处的横截面面积由原始面积 A_0 变为 A_1 (最小面积),用百分比表示的比值

$$= \frac{A_0 - A_1}{A_0} \times 100\%$$

称为材料的断面收缩率。Q235 钢材的断面收缩率约为 45%。

伸长率和断面收缩率是反映材料塑性性质的主要指标。工程中通常将 $> 5\%$ 材料称为塑性材料,如碳钢、铜和铝等; $< 5\%$ 的材料称为脆性材料,如灰铸铁、砖和石料等。

若将试样拉伸到强化阶段内任意一点 D, 然后逐渐卸去载荷, 则应力和应变关系将沿着与 OA 近乎平行的直线 O_1D 回到 O_1 点, 如图 1-12 所示。线段 OO_1 表示塑性应变, O_1G 表示弹性应变。卸载后, 若在短时间内重新加载, 则应力和应变关系大致沿着 O_1DEF 变化。可见, 重新加载过程中, 直到 D 点之前, 材料的变形是弹性变形, 过 D 点后才出现塑性变形。这说明重新加载时, 其比例极限有所提高, 而伸长率有所下降, 这种现象称为冷作硬化。工程中常利用冷作硬化来提高构件在弹性阶段的承载能力。例如建筑用钢筋, 起重用的钢绳等, 常用冷拔工艺提高其强度。另一方面, 零件加工后, 使其表面变硬, 给下道工序的加工带来困难, 往往需要在工序之间安排退火, 以消除冷作硬化的影响。

2. 其他材料拉伸时的力学性质

其它塑性材料的 $\sigma - \epsilon$ 曲线, 与低碳钢有些类似, 如图 1-14 所示。有些塑性材料没有明显的屈服阶段。

图 1-14

对于这类材料, 按国家标准规定, 取它产生 0.2% 的塑性应变时的应力值作为屈服极限, 用 $\sigma_{p0.2}$ 表示, 如图 1-15 所示。 $\sigma_{p0.2}$ 的大小可以用加载-卸载法测得。

脆性材料, 如铸铁、陶瓷等受拉时, 从开始直至断裂, 变形不明显, 没有屈服阶段和颈缩现象。灰铸铁在拉伸时的 $\sigma - \epsilon$ 图线如图 1-16 所示。它没有明显的直线部分, 在较小的拉应力下就被拉断, 断口呈平齐的粗糙颗粒状。其伸长率很小, 它是典型的

图 1-15

脆性材料。灰铸铁拉断时的最大应力称为拉伸强度极限,其值约为120~180 MPa。强度极限是脆性材料的唯一强度指标。

3. 材料压缩时的力学性质

金属材料的压缩试样,一般做成短圆柱体。根据国家标准《金属材料压缩试验方法》(GB 7314—87)规定,试样高度为其直径的2.5~3.5倍。

图 1-17 中实线为低碳钢压缩时的 $\sigma-\epsilon$ 曲线,虚线为其拉伸

图 1-16

图 1-17

时的 $\sigma-\epsilon$ 曲线。由图看出,在弹性和屈服阶段两曲线重合,这表明压缩时的弹性模量 E 、比例极限 σ_p 和屈服极限 σ_s 均与拉伸时大体相同。进入强化阶段后,两曲线逐渐分离。这是因为试样越压越扁,横截面面积不断增大,承受的压力也随之提高,以致测不出压缩强度极限。

图 1-18 中实线为灰铸铁压缩时的 $\sigma-\epsilon$ 曲线,虚线为拉伸时的 $\sigma-\epsilon$ 曲线。铸铁的压缩强度极限 σ_{bc} 比其拉伸强度极限 σ_{bt} 高达 3~4 倍。另外,铸铁压缩破坏时,其破坏断面与轴线大致成 $45^\circ \sim 55^\circ$ 角,即沿斜截面发生错动而破坏。

图 1-18

§ 1-6 拉伸和压缩时的强度计算

试验表明,塑性材料的应力达到屈服极限 σ_s 或 $\sigma_{p0.2}$ 时,产生显著的塑性变形,影响杆件的正常工作,一般认为这时材料已经破坏(失效)。脆性材料的应力达到强度极限时,发生断裂破坏。上述引起材料破坏的应力称为极限应力,用 σ_u 表示。对塑性材料 $\sigma_u = \sigma_s(\sigma_{p0.2})$; 对脆性材料 $\sigma_u = \sigma_b$ 。为保证杆件安全工作,应使杆件的工作应力小于材料的极限应力。此外,杆件应留有必要的强度储备。在强度计算中,把极限应力除以大于 1 的系数 n , 作为设计时应力的最高值,它称为材料的许用应力,用 $[\sigma]$ 表示,即

$$[\sigma] = \frac{\sigma_u}{n}$$

式中, n 称为安全系数。确定安全系数是个复杂的问题。一般说来,应考虑材料的均匀性; 载荷估计的准确性; 计算简图和计算方法的精确性; 杆件在结构中的重要性以及杆件的工作条件等等。可见,确定安全系数时,应考虑多方面的因素,对不同情况要作具体分析。

安全系数的选定,涉及到正确处理安全与经济之间的关系。若安全系数取值偏大,则会使机器或工程结构的自重增加,多消耗材料,造成经济上的损失; 反之,则不能确保杆件的安全工作。安全系数多由专门机关经过试验研究作出规定,以备查取。在常温静载条件下,对塑性材料,取 $n = 1.5 \sim 2.0$; 对脆性材料,取 $n = 2.0 \sim 3.5$ 。

为了确保拉杆(或压杆)的安全工作,必须使杆内的最大工作应力不超过材料的许用应力,即

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$$

上式称为拉杆(或压杆)的强度条件。对于等直杆,上式则为

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma]$$

运用强度条件可以解决工程中的三类强度问题。

校核强度 若已知杆件的尺寸、载荷和材料的许用应力,则可验算杆件是否满足强度条件。

设计截面 若已知杆件承受的载荷与杆件材料的许用应力,则可运用强度条件确定其横截面面积,这时强度条件可写成 $A \geq N/[\sigma]$ 。

确定许可载荷 若已知杆件的尺寸及其材料的许用应力,则可运用强度条件确定该杆所能承受的最大轴力,即 $N_{\max} = [\sigma]A$ 。然后由内力与外力的关系来确定杆件或结构所能承受的最大载荷。

应当指出,若最大工作应力 σ_{\max} 超过许用应力,但只要超过量小于许用应力的 5%,在工程计算中是允许的。

例 1-6 图 1-19a 所示钢木结构吊架, AB 为钢杆,横截面面积 $A_1 = 600 \text{ mm}^2$,许用应力 $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$; BC 为木杆,横截面面积 $A_2 = 10^4 \text{ mm}^2$,许用应力 $[\sigma_c] = 7 \text{ MPa}$ 。(1) 设 $F = 20 \text{ kN}$ 。试校核各杆强度。(2) 试确定吊架的许用载荷 $[F]$ 。(3) 若 F 等于结构的许用载荷,重新设计各杆的横截面面积。

图 1-19

解: (1) 当 $F = 10 \text{ kN}$, 由图 1-19b 所示受力图,运用平衡方程求得

$$N_1 = 2F = 2 \times 20 = 40 \text{ kN (拉力)}$$

$$N_2 = -\frac{1}{3}F = -\frac{1}{3} \times 20 = -6.67 \text{ kN (压力)}$$

运用强度条件校核各杆强度

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{40 \times 10^3}{600} = 66.7 \text{ MPa} < [\sigma] = 160 \text{ MPa}$$

$$= \frac{N_2}{A_2} = \frac{34.64 \times 10^3}{10^4} = 3.5 \text{ MPa (压应力)} < [\sigma] = 7 \text{ MPa}$$

可见,各杆强度足够。

(2) 确定结构的许用载荷。杆 AB 许可内力

$$N_1 = A_1 [\sigma] = 600 \times 160 = 96 \times 10^3 = 96 \text{ kN}$$

因 $N_1 = 2F$, 故按 AB 杆的强度, 结构的许可载荷为

$$[F]_1 = \frac{N_1}{2} = \frac{96}{2} = 48 \text{ kN}$$

BC 杆的许用内力

$$N_2 = A_2 [\sigma] = 10^4 \times 7 = 70 \times 10^3 = 70 \text{ kN}$$

因 $N_2 = \frac{2}{3} F$, 故按 BC 杆的强度, 结构的许可载荷为

$$[F]_2 = \frac{N_2}{\frac{2}{3}} = \frac{70 \times 10^3}{\frac{2}{3}} = 40.4 \times 10^3 = 40.4 \text{ kN}$$

为保证结构的安全, 结构的许可载荷应取 $[F]_1$ 和 $[F]_2$ 中的小值, 即结构的许可载荷为

$$[F] = 40.4 \text{ kN}$$

(3) 若结构所加载荷 $F = [F] = 40.4 \text{ kN}$ 时, BC 杆的横截面积仍为 $A_2 = 10^4 \text{ mm}^2$; 而 AB 杆的横截面积需重新计算。当 $F = 40.4 \text{ kN}$ 时, $N_1 = 2F = 2 \times 40.4 = 80.8 \text{ kN}$, 则 AB 杆的横截面积为

$$A_1 = \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{80.8 \times 10^3}{160} = 505 \text{ mm}^2$$

例 1-7 如图 1-20a 所示三铰拱屋架, 拉杆 AB 为两个等边角钢组成, 其许用应力 $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$ 。试选择等边角钢的型号。已知 $q = 15 \text{ kN/m}$, $l = 18 \text{ m}$, $h = 3.14 \text{ m}$ 。

解: 因结构和载荷对称, 故 A、B 处的支座反力相等, 即 $F_A = F_B = ql/2 = 15 \times 18/2 = 135 \text{ kN}$ 。

由图 1-20b 所示受力图, 运用平衡方程 $M_c = 0$, 求得 AB 杆的轴力。

$$M_c = 0, \quad Nh + q \frac{1}{2} \frac{l}{4} - F_A \frac{1}{2} = 0$$

$$N = \frac{-ql^2/8 + F_A l/2}{h} = \frac{15 \times 18^2/8 + 135 \times 18/2}{3.14} = 193.5 \text{ kN}$$

设一根角钢的横截面为 A , 由强度条件得

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]} = \frac{193.5 \times 10^3}{2 \times 160} = 604.7 \text{ mm}^2 = 6.05 \text{ cm}^2$$

查型钢表, 应选用 6.3(63 \times 5)角钢两根。每根角钢的横截面面积 $A = 6.143 \text{ cm}^2$

图 1-20

§ 1-7 拉杆(或压杆)斜截面上的应力拉压破坏分析

低碳钢拉伸达到屈服阶段时, 试样表面出现与轴线成 45° 角的滑移线; 铸铁拉断时, 其断口平齐且与轴线垂直; 铸铁压缩破坏时, 其断口与轴线约成 45° ~ 55° 角。要分析和解释这些现象需要了解其斜截面上的应力。

如图 1-21a 所示等直拉杆, 其横截面面积为 A 。横截面上的正应力为 $\sigma = N/A = F/A$ 。过拉杆内 M 点的斜截面 $K-K$ 与横截面成 α 角, 并规定 α 角从 x 轴算起, 逆时针旋转所得到的 α 角为正(图 1-21b), 反之为负。斜截面面积 $A_1 = A/\cos \alpha$, 假想沿 $K-K$ 将杆截开, 并以左段为研究对象。由其平衡条件, 斜截面上的内力 $N_1 = F$ (图 1-21b)。

由于拉杆各条纵向纤维的伸长相等, 故斜截面上的应力也是

均匀分布的, 即

$$p = \frac{N}{A} = \frac{F}{A/\cos} = \frac{F}{A} \cos = \sigma_0 \cos$$

将 p 分解成斜截面上的正应力 和切应力 (图 1-21c), 得

$$\begin{aligned} &= p \cos = \sigma_0 \cos^2 = \frac{\sigma_0}{2}(1 + \cos^2) \\ &= p \sin = \sigma_0 \sin \cos = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2 \end{aligned}$$

图 1-21

可见, 在拉杆的斜截面上, 不仅有正应力, 还有切应力, 它们的大小均随截面的方位而变化。最大正应力 σ_{max} 发生在 $\alpha = 0$ 的横截面上, 其值为 σ_0 , 而最大切应力 τ_{max} 发生在 $\alpha = 45^\circ$ 的斜截面上, 其值为 $\sigma_0/2$ 。

根据上述分析可知, 低碳钢拉伸屈服时沿 45° 方向出现滑移线以及铸铁压缩时沿 $45^\circ \sim 55^\circ$ 方向断裂, 都是由于这一方向斜截面上的最大切应力过大, 加之材料的抗切能力差所致。铸铁拉断时断口平齐且与轴线垂直, 是由于横截面的最大拉应力过大, 而铸铁抗拉性能差所致。

§ 1-8 应力集中的概念

实验和理论分析表明, 在直杆尺寸突然改变处的横截面上的

正应力并非均匀分布。如图 1-22 所示开有圆孔的板条, 当它受拉伸时, 在截面 $m-m$ 上, 靠近孔边的方格变形最大, 离开孔边稍远处的方格变形迅速减小而趋向均匀。这表明, 孔边处的应力比其他各点处的应力大得多, 其应力分布情况如图 1-22c 所示。这种由于杆件截面尺寸突然改变而引起局部应力增大的现象, 称为应力集中。

图 1-22

发生应力集中的截面上, 其最大应力与同截面上的平均应力 σ_m 的比值, 称为理论应力集中系数, 用 k_t 表示, 即

$$k_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_m}$$

k_t 反映了应力集中的程度, 是一个大于 1 的系数。

应当指出, 塑性材料和脆性材料对于应力集中的敏感程度并不相同。塑性材料有屈服阶段, 在局部最大应力达到屈服极限时, 该处的应力暂不增大, 而塑性变形可断续增长。如外力继续增大, 横截面上的塑性区逐渐扩大(图 1-22d), 使应力分布趋于均匀, 降低了应力不均匀程度, 也限制了最大应力的数值。在静荷下, 用塑性材料制成的构件, 可以不考虑应力集中的影响。脆性材料无屈服阶段, 随外力的增加, 应力集中的最大应力首先达到强度极限 σ_b ,

该处先产生裂纹,使承载面积变小,很快导致构件的破坏。可见应力集中现象降低了脆性材料杆件的承载能力。但是,对灰铸铁来说,因其内部组织的不均匀性和缺陷等,是杆件产生应力集中的主要因素,故杆件外形突然改变引起的应力集中,对其承载能力没有明显的影响。

§ 1-9 拉压静不定问题

在工程中会遇到结构的约束反力或杆件内力等未知力的个数多于静力平衡方程数目的问题,只用静力平衡方程不能求出全部未知力,这类问题称为静不定问题,相应的结构称为静不定结构。如图 1-23a 所示杆系结构,在节点 A 处有三个杆的未知内力 N_1 、 N_2 、 N_3 和重物的重力 W 构成平面汇交力系,如图 1-23b 所示。由于只有两个独立的平衡方程,故求解各杆的内力问题是一个静不定问题。

图 1-23

未知力的个数比静力平衡方程个数多出 n 个的问题,称为 n 次静不定问题。对于静不定问题,除了运用平衡方程外,还要根据结构中构件的变形谐调关系(变形几何关系)和物理关系,得到含有未知力的补充方程,与静力平衡方程联立求解,以得到全部未知力。

例 1-8 如图 1-23a 所示杆系结构。已知杆 1 和杆 2 是铜制的,横截面面积 $A_1 = A_2 = 200 \text{ mm}^2$, $E_1 = E_2 = 100 \text{ GPa}$; 杆 3 是钢制的,横截面面积 $A_3 = 100 \text{ mm}^2$, $E_3 = 200 \text{ GPa}$ 。 $\alpha = 45^\circ$; $W = 10 \text{ kN}$ 。试求各杆内的正应力。

解: 静力平衡方程 由图 1-23b 所示节点 A 的受力图, 根据平衡条件得

$$X = 0, N_2 \sin \alpha - N_1 \sin \alpha = 0$$

$$Y = 0, N_3 + N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha - W = 0$$

变形谐调条件(变形几何关系) 如图 1-23c 所示, 由于结构左、右对称, 杆 1、2 的拉伸刚度相同, 故节点 A 只有沿铅垂位移。又由于各杆变形后仍交于一点, 故小变形时, 可由 A 向两杆延长线分别的重线代替圆弧, 两垂线的交点分别为 A_1 和 A_2 , 如图 1-23c 所示。可以认为 $\overline{AA_1} = l_1$, $\overline{AA_2} = l_2$, $\overline{AA} = l_3$ 。各杆之间的变形关系应满足

$$l_1 = l_2 = l_3 \cos \alpha$$

物理关系 应用胡克定律, 将上式的变形 l_1 和 l_3 分别用相应的轴力表示出来, 便得到补充方程

$$\frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{N_3 l_3}{E_3 A_3} \cos \alpha$$

注意到 $l_3 = l_1 \cos \alpha$, 上式可简化为

$$N_1 = N_3 \frac{E_1 A_1}{E_3 A_3} \cos^2 \alpha$$

静力平衡方程与补充方程联立求解, 得

$$N_3 = \frac{W}{1 + 2 \frac{E_1 A_1}{E_3 A_3} \cos^3 \alpha}$$

$$N_1 = N_2 = \frac{\frac{E_1 A_1}{E_3 A_3} \cos^2 \alpha}{1 + 2 \frac{E_1 A_1}{E_3 A_3} \cos^3 \alpha} W$$

从 N_1 和 N_3 的表达式可以看出, 静不定结构中各杆的轴力与

其刚度 EA 有关, 刚度大的杆件轴力也大。

将已知数据代入 N_1 和 N_3 的表达式中, 得到

$$N_1 = N_2 = 2.93 \text{ kN}, \quad N_3 = 5.86 \text{ kN}$$

各杆的应力分别为

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_2 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{2.93 \times 10^3}{200} = 14.7 \text{ MPa} \\ \sigma_3 &= \frac{N_3}{A_3} = \frac{5.86 \times 10^3}{100} = 58.6 \text{ MPa} \end{aligned}$$

以上算出的应力值, 均未超过杆材料的比例极限, 故得出的应力值是杆的实际工作应力。

如上述杆系结构中去掉杆 3, 便成为静定结构, 杆 1 和杆 2 的轴力为

$$N_1 = N_2 = \frac{W}{2\cos} = \frac{10}{2\cos 45^\circ} = 7.07 \text{ kN}$$

可见, 增加杆 3 使杆 1 和杆 2 的轴力减小, 同时也使节点 A 的位移减小。即静不定结构可提高承载能力。

在静不定结构中, 因各杆制造的尺寸不准确, 当整个结构装配起来, 它还未承载时, 各杆内就产生了应力, 这种应力称为装配应力。如图 1-24a 所示静不定结构中, 若杆 3 的实际长度比其设计长度 $AD = l$ 短了 δ , 而杆 1 和杆 2 长度制造准确, 装配时就要设法使杆 3 伸长, 使杆 1 和杆 2 缩短。这样装配起来后, 各杆有了纵向应变, 因而也就存在着应力了。

现以图 1-24a 所示结构为例, 说明求解装配应力的方法。

静力平衡方程 由图 1-24b 所示节点 A 的受力图, 根据平衡条件

$$X = 0, \quad -N_2 \sin + N_1 \sin = 0$$

$$Y = 0, \quad N_3 - N_1 \cos - N_2 \cos = 0$$

变形几何关系 由图 1-24a 得

$$l_3 = l_1 + l_2 / \cos$$

物理关系 设杆 1 和杆 2 的压缩刚度相同, 即 $E_1 A_1 = E_2 A_2$;

图 1-24

杆 3 的拉伸刚度为 $E_3 A_3$ 。应用胡克定律将变形用相应的内力表示,并注意到,杆 3 实际长度 $l_3 = l(1 - \cos^2 \alpha)$,杆 1 长度 $l_1 = l / \cos \alpha$,从而得到补充方程

$$= \frac{N_3 l}{E_3 A_3} + \frac{N_2 l}{E_2 A_2 \cos^2 \alpha}$$

平衡方程与补充方程联立求解,得

$$N_1 = N_2 = \frac{E_1 A_1 \cos^2 \alpha}{1 + 2 \frac{E_1 A_1}{E_3 A_3} \cos^3 \alpha} \quad (压力)$$

$$N_3 = \frac{2 E_1 A_1 \cos^3 \alpha}{1 + 2 \frac{E_1 A_1}{E_3 A_3} \cos^3 \alpha} \quad (拉力)$$

各杆的装配应力,可用各杆的轴力除以相应横截面面积求得。

在静不定结构中,各杆不能自由变形。若温度改变,则杆内产生应力,这种应力称为温度应力。如图 1-25 所示静不定结构,在温度 T 时固定。当温度改变 ΔT 时,杆内所产生的温度应力分析如下:

静力平衡方程 由于温度改变(上升),杆 AB 两端支座反力大小相等,但不知其值。由截面法可知,杆的轴力 N (设为拉力)与支座反力的关系为

$$N = -F_A \text{ (或 } = -F_B)$$

变形几何关系 因杆两端固定,杆的总长度不变,即 $\Delta l = 0$ 。

图 1-25

Δl 中包括由温度改变引起的变形 Δl_T 和由轴力 N 引起的变形 Δl_N 。变形几何关系为

$$\Delta l = \Delta l_T + \Delta l_N = 0$$

物理关系 应用线膨胀定律和胡克定律得到

$$\Delta l_T = \alpha l T, \quad \Delta l_N = \frac{Nl}{EA}$$

式中 α 为线膨胀系数。将 Δl_T 和 Δl_N 的表达式代入变形几何关系, 得

$$\alpha l T + \frac{Nl}{EA} = 0$$

这就是补充方程。由补充方程解得

$$N = -\alpha EA T$$

杆内的温度应力为

$$\sigma = \frac{N}{A} = -\alpha E T$$

当 $T > 0$ (上升) 时, 杆内产生压应力; 反之, 产生拉应力。

若杆件材料为低碳钢, 许用应力 $[\sigma] = 140 \text{ MPa}$, $E = 200 \text{ GPa}$, $\alpha = 12.5 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$, 温度改变量 $T = 70^\circ\text{C}$ 时, 则杆内的温度应力为

$$\sigma = -\alpha E T = -12.5 \times 10^{-6} \times 200 \times 10^3 \times 70 = -175 \text{ MPa}$$

该应力值虽未超过材料的比例极限, 但已超过其许用应力。可见, 温度应力在设计中不可忽视。

工程中常采取一些措施,设法避免或降低温度应力。例如,两根钢轨之间留有适当间隙,以及蒸汽管道弯成伸缩节等就是实际例子。

习 题

1-1 试求图示各杆在指定截面上的轴力,并画出轴力图。

题 1-1 图

1-2 在圆杆上铣出一槽,如图所示。已知 $F = 20 \text{ kN}$, $d = 20 \text{ mm}$ 。求截面 1-1, 2-2 上的应力(槽的截面面积可近似看作矩形)。

题 1-2 图

1-3 图示刚体 ABCD 由三根截面面积均为 $A = 20 \text{ cm}^2$ 的连杆支持。已知 $F = 100 \text{ kN}$, 试求各杆的应力。

1-4 图示支架承受载荷 $F = 45 \text{ kN}$, AB 杆的横截面面积 $A_1 = 600 \text{ mm}^2$, BC 杆的横截面面积 $A_2 = 1000 \text{ mm}^2$ 。试求两杆的应力。

1-5 求图示结构中各杆的应力。已知 $F = 10 \text{ kN}$, 各杆截面面积均为 $A = 100 \text{ mm}^2$ 。

1-6 试求图示杆的总变形量。已知 $A_1 = A_3 = 4 \text{ cm}^2$, $A_2 = 2$

cm², 弹性模量 E= 200 GPa。

题 1-3 图

题 1-4 图

题 1-5 图

题 1-6 图

1-7 某矩形截面试样宽度 $b= 29.8\text{ mm}$, 厚度 $h= 4.1\text{ mm}$ 。在拉伸试验中, 载荷每增加 3 kN , 用电测法测得轴向应变 $\epsilon = 120\times 10^{-6}$, 横向应变 $\epsilon_{\text{横}} = - 38\times 10^{-6}$ 。试求材料的弹性模量 E 和横向变形系数 μ 。

1-8 图示结构中, 水平杆 CD 为刚杆, AB 杆直径 $d= 30\text{ mm}$, $E= 210\text{ GPa}$, $a= 1\text{ m}$ 。若在 AB 杆上装有引伸仪, 其标距 $s= 20\text{ mm}$, 放大倍数 $k= 10^3$, 加载后从引伸仪上测得 $\Delta s = 14.3\text{ mm}$, 试求 F 力的大小以及在该力作用下 D 点的位移。

题 1-8 图

1-9 图示结构中, AB 为刚杆, 横截面面积为 $A = 76.36 \text{ mm}^2$ 的钢绳绕过无摩擦的滑轮, $E = 17 \text{ GPa}$, $F = 20 \text{ kN}$ 。试求钢绳内的应力与 E 点的铅垂位移。

题 1-9 图

1-10 图示拉伸试验的最大拉力 $F = 100 \text{ kN}$, 已知拉杆 CD 和试样 AB 均为低碳钢材料,
 $\sigma_p = 200 \text{ MPa}$ $\sigma_s = 240 \text{ MPa}$,
 $\sigma_b = 400 \text{ MPa}$ 。(1) 试设计拉杆 CD 的横截面面积 A, 取安全系数 $n = 2$; (2) 求试验机所能拉断试样的最大直径 d; (3) 试求用直径 $d_1 = 10 \text{ mm}$ 的试样测量材料的弹性模量 E 时, 所加载荷的最大值。

题 1-10 图

1-11 蒸汽机的气缸如图所示。气缸内径 $D = 350 \text{ mm}$, 受内压 $p = 1 \text{ MPa}$, 活塞杆直径 $d = 40 \text{ mm}$, 许用应力 $[\sigma] = 100 \text{ MPa}$ 。试校核活塞杆的强度。若连接气

缸盖的螺栓直径 $d_1 = 20 \text{ mm}$, 螺栓材料的许用应力 $[\sigma]_1 = 40 \text{ MPa}$, 试求连接气缸盖所需的螺栓数。

1-12 图示结构中, 杆 1、2 的直径分别为 $d_1 = 15 \text{ mm}$ 、 $d_2 = 20 \text{ mm}$ 。两杆材料的许用应力均为 $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$ 。试求结构许可的最大载荷 F 值。

题 1-11 图

题 1-12 图

1-13 图示结构的两杆材料相同。许用拉应力 $[\sigma_t] = 40 \text{ MPa}$, 许用压应力 $[\sigma_c] = 100 \text{ MPa}$, $F = 30 \text{ kN}$, 试确定两杆的横截面面积。

题 1-13 图

题 1-14 图

1-14 图示结构中, AB 为刚体; 杆 1 和杆 2 材料相同, 许用应力 $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$, $E = 200 \text{ GPa}$, $F = 40 \text{ kN}$ 。求各杆的横截面面积。

若 AB 向下平动时, 各杆横截面面积又为多大。

1-15 求图示拉杆指定斜截面上的正应力和切应力。已知 $F = 40 \text{ kN}$, $A = 10 \text{ cm}^2$, $\alpha = 60^\circ$

1-16 某拉杆斜截面上的正应力 $\sigma = 50 \text{ MPa}$, 切应力 $\tau = -20 \text{ MPa}$, 试求该杆的最大正应力和最大切应力。

1-17 图示拉杆沿斜截面 $m-m$ 由两部分胶合而成。在胶合面上许用拉应力 $[\sigma] = 14 \text{ MPa}$, 许用切应力 $[\tau] = 7 \text{ MPa}$, 杆的横截

题 1-15 图

题 1-17 图

面面积 $A = 960 \text{ mm}^2$, 为使杆能承受最大的载荷 F_{\max} , α 角应为多大? ($0 < \alpha < 60^\circ$), 许可最大载荷是多少?

1-18 求图示静不定结构的约束反力 F_A 和 F_B , 以及截面 C 的水平位移。已知 F 和 EA 。

1-19 图示方形截面杆由两种不同材料所组成, 弹性模量分别为 E_1 和 E_2 ($E_1 > E_2$)。假设其端板为刚性的, 试求使两种材料均匀

题 1-18 图

拉伸时载荷 F 的偏心距 e 及各部分中的应力 σ_1 和 σ_2 。

题 1-19 图

1-20 图示阶梯杆, 其端部与支承平台间的距离为 h 。其他条件如图所示, 求平台的支反力 F_B 。

1-21 图示结构中, ABC 为刚体, 杆 1 横截面面积 $A_1 = 30$

cm^2 , $[\sigma]_1 = 160 \text{ MPa}$, $E_1 = 210 \text{ GPa}$ 。杆 2 横截面面积 $A_2 = 50 \text{ cm}^2$, $[\sigma]_2 = 100 \text{ MPa}$, $E_2 = 120 \text{ GPa}$ 。试求结构许可承受最大载荷 F 值。

题 1-20 图

题 1-21

1-22 图示刚性杆由三根杆支承, 三根杆的横截面面积均为 $A = 200 \text{ mm}^2$, 弹性模量均为 $E = 200 \text{ GPa}$, 其中两根长度均为 l , 而另一杆的长度为 $l - \Delta l$, $\Delta l = 5 \times 10^{-5} l$ 。求短杆在中间和短杆在一侧时, 各杆横截面上的应力。

题 1-22 图

1-23 图示阶梯杆在温度 $t_1 = 15^\circ\text{C}$ 时固定。当温度升高至 $t_2 = 55^\circ\text{C}$ 时, 求杆内的最大应力。已知 $l_1 = 2l_2 = 100 \text{ cm}$, $2A_1 = A_2 = 2 \text{ cm}^2$, $E = 200 \text{ GPa}$, $\alpha = 12.5 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ 。

题 1-23 图

第二章 圆轴的扭转

§ 2-1 概 述

设等直杆两端承受一对大小相等, 转向相反, 作用面均垂直于杆轴线、力偶矩为 M_e 的力偶作用, 则杆件的任意两横截面都发生相对转动, 杆的纵向线倾斜了同一个角度, 使其变为螺旋线, 如图 2-1 所示, 杆件的这种变形称为扭转变形。工程中把以承受扭转变形为主的杆件称为轴。本章讨论圆截面轴的扭转问题。

图 2-1

作用于轴上的外力偶矩, 有时可以直接由外力求得。例如, 图 2-2 所示皮带轮轴, 若已知皮带紧边拉力为 F_{s_1} , 松边拉力为 F_{s_2} ,

图 2-2

带轮直径为 D , 则轴所承受的外力偶矩 $M_e = (F_{s_1} - F_{s_2})D/2$ 。有时知道轴所传输的功率及其转速, 需将它们换算为外力偶矩。如图 2-3 所示电机, 若已知电机的功率为 $P(\text{kW})$, 转速为 $n(\text{r/min})$, 则电机轴输出的力偶矩 M_e 可按下述方法求得。

图 2-3

作用于轮上的外力偶可以用一对作用于轮缘上的力 F 表示, 外力偶矩 $M_e = FD$ 。当轮在时间间隔 t 秒内转过微小角度 (用弧度), 则这对力所作的功为 $2F \frac{D}{2} = FD = M_e$, 其功率为 M_e / t 。显然它与电机的功率相同, 即

$$P = \frac{M_e}{t} = M_e$$

式中, ω 称为角速度, 其单位为 rad/s , 而且有 $\omega = \frac{2\pi n}{60}(\text{rad/s})$, 又因为 $1 \text{ kW} = 1000 \text{ N} \cdot \text{m/s}$, 于是上式可表示为

$$P \times 1000 = M_e \frac{2\pi n}{60}$$

由此得到力偶矩 M_e 的计算公式为

$$M_e = 9549 \frac{P}{n} \tag{2-1}$$

式中, M_e 的单位为 $\text{N} \cdot \text{m}$, P 的单位为 kW , n 的单位为 r/min 。

§ 2-2 扭矩和扭矩图

若已知轴上的外力偶矩, 则可用截面法求得轴横截面上的内力。如图 2-4a 所示轴, 设其两端作用有力偶矩为 M_e 的一对力偶。为求轴某横截面上的内力, 假想沿横截面 $m-m$ 将轴截开, 取左段

(或右段)为研究对象,如图 2-4b 所示。根据左段的平衡条件。

$$M_x = 0, \quad T - M_e = 0$$

得到 $T = M_e$

T 是横截面 $m-m$ 上分布内力系的合力偶矩,称为扭矩。

图 2-4

若取右段为研究对象,如图 2-4c 所示,则截面 $m-m$ 上的扭矩 T 必定与 T 大小相等,转向相反。

扭矩的符号规则如下:按右手螺旋法则将扭矩表示为矢量,称为扭矩矢量。若扭矩矢量的指向与截面外法线方向一致,则规定为正值扭矩,此时,轴的纵向线变为右旋线;反之为负值扭矩,纵向线变为左旋线。

在计算某横截面的扭矩时,可先假设为正值扭矩。若计算结果为正,表明假设的转向与实际转向一致,应为正值扭矩;若计算结果为负,表明假设的转向与实际转向相反,应为负值扭矩。

与拉伸变形时相似,取平行于杆件轴线的直线为横坐标,用来表示杆横截面的位置,以纵坐标表示相应截面上的扭矩,便可用图表示出扭矩沿杆轴线的变化情况,这种图称为扭矩图。

例 2-1 图 2-5a 所示轴,其转速 $n = 300 \text{ r/min}$,轮 A 为主动轮,输入功率 $P_A = 100 \text{ kW}$,轮 B、C、D 为从动轮,分别输出功率为

$P_B = 20 \text{ kW}$ 、 $P_C = 30 \text{ kW}$ 、 $P_D = 50 \text{ kW}$ 。试画出轴的扭矩图。

图 2-5

解: 由功率、转速与力偶矩的关系, 分别计算各轮的力偶矩为

$$M_{eA} = 9549 \frac{P_A}{n} = 9549 \times \frac{100}{300} = 3183 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{eB} = 9549 \frac{P_B}{n} = 9549 \times \frac{20}{300} = 636.6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{eC} = 9549 \frac{P_C}{n} = 9549 \times \frac{30}{300} = 954.9 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{eD} = 9549 \frac{P_D}{n} = 9549 \times \frac{50}{300} = 1591.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

计算各段轴的扭矩

BA 段: 用截面 1-1 将轴假想截开, 取左段为研究对象, 用 T_1 表示该截面的扭矩, 并假设为正值, 如图 2-5b 所示。根据平衡条件 $M_x = 0$, 得

$$T_1 = - M_{eB}$$

$$= - 636.6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

AC 段: 与 BA 段相似, 以截面 2-2 截取左段为研究对象, 如图 2-5c 所示, 可得

$$\begin{aligned} T_2 &= M_{eA} - M_{eB} \\ &= 3183 - 636.6 \\ &= 2546.4 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

CD 段: 为计算方便, 以截面 3-3 截取右段为研究对象, 如图 2-5d 所示。得到

$$T_3 = M_{eD} = 1591.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

根据所得数据, 轴的扭矩图如图 2-5e 所示。由图看出, 轴的最大扭矩发生在 AC 段内各横截面上, 其值为 $T_{\max} = 2546.4 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。

若将本例中的轮 B 与轮 A 互换位置, 则扭矩图如图 2-6a 所示。这时最大扭矩为 $3183 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。

若将本例中的轮 A 与轮 C 互换位置, 则扭矩图如图 2-6b 所示。这时最大扭矩为 $1591.5 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。

显而易见, 最后一种情况时, 轴的最大扭矩值较小, 这种布局比较合理。

图 2-6

§ 2-3 切应力互等定理 剪切胡克定律

如图 2-7a 所示薄壁圆筒, 若在其表面上等间距地画出圆周线

和纵向线, 则形成许多大小相同的矩形网格。若在其两端施加一对大小相等、转向相反、力偶矩为 M_e 的力偶, 使之产生扭转变形时, 则所画出的矩形都变成平行四边形, 如图 2-7b 所示。在小变形的条件下, 各圆周线的形状、大小和间距均不变, 只是绕轴线作相对转动; 各纵向线倾斜同一角度 ϕ 。右端截面相对左端截面转动 ϕ 角 (也称为扭转角)。

因各圆周线间距不变, 故其横截面上无正应力, 而只有切应力。考虑到筒壁很薄, 可以认为切应力沿壁厚是均匀分布的, 由于对称缘故, 沿周围方向各点的切应力大小必然相等, 其方向垂直圆筒半径, 切应力的分布情况如图 2-7c 所示。

若用相距为 dx 的两个横截面与夹角为 $d\phi$ 的两个纵向截面从圆筒中截出一个矩形小块 (图 2-7d, e), 则在圆筒受扭之后, 该小块发生如图 2-7f 所示的变形。上述截出的小块称为单元体。单元

图 2-7

体左、右两侧面发生相对错动, 称为剪切变形。同时单元体的直角发生微小的改变, 其改变量 γ 称为切应变(用弧度度量)。单元体左、右两侧面上作用有大小相等, 指向相反的切应力 τ , 两侧面上的切力 τdy 组成一个力偶, 其力偶矩为 $(\tau dy) dx$ 。由于单元体处于平衡状态, 故单元体顶面和底面上, 必然存在切应力 τ , 并组成另一个力偶, 其矩为 $(\tau dx) dy$ 与两侧面的力偶平衡, 即

$$(\tau dy) dx = (\tau dx) dy$$

由此得 $\tau = \tau$

上式表明: 在单元体相互垂直的两个截面上, 切应力必然同时存在, 且其大小相等, 而两者都垂直于截面交线, 其方向共同指向或共同背离该交线。这个规律称为切应力互等定理, 或称为切应力双生互等定律。

图 2-7e 所示单元体的四个截面上, 只有切应力而无正应力作用, 这种应力情况称为纯切应力状态。可以证明, 切应力互等定理不仅存在于纯切应力状态, 而且在非纯切应力状态同样存在。

从上述分析可知, 受扭薄壁圆筒上各点均为纯切应力状态, 故可用薄壁圆筒扭转变形来进行材料的纯剪切试验。根据圆筒所受扭矩, 可以计算出切应力 τ ; 再测出圆筒两端的相对扭转角 ϕ , 并将其换算出切应变 γ , 可以得到材料的切应力 τ 与切应变 γ 的关系曲线, 如图 2-8 所示。当切应力不超过材料的剪切比例极限 τ_p 时, 则切应力与切应变成正比, 可以写成

$$\tau = G \gamma \quad (2-2)$$

该式称为剪切胡克定律。式中, 比例常数 G 称为材料的切变模量, 其单位为 GPa。碳钢材料的切变模量 $G = 80 \text{ GPa}$ 。

图 2-8

切变模量 G 、拉压弹性模量 E 以及横向变形系数 μ , 都是与材料有关的弹性常数。对于各向同性材料, 可以证明, 它们之间存在下列关系:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (2-3)$$

§ 2-4 圆轴扭转时的应力和变形

研究圆轴扭转时横截面上的应力分布规律是一个静不定问题。解决这类问题的方法是:从实验中观察扭转变形现象,作出反映变形实质的假设;再从变形几何关系、物理关系、静力学关系得到应力的分布规律及其计算方法。这种分析方法是解决有关应力分布规律及其计算方法的基本方法,具有普遍意义。

图 2-9

如图 2-9a 所示,在圆轴表面等间距地画出圆周线和纵向线,形成许多矩形网格。当圆轴发生扭转变形时,所画出的矩形均变为平行四边形。在小变形的条件下,各圆周线的形状、大小和间距均不变,只是绕轴线转动;各纵向线倾斜同一角度,如图 2-9b 所示。

根据上述表面现象,经过由表及里的分析,可作出如下假设:

横截面在扭转变形前后始终保持为平面,其大小和形状均不改变,半径仍为直线;

变形后相邻横截面的间距不变。

这就是圆轴扭转变形的平面假设。根据这个假设,圆轴扭转变形时,各横截面如同刚性平面一样,仅在原处绕轴线转动。

根据平面假设可以推断:在横截面上无正应力,而只有切应力,其方向垂直于圆轴半径。

按上述假设和推断为基础,导出的应力和变形的计算公式,符合实验结果,经得起工程实践的检验,故假设和推断是正确的。

下面具体推导切应力分布规律及其计算公式。

从图 2-9 所示圆轴中取出微段 dx ，再从该微段中截取一楔形体，如图 2-10 所示。在轴内部半径为 ρ 的圆柱面上 E 点的切应变为

$$\gamma = \frac{d\phi}{dx} \tag{a}$$

图 2-10

式中， $d\phi/dx$ 是相对扭转角 ϕ 沿轴线的变化率，对同一截面上各点来说，它是常量。

由剪切胡克定律，并注意到式(a)，可以得到

$$\tau = G\gamma = G \frac{d\phi}{dx} \tag{b}$$

上式表明，圆轴横截面上任意一点的切应力 τ ，与该点所在圆周的半径 ρ 成正比。故横截面上切应力沿半径方向的分布规律如图 2-11 所示。

因式(b)中 $d\phi/dx$ 未知，故不能用其计算出切应力，还需研究切应力与扭矩之间的关系。若在图 2-11 所示截面上，距圆心为 ρ 处取一微面积 dA ，则微面积上的切力为 $\tau \cdot dA$ ，该切力对圆心 O 的力矩为 $(\rho \cdot dA)$ 。横截面上所有微面积上的切力对圆心 O 的力矩，应等于该截面上的扭矩 T ，即

$$T = \int_A \rho^2 dA$$

将式(b) 代入上式, 得

$$T = \int_A G \gamma^2 \frac{d\gamma}{dx} dA$$

图 2-11

考虑到 G 与 $d\gamma/dx$ 都是常量, 并令 $I_P = \int_A \gamma^2 dA$ (I_P 称为横截面面积对圆心 O 点的极惯性矩, 其量纲为长度的四次方, 常用单位为 m^4 或 mm^4), 于是得到

$$\frac{d\gamma}{dx} = \frac{T}{GI_P} \tag{2-3}$$

将式(2-3) 代入式(b) 得

$$\gamma = \frac{T}{I_P} x \tag{2-4}$$

这就是圆轴横截面上任一点的切应力计算公式。当 x 达到圆轴半径 R 值时, 得到切应力的最大值, 即

$$\gamma_{max} = \frac{T}{I_P} R$$

令上式中 $I_P/R = W_t$, 最大切应力的计算式可写成

$$\gamma_{max} = \frac{T}{W_t} \tag{2-5}$$

式中, W_t 称为圆轴扭转截面系数, 其量纲为长度的三次方, 常用单位为 m^3 或 mm^3 。

将式(2-3) 改写为

$$d\gamma = \frac{T}{GI_P} dx$$

d 表示相距 dx 的两横截面间的相对扭转角。若两截面间的距离为 l , 则它们之间的相对扭转角为

$$= \int_0^l \frac{T}{GI_P} dx$$

对于由同一种材料制成的等截面圆轴, 并且在长度 l 内的扭矩为常数, 上述积分式写成

$$= \frac{Tl}{GI_P} \tag{2-6}$$

的单位为弧度(rad), 其符号规则与扭矩相同。

式(2-6) 表明, ϕ 与 T 、 l 成正比, 而与 GI_P 之积成反比。在 T 、 l 一定的情况下, GI_P 之积越大, 扭转角 ϕ 越小, 故将 GI_P 称为圆轴的扭转刚度。

下面研究 I_P 与 W_t 的计算。

如图 2-12 所示空心圆截面, 若取微面积 $dA = 2\pi r dr$, 则其极惯性矩的计算公式为

图 2-12

$$I_P = \int_A r^2 dA = \int_0^{\frac{D}{2}} 2\pi r^3 dr = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4)$$

式中 $\alpha = d/D$ 为空心圆截面的内、外径之比。圆轴扭转截面系数为

$$W_t = \frac{I_P}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$$

对于直径为 D 的实心圆截面, 其极惯性矩为

$$I_P = \frac{\pi D^4}{32}$$

其扭转截面系数为

$$W_t = \frac{\pi D^3}{16}$$

扭转切应力和扭转角的计算公式, 是以平面假设为基础导出

的,而平面假设只对于圆截面轴扭转变形才是正确的,故上述公式只适用于圆轴的扭转问题。另外,导出公式时应用了剪切胡克定律,故上述公式只适用于弹性范围,即最大切应力不应超过材料的剪切比例极限 τ_p 值。

在工程实际中,经常会碰到一些非圆截面的受扭杆件,例如矩形截面杆等,试验表明,当非圆截面杆受扭时,其横截面将由平面变为曲面,产生所谓翘曲现象。因此,上述公式对于非圆截面杆均不适用。需要时,可查有关工程手册。

例 2-2 某空心圆截面轴,外径 $D=40\text{ mm}$,内径 $d=20\text{ mm}$,轴的扭矩 $T=1\text{ kN}\cdot\text{m}$ 。试计算该轴的最大和最小切应力,以及距截面圆心为 $\rho=15\text{ mm}$ 处的切应力。

解:根据空心圆截面的几何尺寸,其极惯性矩,和扭转截面系数分别为

$$I = \frac{D^4}{32} (1 - \alpha^4) = \frac{40^4}{32} (1 - \frac{20^4}{40^4}) = 2.355 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

$$W_t = \frac{D^3}{16} (1 - \alpha^4) = \frac{40^3}{16} (1 - \frac{20^4}{40^4}) = 1.178 \times 10^4 \text{ mm}^3$$

轴的最大和最小切应力分别为

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{1 \times 10^6}{1.178 \times 10^4} = 84.89 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\min} = \frac{T}{I_p} \frac{d}{2} = \frac{1 \times 10^6}{2.355 \times 10^5} \times \frac{20}{2} = 42.46 \text{ MPa}$$

距截面圆心为 $\rho=15\text{ mm}$ 的切应力为

$$\tau_{\rho=15} = \frac{T}{I_p} \rho = \frac{1 \times 10^6}{2.355 \times 10^5} \times 15 = 63.69 \text{ MPa}$$

例 2-3 试计算图 2-13 所示圆轴 C 截面相对 A 截面的扭转角 φ_A 。已知轴 AB 段扭矩 $T_{AB}=76.4\text{ N}\cdot\text{m}$,BC 段扭矩 $T_{BC}=-114.6\text{ N}\cdot\text{m}$, $I_p=3 \times 10^5 \text{ mm}^4$, $l=2\text{ m}$, $G=80\text{ GPa}$ 。

解:因轴各段扭矩不同,故先分别算出各段轴的扭转角,然后再求它们的代数和,即可求得 φ_A 。

$$\text{AB 段} \quad \varphi_{BA} = \frac{T_{AB}l}{GI_p} = \frac{76.4 \times 10^3 \times 2 \times 10^3}{80 \times 10^3 \times 2 \times 10^5} = 0.96 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

$$\text{BC 段} \quad \varphi_{CB} = \frac{T_{BC}l}{GI_p} = \frac{-114.6 \times 10^3 \times 2 \times 10^3}{80 \times 10^3 \times 2 \times 10^5} \\ = -1.43 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

$$\varphi_{CA} = \varphi_{BA} + \varphi_{CB} = 0.96 \times 10^{-2} + (-1.43 \times 10^{-2}) \\ = -0.47 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

图 2-13

从图可看出， φ_{CA} 与 φ_{BA} 、 φ_{CB} 之间的关系。

另外，请读者根据 T_{AB} 和 T_{BC} 求出该轴的外力偶矩 M_{eA} 、 M_{eB} 和 M_{eC} 。

§ 2-5 圆轴扭转时的强度和刚度条件

为保证受扭圆轴正常工作，应使其最大扭转切应力 τ_{max} 不超过材料的许用扭转切应力 $[\tau]$ ，故强度条件为

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_t} \quad [\quad]$$

对于等截面圆轴，应根据扭矩图确定最大扭矩，然后求最大扭转切应力，故强度条件为

$$\tau_{max} = \frac{[T] \tau'_{max}}{W_t} \quad [\quad] \quad (2-7)$$

许用扭转切应力 $[\tau]$ ，可从有关资料中查得。在静荷下，许用扭转切应力与许用拉应力之间有如下关系：

钢 $[\tau] = (0.5 \sim 0.6) [\sigma]$

铸铁 $[\tau] = (0.8 \sim 1.0) [\sigma]$

轴类零件除应满足强度条件,还应满足刚度要求,使其产生的扭转变形不超过工程允许的范围。例如,机床主轴的扭转角过大,会引起较大的振动,影响工件的加工精度;发动机凸轮轴扭转角过大,会影响气阀的开闭时间等。特别是精密机械的轴,对其刚度要求更高。

在工程中,通常以轴的单位长度内的扭转角 φ ,不超过许可的单位长度扭转角 $[\varphi]$ 作为刚度条件,即

$$\varphi = \frac{T}{l} = \frac{T}{GI_p} \quad [\quad]$$

式中, φ 的单位为 rad/m,而工程中 $[\varphi]$ 的单位为(°)/m,故上式加以换算后,改写为:

$$\varphi = \frac{T}{GI_p} \frac{180^\circ}{\pi} \quad [\quad]$$

$[\varphi]$ 的数值可查有关手册。

例 2-4 空心汽车传动轴,其外径 $D=76\text{ mm}$,内径 $d=71\text{ mm}$ 。轴传递外力偶矩 $M_e=1.98\text{ kN}\cdot\text{m}$ 。轴材料的许用扭转切应力 $[\tau]=100\text{ MPa}$,切变模量 $G=80\text{ GPa}$ 。轴的许可扭转角 $[\varphi]=2^\circ/\text{m}$ 。试校核轴的强度和刚度。

解:轴的扭矩 $T=M_e=1.98\text{ kN}\cdot\text{m}$ 。轴的内、外径之比 $\alpha=d/D=71/76=0.934$ 。

校核轴的强度

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{16 \times 1.98 \times 10^6}{\pi \times 76^3 (1-0.934^4)} = 96.2\text{ MPa} < [\quad]$$

校核轴的刚度

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{T}{GI_p} \frac{180}{\pi} = \frac{32 \times 1.98 \times 10^6}{80 \times 10^3 \times \pi \times 76^4 (1-0.934^4)} \times \frac{180}{\pi} \\ &= 1.81^\circ/\text{m} < [\quad] \end{aligned}$$

可见,轴的强度和刚度均符合要求。

例 2-5 如将上例中的空心轴改为实心轴,并要求它与原空心轴的强度和刚度相同,那么实心轴直径应为多大?并比较实心轴

与空心轴的重量。

解: 因要求实心轴与空心轴的强度相同, 故实心轴的最大扭转切应力也应为 96.2 MPa, 从而确定出实心轴的直径 d_1 , 即

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{16 \times 1.98 \times 10^6}{d_1^3} = 96.2 \text{ MPa}$$
$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16 \times 1.98 \times 10^6}{96.2}} = 47.2 \text{ mm}$$

在两轴长度相等、材料相同的情况下, 两轴重量之比等于其横截面积之比, 即

$$\frac{A_{\text{实}}}{A_{\text{空}}} = \frac{\frac{\pi}{4} d_1^2}{\frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)} = \frac{47.2^2}{76^2 - 71^2} = 3$$

因要求实心轴与空心轴的刚度相同, 故实心轴的单位长度扭转角也应为 $\theta = 1.81 \text{ } ^\circ/\text{m}$, 从而确定出实心轴直径 d_2 , 即

$$\theta = \frac{T}{GI_p} \frac{180}{\pi} = \frac{32 \times 1.98 \times 10^6}{80 \times 10^3 \times d_2^4} \times \frac{180}{\pi} = 1.81 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ/\text{mm}$$
$$d_2 = \sqrt[4]{\frac{32 \times 1.98 \times 10^6 \times 180^\circ}{80 \times 10^3 \times 1.81 \times 10^{-3}}} = 53 \text{ mm}$$

两轴重量之比为

$$\frac{A_{\text{实}}}{A_{\text{空}}} = \frac{\frac{\pi}{4} d_2^2}{\frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)} = \frac{53^2}{76^2 - 71^2} = 3.8$$

从以上计算结果看出, 在扭矩相同的情况下, 空心轴节省材料, 并能减轻自重。这是因为圆截面上的切应力沿半径呈线性分布, 轴心部分的材料没有充分发挥作用。若将实心轴轴心部分的材料外移, 使之成为空心轴, 会使 W_t 和 I_p 增大, 从而提高了轴的强度和刚度。显然, 空心轴优于实心轴, 它在工程中得到广泛的应用。

例 2-6 某等截面圆轴直径 $d = 100 \text{ mm}$, 转速 $n = 120 \text{ r/min}$ 。材料的切变模量 $G = 80 \text{ GPa}$ 。由试验测得该轴 1m 长之内的扭转角 $\theta = 0.02 \text{ rad}$, 试求该轴所传递的功率。

解: 轴的扭矩等于其传递的外力偶矩, 即

$$T = M_e = 9549 \frac{P}{n}$$

将 $T = M_e = 9549 \frac{P}{n}$ 代入 $\tau = \frac{T \rho}{G I_p}$ 中, 经整理得

$$P = \frac{G I_p n}{9549} = \frac{G d^4 n}{32 \times 9549} = \frac{0.02 \times 80 \times 10^9 \times 0.1^4 \times 120}{32 \times 9549} = 197 \text{ kW}$$

§ 2-6 圆轴扭转时的破坏分析

试验表明, 圆轴的材料不同, 其破坏形式也不相同。像低碳钢类塑性材料的圆轴, 沿轴的横截面破坏; 像铸铁类脆性材料的圆轴, 沿与轴线呈 45° 的面破坏, 如图 2-14a、b 所示。

图 2-14

要解释这种破坏现象, 必须分析圆轴扭转时斜截面上的应力情况。由于圆轴扭转时横截面上的应力并非均匀分布, 故不能采用拉压时分析斜截面上应力的方法, 即不能以整个截面进行应力分析, 而应围绕某一点取出一个单元体来分析。下面围绕横截面外缘处某点 K 取出一个瓦形单元体, 如图 2-15a、b 所示。单元体的左右面是圆轴的横截面, 上下面是径向截面, 前后面是圆柱面, 因单元体尺寸很小, 所取的瓦形体可以看成一个正六面体(图 2-15b)。单元体左右面上只有切应力 τ , 且垂直于径向边; 由切应力互等定理可知, 上下面上有切应力 τ , 且垂直于径向边; 由平面假设可知, 单元体左右及上下面上无正应力, 前后面上既无正应力, 也无切应

力。该单元体是纯切应力状态。为方便起见,常简化为图 2-15c 的平面应力图形来研究。

图 2-15

运用截面法,在单元体上作任意斜截面,如图 2-16a 所示,截面外法线 n 方位与 x 轴的夹角为 α ,并取左部分为研究对象,如 2-16b 所示。设斜截面上作用有正应力 σ_α 和切应力 τ_α ,斜截面面积为 dA ,由静力平衡条件有

$$\begin{aligned} F_n &= 0 \\ dA\sigma_x + (dA\cos\alpha)\sigma_x\sin\alpha + (dA\sin\alpha)\cos\alpha\sigma_y &= 0 \\ F_T &= 0 \\ dA\tau_x - (dA\cos\alpha)\cos\alpha\tau_x + (dA\sin\alpha)\sin\alpha\tau_y &= 0 \end{aligned}$$

图 2-16

经过整理后,得到斜截面上的正应力 σ_α 和切应力 τ_α 的表达式为

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha \end{aligned}$$

由此看出,过 K 点任意斜截面上的应力 σ_α 和 τ_α 随所取截面的方位角 α 而变化。找出 σ_α 和 τ_α 的极值,对分析圆轴扭转破坏是极有意义的。

当截面方位由 x 轴逆时针转过 45 或顺时针转过 45 时, 即 $\alpha = \pm 45^\circ$ 时, 达到极值。

$$\begin{aligned} \sigma_{45^\circ} = \sigma_{\min} &= - \tau_{\max} \quad (\text{压应力}) \\ \sigma_{-45^\circ} = \sigma_{\max} &= \tau_{\max} \quad (\text{拉应力}) \end{aligned}$$

而 $\tau_{45^\circ} = \tau_{-45^\circ} = 0$, 即

$$\tau_{45^\circ} = 0, \quad \tau_{-45^\circ} = 0$$

当 $\alpha = 0^\circ$ 和 $\alpha = 90^\circ$ 时, σ 的绝对值达到最大。即原始单元体各侧面上作用着数值最大的切应力, 而其正应力为零。上述分析如图 2-17 所示。

上述分析表明, 圆轴扭转时, 最大切应力发生在横截面内, 最大拉应力发生在与轴线成 45 的截面内。根据材料力学性质可知, 塑性材料的抗剪强度低于抗拉强度; 脆性材料的抗拉强度低于抗剪强度。所以塑性材料的圆轴扭转时, 由于其抗剪能力最低, 且横截面上具有最大切应力, 故断口发生在横截面, 称为剪断破坏。脆性材料的圆轴扭转时, 由于其抗拉能力最低, 而且与轴线成 45 的斜截面上具有最大拉应力, 故断口发生在与轴成 45 的斜截面上, 称为拉断破坏。

图 2-17

习 题

2-1 试画出图示各轴的扭矩图。

2-2 某轴转速 $n = 100 \text{ r/min}$ 。主动轮 2 输入功率 $P_2 = 60 \text{ kW}$, 从动轮 1、3、4 和 5 分别输出功率为 $P_1 = 20 \text{ kW}$, $P_3 = 10 \text{ kW}$, $P_4 = 22 \text{ kW}$, $P_5 = 8 \text{ kW}$ 。试画出轴的扭矩图。

2-3 圆轴尺寸与承载情况如图所示。已知 $G = 80 \text{ GPa}$ 。试求: (1) 实心轴和空心轴的最大和最小切应力; (2) 圆轴的扭转角 φ 和截面 2-2 相对于截面 1-1 的扭转角 φ_{21} 。

题 2-1 图

题 2-2 图

题 2-3 图

2-4 图示圆轴直径 $d = 80 \text{ mm}$, 轴材料 $G = 80 \text{ GPa}$ 。 $M_{eA} = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_{eB} = 0.6 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_{eC} = M_{eD} = 0.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。(1) 作出扭矩

图; (2) 求出轴的最大切应力; (3) 求出轴的扭转角 ; (4) 若将 M_{eA} 与 M_{eB} 交换位置, 轴的最大切应力是否有变化? 从中得到什么启示?

题 2-4 图

2-5 图示阶梯轴, $l = 1 \text{ m}$, $d = 50 \text{ mm}$, 承受均匀分布的外力偶矩 $M_0 = 2 \text{ kN} \cdot \text{m/m}$, $G = 80 \text{ GPa}$ 。试画出其扭矩图, 并求出最大切应力和截面 A 相对于截面 C 的扭转角。

题 2-5 图

2-6 空心轴与实心轴通过离合器连接。已知空心轴内、外径之比 $d_1/D_1 = 0.6$ 。轴传递的功率 $P = 10 \text{ kW}$, 其转速 $n = 100 \text{ r/min}$ 。许用切应力 $[\tau] = 80 \text{ MPa}$ 。试确定实心轴直径 d 和空心轴的外径 D_1 。

题 2-6 图

2-7 某轴传递转矩 $M_e = 3.7 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 材料的许用切应力 $[\tau] = 60 \text{ MPa}$, $G = 80 \text{ GPa}$, 并规定 $[\varphi] = 0.3^\circ/\text{m}$, 试确定轴的最小直径。

2-8 某轴直径 $d = 60 \text{ mm}$, 许用应力 $[\tau] = 40 \text{ MPa}$, $G = 80$

MPa, 并规定 $[\tau] = 0.5 \tau_m$, 轴的转速 $n = 200 \text{ r/min}$ 。试确定轴所能传递的功率 P 。

2-9 图示轴 AB 的转速 $n = 120 \text{ r/min}$, 从轮 B 输入功率 $P = 60 \text{ kW}$, 该功率的一半通过锥齿轮传给铅垂轴 V, 另一半由水平轴 H 输出。已知 $D_1 = 600 \text{ mm}$, $D_2 = 240 \text{ mm}$, $d_1 = 100 \text{ mm}$, $d_2 = 80 \text{ mm}$, $d_3 = 60 \text{ mm}$, $[\tau] = 30 \text{ MPa}$ 。试校核各轴的强度。

题 2-9 图

2-10 图示铰车由两人同时操作, 若每人加在手柄上的力均为 $F = 200 \text{ N}$, 已知 AB 轴的许用切应力 $[\tau] = 40 \text{ MPa}$, 试设计该轴的直径, 并确定铰车的最大起重量 G 。

题 2-10 图

2-11 若习题 2-2 轴材料的许用应力 $[\tau] = 40 \text{ MPa}$, $G = 80 \text{ GPa}$ 并规定 $[\tau] = 0.3 \tau_m$, 试设计该等截面轴的最小直径 d 。

2-12 已知轴的许用切应力 $[\tau] = 21 \text{ MPa}$, $G = 80 \text{ GPa}$, $[\tau] = 0.3 \tau_m$, 问此轴直径达多少时, 轴的直径应由强度条件决定, 而刚度条件总可满足。

2-13 一轴通过摩擦离合器向另一轴传递力偶, 如图所示。两

离合板是直径为 d 的圆, 且被法向力 F 压在一起。假定力 F 均匀分布在离合板的接触面上。设两板间的摩擦系数为 f , 试求离合器所能传递的最大力偶矩(无滑动发生)。

题 2-13 图

第三章 梁 的 弯 曲

§ 3-1 概 述

当直杆受垂直于杆轴线的外力作用,或受通过杆轴线平面的力偶作用时,则杆的轴线由原来的直线变成曲线,这种变形称为弯曲变形。以弯曲变形为主要变形的杆件称为梁。常用梁的横截面至少有一个对称轴。通过梁轴线和横截面对称轴所形成的平面,称为纵向对称面,如图 3-1 所示。若梁上的外力或外力偶作用在纵向对称面内时,则变形后梁的轴线是一条位于纵向对称面内的平面曲线,这种弯曲变形称为对称弯曲。对称弯曲是工程中常见的情况,本章主要研究直梁对称弯曲时的强度和刚度问题。

图 3-1

实际梁的结构形式,支承情况和载荷作用方式等,因工作要求

不同而各异。为便于分析,并使研究的问题典型化,应将实际梁进行简化和抽象,得到作为分析和计算的力学模型,即得到梁的计算简图。在简化和抽象时,既要考虑分析方便和计算简单,又要反映实际梁的本质特征,以保证计算结果足够精确。

首先,对梁结构形状加以简化。不论直梁的横截面的形状如何,一般均用其轴线表示,若需要表示其横截面形状,则可在梁简化图形右侧(或左侧)画出。

图 3-2

其次,对梁的支承加以简化。梁的实际支承(约束)情况是多种多样的,一般可以简化为三种典型支座,即固定铰支座;活动铰支座和固定端,其简化符号分别如图 3-2a、b、c 所示。

以上三种支座都是理想化的力学模型。铰链被视为绝对光滑,

杆件可绕其自由转动而无约束反力偶。固定端被视为约束了杆件的任何移动和转动。梁的实际支承中, 没有一种支承能完全符合这些情况。不过, 一般认为, 只要允许杆件微微转动就是铰链。例如, 图 3-3a 所示锥齿轮轴, 其一端装有径向止推轴承, 对径向和轴向都有约束作

图 3-3

用, 可将其简化为固定铰支座; 另一端装有径向轴承, 只对径向有约束作用, 可将其简化为活动铰支座。在工程中, 一般将两端装有轴承的轴, 可简化为一端为固定铰支座, 另一端简化为活动铰支座, 如 3-3b 所示。又如图 3-4a 所示火车轮轴, 轨道对其两轮都有铅垂方向的约束作用, 但在同一时刻只有一个轮的侧面受到轨道水平方向的约束作用, 火车轮轴可简化为, 一端为固定铰支座, 另一端简化为活动铰支座, 如图 3-4b 所示。再如图 3-5a 所示电机轴, 可将其左端简化为固定端, 如图 3-5b 所示。图 3-6a 所示卧式铣床刀杆, 可简化为, 左端为固定端, 右端为活动铰支座, 如图 3-6b 所示。

图 3-4

图 3-5

最后, 对梁上的载荷加以简化。梁的载荷一般可简化为三种情

况,即分布力、集中力和集中力偶。例如梁的自重或梁承受的风载、水压等均为分布力。像前面提到的火车轮轴所受的力、铣刀杆承受的力等,均可简化为集中力。图 3-3a 所示齿轮上作用着平行于轴线的外力,这种外力可简化为作用在梁纵向对称面内的集中力偶。

根据梁计算简图的支座情况,在工程中将单跨梁分成

图 3-6

三种典型形式,即简支梁,如图 3-3b;外伸梁,如图 3-4b;悬臂梁,如图 3-5b。上述三种梁的支座反力均可由静力平衡方程完全确定,统称为静定梁。至于支座反力不能由静力平衡条件完全确定的梁,称为静不定梁。如图 3-6b 所示梁,就是静不定梁。

§ 3-2 梁横截面上的内力——切力和弯矩

静定梁在外载荷作用下,根据其平衡条件求出支座反力后,便可进一步研究梁各横截面上的内力。

图 3-7a 所示简支梁,受集中力 F_1 和 F_2 作用,设支座反力分别为 F_A 和 F_B 。现求距梁左端 A 为 x 处截面 $m-m$ 上的内力。为此,用截面法沿截面 $m-m$ 假想地将梁截为两部分,并取左部分为研究对象。因左段梁仍应处于平衡状态,故在一般情况下,在截面 $m-m$ 上有一个切于截面的内力 Q , 和一个在梁载荷作用面内的内力偶,其力偶矩为 M , 如图 3-7b 所示。内力 Q 称为梁横截面上的切力, 内力偶矩 M 称为梁横截面的弯矩, 它们的大小可根据左段梁的平衡条求得, 即

$$\sum Y = 0, \quad F_A - Q - F_1 = 0$$

$$Q = F_A - F_1$$

$$\sum M_C = 0, \quad M - F_A x + F_1(x - a_1) = 0$$

图 3-7

$$M = F_A x - F_1(x - a_1)$$

式中的矩心 C 是横截面的形心。

通过上述分析得出如下结论。

在一般情况下, 梁任意横截面上的内力有两个, 即切力 Q 和弯矩 M 。

梁任意横截面上的切力 Q , 在数值上等于截面 $m-m$ 以左(或
以右)所有外力的代数和。

梁任意横截面上的弯矩 M , 在数值上等于截面 $m-m$ 以左
(或以右)所有外力对该截面形心力矩的代数和。

通常根据外力使梁产生变形的情况来确定代数和各项的正
负号。梁轴线为水平线时的符号规则如下:

横截面 $m-m$ 以左的梁段相对于右段向上错动时, 该截面上的
切力规定为正, 即截面以左梁段上的向上外力或截面以右梁段
上的向下外力, 在计算切力的代数和取正号; 反之取负号, 如图
3-8a 所示。

横截面 $m-m$ 处的弯曲变形凹向上时, 该截面上的弯矩规定
为正, 即截面以左梁段上的外力对截面形心 C 的顺时针力矩或截
面以右梁段上的外力对截面形心 C 的逆时针力矩, 在计算弯矩的

代数和正取正号;反之取负号,如图 3-8b 所示。

图 3-8

例 3-1 求图 3-9 所示梁 C 截面的切力和弯矩。

解:由梁整体的平衡条件求出梁的支座反力 $F_A = 7 \text{ kN}$, $F_B = 29 \text{ kN}$ 。

图 3-9

假想沿截面 C 将梁截开,取左段梁为研究对象,有

$$Q = F_A - 3 \times 4 = 7 - 12 = -5 \text{ kN}$$

$$M = 6 + 7 \times 3 - 4 \times 3 \times \frac{3}{2} = 9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

若取右段梁为研究对象,则有

$$Q = 12 - 29 + 4 \times 3 = -5 \text{ kN}$$

$$M = -12 \times (2 + 3) + 29 \times 3 - 4 \times 3 \times \frac{3}{2} = 9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

计算结果表明, 截面 C 的切力和弯矩的方向和转向如图 3-9b 所示。

通常梁的切力和弯矩随截面位置不同而变化, 若以平行于梁轴线的横坐标 x 表示梁横截面的位置, 则各截面上的切力和弯矩均可表示为 x 的函数, 即

$$Q= Q(x) \quad M= M(x)$$

上述表达式分别称为梁的切力方程和弯矩方程。按切力方程和弯矩方程画出来的图, 分别称为梁的切力图 and 弯矩图, 简称 Q 图和 M 图。

例 3-2 试画出图 3-10a 所示梁的切力图 and 弯矩图。已知分布载荷集度 q 和梁的跨度 l 。

解: 由梁整体的平衡条件, 支座反力 $F_A = F_B = ql/2$ 。

取梁左端点 A 为坐标轴原点, 选取坐标系如图 3-10a 所示。距坐标原点为 x 处截面上的切力和弯矩分别为

图 3-10

$$Q(x) = F_A - qx = \frac{ql}{2} - qx \quad (0 < x < l) \tag{a}$$

$$M(x) = F_A x - \frac{1}{2}qx^2 = \frac{ql}{2}x - \frac{1}{2}qx^2 \quad (0 \leq x \leq l) \tag{b}$$

由式(a)可知, 梁的切力图为一斜直线段, 如图 3-10b 所示。

由式(b)可知, 梁的弯矩图为一抛物线。根据下表数据, 可画出弯矩图, 如图 3-10c 所示。

x	0	$l/4$	$l/2$	$3l/4$	l
M	0	$3ql^2/32$	$ql^2/8$	$3ql^2/32$	0

由图可见, 当 $x = l/2$ 时, 弯矩最大, 其值为 $ql^2/8$, 而该截面上切力为零, 即 $Q = 0$ 。

例 3-3 试画出图 3-11a 所示梁的切力图 and 弯矩图。已知 F 、 a 、 b 、 l ，且 $a < b$ 。

解：由梁的平衡条件求得梁支座反力分别为 $F_A = Fb/l$ ， $F_B = Fa/l$ 。

以梁左端点为坐标原点，选取坐标系如图 3-11a 所示。梁的切力方程和弯矩方程应分 AC 段和 CB 段列出。

AC 段：取距原点 A 为 x_1 的截面，该段的切力方程和弯矩方程分别为

图 3-11

$$Q(x_1) = Fb/l \quad (0 < x_1 < a) \quad (a)$$

$$M(x_1) = Fb/(lx_1) \quad (0 < x_1 < a) \quad (b)$$

CB 段：取距原点 A 为 x_2 的截面，其切力和弯矩方程分别为

$$Q(x_2) = Fb/l - F \quad (a < x_2 < l) \quad (c)$$

$$M(x_2) = Fb/(lx_2) - F(x_2 - a) \quad (a < x_2 < l) \quad (d)$$

由式 (a) 和 (c) 画出切力图，如图 3-11b 所示。由式 (b) 和 (d) 画出弯矩图，如图 3-11c 所示。

例 3-4 试画出图 3-12a 所示梁的切力图 and 弯矩图。已知集中力偶矩 M_e 及梁尺寸 a 、 b 和 l 。

解：由梁的平衡条件求得梁支座反力为 $F_A = F_B = M_e/l$ ，其指向如图 3-12a 所示。

图 3-12

由于力偶在其作用面内任意轴上的投影均等于零, 故梁任意横截面上的剪力等于支座反力 $F_A(F_B)$, 于是在梁全长上只有一个剪力方程为

$$Q(x) = - M_e/l \quad (0 < x < l) \quad (a)$$

而弯矩方程应按 AC 段和 CB 段分别列出。

$$\begin{aligned} \text{AC 段: } M(x_1) &= - \frac{M_e}{l} x_1 \\ (0 < x_1 < a) \end{aligned} \quad (b)$$

$$\text{CB 段: } M(x_2) = - \frac{M_e}{l} x_2 + M_e \quad (a < x_2 < l) \quad (c)$$

由式(a)作出剪力图, 如图 3-12b 所示。由式(b)和(c)作出弯矩图, 如图 3-12c 所示。若 $a < b$, 则最大弯矩 $M_{\max} = M_e b/l$ 。

顺便指出, 也有些专业规定弯矩图中的弯矩(M)坐标指向下为正。

§ 3-3 弯矩、剪力、分布载荷集度之间的关系

在上节例 3-2 中, 梁的剪力方程和弯矩方程分别为

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{ql}{2} - qx \\ M(x) &= \frac{ql}{2} x - \frac{1}{2} qx^2 \end{aligned}$$

它们对 x 的一阶导数分别为

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dx} &= - q \\ \frac{dM}{dx} &= \frac{1}{2} ql - qx = Q(x) \end{aligned}$$

以上结果并非偶然, 其实弯矩, 剪力、分布载荷集度之间存在着普遍关系。下面予以证明。

设梁 AB 上作用有分布载荷 $q(x)$, 它是 x 的连续函数, 其坐标原点位于梁的左端点 A, x 轴向右为正; 并规定分布载荷向上为正, 如图 3-13a 所示。从梁上截取长度为 dx 的微段梁, 并设微段梁

左边截面上的切力和弯矩分别为 Q 和 M , 右边截面上的切力和弯矩分别为 $Q + dQ$ 和 $M + dM$, 如图 3-13b 所示。

图 3-13

由微段梁的平衡条 $\sum Y = 0$, 得

$$\begin{aligned}
 Q + qdx - (Q + dQ) &= 0 \\
 \frac{dQ}{dx} &= q
 \end{aligned}
 \tag{3-1}$$

由平衡条件 $\sum M_c = 0$, 得

$$- M - Qdx - qdx \frac{dx}{2} + (M + dM) = 0$$

略去高阶微量 $qdx^2/2$, 得

$$\frac{dM}{dx} = Q
 \tag{3-2}$$

将式(3-2)对 x 求导, 并注意到式(3-1), 得

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q
 \tag{3-3}$$

以上三式就是弯矩、切力、分布载荷集度之间的微分关系。根据 M 、 Q 、 q 之间的微分关系, 并结合上节例题, 可以得出以下规律。

在无分布载荷的梁段上, 即 $q = 0$ 时, 切力 Q 为常数, 切力图

为与 x 轴平行的直线段; 弯矩 M 为 x 的一次函数, 弯矩图为斜直线段。

在有分布载荷的梁段上, 当 q 为常数时, 切力 Q 是 x 的一次函数, 切力图为斜直线; 弯矩 M 是 x 的二次函数, 弯矩图为抛物线。均布载荷向上时, 弯矩图向下凸; 反之, 向上凸。在切力 Q 等于零的截面处, 弯矩有极值。

在集中力作用处, 切力图有突变, 突变值等于集中力的大小; 弯矩图有折角。

在集中力偶作用处, 切力图无变化; 弯矩图有突变, 突变值等于集中力偶矩的大小。

掌握上述规律, 对正确绘制和校核切力图 and 弯矩图是非常有益的。

例 3-5 绘制出图 3-14a 所示梁的切力图 and 弯矩图。已知 $a=1\text{ m}$, $F=60\text{ kN}$, $M_e=30\text{ kN}\cdot\text{m}$, $q=24\text{ kN/m}$ 。

图 3-14

解: 由梁的平衡条件求得梁支座反力 $F_A=46\text{ kN}$, $F_B=38\text{ kN}$ 。

画切力图 根据梁上外力情况, 将梁分为 AC、CB 和 BE 三段。AC 段上无分布载荷, 切力图 of 水平直线段, 该段的切力 $Q_{AC}=F_A=46\text{ kN}$, 从而画出 AC 段的切力图。同理, CB 段的切力图为一

水平线段;在 C 处有集中力 F 作用,切力图有突变,其突变值等于集中力 F 的大小,突变方向与 F 同向(从左向右画切力图),该段切力 $Q_{CB} = F_A - F = 46 - 60 = -14 \text{ kN}$,从而画出 CB 段的切力图。BE 段上有向下的均布载荷 q 作用,切力图为一斜直线段;在 B 处有集中力 F_B 作用,切力图有突变,突变值等于 F_B ,突变方向与 F_B 指向相同; F_B 作用处稍右截面上的切力 $Q_{B右} = qa = 24 \times 1 = 24 \text{ kN}$,E 处切力为零,即 $Q_E = 0$,从而画出 BE 段的切力图。

画弯矩图 根据梁上的外力情况,将梁分为 AC、CD、DB 和 EB 四段。AC 段切力为正值常量,AC 段的弯矩图为正斜率的一直线段,由 $M_A = 0$ 及 $M_C = F_A \cdot a = 46 \times 1 = 46 \text{ kN} \cdot \text{m}$,画出该段的弯矩图。CD 段切力为负值常量,CD 段的弯矩图为负值斜率的斜直线段,由 $M_C = 46 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 和 $M_{D左} = F_A \cdot 2a - F \cdot a = 46 \times 2 - 60 \times 1 = 32 \text{ kN} \cdot \text{m}$,画出该段的弯矩图。同理,DB 段弯矩图为负值斜率的斜直线段,在 D 处有集中力偶作用,弯矩图有突变,其突变值等于集中力偶矩 M_e ,当从左向右画弯矩图时,顺时针转向的力偶,向正方向突变,反之向负方向突变,由 $M_{D右} = F_A \cdot 2a - F \cdot a - M_e = 46 \times 2 - 60 \times 1 - 30 = 2 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 和 $M_B = -qa^2/2 = -24 \times 1^2/2 = -12 \text{ kN} \cdot \text{m}$,画出该段的弯矩图。BE 段上有向下的均布载荷 q 作用,且切力为正值,该段弯矩图是一条斜率为正,且凸向上的抛物线,抛物线各点的斜率由 B 到 E 逐渐减小,直至 E 处斜率为零,由 $M_B = -12 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 和 $M_E = 0$,可以大致画出该段的弯矩图。

梁的切力图和弯矩图如图 3-14b、c 所示。从 Q 图和 M 图很容易确定出梁的最大切力值和最大弯矩值。

§ 3-4 对称弯曲梁横截面上的正应力

在一般情况下,承载梁的横截面上同时存在切力和弯矩。研究表明,横截面上的切应力与其切力有关,而正应力与弯矩有关。为便于分析梁横截面上的应力,首先研究在梁的各横截面上只有弯矩,而无切力的弯曲变形情况,这种弯曲变形称为纯弯曲。若各横

截面上同时存在切力和弯矩, 则称为横力弯曲或剪切弯曲。如图 3-15 所示简支梁, CD 段为纯弯曲, AC 和 DB 段为横力弯曲。

研究梁横截面上正应力分布规律的方法, 与研究圆轴扭转切应力的方法相似, 即先观察弯曲变形, 作出假设; 然后应用变形几何关系、物理关系、静力关系综合求解。

从图 3-16 所示对称纯弯曲变形试验中, 可以观察到下述现象:

图 3-15

图 3-16

横向线仍为直线, 而两相邻横向线相对转过了一个角度 d 。

纵向线变为曲线, 但与横向线正交; 靠近凹面的纵向线变短, 靠近凸面的纵向线变长。

在纵向线缩短区域的横截面略变宽, 在纵向线伸长区域略变窄。

根据观察到的表面现象, 运用由表及里的分析方法, 来判断梁内部的变形情况, 作出如下假设和推论:

梁横截面变形后仍为平面, 并与变形后的梁轴线正交, 只是绕横截面上某一轴旋转了一个角度, 这就是平面假设。

各纵向纤维之间无牵挤作用, 而处于拉伸或压缩的单向受力状态。

根据平面假设, 梁横截面变形后仍与纵向线正交, 表明横截面

上各点无切应变,即无切应力,只有正应力。

根据平面假设,梁凹面一侧的纵向线缩短,凸面一侧的纵向线伸长;再考虑到变形的连续性,在伸长与缩短区之间必然存在既不伸长也不缩短的纵向纤维层,称为中性层,如图 3-17 所示。中性层与横截面的交线称为中性轴。对称弯曲时,横截面绕中性轴旋转。

图 3-17

应用上述假设和推论导出的应力和变形计算结果,与试验相符,并经得住实践的检验。

变形几何关系 在图 3-16 中,设 O_1O_2 为中性层(位置待定),其曲率半径为 ρ ,现研究距中性轴为 y 的纵向纤维的线应变。变形前 $O_1O_2 = dx$,变形后 $O_1O_2 = d$,因 O_1O_2 为中性层,故 $d = dx$ 。变形前 $bb = dx$,变形后 $b'b' = (\rho + y)d$ 。根据应变的定义,纤维 bb 的线应变为

$$\epsilon = \frac{b'b' - bb}{bb} = \frac{(\rho + y)d - d}{d} = \frac{y}{\rho} \quad (a)$$

式(a)代表距中性层为 y 处的一层纤维的线应变。对于同一截面,式中的 ρ 为一常量,故式(a)表明,纵向纤维的线应变与它到中性层的距离 y 成正比。

物理关系 如前所述,各纵向纤维处于单向受力状态,故当正应力不超过材料的比例极限时,由胡克定律得

$$\sigma = E \epsilon = E \frac{y}{\rho} \quad (b)$$

由式(b)可知,横截面上任意一点(即任意一条纵向纤维)的正应力,与该点到中性轴(或中性层)的距离 y 成正比。显然,中性轴(或中性层)上各点的正应力为零。距中性轴等远的各点正应力相等。根据上述分析,可画出横截面上的应力分布规律,如图 3-18 所示。

静力学关系 因曲率半径 ρ 未知,且中性轴的位置尚未确定

(y 值无法计算), 故由式(b)不能计算弯曲正应力。为解决这个问题需研究静力学关系。

在梁横截面上取直角坐标系 $oxyz$, 如图 3-19 所示。 y 轴为横截面的对称轴, z 轴为中性轴(位置特定), x 轴为梁的轴线。在横截面上任意一点(y, z)处的微面积 dA 上, 有正应力 引起的微内力 $\cdot dA$, 横截面上所有微面积上的微内力构成了与横截面垂直的空间平行力系。该力系可简化为三个内力, 即轴力 N 以及对 y 轴和 z 轴的力偶矩 M_y 和 M_z , 它们的表达式为

图 3-18

图 3-19

$$N = \int_A dA$$

$$M_y = \int_A z dA$$

$$M_z = \int_A y dA$$

弯曲变形时, 横截面上无轴力, 即

$$N = \int_A dA = 0$$

将式(b) 代入上式, 得

$$\int_A dA = \frac{E}{\sigma} \int_A y dA = \frac{E}{\sigma} \int_A y dA = 0$$

由于 $E/\sigma \neq 0$, 故 $\int_A y dA = 0$ 。这表明中性轴 z 过横截面形心, 从而确定了中性轴的位置。

弯曲变形时,横截面上无内力偶矩 M_y , 即 $M_y = 0$, 故此得

$$\int_A z \, dA = 0$$

将(b) 式代入上式, 得

$$\int_A z \, dy = \frac{E}{A} \int_A yz \, dA = 0$$

积分 $\int_A yz \, dA = I_{yz}$, 称为横截面对 y 、 z 轴的惯性积。因 y 轴是横截面的对称轴, 必然有 $I_{yz} = 0$, 故上式自然满足。

纯弯曲时, 梁横截面上只有弯矩 M , 它就是内力偶矩 M_z , 即

$$M_z = M = \int_A y \, dA$$

将式(b) 代入上式, 得

$$M = \frac{E}{A} \int_A y^2 \, dA$$

式中, 积分 $\int_A y^2 \, dA$ 称为横截面对中性轴 z 的惯性矩, 用 I_z 表示。上式改写为

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z} \quad (3-4)$$

式(3-4)表明; 梁中性层的曲率 $1/\rho$ 与弯矩 M 成正比, 与 EI_z 之积成反比。 EI_z 值越大, 曲率越小, 即梁不易变形。故称 EI_z 为梁的弯曲刚度。

将式(3-4)代入式(b), 得

$$\sigma = \frac{M}{I_z} y \quad (3-5)$$

式(3-5)就是对称纯弯曲时, 梁横截面上任意一点弯曲正应力的计算公式。该式表明, 梁横截面上任一点的正应力, 与该截面的弯矩成正比, 与该点到中性轴 z 的距离 y 成正比, 而与截面对中性轴 z 的惯性矩 I_z 成反比。

应用式(3-5)时, M 与 y 均可用绝对值代入, 至于所求点的正应力, 是拉应力还是压应力, 可根据梁的弯矩图确定。

若规定弯矩图的弯矩(M)的坐标指向上为正,则弯矩图画在梁弯曲时受压的一侧。

在土建类各专业,规定弯矩图的弯矩(M)的坐标指向下为正,则弯矩图画在梁弯曲时受拉的一侧。

当 $y = y_{\max}$ 时,梁横截面外缘处各点的正应力最大,其值为

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_z} y_{\max} = \frac{M}{W_z} \quad (3-6)$$

式中, $W_z = I_z / y_{\max}$, 称为梁的抗弯截面系数。

当中性轴不是横截面的对称轴时,例如图 3-20 所示 T 形截面,其最大拉应力和最大压应力并不相等。这时应分别将 y_1 和 y_2 代入式(3-5),来计算最大拉应力和最大压应力。

图 3-20

在使用弯曲正应力计算公式时,应注意该式是在对称纯弯曲条件下推导出来的,而且应力值不能超过材料的比例极限。

在对称横力弯曲变形下,横截面上还有切力作用,使横截面发生翘曲,平面假设不再成立。但理论分析证明,当梁的跨度与横截面高度之比 $l/h > 5$ 时,上述正应力计算公式完全可以推广到对称横力弯曲的情况。对称横力弯曲时,梁横截面上的弯矩沿梁轴线发生变化,故梁的最大正应力计算公式应改写为

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \quad (3-7)$$

§ 3-5 轴惯性矩 平行移轴公式

按照轴惯性矩的定义 $I_z = \int_A y^2 dA$ 可知,其量纲为长度的四次方,常用单位为 m^4 或 mm^4 。抗弯截面系数 $W_z = I_z / y_{\max}$ 的量纲为长度的三次方,常用单位为 m^3 或 mm^3 。下面介绍有关轴惯性矩的计算。

对于简单截面形状, 如矩形、圆形等, 可直接按公式 $I_z = \int_A y^2 dA$ 来计算它们的轴惯性矩。

例 3-6 如图 3-21 所示矩形截面, 坐标原点 O 与截面形心重合, 求 I_z 、 I_y 、 W_z 和 W_y 。

解: 取微面积 $dA = bdy$ 。

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{bh^3}{12} \bigg/ \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6}$$

$$\text{同理 } I_y = \frac{hb^3}{12}, W_y = \frac{hb^2}{6}$$

例 3-7 计算图 3-22 所示圆形截面对其形心轴的惯性矩和弯曲截面系数。

图 3-21

图 3-22

解: 取微面积 $dA = 2 \sqrt{R^2 - y^2} dy$

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} y^2 2 \sqrt{R^2 - y^2} dy = \frac{D^4}{64}$$

$$W_z = I_z / y_{\max} = \frac{D^4}{64} \bigg/ \frac{D}{2} = \frac{D^3}{32}$$

对于由 n 个简单图形组成的组合图形, 按惯性矩的定义, 其惯性矩的计算公式为

$$I_z = \sum_{i=1}^n I_{zi}$$

式中
$$I_{zi} = \int_{Ai} y^2 dA。$$

例 3-8 计算图 3-23 所示圆环截面对其形心轴的惯性矩和弯曲截面系数。

解: 圆环形截面积可视为两个同心圆形截面积的差, 坐标原点与形心重合时, 其惯性矩计算如下:

图 3-23

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{D^4}{64} - \frac{d^4}{64} \\ &= \frac{D^4}{64} (1 - \frac{d^4}{D^4}) \end{aligned}$$

式中 $\alpha = d/D。$

$$W_z = \frac{D^3}{32} (1 - \alpha^4)$$

一般说来, 组合截面的形心与各组成截面的形心不重合, 不能用例 3-8 的方法求惯性矩, 为此给出平行移轴公式。

图 3-24 所示任意形状的截面, 其面积为 A, 形心为 C 点, 轴 y_c 和 z_c 过形心, 截面对 y_c 和 z_c 的惯性矩分别为

$$\begin{aligned} I_{y_c} &= \int_A z_c^2 dA \\ I_{z_c} &= \int_A y_c^2 dA \end{aligned} \tag{a}$$

图 3-24

y 轴平行于 y_c 轴, 两轴相距为 b ; z 轴平行于 z_c 轴, 两轴相距为 a , 截面 A 对 y 、 z 轴的惯性矩分别为

$$I_y = \int_A z^2 dA \quad I_z = \int_A y^2 dA \tag{b}$$

截面上任意微面积 dA 在两个坐标系中的坐标变换关系为

$$y = a + y_c \quad z = b + z_c \quad (c)$$

将式(c) 代入式(b) 得

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_A (a + y_c)^2 dA = \int_A y_c^2 dA + 2a \int_A y_c dA + a^2 \int_A dA$$

由于截面对其形心轴的静矩等于零, 即 $\int_A y_c dA = 0$, 并考虑到式(a), 故有

$$I_z = I_{zc} + a^2 A$$

$$\text{同理} \quad I_y = I_{yc} + b^2 A \quad (3-8)$$

式(3-8)称为惯性矩平行移轴公式。即截面对任意一轴的惯性矩, 等于它对于平行于该轴的形心轴之惯性矩, 加上截面面积与两平行轴间距离平方的乘积。

例 3-9 计算图 3-25 所示 T 形截面对形心轴 z_c 的惯性矩。

解: 先计算矩形 I 和 II 对 z_c 轴的惯性矩。运用平行移轴公式, 矩形 I 和 II 对 z_c 轴的惯性矩分别为

$$\begin{aligned} I_{zc} &= \frac{20 \times 60^3}{12} + 20^2 \times 60 \times 20 \\ &= 8.4 \times 10^5 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{zc} &= \frac{60 \times 20^3}{12} + 20^2 \times 60 \times 20 \\ &= 5.2 \times 10^5 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

图 3-25

然后计算整个截面对形心轴 z_c 的惯性矩为

$$I_c = I_{zc} + I_{zc} = 8.4 \times 10^5 + 5.2 \times 10^5 = 13.6 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

§ 3-6 对称弯曲梁横截面的切应力

图 3-26 所示矩形截面梁, 截面高度为 h , 宽度为 b , 横截面上的切力为 Q 。根据切应力互等定理可知, 在横截面的两侧边上的切应力必沿着侧边。当截面高度 h 大于宽度 b 时, 可认为沿截面宽

度,切应力的大小和方向变化不大。由上述分析可作出如下假设:横截面上各点的切应力均平行于截面侧边,且沿截面宽度均匀分布。

用横截面 m- m 和 n- n 从图 3-27a 所示梁截取长度为 dx 的微段梁。由 M 、 Q 、 q 之间的微分关系可知,截面 m- m 上作用有切力 Q 和弯矩 M ,而在截面 n- n 上作用有切力 Q 和弯矩 $M + dM$,如图 3-27b 所示。由于两截面上的弯矩不等,故在同一 y 坐标处,两截面上的正应力将不相等,如图 3-28a 所示。为了计算横截面上距中性层为 y 处的切应力 $\tau(y)$ 的大小,可在该处用一个平行于中性层的纵向截面 1-2,将微段梁的下部切出。设切出部分横截面 mm11,和 nn22 的面积为 A_1 ,由两截面上弯曲正应力所构成的合力分别为 F_1 和 F_2 。另外,根据切应力互等定理,在纵向截面 1122 上必然有切应力 τ 。而且与 $\tau(y)$ 的大小相等,沿宽度 b 也是均匀分布的。由切应力 τ 组成的合力 $dF = \tau b dx = \tau(y) b dx$,如图 3-28b 所示。

图 3-26

图 3-27

根据图 3-28b 的平衡条件,得

$$\tau(y) b dx = F_2 - F_1$$

由此得

$$\tau(y) = \frac{F_2 - F_1}{b dx} \quad (a)$$

从图 3-28b 还可看出:

$$F_1 = \int_{A_1} \sigma dA = \int_{A_1} \frac{M}{I_z} y^* dA = \frac{M}{I_z} \int_{A_1} y^* dA$$

图 3-28

式中积分 $\int_{A_1} y^* dA$ 称为截面积 A_1 对中性轴 z 的静矩, 即距中性轴 y 处横线一侧部分截面积对中性轴的静矩, 用 S_z^* 表示, 上式可写成

$$F_1 = \frac{M}{I_z} S_z^* \quad (b)$$

同理
$$F_2 = \frac{M + dM}{I_z} S_z^* \quad (c)$$

将式(b)、(c)代入式(a), 并注意到 $\frac{dM}{dx} = Q$, 于是得到矩形截面梁 y 处的切应力为

$$\tau(y) = \frac{QS_z^*}{I_z b} \quad (3-9)$$

对于某个确定截面而言, Q 、 I_z 和 b 均为常量, 而 S_z^* 是 y 的函数。即

$$S_z^* = \int_A y^* dA = A_1 y_c^*$$

式中 y_c^* 为面积 A_1 的形心坐标, 如图 3-29a 所示。

$$y_c^* = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right), \quad A_1 = b \left(\frac{h}{2} - y \right)$$

$$S_z^* = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

于是, 式(3-9)可以表示为

$$\tau(y) = \frac{QS_z^*}{bI_z} = \frac{Q}{2I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (3-10)$$

从上式看出, 切应力沿截面高度按抛物线规律分布, 如图 3-29b 所示。在截面上、下边缘

处($y = \pm \frac{h}{2}$), 切应力 = 0; 在中性轴上($y = 0$), 切应力最大, 其值为

图 3-29

$$\tau_{\max} = \frac{Qh^2}{8I_z} = \frac{Qh^2}{8 \times \frac{bh^3}{12}} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \quad (3-11)$$

即最大切应力是平均切应力 $\frac{Q}{bh}$ 的 1.5 倍。

如图 3-30a 所示, 由上、下翼缘和腹板组成的工字型截面, 因腹板为狭长矩形, 故腹板上的切应力可用式(3-9)计算, 即

$$\tau(y) = \frac{QS_z^*}{I_z b}$$

式中 b 为腹板的厚度, S_z^* 为距中性轴为 y 处横线一侧部分截面对中性轴 z 的静矩; I_z 为工字形截面对中性轴的惯性矩。

图 3-30

腹板上的切应力沿其高度也是按抛物线规律分布, 如图 3-30b 所

示。最大切应力发生在中性轴上,其计算式为

$$\tau_{\max} = \frac{QS_z^*}{I_z b} = \frac{Q}{b} \frac{I_z}{S_z^*} \quad (3-12)$$

式中比值 I_z/S_z^* 可以从型钢表中查得,其量纲为长度。腹板上的最小切应力的计算式为

$$\tau_{\min} = \frac{BQ}{8I_z b} (H^2 - h^2) \quad (3-13)$$

计算表明, τ_{\max} 与 τ_{\min} 相差很小;腹板承担了截面上 95% ~ 97% 的切力。

圆形和圆环形截面梁的最大切应力均发生在中性轴处,并且沿中性轴均布分布,如图 3-31 所示。其值分别为

圆形截面	$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q}{A}$	
圆环形截面	$\tau_{\max} = 2 \frac{Q}{A}$	(3-14)

式中 A 为横截面面积。

例 3-10 试计算图 3-32 所示矩形截面悬臂梁的最大切应力和最大正应力,并求其比值。已知 h 、 b 、 l 、 F 。

解:由梁的切力图 and 弯矩图可知,最大切力 $Q = F$, 最大弯矩 $M = Fl$ 。

图 3-31

梁的最大弯曲正应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{Fl}{W_z} = \frac{6Fl}{bh^2}$$

梁的最大切应力为

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{A} = \frac{3}{2} \frac{F}{bh}$$

两者之比为

图 3-32

$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{6Fl/bh^2}{3F/2bh} = 4 \frac{l}{h}$$

对于细长梁, 即 $l/h > 5$ 时, 正应力数值远大于切应力值, 弯曲正应力是主要应力。

§ 3-7 弯曲强度条件及其应用

由于梁的最大正应力发生在距中性轴最远处, 而该处的切应力为零; 最大切应力发生在中性轴处, 而该处的正应力却为零, 故可分别按正应力和切应力建立梁的强度条件。

梁的弯曲正应力强度条件为

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{W_z} \quad [\sigma] \\ \tau_{\max} &= \frac{Q_{\max}}{W_z} \quad [\tau] \end{aligned} \quad (3-15)$$

式中, 脚码 t 表示拉伸, 脚码 c 表示压缩。

梁的弯曲切应力强度条件为

$$\tau_{\max} \leq [\tau] \quad (3-16)$$

一般说来, 由于梁的跨度 l 与其截面高度 h 之比远大于 5, 正应力之值远大于切应力之值, 故只须考虑梁的正应力强度。

对于短跨度梁, 组合截面梁当 $\frac{b}{h}$ 小时相应型钢的 $\frac{b}{h}$ 时或承受较大切力的木梁, 还应进行切应力强度计算。

例 3-11 如图 3-33a 所示矩形截面梁。已知 $l = 4 \text{ m}$, $b/h = 1/2$; 分布载荷集度 $q = 10 \text{ kN/m}$ 。梁材料的许用应力 $[\sigma] = 100 \text{ MPa}$, 试求: (a) 确定梁的横截面尺寸。 (b) 若梁采用工字形截面, 试选择工字钢的型号。 (c) 选用工字钢后, 计算所节省材料的百分比。

图 3-33

解: 首先画出梁的弯矩图, 如图 3-33b 所示。在截面 B 处弯矩最大, 其值为

$$M_{\max} = \frac{1}{2}ql^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 4^2 = 80 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

其次确定矩形截面的尺寸, 由正应力强度条件, 有

$$W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{80 \times 10^6}{100} = 8 \times 10^5 \text{ mm}^3$$

由于
$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b}{6}(2b)^2 = \frac{2}{3}b^3$$

故有
$$\frac{2}{3}b^3 = 8 \times 10^5 \text{ mm}^3$$

由此可得 $b = 106 \text{ mm}$, $h = 212 \text{ mm}$ 。

再选择工字钢型号, 根据 $W_z = 8 \times 10^5 \text{ mm}^3 = 800 \text{ cm}^3$ 查型钢表, 应选用 36a 工字钢 $W_z = 875 \text{ cm}^3$, 其截面积为 $76.3 \times 10^2 = 7630 \text{ mm}^2$ 。

最后, 计算选用工字钢节省材料的百分比为

$$\frac{A_{\text{矩}} - A_{\text{工}}}{A_{\text{矩}}} = \frac{106 \times 212 - 76.3 \times 10^2}{106 \times 212} = 66\%$$

例 3-12 图 3-34a 所示铸铁梁。已知 $I_z = 13.6 \times 10^5 \text{ mm}^4$, $y_1 = 50 \text{ mm}$, $y_2 = 30 \text{ mm}$; 材料的许用拉应力 $[\sigma_t] = 30 \text{ MPa}$, 许用压应力 $[\sigma_c] = 60 \text{ MPa}$; $F_1 = 2.6 \text{ kN}$, $F_2 = 1 \text{ kN}$, $a = 1 \text{ m}$ 。试校核此梁

的强度。

解: 由梁的平衡条件求得支反力 $F_A = 0.8 \text{ kN}$, $F_B = 2.8 \text{ kN}$

梁的弯矩图如图3-34b 所示, $M_c = 0.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_B = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$

由弯矩图可知, 在正弯矩的梁段, 弯曲变形为凸向下; 在负弯矩的梁段, 弯曲变形为凸向上。

校核 B 截面

$$\sigma_t = \frac{M_B \cdot y_2}{I_z} = \frac{1 \times 10^6}{13.6 \times 10^8} \times 30 = 22.1 \text{ MPa} < [\sigma_t]$$

$$\sigma_c = \frac{M_B \cdot y_1}{I_z} = \frac{1 \times 10^6}{13.6 \times 10^8} \times 50 = 36.8 \text{ MPa} < [\sigma_c]$$

图 3-34

校核 C 截面

$$\sigma_t = \frac{M_c \cdot y_1}{I_z} = \frac{0.8 \times 10^6}{13.6 \times 10^8} \times 50 = 29.4 \text{ MPa} < [\sigma_t]$$

$$\sigma_c = \frac{M_c \cdot y_2}{I_z} = \frac{0.8 \times 10^6}{13.6 \times 10^8} \times 30 = 17.6 \text{ MPa} < [\sigma_c]$$

可见, 梁的强度足够。

例 3-13 如图 3-35a 所示简支梁。已知 $F = 60 \text{ kN}$, $l = 2 \text{ m}$, $a = 0.2 \text{ m}$, 材料的许用正应力 $[\sigma] = 140 \text{ MPa}$, 许用切应力 $[\tau] = 80 \text{ MPa}$ 。试选择合适的工字钢型号。

解: 梁的切力图 and 弯矩图如图 3-35b 和 c 所示。 $Q_{\max} = 54 \text{ kN}$, $M_{\max} = 10.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。

先按正应力强度条件选择工字钢型号 由正应力强度条件

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{10.8 \times 10^6}{140} = 77.1 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

从型钢表查得 12.6 工字钢
 $W_z = 77.5 \times 10^3 \text{ mm}$, 可以满足
正应力强度条件, 故选用
12.6 工字钢。

再按切应力强度条件校核
梁的强度 从型钢表查得
12.6 工字钢 $I_z / S_z = 10.85 \text{ cm}$,
腹板厚度 $b = 5 \text{ mm}$, 将有关数
据代入式(3-12) 得

$$\frac{Q_{\max}}{\frac{I_z}{S_z} b} = \frac{54 \times 10^3}{10.85 \times 10 \times 5} = 99.5 \text{ MPa} > [\] \quad \text{图 3-35}$$

计算结果表明, 12.6 工字钢不能满足切应力强度条件, 必须重新选择工字钢型号。

改选 14 工字钢, 查表 14 工字钢 $I_z / S_z = 120 \text{ mm}$, 腹板厚度 $b = 5.5 \text{ mm}$ 。最大切应力为

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{Q_{\max}}{\frac{I_z}{S_z} b} = \frac{54 \times 10^3}{120 \times 5.5} \\ &= 81.8 \text{ MPa} \end{aligned}$$

工作切应力大约超过许用切应力的 2.3%, 在工程中偏差 5% 以内是允许的。最后选用 14 工字钢。

§ 3-8 弯曲变形 挠曲线近似微分方程

梁除了满足强度条件外, 还应有足够的刚度。例如机床主轴, 若变形过大, 将会影响齿轮的正常啮合, 影响轴与轴承的配合, 造成磨损不均匀和振动, 损害机床的寿命, 还将影响机床的加工精度。此外, 研究梁变形, 还为解静不定梁提供基础。

现以悬臂梁为例来研究梁的变形。取直角坐标系, 以梁左端点为坐标原点, x 轴与梁变形前的轴线重合, 其正向向右; v 轴铅垂

向上为正向,如图 3-36 所示。在对称弯曲时,变形后的梁轴线将成为在纵向对称面(xv 面)内的一条光滑连续曲线,该曲线称为梁的

图 3-36

弹性挠曲线。挠曲线方程用 $v = f(x)$ 表示。

梁的变形,通常用梁横截面的两个位移量来表示,即梁的挠度和转角。

挠度 v 梁某一横截面(x 截面)形心在垂直于梁变形前轴线方位的线位移,称为梁的挠度,即图 3-36 中的 v 。挠度的符号取决于所选坐标系,图 3-36 中的挠度 v 为正值。 x 截面形心还有 x 方向的线位移,但在小变形时, x 方向的线位移很小,忽略不计。

转角 梁某一横截面(x 截面)相对其原位置转过的角度,称为梁的转角。并规定逆时针旋转的转角为正,反之为负。根据平面假设,变形后梁的横截面仍正交于梁轴线。因此,转角 就是挠曲线的法线 n 与 v 轴的夹角,它应等于挠曲线在该点的切线与 x 轴的夹角,在小变形时,转角 很小,故有

$$\tan \theta = \frac{dv}{dx} = \theta \quad (3-17)$$

可见,梁挠曲线上任意一点的斜率等于该点处横截面的转角。

综上所述,只要已知梁的挠曲线方程,就可求得梁轴上任一点的挠度和横截面的转角。

在通常情况下,切力对弯曲变形的影响很小,可以将其忽略不计,故梁的变形主要与弯矩有关,由于弯矩 M 是截面位置 x 的函数,故梁挠曲线的曲率半径 也是 x 的函数。这样,梁的变形公式可由式(3-4)改写为

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI} \quad (a)$$

由高等数学可知,平面曲线的曲率为

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{v}{\{1 + [v']^2\}^{3/2}} \quad (b)$$

将式(b)代入式(a),得

$$\pm \frac{v'(x)}{\{1 + [v'(x)]^2\}^{3/2}} = \frac{M(x)}{EI}$$

在小变形条件下,转角 $v' = \theta$ 是一个很小的量, $[v']^2$ 比 1 更小,于是上式可简化为

$$\pm v' = \frac{M(x)}{EI} \quad (c)$$

按照弯矩的符号规则,以及现在所选坐标系中关于曲线二阶导数的正、负情况,从图 3-37 可知,当弯矩为正时,挠曲线为凹曲线, $v' > 0$; 当弯矩为负时,挠曲线为凸曲线, $v' < 0$, 即 M 与 v' 同号。于是,式(c)可写成

$$v' = \frac{M(x)}{EI} \quad (3-18)$$

图 3-37

式(3-18)称为挠曲线近似微分方程。将方程进行积分,即可求得转角方程和挠曲线方程。

§ 3-9 积分法求梁的变形

对于同一材料的等截面梁,其弯曲刚度 EI 为常量。式(3-18)改写为

$$EI v' = M(x)$$

将上式积分一次,得转角方程

$$EI \theta = EI v' = \int M(x) dx + C$$

再积分一次,得挠曲线方程

$$EI v = \int \int M(x) dx dx + cx + D$$

式中,两个积分常数 C 和 D 可由边界条件确定。例如,在固定端处,其边界条件为:转角 $\theta = 0$,挠度 $v = 0$;在铰支座处的边界条件为:挠度 $v = 0$ 。

当梁的弯矩方程需分段列出时,则挠曲线近似微分方程应分段建立。在这种情况下,积分常数应根据边界条件和分段处挠曲线的连续、光滑条件确定。

例 3-14 车床上用卡盘夹紧工件车削圆轴,如图 3-38a 所示。已知车刀作用于工件上的径向力 $F = 100 \text{ N}$,轴长 $l = 200 \text{ mm}$,直径 $d = 20 \text{ mm}$,工件材料的弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$ 。试求因工件弯曲变形引起的直径误差。

图 3-38

解:根据工件的约束和受力情况,轴可简化为悬臂梁,如图 3-38b 所示。按图示坐标系,梁任意截面 x 的弯矩方程 $M(x) = Fl - Fx$,挠曲线近似微分方程为

$$EI v'' = Fl - Fx$$

积分得

$$EIv = Flx - \frac{F}{2}x^2 + c \quad (a)$$

$$EIv = \frac{Fl}{2}x^2 - \frac{F}{6}x^3 + cx + D \quad (b)$$

在固定端处的边界条件为: $x = 0$ 时, $v = 0$ 及 $v' = 0$, 将其代入式 (a) 和式 (b), 得到 $C = 0$ 和 $D = 0$ 。于是, 梁的转角方程和挠曲线方程分别为

$$\theta = v' = \frac{Fx}{2EI}(2l - x)$$

$$v = \frac{Fx^2}{6EI}(3l - x)$$

梁的自由端 B 处, 有最大挠度和最大转角, 其值分别为

$$v_{\max} = v_B = \frac{Fl^3}{3EI}$$

$$\theta_{\max} = \theta_B = \frac{Fl^2}{2EI}$$

由于弯曲变形使吃刀深度减少 v_B 值, 故圆轴两端直径的误差 $d = 2v_B$, 将已知数据代入上式, 两端直径误差为

$$d = 2v_B = 2 \frac{Fl^3}{3EI} = 2 \times \frac{100 \times 200^3}{3 \times 200 \times 10^3 \times \frac{\pi \times 20^4}{64}} = 0.34 \text{ mm}$$

例 3-15 试求图 3-39 所示简支梁的转角方程和挠曲线方程。并求最大转角和最大挠度。

解: 梁的支座反力 $F_A = Fb/l$, $F_B = Fa/l$ 。分段列出弯矩方程分别为

$$\text{AC 段 } M(x_1) = \frac{Fb}{l}x_1$$

$$\text{CB 段 } M(x_2) = \frac{Fb}{l}x_2 - F(x_2 - a)$$

建立各段梁挠曲线微分方程, 并积分

图 3-39

$$\text{AC 段 } EI v_1 = M(x_1) = \frac{Fb}{l} x_1$$

$$EI v_1 = \frac{Fb}{2l} x_1^2 + C_1 \quad (a)$$

$$EI v_1 = \frac{Fb}{6l} x_1^3 + C_1 x_1 + D_1 \quad (b)$$

$$\text{CB 段 } EI v_2 = M(x_2) = \frac{Fb}{l} x_2 - F(x_2 - a)$$

$$EI v_2 = \frac{Fb}{2l} x_2^2 - \frac{F}{2} (x_2 - a)^2 + C_2 \quad (c)$$

$$EI v_2 = \frac{Fb}{6l} x_2^3 - \frac{F}{6} (x_2 - a)^3 + C_2 x_2 + D_2 \quad (d)$$

由分段处的连续光滑条件: 即 $x_1 = x_2 = a$ 时, 挠度相等和转角相等, 得

$$v_1|_{x_1=a} = v_2|_{x_2=a}, \quad v_1'(x_1)|_{x_1=a} = v_2'(x_2)|_{x_2=a}$$

运用上述条件解得

$$C_1 = C_2, \quad D_1 = D_2$$

由梁的边界条件知, 在支座 A、B 处的挠度为零, 即

$$x_1 = 0 \text{ 时, } v_1 = 0$$

$$x_2 = l \text{ 时, } v_2 = 0$$

由以上两条件解得

$$D_1 = D_2 = 0, \quad C_1 = C_2 = -\frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2)$$

将求得的积分常数代入式(a)、(b)、(c)和(d), 得到 AC 段的转角方程和挠曲线方程分别为

$$v_1' = \frac{Fb}{6EI l} [3x_1^2 - a(1+b)] \quad (e)$$

$$v_1 = \frac{Fbx_1}{6EI l} [x_1^2 - (l^2 - b^2)] \quad (f)$$

CB 段的转角方程和挠曲线方程分别为

$$v_2' = \frac{Fb}{6EI l} [3x_2^2 - \frac{3l}{b}(x_2 - a)^2 - (l^2 - b^2)] \quad (g)$$

$$v_2 = \frac{Fb}{6EI l} [x_2^3 - \frac{1}{b}(x_2 - a)^3 + (l^2 - b^2)x_2] \quad (h)$$

由图可知, 梁的最大转角发生在梁两支座处, 在 A 端, $x_1 = 0$ 时

$$\theta_A = v_1' \big|_{x_1=0} = - \frac{F a b}{6 E I l} (1 + b) \quad (i)$$

在 B 端, $x_2 = l$ 时

$$\theta_B = v_2' \big|_{x_2=l} = \frac{F a b}{6 E I l} (1 + a) \quad (j)$$

当 $a > b$ 时, θ_B 为最大转角

由梁的挠曲线形状可知, 在转角等于零处, 挠度值最大。由式(i)知, $\theta_A < 0$; 由式(j)知, $\theta_B > 0$ 。在 $a > b$ 的情况下, 集中力作用处 C 截面的转角为

$$\theta_c = \frac{F a b}{3 E I l} (a - b) > 0$$

考虑到自梁的 A 端到 B 端, 转角由负值到正值, 转角为零的截面必定在 AC 段内。故可令 $v_1' = 0$, 由式(e)求得转角为零的截面位置为

$$\frac{F b}{6 E I l} [3 x_1^2 - a(1 + b)] = 0$$

解出

$$x_0 = \frac{a(1 + b)}{3} = \frac{l^2 - b^2}{3}$$

将 x_0 的表达式代入式(f), 得到挠度的最大值, 即

$$\theta_{\max} = \frac{F b}{9} \frac{1}{3 E I l} (l^2 - b^2)^3$$

讨论:

当集中力 F 作用点 C 向支座 B 点无限靠近时, 即 $b \rightarrow 0$, 则 $x_0 \rightarrow l/3 = 0.577l$, 这表明最大挠度所在位置仍在梁的跨度中点附近。

若将 $x_1 = l/2$ 代入式(f), 得到梁中点的挠度为

$$v_1 \big|_{x_1=l/2} = - \frac{F b}{48 E I} (3l^2 - 4b^2)$$

这时, 梁的最大挠度 θ_{\max} 与中点挠度绝对值的比为

$$\frac{16 \times 3 (1^2 - b^2)^3}{9l (3l^2 - 4b^2)} \theta_{l/2} = 1.0264$$

上式表明, 简支梁受集中力作用时, 不论集中力作用在何处, 用跨度中点的挠度代替最大挠度, 其误差很小。

§ 3-10 叠加法求梁的变形

积分法是求梁变形的根本方法, 其优点是可以求出任意截面的转角和挠度。但在载荷复杂的情况下, 运算十分烦琐。在工程中经常只需求出某指定截面的转角或挠度, 这时运用叠加法较为方便。

在材料服从胡克定律和小变形的条件下, 梁的转角和挠度与梁上的载荷呈线性关系, 每一载荷引起的变形不受其他载荷的影响。这样, 梁上同时承受几个载荷作用产生的变形, 等于各个载荷单独作用时所引起变形的代数和。每个载荷单独作用时梁的变形可由表 3-1 查得。

例 3-16 求图 3-40a 所示悬臂梁自由端的转角和挠度。

图 3-40

已知 EI, F, q, l

解: F 单独作用时, 如图 3-40b 所示。自由端的转角和挠度, 可由表 3-1 查得, 它们分别为

$$\theta_{BP} = - \frac{Fl^2}{2EI} \qquad V_{BP} = - \frac{Fl^3}{3EI}$$

q 单独作用时, 如图 3-40c 所示。自由端的转角和挠度亦由表

简单载荷作用下梁的变形

表 3-1

序 号	梁 的 简 图	挠 曲 线 方 程	端 面 转 角	最 大 挠 度
1		$v(x) = -\frac{M_e x^2}{2EI}$	$\theta_B = -\frac{M_e l}{EI}$	$v_B = -\frac{M_e l^2}{2EI}$
2		$v(x) = -\frac{F x^2}{6EI}(3l - x)$	$\theta_B = -\frac{Fl^2}{2EI}$	$v_B = -\frac{Fl^3}{3EI}$
3		$v(x) = -\frac{qx^2}{24EI}(x^2 - 4lx + 6l^2)$	$\theta_B = -\frac{ql^3}{6EI}$	$v_B = -\frac{ql^4}{8EI}$

续上表

序 号	梁 的 简 图	挠 曲 线 方 程	端 面 转 角	最 大 挠 度
4		$v(x) = -\frac{Fx^2}{6EI}(3a-x)$ $0 \leq x \leq a$ $v(x) = -\frac{Fa^2}{6EI}(3x-a)$ $a \leq x \leq l$	$B = -\frac{Fa^2}{2EI}$	$v_B = -\frac{Fa^2}{6EI}(3l-a)$
5		$v(x) = -\frac{Fx}{48EI}(3l^2-4x^2)$ $0 \leq x \leq l/2$	$A = B = -\frac{Fl^2}{16EI}$	$v_C = -\frac{Fl^3}{48EI}$
6		$v(x) = -\frac{Fbx}{6EI}(l^2-x^2-b^2)$ $0 \leq x \leq a$ $v(x) = -\frac{Fb}{6EI}\left[\frac{1}{b}x-a\right]^3$ $+ \frac{l^2-b^2}{a}x - x^3$ $a \leq x \leq l$	$A = -\frac{Fab(1+b)}{6EI}$ $B = \frac{Fab(1+a)}{6EI}$	<p>设 $a > b$ $x = \frac{l^2-b^2}{3}$ 处</p> $v_{\max} = -\frac{Fb}{9} \frac{(l^2-b^2)^3}{3EI}$ $x = \frac{1}{2} \text{ 处 } v_{\text{中}} = -\frac{Fb(3l^2-4b^2)}{48EI}$
7		$v(x) = -\frac{M_e x}{6EI}(l^2-x^2)$	$A = -\frac{M_e l}{6EI}$ $B = \frac{M_e l}{3EI}$	$x = \frac{1}{3} \text{ 处 } v_{\max} = -\frac{M_e l^2}{9} \frac{1}{3EI}$ $x = \frac{1}{2} \text{ 处 } v_{\text{中}} = \frac{M_e l^2}{16EI}$

续上表

序 号	梁 的 简 图	挠 曲 线 方 程	端 面 转 角	最 大 挠 度
8		$v(x) = -\frac{qx}{24EI}(l^3 - 2lx^2 + x^3)$	$A = - \quad B = -\frac{ql^3}{24EI}$	$v_C = \frac{5ql^4}{384EI}$
9		$v(x) = \frac{M_e x}{6EI l}(l^2 - 3b^2 - x^2)$ $v(x) = -\frac{M_e(1-x)}{6EI l}[l^2 - 3a^2 - (1-x)^2]$	$A = \frac{M_e}{6EI l}(l^2 - 3b^2)$ $B = \frac{M_e}{6EI l}(L^2 - 3a^2)$	$x = \frac{l^2 - 3b^2}{3} \text{ 处}$ $v_{\max} = \frac{M_e(l^2 - 3b^2)^{3/2}}{9 \times 3 EI l}$ $x = \frac{l^2 - 3a^2}{3} \text{ 处}$ $v_{\max} = -\frac{M_e(l^2 - 3a^2)^{3/2}}{9 \times 3 EI l}$
10		$v(x) = \frac{Fax}{6EI l}(l^2 - x^2)$ $v(x) = -\frac{F(x-l)}{6EI}[a(3x-l) - (x-l)^2]$	$A = -\frac{1}{2} \quad B = \frac{F a l}{6EI}$ $L = -\frac{F a}{6EI}(2l + 3a)$	$v_C = \frac{F a^2}{3EI}(1 + a)$ $\text{在 } x = \frac{1}{3} \text{ 处}$ $v(x) = \frac{F a l^2}{9 \times 3 EI}$

3-1 查得:

$$\theta_{Bq} = - \frac{ql^3}{6EI} \quad V_{Bq} = - \frac{ql^4}{8EI}$$

F 与 q 同时作用时, 自由端的转角和挠度分别为

$$\theta_B = \theta_{BP} + \theta_{Bq} = - \frac{Fl^2}{2EI} + \frac{ql^3}{6EI}$$

$$V_B = V_{BP} + V_{Bq} = - \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{ql^4}{8EI}$$

例 3-17 求图 3-41a 所示梁外伸端的转角和挠度。已知 EI、l、a、Me。

图 3-41

解: 梁的变形可视为下述两种情况叠加的结果。

若假设 AB 段不变形(刚化), 则 BC 段就相当于悬臂梁, 如图 3-41b 所示, C 截面的转角和挠度由表 3-1 查得。

$$\theta_{c1} = - \frac{M_e a}{EI} \quad V_{c1} = - \frac{M_e a^2}{2EI}$$

再考虑 AB 段变形, 而 BC 段不变形(刚化), 可将 BC 段上的载荷 Me 对 AB 段产生变形的作用加到 AB 段的 B 截面处, 即在 B 支座处作用力偶矩 Me, 此时 BC 段可视为无载荷的直杆, 如图 3-41c 所示。由于 Me 作用引起 B 截面的转角 θ_B 可由表 3-1 查得

$$\theta_B = - \frac{M_e l}{3EI}$$

由此引起截面 C 的转角和挠度分别为

$$\theta_C = \theta_B = -\frac{M_e l}{3EI}$$

$$v_{C2} = \theta_B a = -\frac{M_e l}{3EI} a$$

梁外伸端的转角和挠度分别为

$$\theta_C = \theta_{C1} + \theta_{C2} = -\frac{M_e a}{EI} + -\frac{M_e l}{3EI} = -\frac{M_e}{3EI}(l + 3a)$$

$$v_C = v_{C1} + v_{C2} = -\frac{M_e a^2}{2EI} + -\frac{M_e l}{3EI} a = -\frac{M_e a}{6EI}(2l + 3a)$$

这种叠加法称为逐段刚化法。

§ 3-11 梁的刚度条件及其应用

工程实际中,对梁的刚度要求就是使其最大转角和最大挠度,或指定截面的转角和挠度限制在所规定的允许值之内,即

$$\theta_{\max} \leq [\theta]$$

$$v_{\max} \leq [v] \quad (3-19)$$

式中 $[v]$ 称为许用挠度; $[\theta]$ 称为许用转角。其值可从有关资料查得。

例 3-18 图 3-42a 为车床主轴示意图。已知轴的外径 $D = 80 \text{ mm}$, 内径 $d = 40 \text{ mm}$, $l = 400 \text{ mm}$, $a = 200 \text{ mm}$, 弹性模量 $E = 210 \text{ GPa}$, 径向切削力 $F_1 = 2 \text{ kN}$, 齿轮传给轴的径向力 $F_2 = 1 \text{ kN}$, 规定卡盘 C 处的许用挠度 $[v] = 0.0001 \text{ m}$, 轴承 B 处的许用转角 $[\theta] = 0.001 \text{ rad}$ (弧度), 主轴计算简图如图 3-42b 所示。试校核轴的刚度。

解: F_2 单独作用时, 如图 3-42c 所示。B 截面的转角可从表 3-1 查得:

$$\theta_{BF_2} = \frac{F_2 l^2}{16EI}$$

由此引起 C 截面的挠度为

$$v_{CF_2} = \theta_{BF_2} a = \frac{F_2 l^2 a}{16EI}$$

F_1 单独作用时,如图 3-42d 所示。B 截面的转角和 C 截面的挠度可从表 3-1 查得:

$$\theta_{BF_1} = \frac{F_1 a l}{3EI}$$

$$v_{CF_1} = \frac{F_1 a^2 (1+a)}{3EI}$$

F_1 和 F_2 同时作用时, B 截面的转角和 C 截面的挠度分别为

$$\theta_B = \theta_{BF_1} + \theta_{BF_2} = \frac{F_1 a l}{3EI} + \frac{F_2 l^2}{16EI}$$

$$v_C = v_{CF_1} + v_{CF_2} = \frac{F_1 a^2 (1+a)}{3EI} + \frac{F_2 l^2 a}{16EI}$$

将已知数据代入以上两式得

$$\theta_B = 1.6 \times 10^{-4} \text{ rad} < [\theta] = 1 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$v_C = 4.54 \times 10^{-2} \text{ mm} > [v] = 0.00011 = 0.0001 \times 400$$

$$= 4 \times 10^{-2} \text{ mm}$$

图 3-42

计算结果表明, C 截面的挠度不能满足刚度要求。

若使力 F_2 反向, 则有

$$v_C = v_{CF_1} - v_{CF_2} = 3.534 \times 10^{-2} \text{ mm} < [v] = 4 \times 10^{-2} \text{ mm}$$

此时, 截面 C 的挠度满足刚度要求。

§ 3-12 提高梁强度和刚度的主要措施

弯曲正应力是控制梁强度的主要因素, 等截面直梁的弯曲正应力强度条件为

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \quad [] \quad (a)$$

另外, 梁还应满足刚度要求, 刚度条件可简化为如下形式

$$\text{或 } v = \frac{\text{载荷} \times l^n}{\text{系数 } EI} \quad [] \text{ 或 } [v] \quad (b)$$

从式(a)和(b)可以看出, 为了提高梁的强度和刚度, 应从以下几方面考虑。一是合理安排梁的受力情况, 降低最大弯矩; 二是选用合理截面形状, 提高截面的惯性矩和弯曲截面系数, 并充分利用材料的力学性质; 三是在条件许可时, 减小梁的跨度或增加支座。

图 3-43

合理安排梁的受力情况, 可以降低最大弯矩。例如, 图 3-43a 所示简支梁, 中点受集中力作用时, $M_{\max} = Fl/4$; 若将集中力 F 移到靠近支座时, 如图 3-43b 所示, 则 $M_{\max} = 4Fl/25$, 它仅是前者的 64%; 若将集中力 F 分散为两个力或使其成为分布载荷, 如图 3-

43c、d 所示, 也可降低最大弯矩。

另外, 合理布置梁的支座位置, 也可降低最大弯矩。如图 3-44a 所示简支梁在中点起吊重物时, 其最大弯矩为 $Fl/4$; 若将梁的支座内移, 如图 3-44b 所示, 无论在梁中点或端部起吊重物时, 其最大弯矩均为 $Fl/6$, 比前者减少了三分之一。

选用合理的截面形状, 就是用同样大的横截面积, 得到较大的 W_z 和 I_z 值, 从而提高梁的强度和刚度。例如矩形截面梁竖放比平

图 3-44

放好。对于不同形状的截面, 工程中用 W_z/A 比值的大小来衡量其合理性。例如圆形截面 $W_z/A = 0.125d$, 矩形截面 $W_z/A = 0.167h$, 工字形截面 $W_z/A = (0.27 \sim 0.31)h$ 。可见, 工字形截面较为合理。

选用合理截面形状时, 还应考虑到材料的性质。像钢材等塑性材料, 因其拉压、抗拉性能相同, 应采用对称于中性轴的横截面, 如矩形、工字形等。这样可使截面上、下边缘处的最大拉应力和最大压应力数值相等, 同时接近许用应力。对铸铁等脆性材料, 因其抗压性能优于抗拉性能, 宜采用中性轴偏于受拉一侧的截面形状, 如 T 形截面(图 3-45)。若能使中性轴的位置满足下列关系

$$\frac{\frac{M}{I_z} y_t}{\frac{M}{I_z} y_c} = \frac{y_t}{y_c} = \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}$$

则最大拉应力和最大压应力同时接近许用应力。

在通常情况下, 梁内各截面的弯矩随其位置而变化。如果根据

梁的最大弯矩, 将梁设计成等截面, 那么, 在梁内弯矩较小的各截面处的材料未被充分利用。为了节省材料, 减轻自重, 可在弯矩较大处采用较大的截面, 在弯矩较小处采用较小的截面, 使各截面的弯曲截面系数随弯矩大小而变化。这种截面沿轴线变化的梁称为变截面梁。若变截面梁各横截面的最大正应力均等于许用应力, 则称为等强度梁。根据等强度的条件, 梁的某截面(x 截面) 弯曲截面系数为

图 3-45

$$W(x) = \frac{M(x)}{[\sigma]}$$

在 $M(x)$ 和 $[\sigma]$ 已知的情况下, 便可计算出沿梁轴线变化的横截面尺寸。

减小梁的跨度或增加支座可以提高梁的强度和刚度。如图 3-44a 所示梁的最大弯矩为 $F l / 4$, 而图 3-44b 的最大弯矩为 $F l / 6$, 比前者减少了三分之一。图 3-44a 所示梁的最大挠度为 $v = F l^3 / 48 E I$, 而图 3-44b 所示梁的最大挠度为 $v = 5 F l^3 / 648 E I$, 比前者减小了约三分之二。从表 3-1 可知, 梁的变形大小与梁的跨度 l 的平方或立方成正比, 说明梁的跨度大小对梁的变形影响很大, 故在条件允许的情况下, 应尽量缩短梁的跨度, 以减小梁的变形和提高梁的强度。

在梁的跨度不能缩短的情况下, 可采用增加支座的办法, 来提高梁的强度和刚度。例如, 镗刀杆的外伸长度较长时, 为了保证镗孔的精度要求, 可在端部加装尾架, 如图 3-46a 所示, 图 3-46b 为其计算简图。若无尾架时的计算简图, 如图 3-46c 所示。无尾架时梁的最大弯矩为 $F l / 2$, 有尾架时梁的最大弯矩为 $3 F l / 16$, 前者是

后者的 2.6 倍。无尾架时梁 C 截面的挠度为 $F l^3 / 24EI$, 有尾架时梁 C 截面的挠度为 $7F l^3 / 768^3 EI$, 前者与后者挠度之比值为 4.62。可见增加尾架大大提高了镗刀杆的强度和刚度。

有时改变外力方向也可有效地减小弯曲变形, 如例 3-18 中将力 F_2 反向后, $v_c < [v]$, 满足了刚度要求。

§ 3-13 简单静不定梁

上节讨论镗刀杆问题时, 为了提高刀杆的强度和刚度, 增加了一个尾架——支座。这样, 将悬臂梁(图 3-46c)变为静不定梁(图 3-46b), 增加的支座对于悬臂梁的平衡是多余约束, 其相应的约束反力称为多余的约束反力。解静不定梁问题, 除列出平衡方程外, 还需根据梁的变形, 列出补充方程, 求出梁的支座反力。现举例说明解静不定梁的方法。

例 3-19 求图 3-47a 所示梁的支座反力, 并画出其切力图和弯矩图。已知 F 、 l 和 EI 。

解: 本题为一次静不定问题。若取支座 B 为多余约束, 则其相当系统如图 3-47b 所示。相当的含义是: 在原有载荷与多余未知力作用下, 梁的变形与原静不定梁的变形相同, 即相当系统在支座 B 处的挠度

$$v_B = 0$$

(a)

这就是变形谐调条件, 或称变形关系。

现用叠加法求相当系统在 F 与 F_B 作用下, 支座 B 处

图 3-46

的挠度表达式。

由表 3-1 查得

$$\begin{aligned} v_{BF} &= \frac{F}{3EI} \frac{l^3}{2} + \frac{F}{2EI} \frac{l^2}{2} = \frac{5Fl^3}{48EI} \\ v_{BF_B} &= - \frac{F_B l^3}{3EI} \end{aligned} \tag{b}$$

将式(b)代入式(a), 得

图 3-47

$$v_B = v_{BF} + v_{BF_B} = \frac{5Fl^3}{48EI} - \frac{F_B l^3}{3EI} = 0$$

由此解得

$$F_B = \frac{5}{16}F$$

运用静力平衡方程求得其余未知反力。

$$F_A = \frac{11}{16}F, \quad M_A = \frac{3}{16}Fl$$

梁的切力图 and 弯矩图, 如图 3-47b 和 d 所示。

若取其相当系统如图 3-47e 所示, 以 M_A 作为多余约束反力, 则其变形协调条件为

$$\Delta_A = 0$$

从而解得支座反力。具体解法同上, 请读者完成。

习 题

3-1 求图示梁截面 1-1、2-2、3-3 的切力和弯矩。这些截面无限接近于截面 C 或截面 D。假设已知 F 、 q 、 a 。

题 3-1 图

3-2 试作出图示梁的切力图 and 弯矩图, 并确定其最大切力和最大弯矩。假设 F 、 a 、 M 均已知

题 3-2 图

3-3 利用 M 、 Q 、 q 之间关系作出图示梁的切力图 and 弯矩图, 并求出 Q_{\max} 和 M_{\max} 。

3-4 利用 M 、 Q 、 q 之间关系检查梁的切力图 and 弯矩图, 将错误之处加以改正。

题 3-3 图

题 3-4 图

3-5 直径为 d 的钢丝绕在直径为 D 的卷筒上, 已知钢丝的弹性模量为 E , 试求钢丝的最大弯曲正应力。

3-6 简支梁承载如图所示。若分别采用截面积相等的实心圆和空心圆截面, 且 $D_1 = 40 \text{ mm}$, $d_2/D_2 = 0.6$, 试分别计算它们的最大弯曲正应力, 并求空心截面比实心截面的最大应力减小了百分之几?

3-7 图示为 18 工字钢截面梁。试求固定端截面上 1、2、3、4 点的弯曲正应力。

3-8 简支梁承载如图所示。已知 $I_z = 2 \times 10^7 \text{ mm}^4$, $y_1 = 50 \text{ mm}$, $y_2 = 30 \text{ mm}$, 试求梁的最大压应力和最大拉应力。

题 3-6 图

题 3-7 图

题 3-8 图

3-9 空心圆截面梁承载如图所示。已知 $I_z = 9.2 \times 10^6 \text{ mm}^4$, $D = 100 \text{ mm}$, $d = 50 \text{ mm}$ 。求固定端截面上 A、B、C 各点的弯曲正应力

题 3-9 图

3-10 求图示各截面对其形心轴 z 的惯性矩。

3-11 两根材料相同, 横截面面积相等的简支梁如图所示。其中一根为整体的矩形截面梁, 另一根为矩形截面叠合梁。试求两根梁内最大正应力之比。

3-12 试计算图示矩形截面简支梁 1-1 截面上 a 点和 b 点的

题 3-10 图

题 3-11 图

正应力和切应力, 并计算梁的最大正应力和切应力。

题 3-12 图

3-13 试为图示外伸梁选择截面尺寸。有矩形 $h/b=2$ 、工字形、圆形和圆环形 $d/D=0.5$ 四种截面, 并比较它们的截面面积, 梁的许用应力 $[\sigma]=120\text{ MPa}$ 。

3-14 试求安全阀杠杆截面 A 的尺寸。已知 $l_1=80\text{ mm}$, $l_2=$

题 3-13 图

300 mm, $d = \frac{1}{2}h$, $b = \frac{1}{4}h$, 凸轮给杠杆的作用力 $F = 800 \text{ N}$ 。杠杆材料的许用应力 $[\sigma] = 120 \text{ MPa}$

题 3-14 图

3-15 铸铁梁的载荷及横截面尺寸如图所示。已知许用拉应力 $[\sigma_t] = 40 \text{ MPa}$, 许用压应力 $[\sigma_c] = 80 \text{ MPa}$ 。试按弯曲正应力强度条件校核梁的强度。

题 3-15 图

3-16 图示圆截面外伸梁, 已知 $F = 20 \text{ kN}$, $M_e = 5 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$, $a = 500 \text{ mm}$, 梁直径 $d = 90 \text{ mm}$ 。试校核梁的强度。

3-17 图示 T 型铸铁梁, 已知许用拉应力 $[\sigma_t] = 40 \text{ MPa}$, 许用压应力 $[\sigma_c] = 120 \text{ MPa}$, $I_z = 10186 \text{ cm}^4$, $y_1 = 9.46 \text{ cm}$, $y_2 = 15.54 \text{ cm}$ 。试求许可载荷 F 值。

3-18 梁 ABC 由 10 工字钢制成, B 点由直径 $d = 20 \text{ mm}$ 杆支承, $a = 1 \text{ m}$, 梁和杆材料的许用应力 $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$, 试求许可均

题 3-16 图

布截荷集度 q 值。

题 3-17 图

题 3-18 图

3-19 由三根方木胶合而成的悬臂梁, 截面尺寸如图所示, 跨度 $l = 1 \text{ m}$ 。若胶合面的许用切应力 $\tau_1 = 0.34 \text{ MPa}$, 木材的许用正应力 $[\sigma] = 10 \text{ MPa}$, 许用切应力 $[\tau] = 1 \text{ MPa}$ 。试求梁的许可载荷 F 。

题 3-19 图

3-20 由 10 工字钢制成的简支梁如图所示。作用集中力 F 后, 测得 D 点处的应变 $\epsilon = 300 \times 10^{-6}$, 设钢梁 $E = 200 \text{ GPa}$ 。 $l = 0.6 \text{ m}$, $a = 0.3 \text{ m}$ 。试求 F 的大小, 梁内最大正应力和最大切应力。

3-21 如图所示梁。已知 F 、 a 、 l 、 I_z 。梁材料的许用压应力 $[\sigma_c]$ 是许用拉应力 $[\sigma_t]$ 的二倍。试求全梁的最大拉应力和最大压应力, 以及发生的位置。

3-22 图示铸铁 T 形截面梁, 欲使梁内最大拉应力与最大压应力之比为 0.25, 试求水平翼缘的合理宽度 b 。

题 3-20 图

题 3-21 图

3-23 当力 F 直接作用在 AB 的中点时, 梁内最大应力超过许用应力 30%, 为了消除过载, 可以配置如图所示的辅助梁 CD 。试求此辅助梁的长度 a 。

题 3-22 图

题 3-23 图

3-24 起重机与梁如图所示。已知起重机自重 $W = 50 \text{ kN}$, 最大起重量 $G = 10 \text{ kN}$ 。梁由两根工字钢组成, 其许用应力 $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$ 。试按梁的正应力强度条件选择工字钢型号(梁自重不计)。

3-25 用积分法求图示悬臂梁的转角方程和挠曲线方程, 并求出自由端的转角和挠度。已知 q 、 M_e 、 l 、 EI 。

3-26 用叠加法求图示梁 B 截面的转角和挠度, 已知 q 、 l 、 EI 。

3-27 求图示变截面梁自由端的转角和挠度。已知 F 、 l 、 EI 。

3-28 桥式吊车的最大起重量 $W = 10 \text{ kN}$, 梁的跨度 $l = 8 \text{ m}$, 梁材料弹性模量 $E = 210 \text{ GPa}$, 规定 $[\nu] = 1/500$, 试为梁选择合适

题 3-24 图

题 3-25 图

题 3-26 图

的工字钢型号(吊车可简化为简支梁)。

3-29 两端简支的输气管道如图所示, 已知其外径 $D = 114 \text{ mm}$, 内、外径之比 $= 0.9$, 其单位长度的重量 $q = 106 \text{ N/}$

题 3-27 图

m , 材料弹性模量 $E = 210 \text{ GPa}$ 。若管道材料的许用应力 $[\sigma] = 120 \text{ MPa}$, 其许用挠度 $[v] = 1/400$, 试确定此管道允许的最大长度 l

3-30 已知图示梁的 EI , F , l , 试求支座反力, 并绘出切力图 and 弯矩图。

3-31 结构及其受载情况如图所示。已知梁 AD 的弯曲刚度为 EI 和杆 CD 的拉伸刚度为 EA 。试求杆 CD 的拉力。

题 3-29 图

题 3-30 图

题 3-31 图

3-32 图示梁由两根槽钢组成。若 $q = 30 \text{ kN/m}$, $a = 1 \text{ m}$, 许用应力 $[\sigma] = 140 \text{ MPa}$ 。试选择槽钢型号。

题 3-32 图

第四章 联接件的强度计算

§ 4-1 概 述

机器中的零件或工程结构中的构件之间, 往往采用铆钉、螺栓、键、销等将他们联接在一起。如图 4-1a、b、c、d 所示的联接情

图 4-1

况, 分别称为铆联接、螺栓联接、键联接、销联接。铆钉、螺栓、键、销子等统称为联接件。现以铆钉为例, 研究联接件的受力和变形情况。在铆钉的侧面上有一对大小相等、方向相反、作用线相距很近, 而且垂直于铆钉轴线的外力作用, 使铆钉沿截面 $m-m$ 产生相对错动的变形, 称为剪切变形; 发生相对错动的截面 $m-m$ 称为剪切面, 它总与外力作用线平行, 如图 4-2a 所示。

此外, 在铆钉与被联接件的接触面上彼此之间有相互作用的力, 使接触面压紧而发生变形, 称为挤压变形。彼此之间相互作用的力称为挤压力。挤压力所作用的面(接触面)称为挤压面。当挤压面上的挤压力较大时, 就会使接触面发生显著的塑性变形, 导致联接的失效。

综上所述,剪切变形和挤压变形同时发生,都可能导致联接失效。由于联接件的变形情况较为复杂,很难简化为简单的计算模型进行理论分析,故对联接件的强度计算,在工程中采用假定计算的方法,又称实用计算的方法来建立其强度条件。

图 4-2

§ 4-2 剪切与挤压的实用计算

剪切的实用计算 联接件的内力,可用截面法求得。如图 4-2a 所示铆钉,沿其剪切面 m- m 将其截开,取其中一部分为研究对象,如图 4-2b 所示。根据平衡条件可知,在剪切面上的内力主要是切向内力,称为切力,并用 Q 表示。切力的大小为 $Q = F$ 。

切力 Q 显然在剪切面上产生切应力 τ 。由于剪切变形比较复杂,很难确定切应力在剪切面上的分布规律,故在工程中假定切应力 τ 在剪切面上均匀分布,于是切应力的计算公式为

$$\tau = \frac{Q}{A} \tag{4-1}$$

式中 A 为剪切面的面积。

剪切强度条件为

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau] \tag{4-2}$$

式中 $[\tau]$ 为材料的许用切应力,其大小等于材料的剪切极限应力除以安全系数。剪切极限应力根据与联接件工作情况相似的剪切试验所测得的破坏载荷,按式(4-1)算出。实践证明,这样建立起来的

强度条件,是可供工程应用的。

在工程设计规范中,针对各种具体情况,列出了各种材料的许用切应力值,以备查用。在一般情况下,塑性材料的许用切应力 $[\tau]$ 与其许用拉应力之间有以下关系:

$$[\tau] = (0.6 \sim 0.8)[\sigma]$$

剪切强度的实用计算,也可用于材料的冲孔、落料等问题。还可用于设计安全销、保险装置等,以保护机器中主要零部件不受损。在这类问题中,切应力应超过材料的极限应力。

挤压的实用计算 挤压力 F_{bs} 在挤压面上分布的压力集度称为挤压应力,用 σ_{bs} 表示。由于挤压力在挤压面上分布情况较为复杂,故在工程上也采用实用计算方法,假定挤压应力在挤压面上均匀分布。挤压应力为

$$\sigma_{bs} = \frac{F_{bs}}{A_{bs}}$$

式中 A_{bs} 为挤压面的计算面积。

挤压强度条件为

$$\sigma_{bs} = \frac{F_{bs}}{A_{bs}} \leq [\sigma_{bs}] \tag{4-3}$$

式中 $[\sigma_{bs}]$ 为材料的许用挤压应力,可用确定许用切应力的类似方法得到,通常可从有关设计规范查得。对于钢材料,大致可取

$$[\sigma_{bs}] = (1.7 \sim 2.0)[\sigma]$$

这里, $[\sigma]$ 是材料的许用拉应力。

对于挤压面的计算面积,要根据接触面的情况而定。若接触面为平面,则以实际接触面面积为挤压的计算面积。接触面为曲面,如铆钉、螺栓等联接件的接触面为半圆柱面,根据理论分析,挤压应力的分布情况如图 4-3a 所示,最大挤压应力发生在半圆柱形接触面的中央。若将挤压面的计算面积取为实际接触曲面面积在直径平

图 4-3

面上投影, 即 $A_{bs} = t \cdot d$, 如图 4-3b 所示, 则采用投影面积计算出的挤压应力值, 与理论分析所得到的最大挤压应力值相近。

例 4-1 电瓶车挂钩用插销联接, 如图 4-4a 所示。已知 $t = 8 \text{ mm}$, 插销直径 $d = 18 \text{ mm}$, 许用切应力 $[\tau] = 30 \text{ MPa}$, 许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 100 \text{ MPa}$, 牵引力 $F = 15 \text{ kN}$ 。试校核插销的强度。

图 4-4

解: 如图 4-4b 所示, 切力 $Q = F/2 = 7.5 \text{ kN}$, 剪切面积 $A = d^2/4 = 254.3 \text{ mm}^2$ 。应用剪切强度条件

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{7.5 \times 10^3}{254.3} = 29.5 \text{ MPa} < [\tau] = 30 \text{ MPa}$$

挤压力 $F_{bs} = F = 15 \text{ kN}$, 挤压计算面积 $A_{bs} = 2td = 288 \text{ mm}^2$, 运用挤压强度条件

$$\sigma_{bs} = \frac{F_{bs}}{A_{bs}} = \frac{15 \times 10^3}{288} = 52.1 \text{ MPa} < [\sigma_{bs}] = 100 \text{ MPa}$$

可见, 插销的剪切和挤压强度均符合要求。

例 4-2 齿轮与轴用平键联接, 如图 4-5a 所示。轴的直径 $d = 20 \text{ mm}$, 平键的尺寸 $b \times h \times l = 6 \times 6 \times 25 \text{ mm}$ 。轴与齿轮间传递的力偶矩 $M_e = 60 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。键材料的许用切应力 $[\tau] = 45 \text{ MPa}$, 许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 90 \text{ MPa}$ 。试校核键的强度。

解: 应用截面法求键的切力, 如图 4-5b 所示。由其平衡条件得

$$Q = \frac{2M_e}{d} = 6 \text{ kN}$$

键的剪切面积 $A = bl = 6 \times 25 = 150 \text{ mm}^2$ 。应用剪切强度条件

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{6 \times 10^3}{150} = 40 \text{ MPa} < [\tau] = 45 \text{ MPa}$$

图 4-5

由图 4-5c 可知, 挤压力 $F_{bs} = Q = 6 \text{ kN}$, 挤压面的计算面积 $A_{bs} = \frac{h}{2} \times l = 75 \text{ mm}^2$, 运用挤压强度条件

$$\sigma_{bs} = \frac{F_{bs}}{A_{bs}} = 80 \text{ MPa} < [\sigma_{bs}] = 90 \text{ MPa}$$

可见, 键的强度符合要求。

例 4-3 如图 4-6a 所示对接铆联接。已知 $F = 30 \text{ kN}$, 板宽度 $b = 70 \text{ mm}$, 铆钉直径 $d = 10 \text{ mm}$, 主板厚度 $\delta = 6 \text{ mm}$, 上、下盖板厚度 $\delta_1 = 4 \text{ mm}$ 。铆钉材料的许用切应力 $[\tau] = 90 \text{ MPa}$ 。铆钉与钢板的许用挤压力相同, 均为 $[\sigma_{bs}] = 210 \text{ MPa}$ 。钢板许用拉应力 $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$ 。试校核该联接强度。

解: 设力 F 由每个铆钉平均承担, 则每个铆钉受力为 $F/3$, 如图 4-6 所示。铆钉一个剪切面上的切力 $Q = \frac{1}{2} \times \frac{F}{3} = F/6$, 剪切面积 $A = d^2/4$, 运用剪切强度条件。

$$\tau = \frac{F/6}{d^2/4} = \frac{30 \times 10^3/6}{10^2/4} = 63.7 \text{ MPa} < [\tau] = 90 \text{ MPa}$$

每个铆钉两侧面的挤压力相等, 均为 $F_{bs} = F/3$ 。因主板的挤压面积小于与盖板的挤压面积, 且铆钉材料与钢板材料的许用挤压应力相等, 故联接的最大挤压应力为

$$\sigma_{bs} = \frac{F_{bs}}{A_{bs}} = \frac{F/3}{\delta} = \frac{30 \times 10^3/3}{6} = 167 \text{ MPa} < [\sigma_{bs}] = 210 \text{ MPa}$$

主板的轴力图, 如图 4-6c 所示。其危险截面可能是截面 I-I, 也可能是截面 II-II, 故应分别校核。

图 4-6

截面 I-I

$$\sigma_{I-I} = \frac{F}{(b-d)} = \frac{30 \times 10^3}{6 \times (70-10)} = 83 \text{ MPa} < [\sigma] = 160 \text{ MPa}$$

截面 II-II

$$\begin{aligned} \sigma_{II-II} &= \frac{2F/3}{(b-2d)} = \frac{2 \times 30 \times 10^3 / 3}{6 \times (70-2 \times 10)} = 66.7 \text{ MPa} < [\sigma] \\ &= 160 \text{ MPa} \end{aligned}$$

盖板的轴力图,如图 4-6d 所示。由图可知,截面 III-III 上的轴力最大而横截面积最小,其应力为

$$\begin{aligned} \sigma_{III-III} &= \frac{F/2}{\frac{1}{4}(b-2a)} = \frac{30 \times 10^3 / 2}{\frac{1}{4} \times (70-2 \times 10)} = 75 \text{ MPa} < [\sigma] \\ &= 160 \text{ MPa} \end{aligned}$$

经过上述分析和计算,该联接符合强度要求。

例 4-4 如图 4-7 所示凸缘联轴器,用四个直径 $d=20\text{ mm}$ 精制螺栓联接,螺栓均布于直径为 $D_0=150\text{ mm}$ 的圆周上。已知螺栓材料的许用切应力 $[\tau]=80\text{ MPa}$ 。试按螺栓的剪切强度,求该联接所能传递的最大力偶矩。

图 4-7

解: 设每个螺栓承受的切力相同,并用 Q 表示。由平衡条件

$$Q=\frac{M_e}{2D_0}$$

根据螺栓的剪切强度条件

$$=\frac{Q}{A}=\frac{M_e/2D_0}{d^2/4} \quad [\tau]$$

由此解得

$$M_e \leq \frac{D_0}{2} d^2 [\tau] = \frac{150}{2} \times 20^2 \times 80 = 7.5\text{ kN} \cdot \text{m}$$

该联轴器所能传递的最大力偶矩 $M_e=7.5\text{ kN} \cdot \text{m}$ 。

§ 4-3 铆钉(或螺栓)联接承受偏心载荷时的强度计算

如图 4-8a 所示,两刚性板通过铆钉联接在一起,并承受载荷 F 。由于载荷 F 的作用线不通过铆钉分布图形的形心 C ,故称该铆钉联接承受偏心载荷,为分析偏心承载铆联接的强度问题,可将偏心载荷 F 平移至形心 C ,得到一个力和一个附加力偶矩 $M_e=F l$ 的力偶,如图 4-8b 所示。

图 4-8

平移后的载荷 F , 其作用线过形心 C , 它使每个铆钉产生的切力相等, 如图 4-8c 所示, 每个铆钉的切力为

$$Q = \frac{F}{n}$$

式中 n 为铆钉的个数。

力偶使板 A 有绕形心 C 顺时针转动趋势, 而各铆钉的切力阻止这一转动。各铆钉切力的方位垂直于铆钉与形心 C 的连线, 如图 4-8d 所示。因两联接板为刚体, 则每个铆钉的切力正比于它到形心 C 的距离, 各铆钉的切力可从下述比例关系求得,

$$\frac{Q_1}{r_1} = \frac{Q_2}{r_2} = \dots = \frac{Q_i}{r_i} = \dots = \frac{Q_n}{r_n}$$

式中 Q_i 为第 i 个铆钉的切力, r_i 为相应铆钉至形心 C 的距离。

将图 4-8c 中第 i 个铆钉的切力与图 4-8d 中第 i 个铆钉的切力合成, 即得到第 i 个铆钉总的切力。关于铆钉的强度计算方法与前节相同。

例 4-5 求图 4-9a 所示铆联接中每个铆钉的切力。

解: 由图 4-9a 可以看出, 各铆钉分布图形的形心 c 位于铆钉 c 处。将力 F 向形心 c 平移, 得到一个力和一个力偶, 如图 4-9b 和 c 所示。

由图 4-9b 可知, 各铆钉的切力均为

图 4-9

$$Q = \frac{F}{5} = \frac{15}{5} = 3 \text{ kN}$$

由图 4-9c 可知, 各铆钉的切力与它到形心 c 的距离成正比, 即

$$\frac{Q_1}{60} = \frac{Q_2}{30} = \frac{Q_4}{30} = \frac{Q_5}{60} \quad (\text{a})$$

而 $Q_3 = 0$, 因铆钉 c 过形心。

另外, 根据图 4-9c 的平衡条件有

$$Q \times 60 + Q \times 30 + Q \times 30 + Q \times 60 = 15 \times 60 \quad (\text{b})$$

式(a)与式(b)联立求解得

$$Q_1 = Q_5 = 6 \text{ kN}, Q_2 = Q_4 = 3 \text{ kN}$$

各铆钉的总切力为

$$Q_a = 9 \text{ kN}, Q_b = 6 \text{ kN}, Q_c = 3 \text{ kN}, Q_d = 0, Q_e = 3 \text{ kN}。$$

各切力如图 4-9d 所示。

例 4-6 求图 4-10a 所示铆联接中, 承受最大切力铆钉的切力值。

解: 首先找到铆钉分布图形的形心 c 的位置。由于铆钉分布左、右对称, 故形心 c 在 y 轴上。选参考轴 x 如图所示, 形心 c 的 y 坐标

$$y_c = \frac{A_i y_i}{A_i} = \frac{3 \times 0 + 2 \times 40}{3 + 2} = 16 \text{ mm}$$

其次, 将力 F 平移至形心 c 处, 有一个力 $F = 10 \text{ kN}$, 和一个附加力偶矩 $M_e = 10 \times 60 = 600 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 的力偶, 如图 4-10b 和 c 所示。由图 4-10b 可知, 每个铆钉的切力相等, 其值为

$$Q = \frac{F}{n} = \frac{10}{5} = 2 \text{ kN}$$

图 4-10

各铆钉至形心 c 的距离分别为

$$r_1 = \sqrt{30^2 + (40 - 16)^2} = 38.4 \text{ mm}$$

$$r_2 = \sqrt{30^2 + 16^2} = 34 \text{ mm}$$

$$r_3 = 16 \text{ mm}$$

由于附加力偶引起各铆钉的切力之间关系为

$$\frac{Q_1}{r_1} = \frac{Q_2}{r_2} = \frac{Q_3}{r_3} \quad (\text{a})$$

由平衡条件有

$$2Q_1 r_1 + 2Q_2 r_2 + Q_3 r_3 = M_e \quad (\text{b})$$

式(a)与式(b)联立求解, 得到

$$Q_1 = 4.2 \text{ kN}, Q_2 = 3.7 \text{ kN}, Q_3 = 1.8 \text{ kN}$$

它们的指向和方位如图 4-10c 所示。

平移之后的力与附加力偶引起各铆钉的切力分布情况, 如图 4-10d 所示。由图看出, 铆钉 b 承受的切力最大, 其值计算如下:

$$Q_{1x} = Q \times \frac{24}{38.4} = 2.6 \text{ kN}$$

$$Q_{1y} = Q \times \frac{30}{38.4} = 3.28 \text{ kN}$$

$$Q_x = 0$$

$$Q_y = 2$$

$$Q_b = \sqrt{Q_{1x}^2 + (Q_{1y} + Q_y)^2} = \sqrt{2.6^2 + (3.28 + 2)^2} = 5.9 \text{ kN}$$

习 题

4-1 铆联接如图所示。已知 $F = 20 \text{ kN}$, 铆钉直径 $d = 12 \text{ mm}$, 许用切应力 $[\tau] = 90 \text{ MPa}$, 许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 200 \text{ MPa}$, 板厚 $t = 10 \text{ mm}$ 。试校核铆钉的强度。

题 4-1 图

4-2 套筒联接如图所示。已知筒内径 $D = 40 \text{ mm}$, 筒厚 $\delta = 8 \text{ mm}$ 。销钉的平均直径 $d = 6 \text{ mm}$, 许用切应力 $[\tau] = 90 \text{ MPa}$, 许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 150 \text{ MPa}$, $M_e = 100 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。校核铆钉的强度。

4-3 试确定图示装置轴销 B 的直径。已知 $F_1 = 50 \text{ kN}$ 。销材料的许用切应力 $[\tau] = 100 \text{ MPa}$, 许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 240 \text{ MPa}$ 。

4-4 测定剪切强度的装置如图所示。设圆试样直径 $d = 10 \text{ mm}$, 当 $F = 31.5 \text{ kN}$ 时, 试样被剪断。若取安全系数 $n = 2.5$, 求试样材料的许用切应力 $[\tau]$ 。

题 4-2 图

题 4-3 图

4-5 试确定图示键联接的许可载荷 F 。已知键的尺寸 $b \times h \times l = 10 \times 8 \times 35$ mm, 许用切应力 $[\tau] = 60$ MPa, 许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 200$ MPa。

题 4-4 图

题 4-5 图

4-6 如图所示炉壁拉杆直径 $d = 25$ mm, 在拉力 F 作用下产生正应力 $\sigma = 7$ MPa。若炉壁的许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 1.4$ MPa, 试确定垫圈的外径 D 。

4-7 压力机压环式保险器如图所示。当压力机过载时, 保险器先剪断, 以保证其他重要零件安全。设其材料的极限切应力 $\tau_b = 360$ MPa, 压力机的许可压力 $[F] = 160$ kN。试设计保险器的尺寸

。

题 4-6 图

题 4-7 图

4-8 在金属板上冲孔如图所示。设冲床的最大冲压力 $F = 400 \text{ kN}$, 冲头许用应力 $[\sigma] = 440 \text{ MPa}$, 金属板的剪切强度极限 $\tau_b = 360 \text{ MPa}$ 。试求在最大冲压力作用下, 冲头所能冲剪的最小直径 d 和金属板的最大厚度 δ 。

题 4-8 图

4-9 如图所示平键联接。已知直径 $d = 70 \text{ mm}$, 键尺寸为 $b \times h \times l = 20 \times 12 \times 120 \text{ mm}$, 传递转矩 $M_e = 2 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。键的许用切应力 $[\tau] = 60 \text{ MPa}$, 许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 100 \text{ MPa}$ 。试校核键的强度。

4-10 铆联接如图所示。已知板厚度 $t = 5 \text{ mm}$, 宽度 $b = 50 \text{ mm}$, 铆钉直径 $d = 10 \text{ mm}$ 。铆钉与板材料相同, 许用切应力 $[\tau] =$

题 4-9 图

90 MPa, 许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 260 \text{ MPa}$ 。 $F = 30 \text{ kN}$ 。 试求所需铆钉的个数。

题 4-10 图

4-11 在法兰盘联接中, 共用 10 个直径为 d 的螺栓, 其中四个螺栓均布在半径为 R_2 的圆周上, 另六个螺栓均布在半径为 R_1 的圆周上, 如图所示。设螺栓的许用切应力为 $[\tau]$ 。试按螺栓的剪切强度计算出该联接所能传递的最大转矩 M_e 。

题 4-11 图

4-12 试求图示铆联接中哪个铆钉承受的切力最大, 并求出其切力的大小。已知 F 、 a 。

4-13 试求图示铆联接中哪个铆钉承受的切力最大, 并求出其切力的大小。

题 4-12 图

题 4-13 图

第五章 应力状态和强度理论

§ 5-1 应力状态的概念

在一般情况下, 受力杆件内各点的应力随点的位置而变化, 而且在过同一点的不同截面上, 应力也随截面方位而变化。通常把受力杆件内某点各截面上的应力情况, 称为该点的应力状态。

研究某点应力状态的方法是: 围绕所研究的点, 截取一个边长为无穷小量的正六面体, 称为单元体。认为单元体各面上的应力都是均匀分布; 在每对平行平面上的应力的大小相等、性质相同。单元体六个面上的应力, 代表通过该点互相垂直的三个截面上的应力。单元体是一个无限小的体积, 但它仍可分割, 即用截面法可将单元体任意截开, 取出一部分为研究对象。若已知单元体各面上的应力, 则可借助截面法, 求出该单元体任意斜截面上的应力, 从而可知该点的应力状态。通常围绕某点截取单元体时, 总是让单元体各面上的应力为已知, 或可以根据已知条件求出各面上的应力。

§ 5-2 平面应力状态分析

平面应力状态是指单元体的一对平面上应力为零的应力情况, 而其他面上的应力均与应力为零的面平行。图 5-1a 为平面应力状态的一般情况, 并以它为例研究平面应力状态的问题。

取单元体的坐标系如图 5-1 所示。左、右面以 x 轴为外法线, 称为 x 面; 同理, 上、下面称为 y 面; 前后面称为 z 面; 外法线 N 与 x 轴夹角为 α 的面, 称为 α 面, 并规定 α 面的方向由 x 轴算起, 逆

时针旋转所得的角为
 正,反之为负。各面上的
 应力用相应的脚标字母
 来表示。 σ_x 、 τ_{xy} 和 σ_y 、 τ_{yx}
 分别表示 x 面和 y 面上的
 正应力和切应力。 σ_n 和
 τ_{nt} 表示 n 面上的正应力和
 切应力。正应力以拉应
 力为正,反之为负;切应
 力以绕单元体顺时针旋转为正,反之为负。

图 5-1

若已知单元体 x 面和 y 面的应力为 σ_x 、 τ_{xy} 和 σ_y 、 τ_{yx} ,如图 5-1a
 所示,则任意 n 面(与 z 面垂直)上的应力 σ_n 、 τ_{nt} ,可根据图 5-1b 所
 示三棱柱的平衡条件求得,即

$$\begin{aligned}
 F_N &= 0 \\
 dA + (\sigma_x dA \cos \alpha) \sin \alpha - (\sigma_x dA \cos \alpha) \cos \alpha + (\sigma_y dA \sin \alpha) \cos \alpha - \\
 &(\sigma_y dA \sin \alpha) \sin \alpha = 0 \\
 F_T &= 0 \\
 dA - (\sigma_x dA \cos \alpha) \sin \alpha - (\sigma_x dA \cos \alpha) \sin \alpha + (\sigma_y dA \sin \alpha) \sin \alpha + \\
 &(\sigma_y dA \sin \alpha) \cos \alpha = 0
 \end{aligned}$$

式中 dA 为 n 面的面积。根据切应力互等定理, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 以 σ_x 代
 替 σ_y ,并简化以上二式,得

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\
 &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha
 \end{aligned}
 \tag{5-1}$$

式(5-1)是计算平面应力状态下任意斜截面上应力的基本公式。它
 表明,过一点不同方位截面上的应力,随截面的方位而改变。因此,
 在谈到应力时,应指明是哪一点处,在何方位截面上的应力。

若过单元体任意取两个相互垂直的斜截面,即 n 面和 $n + 90^\circ$
 一面,运用式(5-1)算出 σ_n 和 σ_{n+90° ,则有

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_x + \sigma_y$$

这表明,过单元体两个相互垂直截面上的正应力之和等于常量。

从式(5-1)中消去参变量 2α ,便得到 σ_x 和 σ_y 的函数关系式。为此,将式(5-1)中 σ_x 的表达式改写为

$$\sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

再将上式和式(5-1)中 τ_x 的表达式各自平方,然后相加,得

$$\left(\sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_x^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_x^2$$

可见,上式是以 σ_x 和 τ_x 为变量的圆方程。若以横坐标表示 σ_x ,纵坐标表示 τ_x ,则上式所表示的 σ_x 和 τ_x 之间的关系,是以 $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0$ 为

圆心,以 $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_x^2}$ 为半径的一个圆。在该圆周上任意一点的纵、横坐标值,代表单元体相应斜截面上的应力 σ_α 和 τ_α 。这个圆称为应力莫尔圆,简称应力圆。

若已知图 5-2a 所示单元体上的应力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_x, \tau_y$,且 $\sigma_x > 0$ 和 $\tau_x > 0, \tau_y > 0$,则可以画出该单元体的应力圆,其步骤如下:

图 5-2

首先画出 O 直角坐标系,如图 5-2b 所示。其次,选取适当的比例尺,从原点 O 向右量取 $OA = \sigma_x$,再向上量取 $AD_x = \tau_x$,得到点 $D_x(\sigma_x, \tau_x)$,它表示 x 面上的应力。同理,按 σ_y 和 τ_y 量取 OB 和

BD_y, 得到代表 y 面上应力的点 D_y(σ_y, τ_y)。在确定 D_x 和 D_y 时, 应根据 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_x, \tau_y$ 的代数值在 O 坐标系中量取。最后, 连接 D_x 和 D_y 两点, 交横坐标轴于 C 点, 以 C 为圆心, 以 CD_x(或以 CD_y) 为半径, 即可画出应力圆, 如图 5-2b 所示。

有了应力圆之后, 若求单元体面上的应力 σ_α 和 τ_α (图 5-2a), 则只需自应力圆上 D_x 点沿 α 的转向转一圆心角 2α , 在圆周上得到一点 E, E 点的坐标值就是 α 面上的应力值, 即

$$\sigma_\alpha = OF, \quad \tau_\alpha = EF$$

由图 5-2b 可以证明如下:

$$\begin{aligned} OF &= OC + CF = OC + CE \cos(2\alpha + 2\alpha_0) \\ &= OC + (CD_x \cos 2\alpha_0) \cos 2\alpha - (CD_x \sin 2\alpha_0) \sin 2\alpha \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha \\ &= \dots \\ EF &= CE \sin(2\alpha + 2\alpha_0) \\ &= (CD_x \cos \alpha_0) \sin 2\alpha + (CD_x \sin 2\alpha_0) \cos 2\alpha \\ &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha \\ &= \dots \end{aligned}$$

采用图解法时应注意: 应力圆上的点与单元体上的斜截面有着——对应关系, 圆周上任意一点的坐标代表单元体相应斜截面上的应力; 应力圆上任意两点间的圆弧所对应的圆心角, 等于单元体两相应斜截面外法线间夹角的二倍, 而且这两个角度的转向相同。

例 5-1 求图 5-3a 所示单元体 $\alpha = 45^\circ$ 斜截面上的应力。图中应力单位为 MPa。

解: 运用式(5-1)得

$$\begin{aligned} \sigma_{45^\circ} &= \frac{40 - 20}{2} + \frac{40 + 20}{2} \cos 90^\circ + 40 \sin 90^\circ = 50 \text{ MPa} \\ \tau_{45^\circ} &= \frac{40 + 20}{2} \sin 90^\circ - 40 \cos 90^\circ = 30 \text{ MPa} \end{aligned}$$

本题可以采用图解法, 其应力圆如图 5-3b 所示。由半径 CD_x

图 5-3

绕圆心 C 逆时针旋转 90 至 CE, 得到圆周上的 E 点, 按选定的比例尺, 量出 E 点的横坐标值和纵坐标值, 得

$$\sigma_{45^\circ} = 50\text{MPa}, \tau_{45^\circ} = 30\text{MPa}$$

任意一个平面应力状态, 如图 5-4a 所示, 均可画出其应力圆, 如图 5-4b 所示。因应力圆的圆心在 σ 轴上, 故应力圆与 σ 轴必有

图 5-4

两个交点 M 和 N。M 点的横坐标最大, 纵坐标为零, 这表明单元体中与 M 点相应的截面上, 正应力取极大值, 而切应力为零; N 点的横坐标最小, 纵坐标为零, 这表明单元体中与 N 点相应截面上, 正应力取极小值, 切应力为零。在应力状态理论中, 单元体中切应力为零的截面称为主平面。主平面上的正应力称为主应力。主应力是单元体各截面上正应力的极值。

由上述论述可知, 一个平面应力状态的单元体, 在与 Z 面垂直的诸面中, 必然存在两个相互垂直的主平面(因 M 与 N 两点相差 180°), 其上分别作用着主应力。在平面应力状态中, Z 面上无任何应力, Z 面也是一个主平面, 该平面上的主应力为零。

可以证明, 在一个单元体上, 存在着三对相互垂直的主平面, 在三对主平面上分别作用着三对主应力。三对主应力分别用 σ_1 、 σ_2 和 σ_3 表示, 并且按其代数值从大到小排列, 即 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 。

按三对主平面方位取出的单元体称为主单元体。根据主单元体上的主应力情况, 将单元体的应力状态分成三类: 三对主应力中, 只有一对主应力不为零的情况, 称为单向应力状态; 三对主应力中, 有两对主应力不为零的情况, 称为二向应力状态, 或称为平面应力状态; 三对主应力均不为零的情况, 称为三向应力状态, 或称为空间应力状态。后二者统称为复杂应力状态。

平面应力状态下, 两对不为零的主应力值, 可由应力图上 M 点和 N 点的坐标求得, 根据图 5-4b 可知:

$$\begin{aligned} \text{M 点} \quad \sigma_1 &= OM = OC + CM \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \text{N 点} \quad \sigma_2 &= ON = OC - CN \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned} \tag{5-2}$$

式(5-2)为计算主应力的解析式。由式(5-2)算出的主应力可能为正, 也可能为负, 将求得的 σ_1 、 σ_2 和已知为零(Z 面)的主应力, 按三者的代数值排列, 确定出 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 。

设 M 点与 D_x 点(与 x 面对应)所成圆心角为 $2\theta_0$, 则从 D_x 点沿圆周顺时针旋转 $2\theta_0$ 就到达 M 点。根据点面对应关系, 在单元体中从 x 面顺时针旋转 θ_0 角就是主平面的位置, 如图 5-4a 所示。由图 5-4b 可知

$$\tan 2\theta_0 = -\tau_{xy} / \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \tag{5-3}$$

式中负号表示 $2\theta_0$ 为负角(顺时针)。满足式(5-3)的角度值有二

个,即 α_0 和 $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$ 。这两个角中,哪个与 σ_1 或 σ_3 对应可以用应力圆判断。也可用下述方法判断。

在图 5-4b 中,过 D_x 点作水平线 D_xK ,并连接点 K 和 M ,
 $\angle MKD_x = \alpha_0$,即为主平面的方向角。 KM 线的方向就是 σ_1 的方向。由 $\triangle EKM$ 可知

$$\tan \alpha_0 = \frac{EM}{EK} = \frac{-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}{\tau_{xy}}$$

考虑到该角为负角,上式改写为

$$\tan \alpha_0 = - \frac{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}{\tau_{xy}} \tag{5-4}$$

例 5-2 求图 5-5a 所示单元体的主应力,并画出主单元体图。
 图中应力单位为 MPa。

解:该单元体为平面应力状态,已知一个主应力为零,另外两个主应力由式(5-2)求得

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \frac{40 + 60}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{40 - 60}{2}\right)^2 + (-50)^2} \\ &= \pm 80.7 \text{ MPa} \end{aligned}$$

由计算结果可知, $\sigma_1 = 60.7 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -80.7 \text{ MPa}$

由式(5-4)求得主平面方位

$$\begin{aligned} \tan \alpha_0 &= - \frac{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}{\tau_{xy}} = - \frac{-50}{60.7 - 40} = 0.414 \\ \alpha_0 &= \tan^{-1} 0.414 = 22.5^\circ (\text{逆时针}) \end{aligned}$$

另一个主平面与其垂直,即

$$\alpha_0 = \alpha_0 + 90^\circ = 112.5^\circ$$

从原始单元体 x 面逆时针转过角度 $\alpha_0 = 22.5^\circ$ 得到 σ_1 所在主平面,再转 90° 角得 σ_3 所在主平面,最后得到图 5-5a 所示主单元体图。

图 5-5

本题也可采用画应力圆的方法,求得 σ_1 、 σ_3 和 σ_0 ,如图 5-5b 所示。

例 5-3 试用图解法求图 5-6a 所示纯切应力单元体的主应力,并画出主单元体图。

图 5-6

解:画出 O 直角坐标系。按选定的比例尺,由 x 面上的应力确定点 $D_x(O, \tau)$,由 y 面上的应力确定点 $D_y(O, -\tau)$,连接 D_x 与 D_y 点与 x 轴相交于原点 O 。以 O 为圆心,以 OD_x 为半径画出应力圆,如图 5-6b 所示。由图可知

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau$$

连接 D_x 和 M 点,确定出 σ_1 的指向,如图 5-6b 所示。主单元体图如图 5-6a 所示。

例 5-4 求图 5-7a 所示常见应力状态的主应力及其方位,并

画出应力圆和主单元体图。

图 5-7

解: 将 $\sigma_x = \sigma_y = 0, \tau_{xy} = -\tau$ 代入式(5-2)和式(5-3)求得主应力及其方位, 即

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad \sigma_2 = 0$$
$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}$$

应力圆如图 5-7b 所示。主单元体图如图 5-7a 所示。
该应力状态具有典型意义。其主应力的计算式应记住。

§ 5-3 三向应力状态的应力圆 最大切应力

设有一主单元体, 其上的主应力 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$, 如图 5-8a 所示。首先研究与 σ_2 平行的各斜截面上的应力。由于单元体上、下平面上的力相互平衡, σ_2 不会在与其平行的各斜截面上引起应力, 即与 σ_2 平行的各斜截面上的应力与 σ_2 无关, 只与 σ_1 和 σ_3 有关。因此, 研究与 σ_2 平行的各截面上的应力时, 可简化为只受 σ_1 和 σ_3 作用的平面应力状态, 如图 5-8b 所示。对应于图 5-8b 应力状态的应力圆, 如图 5-8c 中的圆 A_1A_3 (由 σ_1 和 σ_3 决定), 该圆上各点坐标, 表示与 σ_2 平行的各斜截面上的应力值。

同理, 与 σ_1 平行的各斜截面上的应力, 由圆 A_2A_3 (由 σ_2 和 σ_3

图 5-8

决定)上各点的坐标来表示;与 σ_3 平行的各斜截面上的应力,由圆 A_1A_2 (由 σ_1 和 σ_2 画出)上各点坐标来表示。

可以证明,与 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 方向均不平行的任意斜截面上的应力,与三个圆所围成的面积中,某点 K 的坐标相对应。

由图 5-8c 看出,与 σ_1 平行的各截面中的最大切应力 $\tau_{23} = (\sigma_2 - \sigma_3)/2$,其方位与 σ_2 和 σ_3 均成 45° ;与 σ_3 平行的各截面中的最大应力 $\tau_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$,其方位与 σ_1 和 σ_2 均成 45° ;与 σ_2 平行的各截面中的最大切应力 $\tau_{31} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$,其方位与 σ_1 和 σ_3 均成 45° 。比较上述三个切应力可知,单元体内的最大切应力

$$\tau_{\max} = \tau_{31} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (5-5)$$

单元体内的最大、最小正应力分别为

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 \quad \sigma_{\min} = \sigma_3$$

由上述分析可知, σ_{\max} 、 σ_{\max} 、 σ_{\min} 均发生在与 σ_2 平行的截面内。

若 $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$, $\sigma_3 = 0$, 如图 5-9a 所示,即平面应力状态,其应力圆如图 5-9b 所示,则 $\tau_{\max} = \sigma_1/2$,它的作用面与 σ_2 平行,作用面的外法线与 σ_1 成 45° ;如图 5-9c 所示。

若 $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, 或 $\sigma_3 < 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, 即单向应力状态,则 $\tau_{\max} = \sigma_1/2$, 或 $\tau_{\max} = |\sigma_3|/2$, 其方位与 σ_1 , 或 σ_3 成 45° 。

图 5-9

例 5-5 求例 5-4 所示单元体的最大切应力。

解: 将例 5-4 求得的 σ_1 和 σ_3 值代入式(5-5)得

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

上式在组合变形强度计算中很有用, 应记住。

例 5-6 如图 5-10a 所示圆筒形薄壁容器, 其内径为 D , 壁厚为 t , 且 $t \ll D$, 承受内压强 p 的作用。试求该筒外表面上点 M 处的最大正应力和最大切应力。

图 5-10

解: 由于内压强 p 的作用, 在圆筒横截面上引起正应力 σ_x , 如图 5-10b 所示; 在纵截面上引起正应力 σ_y , 如图 5-10c 所示。若用一对横截面和一对过筒轴线的纵截面, 在圆筒 M 点处截取单元体, 则单元体上、下面上作用着正应力 σ_x , 左、右面上作用着正应力 σ_y 。

,如图 5-10a 所示。

用横截面截取圆筒右部分为研究对象(图5-10b),由平衡条件

$$X = 0, \quad (Dt) - p \frac{D^2}{4} = 0$$

求得
$$= \frac{pD}{4t}$$

在长度为 l 的一段圆筒上,用纵截面截取圆筒上半部分(包括内压力 p)为研究对象,由平衡条件

$$Y = 0, \quad 2lt - pDl = 0$$

求得
$$= \frac{pD}{2t}$$

因圆筒外表面上无应力,故单元体的三个主应力为 $\sigma_1 = \frac{pD}{2t}$, $\sigma_2 = \frac{pD}{4t}$, $\sigma_3 = 0$ 。因此,圆筒外表面上一点的最大正应力和最大切应力分别为

$$\sigma_{\max} = \frac{pD}{2t} \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{pD}{4t}$$

§ 5-4 三向应力状态下应力与应变的关系应变比能

广义胡克定律 设三向应力状态主单元体,各主平面上分别作用有主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 ,如图 5-11 所示。单元体沿三个主应力方向所产生的线应变分别为 ϵ_1 、 ϵ_2 、 ϵ_3 ,并称为主应变。根据单向拉伸时的胡克定律,在 σ_1 单独作用下,单元体在 σ_1 方向引起的线应变为 σ_1/E ,在 σ_2 和 σ_3 单独作用下,在 σ_1 方向引起的线应变分别为 $-\sigma_2/E$ 和 $-\sigma_3/E$ 。在 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 共同作用下,单元体在 σ_1 方向的线应变为

图 5-11

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\sigma_3}{E}$$

用同样的方法可求得 ϵ_2 、 ϵ_3 方向的线应变,最后得到

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \epsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]\end{aligned}\quad (5-6)$$

式(5-6)称为广义胡克定律。式中的主应力以拉应力为正,压应力为负;计算所得应变为正表示为伸长应变,反之为缩短应变。显然, ϵ_1 是最大线应变。

体积应变 设主单元体各边长分别为 a 、 b 、 c , 其体积 $V_0 = abc$ 。在主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 作用下,变形后的各边长分别为

$$\begin{aligned}a + \Delta a &= a(1 + \epsilon_1) \\ b + \Delta b &= b(1 + \epsilon_2) \\ c + \Delta c &= c(1 + \epsilon_3)\end{aligned}$$

其体积为

$$V_1 = abc(1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)(1 + \epsilon_3)$$

展开上式,并略去高阶微量 $\epsilon_1 \epsilon_2$, $\epsilon_2 \epsilon_3$, 得

$$V_1 = abc(1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)$$

单位体积的改变量,即体积应变为

$$= \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \quad (5-7)$$

将式(5-6)代入上式,得

$$= \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (5-8)$$

由式(5-8)可知,体积应变仅与三个主应力之和有关,而与各主应力之间的比值无关。若将三个主应力的平均值,即 $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ 作为三个主应力作用在单元体上,则其体积应变与 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 三个不相等的主应力作用下的体积应变相等。若三个主应力之和为零,则体积应变等于零。例如,在纯切应力状态下, $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$, 因其三个主应力之和为零,故纯切应力状态的体积应变为零。

应变比能 如图 5-12 所示,设有一等直杆受到从零缓慢增加

的拉力作用。在某时刻的拉力为 F_1 ，伸长量为 Δl_1 ，当拉力增加微量 dF 时，则杆的伸长增加微量 $d(\Delta l)$ 。在这个过程中，拉力 F 作的功 dW 等于拉力 F 与相应的位移 $d(\Delta l)$ 的乘积，即 $dW = F d(\Delta l)$ 。在图 5-13 所示拉伸图中， dW 之值就是高度为 F 宽度为 $d(\Delta l)$ 的矩形面积。

图 5-12

图 5-13

从直杆开始受拉伸到伸长 Δl 的过程中，拉力 F 所作的功为

$$W = \int_0^{\Delta l} F d(\Delta l)$$

显然，积分相当于拉伸图的面积。在弹性范围内，拉伸图的面积是一个三角形，于是外力 F 的功为

$$W = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l$$

杆在外力作用下发生弹性变形时，外力对杆件作了功，同时在杆内部积蓄了能量，这种能量称为变形能，或弹性应变能，用 U 表示。若不计其他能量损失，储存在受力杆件内的弹性应变能 U ，在数值上等于外力所作的功 W ，即

$$U = W = \frac{1}{2} F \Delta l$$

设有一边长为 dx 、 dy 、 dz 的单向应力状态单元体，其应力从零缓慢增加到最终值 σ ，沿应力 σ 方向的线应变为 ϵ ，如图 5-14 所示，则该单元体的应变能为

$$U= W= \frac{1}{2}(\text{ dydz})(\text{ dx})= \frac{1}{2}\text{dx dy dz} \cdot$$

单元体内单位体积内的应变能 u , 称为应变比能, 其值为

$$u= \frac{U}{V}= \frac{\text{dx dy dz} /2}{\text{dx dy dz}}= \frac{1}{2}$$

在三向应力状态下, 如图 5-15a 所示。图 5-14

设单元体在三个主应力按同一比例同时由零增加到最终值 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 , 则相应的三个主应变也按比例增加至 ϵ_1 、 ϵ_2 、 ϵ_3 。单元体的应变比能为

$$u= \frac{1}{2} \sigma_1 \epsilon_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 \epsilon_2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \epsilon_3$$

式中的主应变是在三个主应力共同作用下产生的。将广义胡克定律式(5-6)代入上式, 得到三向应力状态下应变比能为

$$u= \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)] \quad (5-9)$$

三向应力状态单元体, 在其主应力作用下; 一般同时发生体积改变和形状改变。因此, 可以认为应变比能由两部分组成: 即由体积改变而储存的应变比能, 称为体积改变比能, 用 u_v 表示; 由形状改变而储存的应变比能, 称为形状改变比能, 或称为畸形比能, 用 u_d 表示。这两部比能之和等于总的比能, 即

$$u= u_v + u_d$$

设图 5-15a 所示单元体作用着三个互不相等的主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 ;

图 5-15

单元体应力状态可以表示为图 5-15b、c 两组应力量的叠加。图

5-15b 所示单元体, 在数值相等的平均应力 σ_m 作用下, 三个方向的线应变相等, 变形后的单元体形状必然与原来形状相似, 即只有体积改变而无形状改变。图 5-15c 所示单元体, 在 $(\sigma_1 - \sigma_m)$ 、 $(\sigma_2 - \sigma_m)$ 、 $(\sigma_3 - \sigma_m)$ 三个不相等的主应力作用下, 只有形状改变而无体积改变, 因为这三个主应力之和为零, 体积应变为零。

为求体积改变比能, 只需在式(5-9)中将各主应力都换成平均应力 σ_m 即可求得

$$u_v = \frac{1}{2E} [3\sigma_m^2 - 2(3\sigma_m^2)] = \frac{1-2}{2E} 3\sigma_m^2$$

或改写为

$$u_v = \frac{1-2}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

而形状改变比能为

$$u_d = u - u_v$$

将式(5-9)和 u_v 的表达式代入上式, 得

$$u_d = \frac{1+}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (5-10)$$

这就是形状改变比能的表达式。它对建立复杂应力状态下的强度理论有重要意义。

§ 5-5 强度理论简介

在拉伸时, 杆内各点均为单向应力状态, 其强度条件为

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad []$$

式中 $[] = \sigma_u / n$, 极限应力 σ_u 由拉伸试验测得。这表明, 在单向应力状态下, 杆件的强度条件是直接利用试验结果建立的。

在工程实际中, 许多构件的危险点处于复杂应力状态, 三个主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 按不同的比例组合, 可有无穷多的组合情况。如果仍然直接用试验的方法建立其强度条件, 那么因试验技术上的困难, 往往难以实现, 甚至不可能。为此, 人们根据对材料破坏现象的分

析, 提出一些假说, 认为材料的破坏是由某个因素所致, 并且利用单向应力状态的试验结果, 来建立复杂应力状态下的强度条件。这些假说称为强度理论。它们正确与否, 必须通过试验和生产实践的检验。

实验和实践表明, 材料破坏的形式主要有塑性屈服和脆性断裂两种。塑性屈服是材料由于出现屈服现象或发生显著塑性变形而产生的破坏。例如低碳钢拉伸时, 出现屈服现象, 此时晶格沿最大切应力平面发生滑移。脆性断裂是指不出现显著塑性变形的破坏。例如, 灰铸铁拉伸时, 沿拉应力最大的横截面断裂, 而无明显的塑性变形。

因材料的破坏形式有两种, 所以强度理论相应地分成两类。一类是用于材料发生脆性断裂破坏的最大拉应力理论和最大拉应变理论; 另一类是用于材料屈服破坏的最大切应力理论和形状改变比能理论。

最大拉应力理论——第一强度理论

这个理论认为, 引起材料脆性断裂破坏的主要因素是最大拉应力, 即不论材料处于何种应力状态, 只要危险点处的最大拉应力 σ_1 达到材料轴向拉伸时的极限应力 $\sigma_u = \sigma_b$, 材料就发生脆性断裂破坏。其破坏条件为

$$\sigma_1 = \sigma_b$$

其强度条件为

$$\sigma_1 \leq [\sigma] \quad [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n} \tag{5-11}$$

试验表明, 这一理论可以很好地解释铸铁等脆性材料在轴向拉伸和扭转时的破坏现象。但这一理论没有考虑其他两个主应力的影响, 而且对于无拉应力的应力状态也无法应用。

最大拉应变理论——第二强度理论

这个理论认为, 引起材料脆性断裂破坏的主要因素是最大拉应变, 即不论材料处于何种应力状态, 只要危险点处的最大拉应变 ϵ_1 达到材料轴向拉伸的极限应变值 ϵ_u , 材料就发生脆性断裂破坏。

其破坏条件为

$$\epsilon_1 = \epsilon_u$$

在三向应力状态下,最大拉应变为

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu (\sigma_2 + \sigma_3)]$$

此外,认为脆性材料在轴向拉伸时,直到发生断裂,材料的拉应变的极限值 ϵ_u 仍可按胡克定律计算,即

$$\epsilon_u = \frac{\sigma_b}{E}$$

这样,可得到用应力表示的破坏条件为

$$\frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu (\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{\sigma_b}{E}$$

即

$$\sigma_1 - \nu (\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_b$$

相应的强度条件为

$$\sigma_1 - \nu (\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] \quad [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n} \quad (5-12)$$

这个理论可以很好地解释石料或混凝土材料,在压缩时沿纵向面破坏的现象。按这个理论,铸铁在二向拉伸时应比单向拉伸更安全,但试验结果并非如此。

最大切应力理论——第三强度理论

这个理论认为,引起材料塑性屈服的主要因素是最大切应力,即不论材料处于何种应力状态,只要危险点的最大切应力 τ_{\max} 达到材料轴向拉伸时的极限切应力 τ_u ,材料就发生塑性屈服破坏。其破坏条件为

$$\tau_{\max} = \tau_u$$

在复杂应力状态下, $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$; 在轴向拉伸时,横截面上的拉应力达到极限应力 σ_s 时,与轴线成 45° 角之斜截面上的极限切应力 $\tau_u = \sigma_s/2$ 。于是,破坏条件可改写为

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$$

相应的强度条件为

$$\sigma_1 - \sigma_3 \quad [\sigma] \quad [\sigma] = \frac{\sigma_s}{n} \quad (5-13)$$

这一理论能较满意地解释塑性材料出现塑性变形现象。对于发生塑性屈服的构件, 根据这个理论计算的结果与试验较为符合, 但偏于安全, 因其忽略了中间应力 σ_2 的影响。

形状改变比能理论——第四强度理论

这个理论认为, 形状改变比能是引起材料破坏的主要因素, 即不论材料处于何种应力状态, 只要危险点处内部积蓄的形状改变比能, 达到材料轴向拉伸时的极限形状改变比能 u_d^0 , 材料就发生塑性屈服破坏, 其破坏条件为 $u_d = u_d^0$

在复杂应力状态下, 形状改变比能为

$$u_d = \frac{1}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

在轴向拉伸时, 横截面上的应力达到极限应力 σ_s 时, 发生塑性屈服。设应力达到 σ_s 之前, 材料一直服从胡克定律, 则 $u_d^0 = (1 + \frac{1}{2}) (\frac{\sigma_s^2}{6E})$ 。于是, 破坏条件为

$$\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \sigma_s^2$$

相应的强度条件为

$$\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad [\sigma] \quad [\sigma] = \frac{\sigma_s^2}{n} \quad (5-14)$$

试验表明, 塑性材料在平面应力状态下, 这一理论比第三强度理论更符合试验结果。

上述四个强度理论的强度条件, 可以写成如下统一形式

$$\sigma_r \quad [\sigma] \quad (5-15)$$

式中 σ_{ri} 称为相当应力, 各强度理论的相当应力分别为

$$\sigma_{r1} = \sigma_1$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - (\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

一般来说,脆性材料,如铸铁、石料等,在通常情况下以脆性断裂的形式破坏,宜采用第一和第二强度理论。塑性材料,如低碳钢、铜、铝等,在通常情况下以屈服的形式破坏,宜采用第三、第四强度理论。但是,材料的破坏形式不仅与其性质有关,还与它们所处的应力状态有关。例如,在接近三向均匀压缩的应力状态下,不论是塑性材料还是脆性材料,都发生塑性屈服形式破坏,因此应采用第三、第四强度理论;而在接近三向均匀拉伸应力状态下,不论是塑性材料还是脆性材料,都发生脆性断裂形式破坏,这时应采用第一、第二强度理论。

在实际工作中,应查阅有关部门的规范,采用适当的强度理论来进行强度计算。

应用强度理论进行强度计算的步骤是:分析和计算构件危险点的应力;确定危险点的主应力;选用适当的强度理论,计算相当应力,建立强度条件。

例 5-7 试用第三、第四强度理论,建立例 5-6 薄壁圆筒的强度条件。

解:由例 5-6 可知, $\sigma_1 = \frac{pD}{2t}$, $\sigma_2 = \frac{pD}{4t}$, $\sigma_3 = 0$ 。将各主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 分别代入式(5-13)和式(5-14)得

$$\sigma_{r3} = \frac{pD}{2t} \quad []$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{3 p D}{4 t}} \quad []$$

这就是受内压薄壁圆筒的强度条件。

例 5-8 在圆轴扭转一章中,钢材的许用扭转切应力[]与它的许用拉应力[]之间有以下关系

$$[] = (0.5 \sim 0.6) []$$

试按第三、第四强度理论对此予以解释。

解:在纯切应力状态下,三个主应力分别为 $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$ 。将其代入第三强度理论得

$$\sigma_{r3} = \tau \quad []$$

与在纯切应力状态下的强度条件 $[\tau]$ 比较, 有

$$[\sigma] = 0.5[\tau]$$

若将三个主应力代入第四强度理论得

$$\sqrt{\frac{1}{3}} [\tau]$$

上式与 $[\tau]$ 比较, 有

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} = 0.577[\sigma]$$

因此, 钢材类等塑性材料的扭转许用切应力, 通常取为 $(0.5 \sim 0.6)[\sigma]$ 。

习 题

5-1 试用单元体表示圆截面杆外横截面外缘某一点的应力状态, 并算出单元体各面上的应力值。

5-2 试用单元体表示图示梁 $m-m$ 截面上 a 、 b 、 c 、 d 、 e 各点的应力状态, 并算出单元体各面上的应力值。

题 5-1 图

题 5-2 图

5-3 用解析法和图解法计算图示各单元体指定斜截面上的应力, 并在单元上画出它们的方位和指向。图中应力单位为 MPa。

5-4 试用解析法或图解法求图示单元体的主应力的方向和大小, 并画出主单元体图。图中应力单位为 MPa。

5-5 试求图示单元体的主应力和最大切应力。图中应力单位为 MPa。

5-6 直径为 d 的圆轴两端承受转矩 M_e 的作用, 由试验测得

轴表面上与轴线成 45° 方向的线应变为 ϵ_{45} ，如图所示。试求 M_e 之数值。设材料的弹性常数 E ，已知。

5-7 在图示矩形截面梁中性层上某点 K 处，沿与轴线成 45° 方向贴有应变片，并测出正应变 $\epsilon_{45} = -2.6 \times 10^{-5}$ ，设梁材料的弹性常数 $E = 200\text{GPa}$ ， $\nu = 0.3$ 。试求梁的载荷 F 。

5-8 某构件中的三个点

题 5-4 图

题 5-5 图

的应力状态如图所示。试按第一、第三强度理论判断哪一点是危险

题 5-3 图

点。图中应力单位为 MPa。

5-9 薄壁圆柱形容器内径 $D = 1\text{m}$, 内压 $p = 2\text{MPa}$ 。试用第三和第四强度理论计算其壁厚 t 。

题 5-6 图

题 5-7 图

5-10 一中空薄球壳, 内径为 D , 内部压强为 p , 其材料的许用应力为 $[\sigma]$, 试按第三和第四强度理论设计球壳的厚度。

5-11 一铸铁圆筒形容器, 其内径 $d = 200\text{mm}$, 壁厚 $t = 20\text{mm}$, 内部压强 $p = 4\text{MPa}$ 。在容器两端的轴向拉力 $F = 240\text{kN}$ 。铸铁许用压应

题 5-8 图

题 5-11 图

力 $[\sigma] = 120\text{MPa}$, 许用拉应力 $[\tau] = 30\text{MPa}$, $\mu = 0.25$ 。试用第二强度理论校核其强度。

5-12 直径 $d = 40\text{mm}$ 的圆截面杆, 承受轴向拉力 $F = 126\text{kN}$, 同时又承受扭矩 $T = 0.64\text{kN} \cdot \text{m}$ 。材料的许用应力 $[\sigma] = 160\text{MPa}$ 。试按第三和第四强度理论校核其强度。

第六章 组合变形杆件的强度计算

§ 6-1 概 述

工程实际中,许多杆件在载荷作用下同时发生几种基本变形,如图 6-1 所示的齿轮轴同时产生扭转和弯曲变形,小型压力机的立柱同时产生拉伸和弯曲变形等。凡是同时产生两种或两种以上基本变形的情况,统称为组合变形。

图 6-1

在弹性小变形情况下,可用叠加方法计算组合变形杆件的内力、应力和变形,即将杆件所承受的载荷适当分解或简化为几组载荷,每组载荷使杆件只产生一种基本变形。这样就可以分别计算每种变形下的内力、应力和变形,应用叠加法,找出危险截面上的危险点;根据危险点的应力状态和材料的性质,选用适当的强度理论来建立强度条件。

§ 6-2 拉(压)弯组合变形

图 6-2a 所示矩形截面梁,在自由端作用有集中力 F ,该力位于梁的纵向对称面内,且与梁轴线成夹角 α 。现在研究梁的强度问题。

将力 F 沿水平和铅垂方向分解, 分力 $F_1 = F \cos \alpha$, 使杆件产生拉伸变形; 另一分力 $F_2 = F \sin \alpha$, 使杆件产生弯曲变形, 如图 6-2b 所示。每种变形的内力图, 即轴力图和弯矩图如图 6-2c 所示。由内力图可知, 因固定端处截面的弯矩最大, 故该截面是危险截面, 其内力值分别为

图 6-2

$$N = F_1 = F \cos \alpha$$

$$M = F_2 l = F \sin \alpha \cdot l$$

危险截面上的应力分布情况, 如图 6-2d 所示。由拉伸引起的正应力 $\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F \cos \alpha}{A}$; 由弯曲产生的最大正应力 $\sigma = \pm \frac{M y_{\max}}{W_z} = \pm \frac{F l \sin \alpha}{W_z}$ 。由于 σ 和 σ 均平行于 x 轴, 故危险点的应力为

$$\sigma = \sigma + \sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M y_{\max}}{W_z}$$

或
$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M y_{\max}}{W_z}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} - \frac{M y_{\max}}{W_z}$$

式中脚码 t、c 分别表示拉、压。

因危险点是单向应力状态, 故其强度条件为

$$\begin{aligned} \sigma_{t\max} &= \frac{N}{A} + \frac{M y_{\max}}{W_z} \quad [\sigma_t] \\ \sigma_{c\max} &= \frac{N}{A} - \frac{M y_{\max}}{W_z} \quad [\sigma_c] \end{aligned} \quad (6-1)$$

当材料的抗拉与抗压性能相同时, 只校核应力值最大处即可。

对于压弯组合变形问题, 可用上述方法同样分析。

例 6-1 图 6-3a 所示简易起重设备, 最大起重量 $F = 40\text{kN}$ (包括行走小车重量), 横梁 AB 为 18 工字钢, 许用应力 $[\sigma] = 140\text{MPa}$ 。试校核梁 AB 的强度。

解: 取 AB 梁为研究对象, 其受力图如图 6-3b 所示。根据梁的平衡条件求得支反力

图 6-3

$$F_{Ax} = \frac{3F}{4}x \quad F_{Ay} = \frac{F}{4}(1-x) \quad F_s = \frac{2Fx}{4}$$

其内力图如图 6-3c、d 所示。轴力为

$$N(x) = F_{Ax} = \frac{3F}{4}x$$

其弯矩为

$$M(x) = F_{Ay}x = \frac{Fx}{4}(1-x)$$

由于吊重是移动载荷,故需分析此载荷在什么位置时,使梁处于危险工作状态。考虑到弯矩是梁的主要内力,认为当梁的弯矩达到最大时的位置即为梁的危险工作状态。为此,将弯矩的表达式对 x 求导一次,并令其等于零,解得 $x = l/2$ 时,弯矩最大,其值为

$$M = \frac{Fl}{4} = \frac{40 \times 2}{4} = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

轴力为

$$N = \frac{3}{2}F = \frac{3}{2} \times 40 = 34.6 \text{ kN}$$

由型钢表查得 18 工字钢 $W_z = 185 \text{ cm}^3$, $A = 30.6 \text{ cm}^2$ 。梁的最大压应力为

$$\begin{aligned} &= \frac{N}{A} + \frac{M}{W_z} = \frac{34.6 \times 10^3}{30.6 \times 10^2} + \frac{20 \times 10^6}{185 \times 10^3} = 11.3 + 108.1 \\ &= 119.4 \text{ MPa} \end{aligned}$$

可见,梁 AB 符合强度要求。

例 6-2 试计算图 6-4a 所示钩头螺栓的最大拉应力。已知螺栓内径为 d , 偏心距为 e 。

解: 用截面法求螺栓 AB 截面上的内力,其受力图如图 6-4b 所示。轴力 $N = F$ 使螺栓产生拉伸变形,弯矩 $M = Fe$ 使螺栓产生弯曲变形。

螺栓的最大拉应力发生在 AB 截面的 A 点处,其值为

图 6-4

$$\begin{aligned} &= \frac{M}{W_z} + \frac{N}{A} = \frac{32Fe}{d^3} + \\ &\frac{4F}{d^2} = \frac{4F}{d^2} \left(\frac{8e}{d} + 1 \right) \end{aligned}$$

由于弯曲变形产生的正应力 σ_f 与由于拉伸变形产生的正应力 σ_t 之比为

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_t} = \frac{32Fe/d^3}{4F/d^2} = 8 \frac{e}{d}$$

当 $e = d$ 时, 则比值为 8。这表明弯曲变形产生的正应力是钩头螺栓强度问题的主要因素, 在工程中尽量减小偏心距, 或尽量不采用这种结构。

例 6-3 有一短圆柱直径为 D , 承受偏心压力 F , 压力 F 的作用点到圆心 O 的距离为 e , 如图 6-5a 所示。试求柱内最大拉应力。

解: 将力 F 平移至柱中心, 如图 6-5b 所示。轴向压力 F 使柱产生压缩变形, 附加力偶使柱产生弯曲变形。两种变形产生的正应力叠加后的应力分布情况, 如图 6-5c 所示。最大拉应力为

图 6-5

$$\sigma = -\frac{F}{A} + \frac{Fe}{W_z}$$

若 $\sigma \geq \frac{F}{A} - \frac{Fe}{W_z}$, 则柱内无拉应力, 即

$$\frac{Fe}{W_z} \geq \frac{F}{A}$$

或改写为 $e \geq \frac{W_z}{A}$, 令 $\frac{W_z}{A} = e_r$, 则得

$$e \geq e_r = \frac{W_z}{A} = \frac{D^3/32}{D^2/4} = \frac{D}{8}$$

e_r 称为极限偏心距, 圆柱的极限偏心距 $e_r = \frac{D}{8}$ 。由此可知, 当 $e = \frac{D}{8}$ 时, 柱内无拉应力。这表明, 偏心压力 F 的作用点, 在以柱圆心为圆心, 以 $e_r = D/8$ 为半径的圆内时, 柱内无拉应力。由 e_r 所确定的范围, 称为截面核心。圆柱的截面核心为直径等于 $D/4$ 的圆面积。

确定截面核心具有实际意义。因脆性材料抗拉性能差, 故设计这类材料的偏心压杆时, 希望不产生拉应力, 只要偏心压力 F 作用在截面核心之内, 即可做到横截面上无拉应力。

§ 6-3 弯扭组合变形

图 6-6a 所示圆截面杆, 左端固定, 右端自由。在自由端横截面

图 6-6

内作用一个力偶矩为 M_e 的力偶, 以及一个与轴线垂直的力 F 。力偶使杆产生扭转变形, 力 F 使杆产生弯曲变形。通常, 由于切力对杆的强度影响很小, 故略去不计。这样, 杆的内力图如图 6-6b 所示。

由内力图可以看出, 固定端是杆的危险截面, 该截面上的内力值为

$$\text{弯矩 } M = Fl \qquad \text{扭矩 } T = M_e$$

在危险截面上, 与弯矩 M 对应的弯曲正应力分布情况如图 6-6c 所示, 在 K_1 、 K_2 两点达到最大值, 其值为

$$= \frac{M}{W} \qquad (a)$$

与扭矩 T 对应的扭转切应力分布情况如图 6-6c 所示, 在横截

面边缘各点达到最大值, 其值为

$$= \frac{T}{W_t} \quad (b)$$

由危险截面上的应力分布情况可知, K_1 、 K_2 为危险点, 且均为平面应力状态, 如图 6-6d 所示。对于抗拉和抗压强度相等的材料, 只需考虑其中一个危险点即可。以 K_1 为例, 其主应力(参阅例 5-4) 为

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \sigma_z = 0$$

因轴类零件多用塑性材料制成, 故常采用第三或第四强度理论进行强度计算。将主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 代入第三或第四强度理论的强度条件, 得到图 6-6d 所示应力状态的强度条件分别为

$$\begin{aligned} r_3 &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad [] \\ r_4 &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad [] \end{aligned} \quad (6-2)$$

对于弯扭组合变形的圆轴, 将式(a)和式(b)代入式(6-2), 并注意到 $W_t = 2W$, 得到

$$\begin{aligned} r_3 &= \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} \quad [] \\ r_4 &= \frac{\sqrt{M^2 + 0.75T^2}}{W} \quad [] \end{aligned} \quad (6-3)$$

式中 M 和 T 分别为同一危险截面上的弯矩和扭矩。

对于扭转与双向弯曲组合变形圆轴, 在应用式(6-3)时, 式中的弯矩 M 为合成弯矩, 即

$$M = \sqrt{M_H^2 + M_V^2}$$

式中 M_H 和 M_V 分别为同一危险截面上, 在水平面内的弯矩和在铅垂面内的弯矩。

对于拉伸(压缩)、扭转、弯曲组合变形的杆件, 应将危险截面上危险点处的拉伸(压缩)变形和弯曲变形产生的正应力先叠加起来, 得到总的正应力, 再将该正应力和危险点处的扭转切应力代入式(6-2), 进行强度计算。

例 6-4 图 6-7a 所示轴传递转矩 $M_e = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 皮带轮直径 $D = 300 \text{ mm}$, 轴承间的距离 $l = 200 \text{ mm}$ 。轴材料的许用应力 $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$ 。试按第三强度理论设计轴的直径 d , 设皮带紧边拉力 F_{S1} 是松边拉力 F_{S2} 的二倍。

解: 将皮带拉力 F_{S1} 和 F_{S2} 向轮心简化, 得到横向力 F 和附加力偶矩 M_{e1} , 其值分别为

$$F = F_{S1} + F_{S2} = 3F_{S2}$$

$$M_{e1} = (F_{S1} - F_{S2}) \frac{D}{2} = F_{S2} \frac{D}{2}$$

由平衡条件 $\sum m_x = 0$, 得

$$M_e = F_{S2} \frac{D}{2}$$

图 6-7

从上式解得
$$F_{S2} = \frac{2M_e}{D} = \frac{2 \times 1 \times 10^6}{300} = \frac{20}{3} \text{ kN}$$

从而得到
$$F = 3F_{S2} = 3 \times \frac{20}{3} = 20 \text{ kN}$$

根据轴的受力简图 6-7b, 分别画出轴的扭矩图和弯矩图, 如图 6-7c 所示。由内力图可以判定, 截面 c 为危险截面。

根据题意要求, 运用第三强度理论的强度条件, 并注意到 $W = d^3 / 32$, 求得轴的直径为

$$\begin{aligned} d^3 \frac{32}{[\sigma]} \sqrt{M^2 + T^2} &= \frac{32 \times \sqrt{(1 \times 10^6)^2 + (1 \times 10^6)^2}}{160} \\ &= 44.8 \text{ mm} \end{aligned}$$

取轴的直径 $d = 45 \text{ mm}$ 。

例 6-5 图 6-8a 所示齿轮轴, 齿轮 1 和 2 的分度圆直径分别

为 $D_1= 50\text{mm}$ 和 $D_2= 130\text{mm}$ 。齿轮 I 的切向力 $F_{1t}= 3.83\text{kN}$, 径向力 $F_{1r}= 1.393\text{kN}$; 齿轮 2 的切向力 $F_{2t}= 1.473\text{kN}$, 径向力 $F_{2r}= 0.536\text{kN}$ 。轴直径 $d= 24\text{mm}$, 轴材料的许用应力 $[\sigma]= 140\text{MPa}$ 。试按第四强度理论校核轴的强度。

图 6-8

解: 将两齿轮的切向力和径向力分别向其轮心简化, 得到轴的受力简图, 如图 6-8b 所示。其中

$$M_{e1}= F_{1t} \frac{D_1}{2}= 3.83 \times 10^3 \times \frac{50 \times 10^{-3}}{2}= 95.7\text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_{e2}= F_{2t} \frac{D_2}{2}= 1.473 \times 10^3 \times \frac{130 \times 10^{-3}}{2}= 95.7\text{N} \cdot \text{m}$$

力偶矩 M_{e1} 和 M_{e2} 使轴产生扭转变形; 力 F_{1t} 和 F_{2t} 使轴在铅垂面内产生弯曲变形; 力 F_{1r} 和 F_{2r} 使轴在水平面内产生弯曲变形。分别画出轴在各组外力作用下的内力图, 即扭矩图、铅垂面弯矩

(M_V)图和水平面弯矩(M_H)图,如图 6-8c 所示。

可以证明,合成弯矩的最大值可能在轮 1 或轮 2 处。为此,分别计算轮 1 和轮 2 处的合成弯矩 M_1 和 M_2 。

$$M_1 = \sqrt{152^2 + 37.5^2} = 156.6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_2 = \sqrt{113^2 + 5.35^2} = 113.1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

由此可见,轮 1 处是危险截面,其最大内力分别为

$$M = M_1 = 156.6 \text{ N} \cdot \text{m} \quad T = 95.7 \text{ N} \cdot \text{m}$$

将 $M = 156.6 \text{ N} \cdot \text{m}$ 和 $T = 95.7 \text{ N} \cdot \text{m}$ 代入第四强度理论的强度条件得

$$\begin{aligned} \sigma_{r4} &= \frac{\sqrt{M^2 + 0.75T^2}}{W} = \frac{32}{\pi \times 24^3} \sqrt{(156.6)^2 + 0.75(95.7)^2} \times 10^3 \\ &= 131 \text{ MPa} < [\sigma] = 140 \text{ MPa} \end{aligned}$$

可见,该轴符合强度要求

例 6-6 试校核图 6-9a 所示斜齿轮轴的强度。已知支座 A 为径向轴承,支座 B 为径向止推轴承。作用于齿轮上的轴向力 $F_a = 0.34 \text{ kN}$, 径向力 $F_r = 0.37 \text{ kN}$, 切向力 $F_t = 1.96 \text{ kN}$, 斜齿轮分度圆直径 $D = 200 \text{ mm}$ 。轮 C 处作用有外力偶,其力偶矩 $M_{e1} = 0.196 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。轴直径 $d = 30 \text{ mm}$ 。轴材料的许用应力 $[\sigma] = 140 \text{ MPa}$

解:将斜齿轮上各力向轮心简化,得到轴的计算简图,如图 6-9b 所示。其中

$$M_{e2} = F_t \frac{D}{2} = 1.96 \times 10^3 \times \frac{200 \times 10^{-3}}{2} = 196 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_a = F_a \frac{D}{2} = 0.34 \times 10^3 \times \frac{200 \times 10^{-3}}{2} = 34 \text{ N} \cdot \text{m}$$

由受力简图可见,该轴为拉伸、扭转与双向弯曲的组合变形。

画出由于 T_{e1} 和 T_{e2} 作用时的扭矩图;由于 F_r 和 T_a 作用时的铅垂面的弯矩图;由于 F_t 作用时的水平面的弯矩图以及在 F_a 作用下的轴力图。各内力图如图 6-9c 所示。由内力图可知,支座 B 处为危险截面。

危险点在危险截面的外缘处。扭转、拉伸、双向弯曲时,危险点处的应力分别为

图 6-9

$$= \frac{T}{W_t} = \frac{196 \times 10^3 \times 16}{\times 30^3} = 37 \text{MPa}$$

$$= \frac{N}{A} = \frac{4 \times 340}{\times 30^2} = 0.48 \text{MPa}$$

$$= \frac{\sqrt{M_v^2 + M_H^2}}{W} = \frac{32 \sqrt{(78.4 \times 10^3)^2 + (235.2 \times 10^3)^2}}{\times 30^3}$$

$$= 93.6 \text{MPa}$$

危险点的应力情况为平面应力状态, 如图 6-9d 所示, 其中

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.48 + 93.6 = 94.08 \text{MPa}, \sigma_3 = 37 \text{MPa}。$$

按第三强度理论, 其相当应力

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma_1^2 + 4\sigma_3^2} = \sqrt{(94.08)^2 + 4 \times (37)^2} = 119.7 \text{MPa}$$

按第四强度理论, 其相当应力

$$\sigma_4 = \sqrt{94.08^2 + 3 \times 37^2} = 113.8 \text{ MPa}$$

可见, 轴的强度符合要求。

若忽略 时, 即忽略轴力 N 的作用, 则该题为扭转与双向弯曲组合变形。这样, 按第三和第四强度理论的相当应力分别为

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= \frac{\sqrt{M_V^2 + M_H^2 + T^2}}{W} \\ &= \frac{32 \sqrt{(78.4 \times 10^3)^2 + (235.2 \times 10^3)^2 + (196 \times 10^3)^2}}{\times 30^3} \\ &= 119.2 \text{ MPa} \\ \sigma_4 &= \frac{\sqrt{M_V^2 + M_M^2 + 0.75T^2}}{W} \\ &= \frac{\sqrt{(78.4 \times 10^3)^2 + (235.2 \times 10^3)^2 + 0.75 \times (196 \times 10^3)^2} \times 32}{\times 30^3} \\ &= 113.4 \text{ MPa} \end{aligned}$$

由上述两种计算结果可以看出, 忽略轴力 N (忽略拉伸变形) 的作用, 引起的误差不大。所以在工程计算中, 常忽略拉伸(压缩)变形, 使之成为扭转与双向弯曲组合变形。这样, 就可以应用式(6-3)进行强度计算。

习 题

6-1 图示杆承受拉力 $F = 12 \text{ kN}$, 槽深 $a = 5 \text{ mm}$ 。试求杆内的最大应力。

6-2 夹紧器用厚度 $b = 10 \text{ mm}$ 的钢板制造, 最大夹紧力 $F = 2 \text{ kN}$, 偏心距 $e = 60 \text{ mm}$, 试求截面高度 h , 已知钢板的许用应力 $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$ 。

题 6-1 图

6-3 简易起重架的最大起重量 $F = 40 \text{ kN}$, 其横梁由两根 $N_2 18$ 的槽钢组成, 材料许用应力 $[\sigma] = 120 \text{ MPa}$ 。试校核横梁的强度。

6-4 图(a)与图(b)两杆材料和尺寸相同, $b = 20 \text{ mm}$, $h =$

题 6-2 图

题 6-3 图

40mm, $F = 2\text{kN}$ 。许用应力 $[\sigma] = 185\text{MPa}$ 。试校核两杆的强度。

题 6-4 图

6-5 空心圆柱高为 h , 内径为 d , 外径为 D , 有微小倾斜, 试问当在柱底不产生拉应力时, 允许轴线最大倾角为多少? (只考虑柱自重, 并认为自重作用在柱重心)

6-6 承受偏心拉伸的矩形截面杆, 用试验方法测得上、下两侧的纵向应变为 ϵ_a 和 ϵ_b , 材料的弹性模量为 E 。试求证偏心距 e 与 ϵ_a 、 ϵ_b 满足下列关系:

$$e = \frac{\epsilon_a - \epsilon_b}{\epsilon_a + \epsilon_b} \frac{h}{6}$$

6-7 试按第三强度理论设计曲拐直径。已

题 6-5 图 知材料的许用应力 $[\sigma] = 160\text{MPa}$, $F = 20\text{kN}$ 。

6-8 已知轴直径 $D = 10\text{mm}$, $M_e = FD/10$ 。(a)若材料为钢材, 许用应力 $[\sigma] = 160\text{MPa}$, 求许可载荷 F 值。(b)若改用铸铁, 许用拉应力 $[\sigma_t] = 30\text{MPa}$, 求许可载荷 F 值。(c)若拉力 F 改为压力 上述两结果有无变化?

6-9 齿轮轴如图所示。已知在齿轮 1 上有径向力 $F_{1r} =$

题 6-6 图

题 6-7 图

题 6-8 图

题 6-9 图

3.64kN, 切向力 $F_{1t} = 10\text{kN}$; 在齿轮 2 上有切向力 $F_{2t} = 5\text{kN}$, 径向力 $F_{2r} = 1.82\text{kN}$ 。若轴材料的许用应力 $[\sigma] = 100\text{MPa}$, 试按第四强度理论设计轴的直径 d 。

6-10 从图示轴左端传入转矩为 M_e , 斜齿轮的径向力 $F_r = 740\text{N}$, 切向力 $F_t = 1.9\text{kN}$, 轴向力 $F_a = 669\text{N}$ 。若轴材料许用应力 $[\sigma] = 160\text{MPa}$, 试按第四强度理论校核轴的强度。

6-11 图示轴传递功率 $P = 7\text{kW}$, 转速 $n = 200\text{r/min}$ 。右端皮带轮重量 $G = 1.8\text{kN}$ 。左端圆柱直齿轮的法向啮合力 F_n 与齿轮节圆切线的夹角 $\alpha = 20^\circ$ 。轴材料的许用应力 $[\sigma] = 80\text{MPa}$ 。试按第三强度理论设计轴的直径。若忽略皮带轮自重 Q , 轴的直径又为多

题 6-10 图

题 6-11 图

大?

6-12 图示皮带轮轴, 带轮 B 的重量 $G_B = 0.8\text{kN}$, 带轮 A 的

题 6-12 图

重量 $G_A = 1\text{kN}$ 。轴传递功率 $P = 7.5\text{kW}$, 轴转速 $n = 125\text{r/min}$ 。又知 $F_A = 2F_{tA}$, $F_{TB} = 2F_{tB}$ 。轴材料的许用应力 $[\sigma] = 60\text{MPa}$ 。试按第三强度理论设计轴的直径。

6-13 图示皮带轮轴上装有两个直径均为 $D = 600\text{mm}$ 的皮带轮 C 和 D。轴由轮 C 传来的功率 $P = 7.5\text{kW}$, 轴转速 $n = 100\text{r/min}$ 。若皮带松边拉力 $F_2 = 1.5\text{kN}$, 轴材料的许用应力 $[\sigma] = 80\text{MPa}$ 。试按第三强度理论设计轴的直径。

6-14 图示圆截面杆的直径 $d = 50\text{mm}$, 承受载荷 $F_1 = 500\text{N}$,

题 6-13 图

$F_2 = 15\text{kN}$, $M_e = 1.2\text{ kN} \cdot \text{m}$, 杆材料的许用应力 $[\sigma] = 160\text{MPa}$ 。试按第三强度理论校核杆的强度。

6-15 一圆轴同时承受弯矩和扭矩作用, 由此引起轴内的最大主应力 $\sigma_1 = 100\text{MPa}$, 而仅由弯矩引起的最大正

题 6-14 图

应力 $\sigma = 50\text{MPa}$ 。若轴的许用应力 $[\sigma] = 160\text{MPa}$, 试校核该轴的强度。

6-16 图示圆截面杆同时承受弯矩 M 和扭矩 T 的作用。现测

题 6-16 图

得杆表面 A 点沿轴线方向的正应变 $\epsilon_0 = 5.0 \times 10^{-4}$, B 点沿与杆轴线成 45° 方向的正应变 $\epsilon_{45} = -4.5 \times 10^{-4}$ 。已知圆杆直径 $d = 40\text{mm}$, $E = 200\text{GPa}$, $\nu = 0.25$, $[\sigma] = 160\text{MPa}$ 。试按第四强度理论校核杆的强度, 并计算出弯矩 M 和扭矩 T 。

第七章 冲击应力 交变应力

§ 7-1 冲击应力

前面各章讨论了杆件在静载荷作用下的强度和刚度问题。静载荷是指从零缓慢地增加到某一定值后保持不变,且杆内各质点不产生加速度,或加速度很小可以忽略不计的载荷。杆件在静载荷作用下产生的变形,称为静变形,用 Δ_{st} 表示;产生的应力称为静应力,用 σ_{st} 表示。相反,若载荷使杆件内各质点产生的加速度较显著,或者载荷随时间而变化,则这样的载荷称为动载荷。在动载荷作用下杆件产生的变形,称为动变形,用 Δ_d 表示;产生的应力称为动应力,用 σ_d 表示。例如,当重量为 W 的物体以很大的速度与静止杆件接触时,物体的速度在很短的时间内发生急剧变化,最后降为零,物体产生很大的负值加速度,从而使杆件受到很大的作用力,这种现象称为冲击。杆件所受的作用力称为冲击载荷。显然,冲击载荷是动载荷。杆件在冲击载荷作用下产生的动变形 Δ_d , 显然大于在物重 W 作用的静变形 Δ_{st} 。动变形 Δ_d 与其相应的静变形 Δ_{st} 的比值称为动荷因数,用 K_d 表示。它们三者之间的关系为

$$\Delta_d = K_d \Delta_{st}$$

在弹性范围内,应力、变形、载荷间成正比,故有

$$\sigma_d = K_d \sigma_{st}$$

$$W_d = K_d W_{st}$$

式中, W_d 为动载荷, W_{st} 为与其相应的静载荷。

在静载荷下杆件的应力和变形的计算,如前几章所述。若能求得动荷因数,则可求出动应力和动变形。因此,解决冲击问题的关

关键在于确定动荷因数。

由于冲击过程的时间很短,冲击物体的负值加速度很大,而且是迅速变化的量,其数值难以确定,故在工程中采用能量法来确定冲击时的动荷因数。为了简化计算,作如下假设:视冲击物为刚体;被冲击杆件的应力和应变仍服从胡克定律,并忽略杆件的质量;在冲击过程中,冲击物的机械能全部转化为杆件的变形能;冲击物与被冲击物接触后一起运动。

自由落体冲击 如图 7-1a 所示,设冲击物体 A 的重量为 W ,从高度 h 处自由下落;杆件的横截面积为 A ,弹性模量为 E ;冲击后杆件的最终变形值为 δ_d ,如图 7-1b 所示,杆件受到的冲击载荷最终值为 W_d 。

在冲击过程中,冲击物所减少的动能 T 和势能 V 应等于被冲击杆件内所储存的变形能 U ,即

$$T + V = U \quad (a)$$

物体 A 的动能变化为零,势能变化量为

图 7-1

$$V = W(h + \delta_d) \quad (b)$$

冲击时杆件服从胡克定律,动变形 δ_d 与动载荷 W_d 之间的关系为

$$\delta_d = \frac{W_d l}{EA}$$

考虑到上式,杆件储存的变形能为

$$U = \frac{1}{2} W_d \delta_d = \frac{EA \delta_d^2}{2l} \quad (c)$$

将式(b)和(c)代入式(a)得

$$W(\delta_d + h) = \frac{EA \delta_d^2}{2l}$$

移项并整理得到

$$\delta_d^2 - 2 \frac{Wl}{EA} \delta_d - 2h \frac{Wl}{EA} = 0$$

或
$$\frac{d^2}{dt^2} - 2 \frac{st}{d} - 2h_{st} = 0$$

式中 $st = Wl/EA$ 为以冲击物重量 W 作为静载荷作用在冲击点处, 沿着冲击方向杆件的静变形。

从上式解得

$$d = st \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2h}{st}} \right]$$

由于 $d > st$, 故式中根号前应取正号, 即

$$d = st \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{st}} \right] = K_d st$$

式中
$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{st}} \tag{7-1}$$

即为自由落体冲击时的动荷因数。

当物体 A 下落高度 $h = 0$, 即突加载荷时, 动荷因数 $K_d = 2$ 。

当物体 A 下落高度很大(例如 $2h/st = 100$) 时, 动荷因数可近似写成

$$K_d = \sqrt{\frac{2h}{st}} \tag{7-2}$$

水平冲击 如图 7-2 所示水平杆, 重量为 W 的重物以匀速度 v 冲击杆。冲击物只有动能的变化, 故有

$$\frac{1}{2} \frac{W}{g} v^2 = \frac{1}{2} W d \quad d = \frac{EA}{2l} d^2$$

经整理得到

图 7-2

$$d = v \sqrt{\frac{1}{st g}} \quad st = K_d st$$

式中
$$K_d = v \sqrt{\frac{1}{g st}} \tag{7-3}$$

即为水平冲击时的动荷因数。

应用上述各式计算动荷因数时, 应特别注意 st 的计算。 st 是指以冲击物的重量作为静载荷, 作用于杆件被冲击点处, 该点沿冲

击方向的静变形(位移)。

试验表明,材料在冲击载荷下的强度指标略高于静载下的强度指标。但对光滑杆件在冲击载荷下的强度计算中,通常仍取静载下的许用应力来建立强度条件,即

$$\sigma_d = K_d \sigma_{st} \quad []$$

或改写成

$$\sigma_{st} = \frac{[\sigma]}{K_d} \quad (7-4)$$

例 7-1 图 7-3a、b 所示两杆,杆长 $l = 0.3\text{m}$, $d = 40\text{mm}$, $h = 10\text{mm}$ 。 $W = 1\text{kN}$, $E = 200\text{GPa}$ 。计算两杆内的最大冲击应力,并比较其动荷因数。

解:两杆直径为 d 和 $2d$ 处的横截面积分别为

$$A_a = \frac{d^2}{4} = \frac{40^2}{4} =$$

$$1256\text{mm}^2$$

$$A_b = \frac{(2d)^2}{4} = \frac{(2 \times 40)^2}{4} = 5024\text{mm}^2$$

两杆内的最大静应力相等,其值为

图 7-3

$$\sigma_{st} = \frac{W}{A_a} = \frac{1 \times 10^3}{1256} = 0.796\text{MPa}$$

两杆的静变形分别为

$$\delta_{st \cdot a} = \frac{Wl}{EA_a} = \frac{1 \times 10^3 \times 0.3 \times 10^3}{200 \times 10^3 \times 1256} = 1.19 \times 10^{-3}\text{mm}$$

$$\begin{aligned} \delta_{st \cdot b} &= \frac{Wl/3}{EA_a} + 2 \frac{Wl/3}{EA_b} \\ &= \frac{1 \times 10^3 \times 0.3 \times 10^3}{3 \times 200 \times 10^3 \times 1256} + 2 \times \frac{1 \times 10^3 \times 0.3 \times 10^3}{3 \times 200 \times 10^3 \times 5024} \\ \delta_{st \cdot b} &= 0.597 \times 10^{-3}\text{mm} \end{aligned}$$

因 $2h \gg \delta_{st}$, 故可用式(7-2)计算动荷因数。两杆的动荷因数分别为

$$K_{d \cdot a} = \frac{2h}{s_{t \cdot a}} = \frac{2 \times 10}{1.19 \times 10^{-3}} = 129.6$$

$$K_{d \cdot b} = \frac{2h}{s_{t \cdot b}} = \frac{2 \times 10}{0.597 \times 10^{-3}} = 183$$

两杆内的最大冲击应力分别为

$$\sigma_{d \cdot a} = K_{d \cdot a} \sigma_{st} = 129.6 \times 0.796 = 103 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{d \cdot b} = K_{d \cdot b} \sigma_{st} = 183 \times 0.796 = 145.7 \text{ MPa}$$

求得的动应力值均小于杆材料的比例极限时, 计算才有效。

两杆动荷因数比值为

$$\frac{K_{d \cdot b}}{K_{d \cdot a}} = \frac{s_{t \cdot a}}{s_{t \cdot b}} = \frac{1.19 \times 10^{-3}}{0.597 \times 10^{-3}} = 1.41$$

例 7-2 如图 7-4 所示, 已知弹簧的刚度系数为 k (产生单位伸长量所需的力), 拉杆长度为 l , 弹性模量为 E , 杆横截面积为 A , 以及冲击物重量为 W 。若冲击物自由落体高度为 h , 且 $h \gg s_{st}$, 试求杆内的冲击应力。

解: 重物 W 以静荷方式作用于冲击点时, 其静变形(位移)为弹簧的静伸长量与杆的静伸长量之和, 即

$$s_{st} = \frac{W}{k} + \frac{Wl}{EA}$$

因 $h \gg s_{st}$, 故可按式(7-2)计算动荷因数, 即

$$K_d = \frac{2h}{\frac{W}{k} + \frac{Wl}{EA}}$$

杆的静应力 $\sigma_{st} = \frac{W}{A}$, 杆的冲击应力为

$$\sigma_d = K_d \frac{W}{A} = \frac{2h}{\frac{W}{k} + \frac{Wl}{EA}} \frac{W}{A}$$

图 7-4

若无弹簧时, 静变形减小, K_d 变大, 从而冲击应力也变大。无弹簧时, 杆的冲击应力为

$$\sigma_d = K_d \frac{W}{A} = \frac{\frac{2h}{Wl} \frac{W}{A}}{EA} = \frac{2WhE}{Al} = \frac{2WhE}{V}$$

式中 $V = Al$, 是杆的体积。由上式可见, 冲击应力与杆材料的弹性模量 E 、杆件体积 V 有关。 E 值越大, 冲击应力越大; 体积 V 越大, 冲击应力越小。

由以上所述可知, 欲提高杆件的抗冲击能力, 应降低杆件的刚度, 使 σ_{st} 增大, 从而使 K_d 减小。但应注意, 在使 σ_{st} 增大时, 应尽量避免增大静应力。在工程中经常采用安装缓冲装置的方法(主要是各种弹簧), 既可增大 σ_{st} , 又使静应力不增加。另外, 受冲击的杆件应设计成等截面(见例 7-1)。对于受冲击构件在选材上, 还应考虑其弹性模量 E 对冲击应力的影响。

§ 7-2 交变应力的概念

工程结构和机器设备中, 许多构件常常受到随时间作周期性变化的应力, 这种应力称为交变应力。例如, 图 7-5a 所示内燃机的连杆, 受到随时间交替变化的载荷作用, 杆内产生的应力也随时间交替变化, 其变化规律如图 7-5b 所示。又如图 7-6a 所示电机轴, 由于皮带拉力产生弯曲变形,

图 7-5

轴横截面上各点产生正应力。由于轴在转动, 故轴横截面各点处的应力随着轴的转动作周期性变化, 其变化规律如图 7-6b 所示。再如, 图 7-7a 所示简支梁, 在电机自重 G 和转子偏心所引起的惯性力 F_g 的共同作用下, 梁将在静平衡位置作强迫振动。在振动过程中, 梁横截面上各点的弯曲正应力也随时间作周期性变化, 其变化

规律如图 7-7b 所示。

交变应力变化重复一次的过程称为一个应力循环, 重复变化的次数称为循环次数。

构件在交变应力作用下产生的破坏称为疲劳破坏。实践表明, 构件的疲劳破坏与其在静应力作用下的破坏截然不同, 其特点是: 疲劳破坏具有突然性,

图 7-6

图 7-7

其最大应力比材料的强度极限低很多, 甚至低于屈服极限就发生破坏; 疲劳破坏呈脆性断裂, 即使是塑性材料, 断裂前也无明显的塑性变形; 破坏的断口处, 明显地存在着光滑区和粗糙区, 如图 7-8 所示; 构件内的应力越大, 破坏前的循环次数越少。

对于疲劳破坏的原因, 过去曾误认为是金属材料的结构发生变化所致, 称为疲劳。实际上, 构件在交变应力作用下, 材料的结构并无变化, 而是由于构件外形尺寸的突变以及材料不均匀、缺陷等

原因,在构件内某些点处形成应力集中,这些点处的应力很大,在高应力点处产生细微裂纹,裂纹尖端的应力集中又促使裂纹逐渐扩展,而形成宏观裂纹。在拉、压应力交替作用下,裂纹面反复张合,

图 7-8

或者在交替切应力作用下,裂纹面反复错动,产生类似研磨的作用,形成断口的光滑区。当裂纹扩展到使其不能承受所施加的载荷时,构件就发生突然断裂,形成断口的粗糙区。当构件内的应力越大,形成裂纹的可能性越大,裂纹扩展的速度越快,构件所能经历的循环次数越少。当构件内的应力值低到某一限度时,在构件内不能形成微观裂纹,或不能使微观裂纹扩展成宏观裂纹,则构件不会发生疲劳破坏。

实践表明,在交变应力作用下,材料的强度指标与交变应力的性质有关。为此,以图 7-7 所示简支梁为例研究交变应力的性质。

最大应力与最小应力之和的一半,称为平均应力,用 σ_m 表示,即

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \quad (7-5)$$

最大应力与最小应力之差的一半,称为应力幅度,用 σ_a 表示,即

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (7-6)$$

交变应力中的平均应力可视为静应力部分,而应力幅度则为其动应力部分。

最小应力与最大应力之比,称为应力循环特性,用 r 表示,即

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \quad (\text{当 } \sigma_{\max} > 0 \text{ 时})$$

$$r = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \quad (\text{当 } \sigma_{\max} < 0 \text{ 时}) \quad (7-7)$$

循环特性表示最小应力与最大应力相对变化程度,它直接影响到材料在交变应力作用下的强度指标。它是疲劳强度计算中的一个

重要参数。

在一个应力循环中,当应力只有大小的改变,而无符号的改变,则 r 为正值。否则, r 为负值。可见, $-1 \leq r \leq 1$ 。

当 $r = -1$ 时, $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$, $\sigma_m = 0$, $\sigma_a = \sigma_{\max}$, 称为对称循环交变应力,如图 7-6b 所示。

除对称循环交变应力外,其他情况统称为非对称循环交变应力。其中 $r = 0$ 时, $\sigma_{\min} = 0$, $\sigma_{\max} > 0$, $\sigma_a = \sigma_m = \sigma_{\max}/2$, 称为脉动循环交变应力。

当 $r = 1$ 时, $\sigma_a = 0$, $\sigma_{\max} = \sigma_{\min} = \sigma_m$, 称为静应力。因此,静应力为交变应力中的特例。

对于切应力下的交变应力,以上叙述完全适用,只要把正应力改为切应力即可。

在工程中,交变应力不一定按正弦规律变化。实验表明,材料在交变应力下的强度与交变应力变化的曲线形状无关,如图 7-9 所示各种应力曲线形状不同,但其强度相同。实验还表明,应力变化的频率对材料的强度也无明显的影响(在高温以及在腐蚀介质条件下除外)。

在交变应力作用下,构件强度计算方法是:一方面按照静应力的计算公式计算构件的工作应力;另一方面要通过试验测定材料在交变应力作用下的强度指

图 7-9

标,从而确定构件的许用应力,建立强度条件。后者是我们要讨论的主要内容。

§ 7-3 材料的持久极限

为了测得某种材料抵抗疲劳破坏的能力,可用该种材料加工

成试样,若试样内的应力值低到某一极限值时,不论交变应力循环多少次,试样也不会发生疲劳破坏,则该极限值反映了这种材料抵抗疲劳破坏的能力。因此,把某种材料制成的试样,它经历无穷多次应力循环而不发生疲劳破坏的最大应力值,称为该材料的持久极限,或称为疲劳极限。

试验表明,材料的持久极限与材料的性质、应力循环特性、变形形式有关。因此,常用带有循环特性 r 的脚码符号方式,来表示某种材料的持久极限,例 σ_{-1} 表示对称循环下的持久极限。至于是何种变形形式,可另加说明。

试验还表明,材料在对称循环下的持久极限最低,所以对称循环下的持久极限是衡量材料疲劳强度的基本指标。

在工程中,承受弯曲变形应力的构件较多,加之这种变形下持久极限的测定在技术和设备上比较简单,所以弯曲疲劳试验是最为广泛采用的测定持久极限的方法。图 7-10 为纯弯曲对称

图 7-10

循环疲劳试验机的示意图。试样 1 被夹在旋转的弹簧夹头 2 和 3 中。作用在试样的力由悬挂在 U 形吊环 4 和 5 上的荷重传给，试样的转数由计数器 6 测定。当试样断裂时，按钮 8 会自动关闭电机 7。

试验时将材料加工成直径为 7 ~ 10mm, 表面磨光的试样(光滑小试样), 每组试验需 6 ~ 10 根试样。在载荷 2W 作用下, 试样中间部分为纯弯曲, 其弯矩 $M = Wa$, 最大弯曲正应力 $\sigma = M/W$ 。试样每转一周, 其截面上的点经受一次对称的应力循环。试验时, 最初加载量应使第一根试样上的最大应力 $\sigma_{1 \cdot \max}$ 约等于材料强度极限的 60%, 经过若干循环次数 N_1 后, 试样断裂。其他试样逐次减小最大应力, 并记下相应的循环次数, 得出一系列的 $\sigma_{A \max}$ 值和相应的 N_A 值, 将试验数据绘制成图线, 如图 7-11 所示, 该图线称为疲劳曲线。从疲劳曲线看出, 试样断裂前所能经受的循环次数 N , 随 σ_{\max} 的减小而增大, 疲劳曲线逐渐趋于水平, 其水平渐近线的纵坐标值 σ_{-1} 就是材料的持久极限。

实际上, 试验不可能无限地进行下去, 所以一般规定一个应力循环次数 N , 如果试样经历 N 次循环而不发生破坏, 那么认为它经历无穷次循环也不会破坏, 循环次数 N 称为循环基数, 与相应的最大应力值即为材料的持久极限。钢材料的循环基数 $N = 10^7$ 次。

图 7-11

同样, 也可通过试验测得材料在扭转变形下的持久极限 τ_{-1} 。试验表明, 金属材料的持久极限与其相应的抗拉强度极限 σ_b 有如下近似关系:

钢材弯曲

$\sigma_{-1} = 0.4 \sigma_b$

钢材扭转

$\tau_{-1} = 0.22 \sigma_b$

有色金属弯曲 $\sigma_{-1} = (0.25 \sim 0.5) \sigma_b$

在实际工作中, 材料的持久极限值可从有关资料中查得。

§ 7-4 影响构件持久极限的主要因素 构件的持久极限

材料的持久极限是用光滑小试样测得的, 而实际构件的几何形状、尺寸大小和表面质量等均与试样不同。试验表明, 构件的持久极限低于其材料的持久极限。影响构件持久极限的主要因素有三个。

其一, 构件外形变化引起应力集中的影响。构件外形的突变将引起应力集中, 在应力集中局部区域的高应力, 更容易促使裂纹的形成和扩展, 从而使构件的持久极限显著降低。应力集中对构件持久极限的影响用有效应力集中因数 K 来表示, 它等于在对称循环下无应力集中的光滑试件的持久极限 σ_{-1} 与有应力集中且尺寸与光滑相同试件的试样的持久极限 σ_{-1K} 的比值, 即

$$K = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1K}}$$

K 大于 1。它不同于理论应力集中因数, 它是由试验测得的。至于构件外形各种突变下的有效应力集中因数可从有关资料中查得。还应指出, K 除与构件外形突变情况有关外, 还与材料的性质有关, 静拉伸强度越高的材料, 有效应力集中因数越大, 即对应力集中越敏感。

其二, 构件绝对尺寸的影响。试验表明, 试样直径增大, 持久极限反而降低。上述情况可用图 7-12 所示, 直径不同而最大应力相等的两杆加以说明。因大直径试样横截面上的高应力区比小直径试样的高应力区来的大, 在这

图 7-12

大区域内材料所含缺陷的机率也大,故大直径试样中更容易形成裂纹,从而使持久极限降低。

构件尺寸的影响用尺寸因数 来表示,它等于在对称循环下光滑大试样的持久极限 σ_{-1} 与光滑小试件的持久极限 σ_{-1} 的比值,即

$$= \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1}}$$

尺寸因数一般小于 1。尺寸因数也可从有关资料中查得。其中轴向拉压对称循环交变应力的尺寸因数 $\phi = 1$ 。

其三,构件表面质量的影响。构件表面粗糙,或表面有尖锐刀痕、擦伤时,将引起应力集中,从而降低了构件的持久极限。表面质量的影响用表面质量因数 表示,它等于在对称循环下其他加工情况下小试样的持久极限 σ_{-1} 与光滑小试件持久极限 σ_{-1} 的比值,即

$$= \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1}}$$

试验表明, 值还与材料性质有关,材料静拉伸强度愈高,对表面质量好坏更为敏感。另外,若表面经过强化处理,例如采用机械滚压,喷丸等措施,使构件表面层产生残余压应力,减少表面层出现裂纹的机率,从而提高构件的持久极限。

综上所述,构件在对称循环下的持久极限 σ_{-1u} 应为

$$\sigma_{-1u} = \frac{\sigma_{-1u}}{K} \tag{a}$$

σ_{-1u} 是构件的极限应力,应以 σ_{-1u} 为依据,选择适当的安全系数 n 之后,才能得到构件的疲劳许用应力 $[\sigma_{-1}]$,即

$$[\sigma_{-1}] = \frac{\sigma_{-1u}}{n} \tag{b}$$

式中 n 为规定的安全系数。为保证构件不发生疲劳破坏,构件内的最大工作应力不应超过构件的疲劳许用应力,即

$$\sigma_{max} \leq [\sigma_{-1}]$$

考虑到式(b),上式可改写为

$$\frac{\sigma_{-1u}}{\sigma_{max}} = \frac{1}{n}$$

不等式左边的比值表示构件的实际安全储备, 称为构件的工作安全系数, 用 n 表示, 即

$$n = \frac{\sigma_{-1u}}{\sigma_{max}}$$

再考虑到式(a), 上式改写为

$$n = \frac{K_{max}}{K} - 1 \tag{7-8}$$

上式就是用安全系数法表示的对称循环下的疲劳强度条件。

同理, 在交变切应力对称循环下, 构件的疲劳强度条件为

$$n = \frac{K_{max}}{K} - 1$$

为提高构件的疲劳强度, 应使 K 尽量减小, 即应减缓构件的应力集中, 构件外形变化不要太突然; 也可采用提高构件表面质量, 或对表面强化处理

圆角处的有效应力集中因数

表 7-1

比值		K (弯曲、拉伸)						K (扭转)			
$\frac{D}{d}$	$\frac{R}{d}$	拉 伸 强 度 极 限 σ_b (MPa)									
		500	600	700	800	900	1000	700	800	900	1000
$\frac{D}{d}$ 1. 1	0	2. 32	2. 5	2. 71				1. 52	1. 63	1. 72	1. 83
	0. 02	1. 84	1. 96	2. 03	2. 20	2. 35	2. 50	1. 36	1. 41	1. 45	1. 50
	0. 04	1. 60	1. 66	1. 69	1. 75	1. 81	1. 87	1. 24	1. 27	1. 29	1. 32
	0. 06	1. 50		1. 54		1. 60		1. 18	1. 20	1. 23	1. 24
	0. 08	1. 40		14. 2		1. 46		1. 14	1. 16	1. 18	1. 19
	0. 10	1. 34		1. 37		1. 39		1. 11	1. 13	1. 15	1. 16
	0. 15	1. 25		1. 27		1. 30		1. 07	1. 08	1. 09	1. 11
	0. 20	1. 19		1. 22		1. 24		1. 05	1. 06	1. 07	1. 09

续上表

比值		K (弯曲、拉伸)						K (扭转)			
$\frac{D}{d}$	$\frac{R}{d}$	拉伸强度极限 b (MPa)									
		500	600	700	800	900	1000	700	800	900	1000
1. 1 > $\frac{D}{d}$	0	2. 85	3. 10	3. 39				1. 85	2. 04	2. 18	2. 37
	0. 02	2. 18	2. 34	2. 54	2. 68	2. 89	3. 10	1. 59	1. 67	1. 74	1. 81
	0. 04	1. 84	1. 92	1. 98	2. 05	2. 13	2. 22	1. 39	1. 45	1. 48	1. 52
	0. 06	1. 71		1. 76		1. 84		1. 30	1. 33	1. 37	1. 39
	0. 08	1. 56		1. 59		1. 64		1. 22	1. 26	1. 30	1. 32
	0. 10	1. 48		1. 51		1. 54		1. 19	1. 21	1. 24	1. 26
	0. 15	1. 35		1. 38		1. 41		1. 11	1. 14	1. 15	1. 18
	0. 20	1. 27		1. 30		1. 34		1. 08	1. 11	1. 12	1. 15
1. 2 > $\frac{D}{d}$	0	3. 20	3. 50	3. 85				2. 15	2. 40	2. 60	2. 85
	0. 02	2. 40	2. 60	2. 80	3. 00	3. 25	3. 50	1. 80	1. 90	2. 00	2. 10
	0. 04	2. 00	2. 10	2. 15	2. 25	2. 35	2. 45	1. 53	1. 60	1. 65	1. 70
	0. 06	1. 85		1. 90		2. 00		1. 40	1. 45	1. 50	1. 55
	0. 08	1. 66		1. 70		1. 76		1. 30	1. 35	1. 40	1. 42
	0. 10	1. 57		1. 61		1. 64		1. 25	1. 28	1. 32	1. 35
	0. 15	1. 41		1. 45		1. 49		1. 15	1. 18	1. 20	1. 24
	0. 20	1. 32		1. 36		1. 40		1. 10	1. 14	1. 16	1. 20

螺纹、键槽、花键及横孔处的有效应力集中因数 表 7-2

$\frac{b}{MPa}$	螺 纹 $K = 1$ K	键 槽			花 键			横 孔		
		K			K	K		K		K
		A 型	B 型	AB 型		矩 形	渐 开 线 形	$\frac{d_0}{d} =$ 0.05 ~ 0.15	$\frac{d_0}{d} =$ 0.15 ~ 0.25	$\frac{d_0}{d} =$ 0.05 ~ 0.25
400	1.45	1.51	1.30	1.20	1.35	2.10	1.40	1.90	1.70	1.70
500	1.78	1.64	1.38	1.37	1.45	2.25	1.43	1.95	1.75	1.74
600	1.96	1.76	1.46	1.54	1.55	2.35	1.46	2.00	1.80	1.78
700	2.20	1.89	1.54	1.71	1.60	2.45	1.49	2.05	1.85	1.81
800	2.32	2.01	1.62	1.88	1.65	2.55	1.52	2.10	1.90	1.85
900	2.47	2.14	1.69	2.05	1.70	2.65	1.55	2.15	1.95	1.90
1000	2.61	2.26	1.77	2.22	1.72	2.70	1.58	2.20	2.00	1.94
1200	2.90	2.50	1.92	2.39	1.75	2.80	1.60	2.30	2.10	2.00

尺寸因数表 7-3

直径		> 20	> 30	> 40	> 50	> 60	> 70	> 80	> 100	> 120	> 150
d/ mm		~ 30	~ 40	~ 50	~ 60	~ 70	~ 80	~ 100	~ 120	~ 150	~ 500
	碳钢	0. 91	0. 88	0. 84	0. 81	0. 78	0. 75	0. 73	0. 70	0. 68	0. 60
	合金钢	0. 83	0. 77	0. 73	0. 70	0. 68	0. 66	0. 64	0. 62	0. 60	0. 54
	各种钢	0. 89	0. 81	0. 78	0. 76	0. 74	0. 73	0. 72	0. 70	0. 68	0. 60

不同粗糙度的表面质量因数表 7-4

加 工 方 法	轴 表 面 粗 糙 度	b/ (MPa)		
		400	800	1200
磨削	0. 4 ~ 0. 2	1	1	1
车削	3. 2 ~ 0. 8	0. 95	0. 90	0. 80
粗车	25 ~ 6. 3	0. 85	0. 80	0. 65
未加工的表面	0	0. 75	0. 65	0. 45

各种强化方法的表面质量因数表 7-5

强化方法	心部强度 b/ (MPa)			
		光 轴	低应力集中轴 K 1. 5	高应力集中轴 K 1. 8 ~ 2
高 频 淬 火	600 ~ 800	0. 5 ~ 1. 7	1. 6 ~ 1. 7	2. 4 ~ 2. 8
	800 ~ 1100	1. 3 ~ 1. 5		
氮 化	900 ~ 1200	1. 1 ~ 1. 25	1. 5 ~ 1. 7	1. 7 ~ 2. 1
渗 碳	400 ~ 600	1. 8 ~ 2. 0	3	
	700 ~ 800	1. 4 ~ 1. 5		
	1000 ~ 1200	1. 2 ~ 1. 3	2	
喷丸硬化	600 ~ 1500	1. 1 ~ 1. 25	1. 5 ~ 1. 6	1. 7 ~ 2. 1
滚子滚压	600 ~ 1500	1. 1 ~ 1. 3	1. 3 ~ 1. 5	1. 6 ~ 2. 0

例 7-3 校核图 7-13 所示轴的疲劳强度。已知轴受交变弯矩 $M= \pm 500N \cdot m$ 作用。轴材料是合金钢， $b= 800MPa$ ， $\sigma_1= 400MPa$, $n= 2$ 。轴表面经车削加工。

解:最大工作应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} = \frac{500 \times 10^3}{\frac{\pi}{32} \times 40^3} = 80MPa$$

由 $\frac{D}{d} = \frac{50}{40} = 1. 25$ 和 $\frac{R}{d} = \frac{5}{40} = 0. 125$,

从表 7-1 中用插值求得 $K = 1. 53$; 由 图 7-13

表 7-2, 按 $d= 40mm$, 查得 $\sigma = 0. 77$; 由表 7-3 按 $b= 800MPa$ 和轴表面加工情况查得 $\sigma = 0. 9$ 。

将以上各值代入式(7-8)得

$$n = \frac{K_{\max}}{K_{\min}} - 1 = \frac{0.77 \times 0.9}{1.53 \times 80} \times 400 = 2.26 > n$$

故轴的疲劳强度足够。

不同粗糙度的表面质量因数和各种强化方法的表面质量因数如表 7-4、表 7-5 所示。

习 题

7-1 一种材料只有一个持久极限吗？为什么？

7-2 同一种材料制成的两个不同构件，他们的持久极限相同吗？为什么？

7-3 影响构件持久极限的主要因素有哪些？

7-4 欲提高构件的疲劳强度，应采取哪些措施？

7-5 冲击应力与静应力对比，各有什么特点？

7-6 试求图示梁的最大冲击应力和挠度。已知 $W = 1\text{kN}$, $h = 40\text{mm}$, $l = 2\text{m}$, 弹性模量 $E = 10\text{GPa}$

7-7 重量为 G 的重物以水平速度 v 撞击在直杆上，试求杆内的最大冲击应力。已知杆的弯曲刚度为 EI ，抗弯截面系数为 W 。

题 7-6 图

7-8 图示杆下端有一圆盘，其上放置一弹簧。弹簧在 1kN 的静荷作用下缩短 0.625mm 。杆直径 $d = 40\text{mm}$ ，长度 $l = 4\text{m}$ ，许用应力 $[\sigma] = 120\text{MPa}$ ， $E = 200\text{GPa}$ ，若有重量为 15kN 的重物自由下落，试求其许可高度 h 。若无弹簧时，其许可高度 h 将为多少？

7-9 直径 $d = 12\text{mm}$ 的圆杆，工作时承受的最大拉力 $F_{\max} = 70\text{kN}$ ，最小拉力 $F_{\min} = 50\text{kN}$ 。试求其平均应力 σ_m ，应力幅度 σ_a 和循环特性 r 值。

题 7-7 图

题 7-8 图

7-10 图示旋转阶梯轴上作用着交变弯矩 $M = 1\text{kN} \cdot \text{m}$ 。轴表面未经机械加工。轴材料为碳钢, $\sigma_b = 600\text{MPa}$, $\sigma_{-1} = 250\text{MPa}$ 。试求轴的工作安全系数 n 。

7-11 图示阶梯轴受到交变扭矩 $T = 1\text{kN} \cdot \text{m}$ 的作用。轴表面经车削加工。轴材料为碳钢, $\sigma_b = 600\text{MPa}$, $\sigma_{-1} = 130\text{MPa}$ 。规定安全系数 $n = 2$ 。试校核轴的疲劳强度。

题 7-10 图

题 7-11 图

7-12 图示旋转阶梯轴受不变弯矩 M 作用。轴材料为碳钢, $\sigma_b = 520\text{MPa}$, $\sigma_{-1} = 220\text{MPa}$, $\sigma_0 = 1$ 。规定安全系数 $n = 1.7$, 试求轴在图 a、b 两种情况下的许可弯矩。

题 7-12 图

第八章 压杆稳定

§ 8-1 压杆稳定的概念 临界压力

在讨论直杆轴向压缩时,认为只要杆件满足强度条件,就能保证压杆安全工作,这个结论对短粗压杆是正确的。但对细长压杆,在轴向压力还未达到因强度不足而破坏的数值时,就可能突然变弯而丧失承载能力。可见,细长压杆的承载能力不取决于其压缩强度,而取决于其保持原来直线形状平衡状态的能力。压杆保持原直线形状平衡状态的能力,称为压杆的稳定性。若压杆不能保持原直线形状平衡状态,则称其丧失了稳定性,简称失稳。

图 8-1a 所示细长压杆,在轴向压力 F 作用下处于直线形状平衡状态。当它承受的轴向力 F 从零开始逐渐增大的过程中,可观察到如下现象:

图 8-1

当轴向压力 F 小于某一特定值 F_{cr} 时,杆一直能保持直线形

状的平衡,即使有微小的横向干扰力,暂时使它产生轻微弯曲变形,但经几次摆动后,仍然恢复到原来的直线形状平衡状态,如图 8-1b) 所示,这说明压杆是稳定的。

当轴向压力 F 超过特定值 F_{cr} 时,只要有微小的横向干扰力,压杆将发生很大的弯曲变形,甚至折断,如图 8-1d) 所示,这说明压杆是不稳定的。

当轴向压力 F 等于特定值 F_{cr} 时,给其施加微小的横向干扰力,压杆发生微弯变形,而且不再恢复到原来直线形状平衡状态。如图 8-1c) 所示。这说明压杆已失稳。由上述可知,压杆轴向压力的特定值 F_{cr} 是压杆失稳时的最小压力值,称为临界压力,或称临界力。

工程中有许多压杆需考虑其稳定性。例如,建筑结构中的柱,桁架中的承压杆,液压设备中的活塞杆等。压杆失稳常会带来灾难性后果,历史上发生过不少次因压杆失稳而导致桥

图 8-2

梁倒塌的严重事故,造成重大损失。要保证压杆正常工作,其轴向压力必须小于其临界压力,使压杆处于稳定平衡状态。可见,掌握压杆临界压力的计算方法是非常重要的。

现以图 8-2a) 所示两端为球形铰支座的细长压杆为例,导出压杆临界力的计算公式。设压杆在轴向压力 F 作用下,处于微弯平衡状态。若压杆内的应力不超过材料的比例极限,由式(3-18)有

$$EIv = M(x) \tag{a}$$

式中, EI 为杆的弯曲刚度, $M(x)$ 为 x 截面的弯矩,由图 8-2b 可知

$$M(x) = - Fv \tag{b}$$

将式(b)代入式(a),并令 $k^2 = F/EI$,得到

$$v(k) + k^2v = 0 \tag{c}$$

其通解为

$$v = a \sin kx + b \cos kx \quad (d)$$

式中 a 、 b 为积分常数, $k = \sqrt{F/EI}$ 为待定值。

根据杆端的边界条件: $x = 0$ 时, $v = 0$, 代入式(d), 可以解得 $b = 0$ 。于是式(d)可改写为

$$v = a \sin kx \quad (e)$$

杆另一端的边界条件, $x = l$ 时, $v = 0$, 代入式(e)后, 得到

$$a \sin kl = 0 \quad (f)$$

由此解得 $a = 0$ 或 $\sin kl = 0$ 。当取 $a = 0$, 则由式(e)可知 v 恒等于零, 即压杆保持直线形状, 这与杆在微弯状态保持平衡的前提相矛盾。因此必须取

$$\sin kl = 0 \quad (g)$$

满足这一条件的 kl 值为

$$kl = n \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

$$\text{或} \quad k = \frac{n}{l} \quad (h)$$

$$\text{由此可得 } k^2 = \frac{F}{EI} = \frac{n^2}{l^2}$$

$$\text{或} \quad F = \frac{n^2 EI}{l^2} \quad (i)$$

这表明, 使压杆保持曲线状态平衡的压力, 在理论上是多值的, 但使压杆失稳的最小压力应是 $n = 1$ 时的压力, 即所求细长压杆的临界压力为

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (8-1)$$

上式称为两端铰支细长压杆的临界压力计算公式。

对于其他杆端约束情况的细长压杆, 其临界压力也可作类似的分析, 将临界压力的计算公式统一写成如下形式

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \quad (8-2)$$

上式称为欧拉公式。式中 μ 称为压杆的长度因数, 它与压杆两端的约束情况有关。其数值为

一端固定, 另一端自由	$\mu = 2$
两端铰支	$\mu = 1$
一端固定, 另一端铰支	$\mu = 0.7$
两端固定	$\mu = 0.5$

在实际工作中, 要看压杆两端的实际约束与上述四种情况中的哪一种情况相近, 或界于哪两种情况之间, 从而选择合适的长度因数。一般情况下, 在设计规范中对长度因数都做了具体的规定。

例 8-1 有一矩形截面压杆, 如图 8-3 所示。弹性横量 $E = 10\text{GPa}$, $l = 2\text{m}$ 。试按欧拉公式求下述两种情况下压杆的临界力。

(1) $h = 160\text{mm}$, $b = 90\text{mm}$ 。(2) $h = b = 120\text{mm}$ 。

解: 压杆的长度因数 $\mu = 2$ 。

计算情况(1)的临界力时, 应取截面

对 y 轴的惯性矩(因 $I_y < I_z$)

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{100 \times 90^3}{12} = 972 \times 10^4 \text{mm}^4$$

按欧拉公式, 其临界力为

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 10 \times 10^3 \times 972 \times 10^4}{(2 \times 2 \times 10^3)^2} = 60\text{kN}$$

图 8-3

计算情况(2)的临界力时, $I_y = I_z$ 。

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{(120)^4}{12} = 1728 \times 10^4 \text{mm}^4$$

按欧拉公式, 其临界力为

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 10 \times 10^3 \times 1728}{(2 \times 2 \times 10^3)^2} = 106.5\text{kN}$$

比较以上计算结果, 两杆横截面积相同, 但情况(2)的临界力是情况(1)临界力的 1.77 倍。

§ 8-2 临界应力 经验公式

压杆的临界力除以其横截面积所得到的应力, 称为临界应力

ar, 即

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{E I}{(\mu l)^2 A}$$

令 $I = i^2 A$, 上式改写为

$$\sigma_{cr} = \frac{E i^2}{(\mu l)^2}$$

式中 $i = \sqrt{I/A}$, 称为惯性半径。若再令

$$\frac{\mu l}{i} = \quad (8-3)$$

则有

$$\sigma_{cr} = \frac{E}{\lambda^2} \quad (8-4)$$

式中, λ 称为压杆的柔度, 或称为长细比。它是一个无量纲的量。它反映了杆长、支承情况、横截面尺寸和形状等因素对临界应力的综合影响。由式(8-4)看出, 压杆的临界应力与其柔度的平方成反比。柔度在压杆稳定性计算中是一个非常重要的参数。其值可按式(8-3)计算。

在临界力计算公式推导中, 曾用到 $E I v = M(x)$, 但它只在材料服从胡克定律时才成立。因此, 只有压杆的临界应力不超过材料的比例极限时, 式(8-4)才是正确的, 故有

$$\sigma_{cr} = \frac{E}{\lambda^2} \leq \sigma_p$$

或

$$\lambda \leq \lambda_p \quad (a)$$

令

$$\lambda_p = \frac{\sqrt{E}}{\sigma_p}$$

于是式(a)改写为

$$\lambda \leq \lambda_p \quad (8-5)$$

这表明, 只有压杆的实际柔度 λ 大于 λ_p 时, 式(8-2)与式(8-4)才适用。 λ_p 的压杆称为细长杆, 或称大柔度杆。对于 Q235A 钢, $E = 210 \text{ GPa}$, $\sigma_p = 200 \text{ MPa}$, $\lambda_p = 100$ 。

当压杆的实际柔度 $\lambda < \lambda_p$ 时, 则不能用式(8-2)和式(8-4)计算压杆的临界力和临界应力。试验结果表明, 这种压杆失去承载能力的原因仍然是失稳。通常用建立在试验基础上的经验公式计算这种压杆的临界应力。这里介绍直线经验公式, 即

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda \tag{8-6}$$

式中, a 和 b 是与材料有关的常数, 其单位为 MPa(表 8-1)。临界力可用下式计算

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A = A(a - b\lambda)$$

应用经验公式计算的临界应力值不允许超过杆材料的压缩极限应力 σ_u , 因为当应力达到极限应力 σ_u 时, 压杆已因强度不够而破坏。这样, 在式(8-6)中的柔度必须存在一个最低界限值, 其大小与材料的压缩强度有关。对塑性材料, 压缩极限应力为 σ_s , 与其相应的柔度最低界限值 λ_s , 可令式(8-6)中的 $\sigma_{cr} = \sigma_s$ 求得, 即

$$\lambda_s = \frac{a - \sigma_s}{b} \tag{8-7}$$

综上所述, 可将压杆按柔度分为三类, 并按不同方式处理。

常用材料的 a 、 b 、 λ_p 、 λ_s 值 表 8-1

名 称	应力(MPa)	a (MPa)	b (MPa)	λ_p	λ_s
碳钢 Q235	$b = 370$ $\sigma_s = 235$	304	1. 12	104	61. 4
碳钢(优质)	$b = 470$ $\sigma_s = 306$	460	2. 57	100	60
硅 钢	$b = 510$ $\sigma_s = 353$	577	3. 74	100	60
铸 铁		332	1. 45	80	
铬钼钢		980	5. 3	55	
硬 铝		392	3. 26	50	
松 木		39	0. 2	59	

λ_p 的压杆, 即大柔度杆, 用欧拉公式计算其临界力或临界应力; $\lambda_p > \lambda_s$ 的压杆, 称为中柔度杆, 或中长杆, 用经验公式计算其临界应力; $\lambda < \lambda_s$ 的压杆, 称为小柔度杆, 或短粗杆, 按压缩强

度问题处理。

塑性材料压杆的临界应力随柔度 变化的情况,如图 8-4 所示,它称为临界应力总图。由图可知,中长杆的临界应力 σ_{cr} 大于杆材料的比例极限 σ_p ,细长杆的临界应力 σ_{cr} 小于杆材料的比例极限 σ_p

例 8-2 Q235A 钢
制圆截面压杆,直径 $d=$
50mm,两端铰支,弹性
模量 $E=200\text{GPa}$ 。试计
算:(1)杆长 $l=1.5\text{m}$ 。
(2)杆长 $l=1\text{m}$ 。(3)杆长
 $l=0.75\text{m}$ 。这三种情况
下,压杆的临界力。

解: 惯性半径 $i=$

$$\sqrt{I/A} = \frac{d}{4} = \frac{50}{4} = 12.5$$

图 8-4

mm。压杆长度因数 $\mu=1$ 。

杆长 $l=1.5\text{m}$ 时, $\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times 1.5 \times 10^3}{12.5} = 120 > \lambda_p$ 。应用欧拉
公式计算临界压力

$$\begin{aligned} F_{cr} &= A \sigma_{cr} = \frac{\pi d^2}{4} \frac{E}{\lambda^2} \\ &= \frac{\pi \times 50^2}{4} \times \frac{200 \times 10^3}{120^2} = 269 \times 10^3 \text{N} \\ &= 269 \text{kN} \end{aligned}$$

杆长 $l=1\text{m}$ 时, $\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times 1000}{12.5} = 80$ 。由 Q235A 的 $\sigma_p = 104$,
 $\sigma_s = 61.4$ 。故用经验公式计算临界力,即

$$\begin{aligned} F_{cr} &= A \sigma_{cr} = \frac{\pi d^2}{4} (a - b \lambda) \\ &= \frac{\pi \times 50^2}{4} \times (304 - 1.1 \times 80) = 42 \times 10^3 \text{N} \\ &= 421 \text{kN} \end{aligned}$$

杆长 $l = 0.75\text{m}$ 时, $\lambda = \frac{l}{i} = \frac{750}{12.5} = 60 < \lambda_s = 61.4$, 应按压缩强度问题处理。其极限压力为

$$F = A_s = \frac{\pi \times 50^2}{4} \times 235 = 461 \times 10^3 = 461 \text{ kN}$$

§ 8-3 压杆稳定性校核提高 压杆稳定性的措施

欲使压杆不失稳, 必须使压杆的工作压力 F 小于其临界压力 F_{cr} , 此外还应考虑安全储备。因此, 压杆的稳定性条件为

$$F < \frac{F_{cr}}{n_{st}} \tag{8-8}$$

式中 n_{st} 为规定的稳定安全系数。

在工程计算中, 常将式(8-8)改写为

$$n = \frac{F_{cr}}{F} > n_{st} \tag{8-9}$$

式中 n 为临界力(或临界应力)与工作压力(或工作应力)的比值, 称为工作安全系数。

考虑到压杆的初曲率、加载偏心, 以及材料不均匀等因素, n_{st} 的一般取值均大于强度安全系数。在静荷下, 钢材料 $n_{st} = 1.8 \sim 3.0$; 铸铁材料 $n_{st} = 4.5 \sim 5.5$; 木材 $n_{st} = 2.5 \sim 3.5$ 。

应当指出, 临界压力是由压杆的整体变形确定的, 局部的截面削弱对临界压力的影响很小。所以, 无论采用欧拉公式, 还是经验公式计算时, 都可用未削弱的横截面面积 A 和惯性矩 I 。但对这样的压杆, 必要时还应对削弱了的横截面进行强度计算。

在实际工作中, 常根据工作需要和其他方面的要求, 初步确定压杆的支承形式和尺寸, 然后对其稳定性进行校核, 其步骤

是: 根据压杆的支承情况和实际尺寸, 计算出压杆在各弯曲平面内的柔度, 从而得到最大柔度 μ_{\max} ; 根据 μ_{\max} 选择 σ_{cr} 的计算公式, 计算出杆的临界力或临界应力; 最后用稳定性条件校核其稳定性。

例 8-3 试校核图 8-5 所示连杆的稳定性。已知 $b=20\text{mm}$, $h=60\text{mm}$, $l=940\text{mm}$, $l_1=880\text{mm}$, 轴向压力 $F=110\text{kN}$, 材料为优质碳钢, 规定安全系数 $n_{st}=3$ 。

解: 设连杆在 xy 面内失稳, 连杆两端为铰支, $\mu=1$, z 轴为中性轴, 惯性半径为

$$i_z = \sqrt{I_z / A} = \sqrt{\frac{bh^3}{12} / bh} = \sqrt{\frac{3}{12} h} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 60 = 17.32\text{mm}$$

柔度 $\mu_z = \mu l / i_z = 1 \times 940 / 17.32 = 54.3$ 。

连杆也可能在 zx 面内失稳, 连杆两端为

图 8-5

固定端, $\mu=0.5$, y 轴为中性轴, 惯性半径为

$$i_y = \sqrt{I_y / A} = \sqrt{\frac{hb^3}{12} / bh} = \sqrt{\frac{3}{12} b} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 20 = 5.77\text{mm}$$

柔度 $\mu_y = \mu l_1 / i_y = 0.5 \times 880 / 5.77 = 76.2 > \mu_z = 54.3$ 。

由于 $\mu_y > \mu_z$, 故连杆在 zx 面内易失稳, 故应以 μ_y 来求 σ_{cr} 。

由表 8-1 查得优质碳钢的有关数据; $a=460\text{MPa}$, $b=2.57\text{MPa}$, $p=100$, $s=60$ 。显然, $p > \mu_y > s$, 连杆属于中长杆, 用经验公式求临界应力, 即

$$\sigma_{cr} = a - b = 460 - 2.57 \times 76.2 = 264.2 \text{ MPa}$$

临界压力

$$F_{cr} = A \sigma_{cr} = bh \sigma_{cr} = 20 \times 60 \times 264.2 = 317 \text{ kN}$$

根据稳定性条件

$$n = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{317}{110} = 2.88 < n_{st} = 3$$

可见, 压杆不符合稳定性要求。

讨论: 若令 $\sigma_y = \sigma_z$, 则连杆在 xy 面和 zx 面失稳时的临界力相等。由 σ_y 与 σ_z 表达式, 有

$$\frac{\frac{\mu l}{I_z/A}}{\frac{\mu l_1}{I_y/A}} = \frac{\mu l}{I_z/A} = \frac{\mu l_1}{I_y/A} \quad \mu = 1, \quad \mu = 0.5$$

上式可改写为

$$\frac{I_z}{I_y} = 4 \frac{l^2}{l_1^2}$$

由于 l 与 l_1 相差不多, 故上式可以近似写为

$$I_z = 4I_y$$

可见, 为使连杆在两个面内抵抗失稳的能力相近, 在截面设计时, 应大致保持 $I_z = 4I_y$ 这一关系。

若连杆的截面面积 A 保持不变, $A = 20 \times 60 \text{ mm}$, 再根据 $I_z = 4I_y$ 这一关系, 来确定 b 与 h 的大小, 则有 $h^2 = 4b^2$ 和 $bh = 20 \times 60$, 从而解得 $b = 24.5 \text{ mm}$, $h = 49 \text{ mm}$ 。这时 $\sigma_y = 62.9$, $\sigma_z = 66.5$ 。

按 σ_z 计算压杆的临界力为

$$\begin{aligned} F_{cr} &= A \sigma_{cr} = bh(a - b) \\ &= 24.5 \times 49(460 - 2.57 \times 66.5) \\ &= 347 \text{ kN} \end{aligned}$$

连杆的工作安全系数为

$$n = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{347}{110} = 3.15 > n_{st} = 3$$

可见, b 与 h 按上述方法取值, 连杆符合稳定性要求。

提高压杆的稳定性, 也就是应提高压杆的临界力或临界应力。

从临界应力总图看出, 压杆的临界应力与其材料性质和压杆的柔度有关。因此, 提高压杆的稳定性应从这两方面着手。

合理选用材料 对细长压杆, 从公式 $\sigma_{cr} = \pi^2 E / \lambda^2$ 可知, 选用 E 值较大的材料可以提高其稳定性。但应注意, 各种钢材的 E 值大致相等, 选用高强度钢无益于提高细长压杆的稳定性。

对中长杆, 从经验公式可知, 临界应力与材料的强度指标有关。选用高强度材料可以提高中长杆的稳定性。

至于短粗杆, 属于压缩强度问题, 选用高强度材料, 其优越性是明显的。

减小柔度 从临界应力总图的中长杆和细长杆部分可知, 柔度越小, 临界应力越高, 稳定性越好。为了减小柔度 ($\lambda = \mu l / i$), 可采取如下措施: 减小压杆的长度, 例如在压杆的中点处增加铰支座等; 加固杆端约束, 以使 μ 值减小; 选用合理截面形状, 增大惯性半径 i 。对于在两个纵向平面内杆端约束相同的压杆, 应尽量用圆环形截面, 或空心正方形截面, 使 $i_x = i_y$ 。对于在两个纵向平面内杆端约束不同的压杆 (见例 8-3), 应使压杆横截面的惯性半径 $i_x \neq i_y$, 而使其柔度 $\lambda_y \neq \lambda_z$, 从而达到在两个纵向平面内抵抗失稳能力相近的目的。

习 题

8-1 材料相同, 直径相等的各细长压杆, 如图所示。哪根杆的临界压力最大? 哪根杆的临界压力最小?

8-2 图示细长压杆, 两端为球形铰支座, 弹性模量 $E = 200\text{GPa}$, 试用欧拉公式计算其临界压力。(a) 圆形截面 $d = 25\text{mm}$, $l = 1\text{m}$ 。(b) 矩形截面 $h = 2b = 40\text{mm}$, $l = 1\text{m}$ 。(c) 16 工字钢, $l = 2\text{m}$ 。

8-3 有一根 $20 \times 30\text{mm}$ 的矩形截面压杆, 两端为球形铰支座。试问压杆多长时, 即可开始应用欧拉公式计算临界压力? 已知材料的弹性模量 $E = 200\text{GPa}$, 比例极限 $\sigma_p = 200\text{MPa}$ 。

8-4 压缩机的活塞杆, 两端可视为铰支座, 受活塞传来的压

题 8-1 图

题 8-2 图

力 $F = 100\text{kN}$ 的作用, 活塞杆的长度 $l = 1\text{m}$, 直径 $d = 50\text{mm}$ 。材料为硅钢。规定安全系数 $n_{\text{st}} = 4$ 。试校核活塞杆的稳定性。

题 8-4 图

8-5 图示压杆的横截面有四种形状, 但其面积均为 $3.2 \times 10^3 \text{mm}^2$, 试计算它们的临界压力, 并进行比较。已知弹性模量 $E = 200\text{GPa}$, $\sigma_s = 235\text{MPa}$, $\sigma_a = 304\text{MPa}$, $b = 1.12\text{MPa}$, $p = 100$, $s = 61.4$ 。

8-6 图示托架, AB 杆的直径 $d = 40\text{mm}$, 长度 $l = 800\text{mm}$, 两端可视为铰支, 材料为 Q235A 钢。(1) 试求

题 8-5 图

托架的临界载荷 F_{cr} 。(2) 若已知工作载荷 $F = 70\text{kN}$, AB 杆规定安全系数 $n_{\text{st}} = 2$, 试问托架是否安全。

8-7 在图示结构中, AB 为圆形截面杆, 直径 $d = 80\text{mm}$, A 端固定, B 端为球铰; BC 为正方形截面杆, 边长 $a = 70\text{mm}$, C 端亦为球铰。AB 杆和 BC 杆可以各自独立发生弯曲变形(互不影响), 两杆材料均为 Q235A 钢。已知 $l = 3\text{m}$, $E = 200\text{GPa}$, 规定安全系数 $n_{st} = 2.5$ 。试求结构的许可载荷。

题 8-6 图

题 8-7 图

8-8 10 工字钢, 长度 $l = 5\text{m}$, 在温度 0°C 时安装在两个固定端支座之间, 这时工字钢不受力。已知钢的线膨胀系数 $\alpha = 125 \times 10^{-7}/^\circ\text{C}$, $E = 210\text{GPa}$, 问当温度升高到多少度时杆将丧失稳定?

8-9 图示正方形杆系结构, 各杆均为细长杆, 各杆的材料、截面尺寸和形状均相同。问 F 为何值时, 结构中的部分杆件失稳? 如果将力 F 的方向改为向外, 使部分杆件失稳的力 F 又为多少?

题 8-9 图

题 8-10 图

8-10 图示钢材料结构。已知 $E = 195\text{GPa}$, $\sigma_s = 275\text{MPa}$, $\sigma_a = 338\text{MPa}$, $b = 1.21\text{MPa}$, $p = 90$, $s = 50$, 强度安全系数 $n_s = 2$, 稳定安全系数 $n_{st} = 3$ 。试求结构的许可载荷 $[F]$ 值。

第九章 材料力学问题的数值解法

随着计算机的迅速发展和普及, 计算机在各个领域中都得到了广泛的应用。特别是在工程中常用的数值计算方法, 是计算机应用中极为重要的部分。材料力学问题一般都需通过繁琐的计算才能求得结果。为了避免繁琐的手工计算, 我们引入计算机分析, 给出用数值法来求解材料力学问题的部分应用程序。

§ 9-1 轴向拉、压静定问题的数值解法

1. 程序框图:

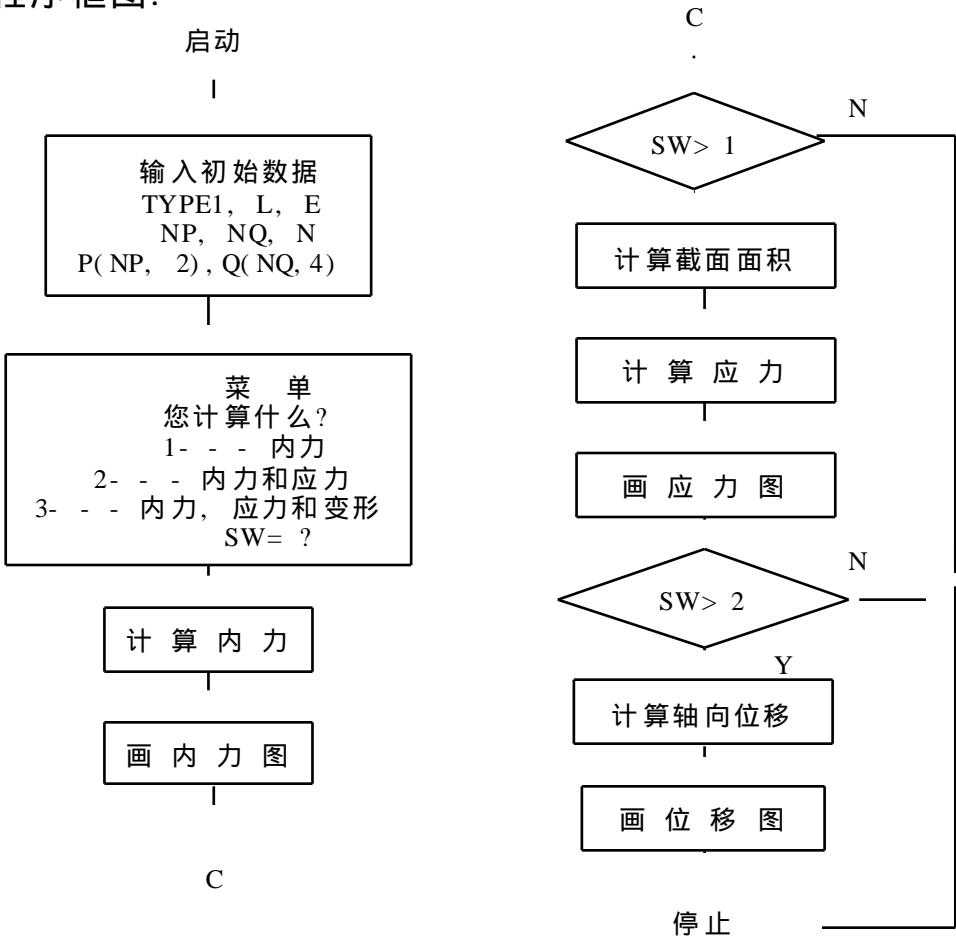


图 9-1

2. 用 BASIC 语言设计的程序如下:

```
150 REM 轴向拉、压静定问题的数值解法通用程序 TEN · BAS
160 REM 输入初始数据并显示
170 GOSUB 600
180 DIM A(N), FIN(N), ST(N), U(N), F(N)
190 REM 程序菜单
200 PRINT " 您计算什么(WHAT DO YOU COMPUTE)? "
210 PRINT " 1- 内力(INTER FORCE) "
220 PRINT " 2- 内力和应力(INTER FORCE AND STRESS) "
230 PRINT " 3- 内力, 应力和变形(INTER FORCE AND STRESS AND
    DEFORMATION) "
240 INPUT " SW= "; SW:CLS:SCREEN 2
250 REM 计算内力
260 GOSUB 1300
270 REM 求内力最大值和最小值并画内力图
280 FOR I= 0 TO N
282 F(I)= FIN(I)
285 NEXT I
290 GOSUB 4800
300 W$ = " N ":X0 = 30:Y0 = 30
302 GOSUB 5000
305 IF SW< 2 THEN 450
310 REM 计算截面面积
315 FOR I = 0 TO N
320 X = I * H
322 GOSUB 6000
325 A(I) = AX
328 NEXT I
330 REM 计算结点应力
335 GOSUB 1450
340 REM 求应力最大值和最小值并画应力图
350 FOR I= 0 TO N
352 F(I) = ST(I)
355 NEXT I
360 GOSUB 4800
370 W$ = " ST ":X0 = 30:Y0 = 70
375 GOSUB 5000
380 IF SW< 3 GOTO 450
```

```

390 REM 计算轴向位移
400 GOSUB 1600
410 REM 计算位移最大值和最小值并画位移图
420 FOR I = 0 TO N
422 F(I) = U(I)
425 NEXT I
430 GOSUB 4800
440 W$ = "U "; X0 = 30: Y0 = 110
445 GOSUB 5000
450 END
600 REM 子程序: 输入初始数据并显示
610 READ TYPE1, L, E
620 PRINT "TYPE1= "; TYPE1; TAB(10); "L= "; L
630 PRINT TAB(3); "E= "; E
640 READ NP, NQ, N: H = L / N
650 DIM P(NP, 2), Q(NQ, 4)
655 PRINT "NP= "; NP; TAB(10); "NQ= "; NQ; TAB(20); "N= "; N
660 IF NP = 0 THEN 705
670 PRINT : PRINT "NO. "; TAB(10); "P "; TAB(20); "XP "
680 FOR K = 1 TO NP
685 READ P(K, 1), P(K, 2)
695 PRINT TAB(3); K; TAB(10); P(K, 1); TAB(20); P(K, 2)
700 NEXT K
705 IF NQ = 0 THEN 740
710 PRINT "NO. "; TAB(10); "Q1 "; TAB(20); "Q2 "; TAB(30); "X1 "; TAB
(40); "X2 "
720 FOR K= 1 TO 4
725 READ Q(K, 1), Q(K, 2), Q(K, 3), Q(K, 4)
730 PRINT TAB(3); K; TAB(10); Q(K, 1); TAB(20); Q(K, 2); TAB(30);
Q(K, 3); TAB(40); Q(K, 4)
735 NEXT K
740 RETURN
1000 REM 子程序: 计算集中力在任意截面上引起的轴力
1010 NX = 0
1020 FOR K = 1 TO NP
1030 IF TYPE1 = 1 THEN RA = P(K, 1) ELSE RA = 0
1040 NX = NX + RA
1050 IF X > P(K, 2) THEN NX = NX - P(K, 1)
1060 NEXT K

```

```

1070 RETURN
1100 REM 子程序: 计算分布力在任意截面上引起的轴力
1110 NX = 0
1120 FOR K = 1 TO NQ
1130 DX = Q(K, 4) - Q(K, 3): R = 0.5 * (Q(K, 1) + Q(K, 2)) * DX:
    RA = R
1140 IF TYPE1 = 1 THEN NX = NX + RA
1150 IF X <= Q(K, 3) THEN 1210
1600 IF X > Q(K, 4) THEN 1200
1170 XX = X - Q(K, 3): R1 = Q(K, 1) * XX
1180 R2 = 0.5 * (Q(K, 2) - Q(K, 1)) * XX ^ 2 / DX
1190 NX = NX - R1 - R2
1195 GOTO 1210
1200 NX = NX - R
1210 NEXT K
1220 RETURN
1300 REM 子程序: 计算轴力在各结点处的值
1310 FOR I = 1 TO N
1320 X = I * H: FIN(I) = 0
1330 IF NP = 0 THEN 1360
1340 GOSUB 1000
1350 FIN(I) = FIN(I) + NX
1360 IF NQ = 0 THEN 1390
1370 GOSUB 1100
1380 FIN(I) = FIN(I) + NX
1390 NEXT I
1400 RETURN
1450 REM 子程序: 计算结点应力
1460 FOR I = 0 TO N
1470 ST(I) = FIN(I) / A(I)
1480 NEXT I
1490 RETURN
1600 REM 子程序: 计算杆的轴向位移
1610 C = 0.5 * H / E: U(0) = 0
1620 C1 = FIN(0) / A(0)
1630 FOR I = 1 TO N

```

```

1640 C2 = FIN(I) / A(I)
1650 U(I) = U(I - 1) + C * (C1 + C2)
1660 C1 = C2
1670 NEXT I
1680 RETURN
4800 REM 子程序: 求函数最大值和最小值通用子程序
4810 F1 = - 1E + 10: F2 = 1E + 10
4820 FOR I = 0 TO N
4830 IF F(I) > F1 THEN F1 = F(I): I1 = I
4840 IF F(I) < F2 THEN F2 = F(I): I2 = I
4850 NEXT I
4860 X1 = I1 * H: X2 = I2 * H
4870 RETURN
5000 REM 子程序: 画函数图像
5010 LINE (X0, Y0) - (X0 + 220, Y0): LOCATE (Y0 - 2) * 25 / 200,
      (X0 + 230) * 80 / 640: PRINT "X"
5020 LINE (X0, Y0 + 9) - (X0, Y0 - 12): LOCATE (Y0 - 12) * 25 /
      200, (X0 - 15) * 80 / 640: PRINT "W $"
5030 K1 = 200 / (L1 + L + L2)
5040 IF ABS(F1) > ABS(F2) THEN K2 = 12 / ABS(F1) ELSE K2 = 12
      / ABS(F2)
5050 PSET (X0, Y0 - K2 * F(0))
5060 FOR I = 1 TO N
5070 X = I * H: LINE - (X0 + K1 * X, Y0 - K2 * F(I))
5080 NEXT I
5090 IR = (Y0 - 14) * 25 / 200: IC = (X0 + 250) * 80 / 640
5100 LOCATE IR, IC: PRINT " ( "; W $ ; " )max = "; F1; TAB(IC + 25); "X
      = "; X1
5110 LOCATE IR + 1, IC: PRINT " ( "; W $ ; " )min = "; F2; TAB(IC + 25);
      "X = "; X2
5120 RETURN

```

3. 程序说明:

(1) 程序中变量和数组的意义

TYPE1——杆的类型;

TYPE1= 1 为左端固定,右端自由杆;

TYPE1= 2 为两端自由杆;

L——杆的总长度;

E——弹性模量;

NP——集中力数;

NQ——分布力组数;

N——杆的等分数;

H——杆的每个等分段长度,即步长;

SW——程序工况选择参数;

SW= 1 内力分析;

SW= 2 内力、应力分析;

SW= 3 内力、应力和变形分析;

K——载荷顺序码 k ;

X——坐标 x ;

AX——杆截面的面积 $A(x)$ 单位为 m^2 ;

$P(NP, 2)$ ——存放集中力; $P(K, 1) = P_k$, $P(K, 2) = X_{pk}$;

$Q(NP, 4)$ ——存放分布力集; $Q(K, 1) = q_{1k}$, $Q(K, 2) = q_{2k}$,

$Q(K, 3) = X_{1k}$, $Q(K, 4) = X_{2k}$;

$FIN(N)$ ——存放各结点处轴力;

$A(N)$ ——存放各结点处截面面积;

$ST(N)$ ——存放各结点处轴向应力;

$U(N)$ ——存放各结点处轴向位移 U_i ;

$F(N)$ ——工作单元。

(2) 各子程序的意义:

子程序: 输入初始数据并显示(600 ~ 740);

子程序: 计算集中力在任意截面上引起的轴力(1000 ~ 1070);

子程序: 计算分布力在任意截面上引起的轴力(1100 ~

1220);

子程序: 计算结点轴力(1300 ~ 1400);

子程序: 计算应力(1450 ~ 1490);

子程序: 计算轴向位移(1600 ~ 1680);

子程序: 求函数最大值和最小值(4800 ~ 4870);

子程序: 画函数图像(5000 ~ 5120);

子程序: 用户输入杆的截面面积 $A(x)$ (6000 ~ 6990), 输入形式可参考例题; 若只进行内力分析可不输入;

子程序: 用户输入初始数据(7000 ~ 7040), 输入格式:

7000 REM 输入初始数据

7010 DATA TYPE1, L, E

7020 DATA NP, NQ, N

7030 DATA P(NP, 2) (若 NP= 0 此项不输入)

7040 DATA Q(NQ, 4) (若 NQ= 0 此项不输入)

(3) 单位: 力——kN

长度——m

4. 程序算例:

正方形截面铸铁柱如图 9-2 所示。轴向集中力 $P= 30\text{kN}$, $E= 120\text{GPa}$, 若不计自重, 试求柱的变形。

输入内容:

根据题意, TYPE1= 1, $L= 0.36\text{m}$, $E= 1.2 \times 10^8\text{kPa}$, NP= 1, $P= 30\text{kN}$, $X_P= 0.36\text{m}$, 无分布力 NQ= 0, 取 N= 100, 要计算位移 SW= 3。杆截面变化规律为

$$B= 0.04 - \frac{0.04 - 0.028}{0.36}x = 0.04 - 0.03333x$$

$$A(x)= B^2$$

图 9-2

所以输入杆的截面面积的子程序和初始数据为

6000 REM 子程序: 用户输入杆的截面面积

6010 B= 0.04- 0.03333* X

6020 AX= B* B: RETURN

7000 REM 输入初始数据
7010 DATA 1, 0.36, 1.2E8
7020 DATA 1, 0, 100
7030 DATA - 30, 0.36

程序运算结果如下:

RUN
TYPE1= 1 L= 0.36
E= 1.2E+ 08
NP= 1 NQ= 0 N= 100
NO. P XP
1 - 30 0.36
您计算什么(WHAT DO YOU COMPUTE)?
1——内力(INTER FORCE)
2——内力和应力(INTER FORCE AND STRESS)
3—— 内力、应力和变形(INTER FORCE AND STRESS
AND DEFORMATION)
SW= ? 3

屏幕显示如图 9-3。

图 9-3

用积分法求得柱的变形 $= 0.0804\text{mm}$, 程序计算结果 $(U)_{\min}$
 $= - 8.035735\text{E}- 05(\text{m})$, 误差 0.05%。

§ 9-2 直杆扭转静定问题的数值解法

1. 程序框图:

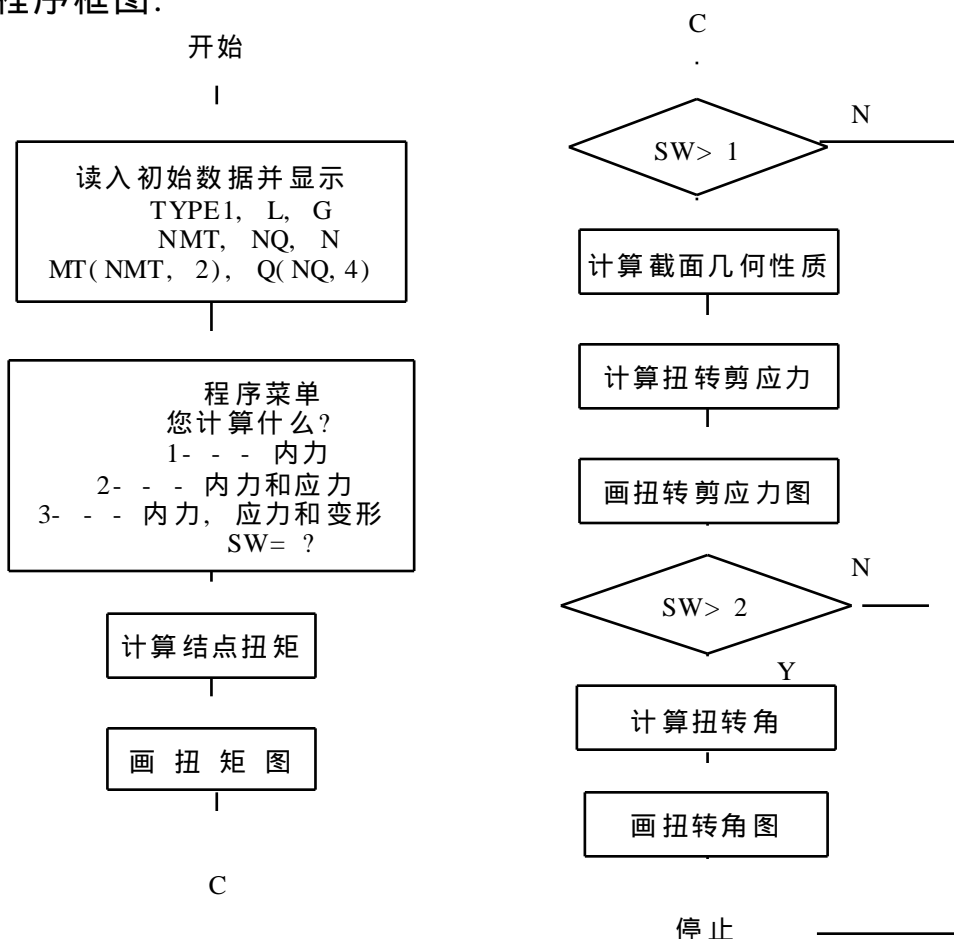


图 9-4

2. 用 BASIC 语言设计的程序如下:

```

150 REM 直杆扭转静定问题的数值解法通用程序 TOR. BAS
160 REM 输入初始数据并显示
170 GOSUB 600
180 DIM IP(N), WN(N), T(N), ST(N), R(N), F(N)
190 REM 程序菜单
200 PRINT "您想计算什么(WHAT DO YOU COMPUTE)? "
210 PRINT "1——内力(INTER FORCE) "
220 PRINT "2——内力和应力(INTER FORCE AND STRESS) "
230 PRINT "3——内力、应力和变形(INTER FORCE AND STRESS AND DEFORMATION) "
240 INPUT "SW= "; SW:CLS:SCREEN 2
  
```

```

250 REM 计算结点内力
260 GOSUB 2300
270 REM 求扭矩最大值和最小值并画扭矩图
280 FOR I = 0 TO N: F(I) = T(I): NEXT I
290 GOSUB 4800
300 W$ = "T ": X0 = 30: Y0 = 30: GOSUB 5000
305 IF SW < 2 GOTO 450
310 REM 计算截面几何性质
315 FOR I = 0 TO N
320 X = I * H: GOSUB 6000
325 IP(I) = IPX: T(I) = TX: NEXT I
330 REM 计算扭转切应力
335 GOSUB 2450
340 REM 求应力最大值和最小值并画应力图
350 FOR I = 0 TO N: F(I) = ST(I): NEXT I
360 GOSUB 4800
370 W$ = "ST ": X0 = 30: Y0 = 70: GOSUB 5000
380 IF SW < 3 GOTO 450
390 REM 计算结点扭转角
400 GOSUB 2600
410 REM 计算扭转角最大值和最小值并画扭转角图
420 FOR I = 0 TO N: F(I) = R(I): NEXT I
430 GOSUB 4800
440 W$ = "ROT. ": X0 = 30: Y0 = 110: GOSUB 5000
450 END
600 REM 子程序: 读入初始数据并显示
610 READ TYPE1, L, G
620 PRINT "TYPE1= "; TYPE1; TAB(10); "L= "; L
630 PRINT TAB(3); "G= "; G
640 READ NMT, NQ, N: H = L / N
650 DIM MT(NMT, 2), Q(NQ, 4)
660 PRINT "NMT= "; NMT; TAB(10); "NQ= "; NQ; TAB(20); "N= "; N
670 IF NMT = 0 GOTO 720
680 PRINT: PRINT "NO. "; TAB(10); "ME "; TAB(20); "XM "
690 FOR K = 1 TO NMT
700 READ MT(K, 1), MT(K, 2)
710 PRINT TAB(3); K; TAB(10); MT(K, 1); TAB(20); MT(K, 2): NEXT
    K
720 IF NQ = 0 GOTO 770

```

```

730 PRINT: PRINT " NO. "; TAB( 10); " Q1 "; TAB( 20); " Q2 "; TAB( 30);
    " X1 "; TAB( 40); " X2 "
740 FOR K = 1 TO NQ
750 READ Q(K, 1), Q(K, 2), Q(K, 3), Q(K, 4)
760 PRINT TAB(3); K; TAB( 10); Q(K, 1); TAB( 20); Q(K, 2); TAB( 30);
    Q(K, 3); TAB( 40); Q(K, 4): NEXT K
770 RETURN
2000 REM 子程序: 计算集中外力偶矩在任意截面上引起的扭矩
2010 TX = 0
2020 FOR K = 1 TO NMT
2030 IF TYPE1 = 1 THEN RA = MT(K, 1) ELSE RA = 0
2040 TX = TX + RA
2050 IF X > MT(K, 2) THEN TX = TX - MT(K, 1)
2060 NEXT K
2070 RETURN
2100 REM 子程序: 计算分布外力偶矩在任意截面上引起的扭矩
2110 TX = 0
2120 FOR K = 1 TO NQ
2130 R = 0.5 * (Q(K, 1) + Q(K, 2)) * (Q(K, 4) - Q(K, 3))
2140 IF TYPE1 = 1 THEN TX = TX + R
2150 IF X <= Q(K, 3) GOTO 2200
2160 IF X > Q(K, 4) GOTO 2190
2170 XX = X - Q(K, 3): R1 = Q(K, 1) * XX
2180 R2 = 0.5 * (Q(K, 2) - Q(K, 1)) * XX * XX / (Q(K, 4) - Q(K,
    3))
2185 TX = TX - R1 - R2: GOTO 2200
2190 TX = TX - R
2200 NEXT K
2210 RETURN
2300 REM 子程序: 计算扭矩在各结点处的值
2310 FOR I = 0 TO N
2320 X = I * H: T(I) = 0
2330 IF NMT = 0 GOTO 2360
2340 GOSUB 2000
2350 T(I) = T(I) + TX
2360 IF NQ = 0 GOTO 2390
2370 GOSUB 2100
2380 T(I) = T(I) + TX

```

```

2390 NEXT I
2400 RETURN
2450 REM 子程序: 计算各结点处扭转切应力
2460 FOR I = 0 TO N
2470 ST(I) = T(I) / WN(I)
2480 NEXT I
2490 RETURN
2600 REM 子程序: 计算杆的扭转角
2610 C = 0.5 * H / G: R(0) = 0
2620 C1 = T(0) / IP(0)
2630 FOR I = 1 TO N
2640 C2 = T(I) / IP(I)
2650 R(I) = R(I - 1) + C * (C1 + C2)
2660 C1 = C2
2670 NEXT I
2680 RETURN
4800 REM 子程序: 求函数最大值和最小值通用子程序
4810 F1 = - 1E + 10: F2 = 1E + 10
4820 FOR I = 0 TO N
4830 IF F(I) > F1 THEN F1 = F(I): I1 = I
4840 IF F(I) < F2 THEN F2 = F(I): I2 = I
4850 NEXT I
4860 X1 = I1 * H: X2 = I2 * H
4870 RETURN
5000 REM 子程序: 画函数图像
5010 LINE (X0, Y0) - (X0 + 220, Y0): LOCATE (Y0 - 2) * 25 / 200,
(X0 + 230) * 80 / 640: PRINT " X "
5020 LINE (X0, Y0 + 9) - (X0, Y0 - 12): LOCATE (Y0 - 12) * 25 /
200, (X0 - 15) * 80 / 640: PRINT W $
5030 K1 = 200 / (L1 + L2 + L)
5040 IF ABS(F1) > ABS(F2) THEN K1 = 12 / ABS(F1) ELSE K2 = 12
/ ABS(F2)
5050 PSET (X0, Y0 - K2 * F(0))

```

```

5060 FOR I = 1 TO N
5070 X = I * H: LINE - (X0 + K1 * X, Y0 - K2 * F(I))
5080 NEXT I
5090 IR = (Y0 - 14) * 25 / 200: IC = (X0 + 250) * 80 / 640
5100 LOCATE IR, IC: PRINT " ( "; W$; " )max = "; F1, TAB(IC + 25); " X
    = "; X1
5110 LOCATE IR + 1, IC: PRINT " ( "; W$; " )min = "; F2, TAB(IC + 25);
    " X = "; X2
5120 RETURN

```

3. 程序说明:

(1) 程序中变量和数组的意义

TYPE1——杆的类型

TYPE1= 1 为左端固定, 右端自由杆,

TYPE1= 2 为两端自由杆;

L——杆的长度;

G——剪切弹性模量;

NMT——集中外力偶矩数;

NQ——分布外力偶矩数;

N——杆的分段数;

H——步长;

SW——程序工况选择参数;

SW= 1 内力分析

SW= 2 内力、应力分析

SW= 3 内力、应力和变形分析

K——载荷顺序码 K;

MT(NMT, 2)——存放集中外力偶矩信息; MT(K, 1) = M_{ek} , MT(K, 2) = X_{Mk} ;

Q(NQ, 4)——存放分布外力偶矩信息; Q(K, 1) = q_{1k} , Q(K, 2) = q_{2k} , Q(K, 3) = x_{1k} , Q(K, 4) = x_{2k} ;

T(N)——存放结点扭矩;

$ST(N)$ —— 存放结点处最大扭转应力;
 $R(N)$ —— 存放结点处扭转角;
 $F(N)$ —— 工作单元;
 $IP(N)$ —— 存放各结点处极惯性矩;
 $WN(N)$ —— 存放各结点处抗扭截面模量;
 X —— 坐标 x ;
 TX —— 任意截面上扭矩 $T(x)$;
 WNX —— 任意截面的抗扭截面模量 $W_n(x)$;
 IPX —— 任意截面的极惯性矩 $IP(x)$ 。

(2) 各子程序的意义:

子程序: 输入初始数据并显示(600 ~ 770);
 子程序: 计算集中力偶矩在任意截面上引起的扭矩(2000 ~ 2070);
 子程序: 计算分布外力偶矩在任意截面上引起的扭矩(2100 ~ 2210);
 子程序: 计算扭矩在各结点处的值(2300 ~ 2400);
 子程序: 计算各结点处扭转切应力(2450 ~ 2490);
 子程序: 计算杆的扭转角(2600 ~ 2680);
 子程序: 求函数最大值和最小值通用子程序(4800 ~ 4870);
 子程序: 画函数曲线通用子程序(5000 ~ 5120);
 子程序: 用户输入杆截面的极惯矩和抗扭截面模量(6000 ~ 6990); 输入形式可参考例题;
 若只进行内力分析可不输入;

子程序: 用户输入初始数据(7000 ~ 7040);

输入格式

```

7000 REM 子程序: 用户输入初始数据
7010 DATA TYPE1, L, G
7020 DATA NMT, NQ, N
7030 DATA MT(NMT, 2) (若 NMT= 0 此项不输入)
7040 DATA Q(NQ, 4) (若 NQ= 0 此项不输入)
  
```


(3)单位: 力——kN

长度——m

4. 程序算例:

阶梯形圆轴直径分别为 $d_1 = 4\text{cm}$, $d_2 = 7\text{cm}$, 轴上装有三个皮带轮如图 9-5 所示。已知由轮 3 输入的功率为 $N_3 = 30\text{kW}$, 轮 1 输出的功率 $N_1 = 13\text{kW}$, 轴作匀速转动, 转速 $n = 200\text{r/min}$, 材料的剪切许用应力 $[\tau] = 60\text{MPa}$, 试校核强度并计算 1 轮和 3 轮之间相对转角 φ 。

输入内容:

图 9-5

根据题意 $\text{TYPE1} = 2$, $L = 1.8\text{m}$, $G = 8 \times 10^7 \text{KPa}$, 有三个集中外力偶矩, $\text{NMT} = 3$, $M_1 = 0.6207\text{kN} \cdot \text{m}$, $M_2 = 0.8117\text{kN} \cdot \text{m}$, $M_3 = -1.432\text{kN} \cdot \text{m}$ 分别作用在 $x_{M1} = 0$, $x_{M2} = 0.8\text{m}$ 和 $x_{M3} = 1.8\text{m}$ 的截面上, 无分布力偶矩 $\text{NQ} = 0$, 取 $N = 50$, 要求计算变形 $\text{SW} = 3$, 截面变化规律为:

$$D = \begin{matrix} 0.04 & 0 & x & 0.5 \\ 0.07 & 0.5 < x < 1.8 \end{matrix}$$

所以用户输入截面几何性质的子程序及初始数据如下:

```
6000 REM 子程序: 用户输入截面几何性质
6010 IF X > 0.5 GOTO 6030
6020 D = 0.04: GOTO 6040
6030 D = 0.07
6040 WNX = 3.1416 * D ^ 3 / 16: IPX = WNX * D / 2
6060 RETURN
7000 REM 子程序: 用户输入初始数据
7010 DATA 2, 1.8, 8E7
```

```
7020 DATA 3, 0, 50
7030 DATA 0. 6207, 0, 0. 8117, 0. 8
7040 DATA - 1. 432, 1. 8
```

程序运行结果

RUN

TYPE1= 2 L= 1. 8

G= 8E+ 07

NMT= 3 NQ= 0 N= 50

NO.	ME	XM
-----	----	----

1	0. 6207	0
---	---------	---

2	0. 8117	0. 8
---	---------	------

3	- 1. 432	1. 8
---	----------	------

您计算什么(WHAT DO YOU COMPUTE)?

1——内力 (INTER FORCE)

2——内力和应力 (INTER FORCE AND STRESS)

3—— 内力、应力和变形 (INTER FORCE AND STRESS
AND DEFORMATION)

SW= ? 3

计算结果屏幕显示如图 9-6。

图 9-6

§ 9-3 弯曲静定问题的数值解法

1. 程序框图:

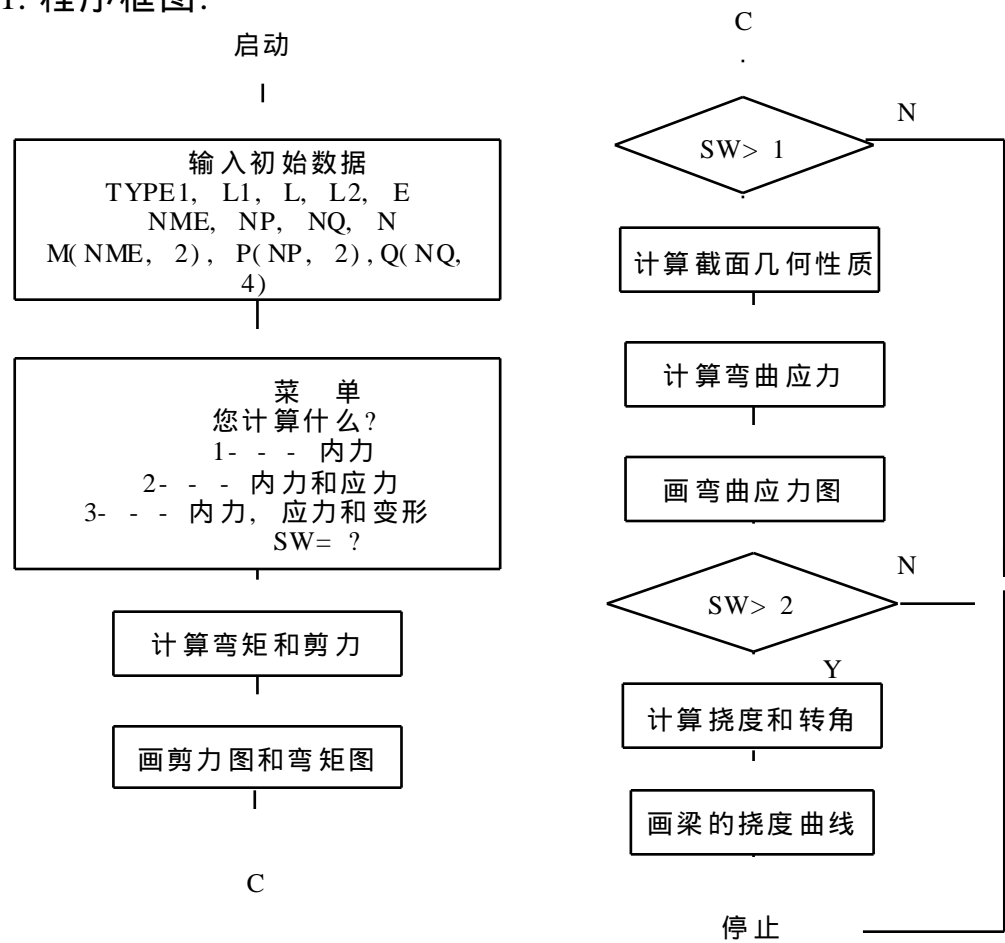


图 9-7

2. 用 BASIC 语言设计的程序如下:

```
80 REM 弯曲静定问题的数值解法通用程序 BEAM.BAS
90 REM 输入初始数据并显示
100 GOSUB 600
110 DIM QB(N), M(N), IZ(N), W1(N), W2(N)
120 DIM ST1(N), ST2(N), Y(N), DY(N), F(N)
130 REM 程序菜单
140 PRINT " 您想计算什么(WHAT DO YOU COMPUTE)? "
150 PRINT " 1——内力(INTER FORCE) "
160 PRINT " 2——内力和应力(INTER FORCE AND STRESS) "
```

```

170 PRINT " 3——内力、应力和变形(INTER FORCE AND STRESS AND
    DEFORMATION) "
180 INPUT " SW= ";SW:CLS:SCREEN 2
190 REM 计算结点内力
200 GOSUB 3650
210 REM 计算内力最大值和最小值并画内力图
220 FOR I = 0 TO N:F(I) = QB(I):NEXT I
230 GOSUB 4800
240 W$ = " Q ":X0 = 30:Y0 = 25:GOSUB 5000
250 FOR I = 0 TO N:F(I) = M(I):NEXT I
260 GOSUB 4800
270 W$ = " M ":X0 = 30:Y0 = 65:GOSUB 5000
280 IF SW < 2 GOTO 560
290 REM 计算截面几何性质
300 FOR I = 0 TO N
310 X = I * H:GOSUB 6000
320 IZ(I) = IZX:W1(I) = WX1:W2(I) = WX2
330 NEXT I
335 REM 计算弯曲应力
340 GOSUB 3800
350 REM 计算最大弯曲拉、压应力并画应力图
360 FOR I = 1 TO N:F(I) = ST1(I):NEXT I
370 GOSUB 4800
380 C1 = F1:C2 = X1:C3 = F2:C4 = X2
390 FOR I = 0 TO N:F(I) = ST2(I):NEXT I
400 GOSUB 4800
410 IF F1 < C1 THEN F1 = C1:X1 = C2
420 IF F2 > C3 THEN F2 = C3:X2 = C4
430 W$ = " ST ":X0 = 30:Y0 = 105:GOSUB 5000
440 FOR I = 0 TO N:F(I) = ST1(I):NEXT I
450 W$ = " ST ":X0 = 30:Y0 = 105:GOSUB 5000
455 IF SW < 3 GOTO 560
460 REM 计算梁的挠度和转角

```

```

470 GOSUB 3850
480 REM 计算梁的挠度和转角的最大值和最小值并画图
490 FOR I = 0 TO N: F(I) = Y(I): NEXT I
500 GOSUB 4800
510 W$ = "Y "; X0 = 30: Y0 = 145: GOSUB 5000
520 FOR I = 0 TO N: F(I) = DY(I): NEXT I
530 GOSUB 4800
540 LOCATE IR + 2, IC: PRINT " (DY)max = "; F1; " X = "; X1
550 LOCATE IR + 3, IC: PRINT " (DY)min = "; F2; " X = "; X2
560 END
600 REM 子程序: 输入初始数据并显示
610 READ TYPE1, L1, L, L2, E
620 PRINT " TYPE1 = "; TYPE1
630 PRINT " L1 = "; L1; TAB(10); " L = "; L; TAB(20); " L2 = "; L2
640 PRINT " E = "; E
650 READ NME, NP, NQ, N: H = (L1 + L + L2) / N
660 DIM ME(NME, 2), P(NP, 2), Q(NQ, 4)
665 PRINT " NME = "; NME; TAB(10); " NP = "; NP; TAB(20); " NQ = ";
    NQ; TAB(30); " N = "; N
670 IF NME = 0 GOTO 730
680 PRINT : PRINT " NO. "; TAB(10); " ME "; TAB(20); " XM "
690 FOR K = 1 TO NME
700 READ ME (K, 1), ME (K, 2)
710 PRINT TAB(3); K; TAB(10); ME(K, 1); TAB(20); ME(K, 2)
720 NEXT K
730 IF NP = 0 GOTO 790
740 PRINT : PRINT " NO. "; TAB(10); " P "; TAB(20); " XP "
750 FOR K = 1 TO NP
760 READ P(K, 1), P(K, 2)
770 PRINT TAB(3); K; TAB(10); P(K, 1); TAB(20); P(K, 2)
780 NEXT K
790 IF NQ = 0 GOTO 850
800 PRINT : PRINT " NO. "; TAB(10); " Q1 "; TAB(20); " Q2 "; TAB(30);

```

```

“ X1 ”;TAB(40);“ X2 ”
810 FOR K = 1 TO NQ
820 READ Q(K, 1), Q(K, 2); Q(K, 3), Q(K, 4)
830 PRINT TAB(3);K; TAB(10); Q(K, 1); TAB(20); Q(K, 2); TAB
    (30); Q(K, 3); TAB(40); Q(K, 4)
840 NEXT K
850 RETURN
3000 REM 子程序: 计算集中外力偶在任意截面上引起的内力
3010 QX = 0: MX = 0
3020 FOR K = 1 TO NME
3030 ON TYPE1 GOTO 3040, 3050
3040 MX = MX + ME(K, 1): GOTO 3080
3050 A = ME(K, 1) / L: B = - A
3060 IF X > L1 THEN QX = QX + A: MX = MX + A * (X - L1)
3070 IF X > L1 + L THEN QX = QX + B: MX = MX + B * (X - L1
    - L)
3080 IF X > ME(K, 2) THEN MX = MX - ME(K, 1)
3090 NEXT K
3100 RETURN
3200 REM 子程序: 计算集中外力在任意截面上引起的内力
3210 QX = 0: MX = 0
3220 FOR K = 1 TO NP
3230 ON TYPE1 GOTO 3240, 3260
3240 A = - P(K, 1): MA = P(K, 1) * P(K, 2)
3250 QX = QX + A: MX = MX + MA + A * X: GOTO 3290
3260 B = - P(K, 1) * (P(K, 2) - L1) / L: A = - B - P(K, 1)
3270 IF X > L1 THEN QX = QX + A: MX = MX + A * (X - L1)
3280 IF X > L1 + L THEN QX = QX + B: MX = MX + B * (X - L1
    - L)
3290 IF X > P(K, 2) THEN QX = QX + P(K, 1): MX = MX + P(K, 1)
    * (X - P(K, 2))
3300 NEXT K
3310 RETURN

```

```

3400 REM 子程序: 计算分布载荷在任意截面上所引起的内力
3410 QX = 0: MX = 0
3420 FOR K = 1 TO NQ
3430 DQ = Q(K, 2) - Q(K, 1): DX = Q(K, 4) - Q(K, 3)
3440 R1 = Q(K, 1) * DX: R2 = DQ * DX / 2
3450 ON TYPE1 GOTO 3460, 3490
3460 A = - R1 - R2
3470 MA = R1 * (Q(K, 3) + Q(K, 4)) / 2 + R2 * (Q(K, 3) + 2 *
      DX / 3)
3480 QX = QX + A: MX = MX + MA + A * X
3485 GOTO 3530
3490 B = - (R1 * (Q(K, 3) + DX / 2 - L1) + R2 * (Q(K, 3) + 2 *
      DX / 3 - L1)) / L
3500 A = - R1 - R2 - B
3510 IF X > L1 THEN QX = QX + A: MX = MX + A * (X - L1)
3520 IF X > L1 + L THEN QX = QX + B: MX = MX + B * (X - L1
      - L)
3530 IF X < = Q(K, 3) GOTO 3560
3540 XX = X - Q(K, 3): R1 = Q(K, 1) * XX: R2 = 0.5 * DQ * XX
      * XX / DX
3550 QX = QX + R1 + R2: MX = MX + (0.5 * R1 + R2 / 3) * XX
3560 IF X < = Q(K, 4) GOTO 3590
3570 XX = X - Q(K, 4): R1 = Q(K, 2) * XX: R2 = 0.5 * DQ * XX *
      XX / DX
3580 QX = QX - R1 - R2: MX = MX - (0.5 * R1 + R2 / 3) * XX
3590 NEXT K
3600 RETURN
3650 REM 子程序: 计算梁的结点内力
3660 FOR I = 0 TO N
3670 X = I * H: QB(I) = 0: M(I) = 0
3680 IF NME = 0 GOTO 3710
3690 GOSUB 3000
3700 QB(I) = QB(I) + QX: M(I) = M(I) + MX

```

```

3710 IF NP = 0 GOTO 3740
3720 GOSUB 3200
3730 QB(I) = QB(I) + QX: M(I) = M(I) + MX
3740 IF NQ = 0 GOTO 3770
3750 GOSUB 3400
3760 QB(I) = QB(I) + QX: M(I) = M(I) + MX
3770 NEXT I
3780 RETURN
3800 REM 子程序: 计算弯曲应力
3810 FOR I = 0 TO N
3820 ST1(I) = - M(I) / W1(I): ST2(I) = M(I) / W2(I): NEXT I
3830 RETURN
3850 REM 子程序: 计算梁的挠度和转角
3860 FOR I = 0 TO N
3870 M(I) = M(I) / IZ(I)
3880 NEXT I
3890 C = H * H / E: Y(0) = 0: Y(1) = 0.5 * C * M(0)
3900 FOR I = 1 TO N - 1: Y(I + 1) = C * M(I) + 2 * Y(I) - Y(I
    - 1): NEXT I
3910 IF TYPE1 = 1 GOTO 3940
3920 IA = INT(L / H): IB = INT((L1 + L) / H): K = (Y(IB) - Y
    (IA)) / L
3930 FOR I = 0 TO N: Y(I) = Y(I) - Y(IA) - K * (I - IA) * H:
    NEXT I
3940 C = 0.5 / H: DY(0) = C * (- 3 * Y(0) + 4 * Y(1) - Y(2))
3950 FOR I = 1 TO N - 1: DY(I) = C * (Y(I + 1) - Y(I - 1)):
    NEXT I
3960 DY(N) = C * (Y(N - 2) - 4 * Y(N - 1) + 3 * Y(N))
3970 RETURN
4800 REM 子程序: 求函数最大值和最小值通用子程序
4810 F1 = - 1E + 10: F2 = 1E + 10
4820 FOR I = 0 TO N
4830 IF F(I) > F1 THEN F1 = F(I): I1 = I

```



```

4840 IF F(I) < F2 THEN F2 = F(I):I2 = I
4850 NEXT I
4860 X1 = I1 * H:X2 = I2 * H
4870 RETURN
5000 REM 子程序:画函数图像
5010 LINE (X0,Y0) - (X0 + 220,Y0):LOCATE (Y0 - 2) * 25 / 200,
      (X0 + 230) * 80 / 640:PRINT" X "
5020 LINE (X0,Y0 + 9) - (X0,Y0 - 12):LOCATE (Y0 - 12) * 25 /
      200,(X0 - 15) * 80 / 640:PRINT W $
5030 K1 = 200 / (L1 + L2 + L)
5040 IF ABS(F1) > ABS(F2) THEN K1 = 12 / ABS(F1) ELSE K2 = 12
      / ABS(F2)
5050 PSET (X0,Y0 - K2 * F(0))
5060 FOR I = 1 TO N
5070 X = I * H:LINE - (X0 + K1 * X,Y0 - K2 * F(I))
5080 NEXT I
5090 IR = (Y0 - 14) * 25 / 200:IC = (X0 + 250) * 80 / 640
5100 LOCATE IR,IC:PRINT " ( ";W $ ;" )max = ";F1,TAB(IC + 25);" X
      = ";X1
5110 LOCATE IR + 1,IC:PRINT" ( ";W $ ;" )min = ";F2,TAB(IC + 25);
      " X = ";X2
5120 RETURN

```

3. 程序说明:

(1) 程序中变量和数组的意义

TYPE1——梁的类型

TYPE1= 1 悬臂梁

TYPE1= 2 外伸梁(包括简支梁)

L₁——左外伸臂长;

L——梁的跨度

L₂——右外伸臂长;

E——弹性模量;

NME——集中力偶数;

NP——集中力数目;
 NQ——分布载荷数目;
 N——梁的等分数;
 H——步长 $H = (L_1 + L + L_2) / N$;
 K——载荷顺序码 K;
 ME(NME, 2)——存放集中力偶矩信息;
 P(NP, 2)——存放集中力信息;
 Q(NQ, 4)——存放分布载荷信息;
 QB(N)——存放结点处剪力;
 M(N)——存放结点处弯矩;
 IZ(N)——存放各结点处轴惯矩;
 W1(N)、W2(N)——存放各结点处抗弯截面模量 W_1 、

W_2 ;

ST1(N)、ST2(N)——存放截面上、下边缘处弯曲应力;
 Y(N)——存放结点处挠度 y_i ;
 DY(N)——存放结点处转角 y_i ;
 F(N)——工作单元;
 X——坐标 x ;
 IZX——梁任意截面轴惯矩 $I_z(X)$;
 WX1、WX2——任意截面的抗弯截面系数 $W_1(x)$ 、 W_2
 (x)。

(2) 各子程序的意义:

子程序: 输入初始数据并显示(600 ~ 850);

子程序: 计算集中力偶在任意截面上引起的内力(3000 ~ 3100);

子程序: 计算集中力在任意截面上引起的内力(3200 ~ 3310);

子程序: 计算分布载荷在任意截面上引起的内力(3400 ~ 3600);

子程序: 计算梁的结点内力(3650 ~ 3780);

子程序: 计算弯曲正应力(3800 ~ 3830);

子程序: 计算梁的挠度和转角(3850 ~ 3970);

子程序: 计算函数最大值和最小值通用子程序(4800 ~ 4870);

子程序: 画函数图像通用子程序(5000 ~ 5120);

子程序: 用户输入梁截面几何性质 $I_z(x)$ 、 $W_1(x)$ 、 $W_2(x)$
(6000 ~ 6990); 输入形式可参考例题;

若只进行内力分析可不编写此子程序;

子程序: 用户输入初始数据输入格式(7000 ~ 7050),

7000 REM 子程序: 用户输入初始数据

7010 DATA TYPE1, L1, L, L2, E

7020 DATA NME, NP, NQ, N

7030 DATA ME(NME, 2) (若 NME= 0 此项不输入)

7040 DATA P(NP, 2) (若 NP= 0 此项不输入)

7050 DATA Q(NQ, 4) (若 NQ= 0 此项不输入)

(3) 单位: 力——kN

长度——m

4. 程序算例:

例 1 外伸梁受载荷如图 9-8 所示, 试作梁的弯矩图和剪力图。

图 9-8

输入内容:

图 9-8 所示的是一右边外伸梁, $TYPE1=2$, $L_1=0$, $L=12\text{ m}$, $L_2=3\text{ m}$ 。只要求画内力图, 可令 $E=1$, 梁上受一集中力偶作用 $NME=1$, $M_e=10\text{ kN}\cdot\text{m}$, $x_M=8\text{ m}$; 受两个集中力作用, $NP=2$, $P_1=P_2=-2\text{ kN}$, $x_M=4\text{ m}$, $x_M=15\text{ m}$; 受一组分布载荷作用, $NQ=1$, $q_1=-1\text{ kN/m}$, $q_2=-1\text{ kN/m}$, $x_1=0$, $x_2=8\text{ m}$ 。取 $N=100$, 因只计算内力, $SW=1$, 可不输入截面几何性质, 只输入初始数据。

```
7000 REM 初始数据
7010 DATA 2, 0, 12, 3, 1
7020 DATA 1, 2, 1, 100
7030 DATA 10, 8
7040 DATA - 2, 4, - 2, 15
7050 DATA - 1, - 1, 0, 8
```

程序运行结果

```
RUN
TYPE1= 2          L1= 0          L= 12
L2= 3
NME= 1            NP= 2          NQ= 1
N= 100
NO.               ME             XM
1                 10             8
NO.               P              XP
1                 - 2            4
2                 - 2            15
NO.               Q1             Q2             X1             X2
1                 - 1            - 1            0             8
```

您计算什么(WHAT DO YOU COMPUTE)?

- 1——内力(INTER FORCE)
- 2——内力和应力(INTER FORCE AND STRESS)
- 3—— 内力、应力和变形(INTER FORCE AND STRESS

AND DEFORMATION)

SW= ? 1

屏幕显示如图 9-9。

图 9-9

例 2 图 9-10a 表示一 T 形截面铸铁梁。铸铁的抗拉许用应力为 $[\sigma]_{\text{拉}} = 30\text{MPa}$, 抗压许用应力 $[\sigma]_{\text{压}} = 60\text{MPa}$ 。T 形截面尺寸如图 9-10b 所示。已知截面对形心轴 z 的惯性矩 $I_z = 763\text{cm}^4$, 且 $y_1 = 52\text{mm}$ 。试校核梁的强度。

图 9-10

输入内容:

6000 REM 子程序: 用户输入梁的截面性质

6010 IZX= 7.63E- 6: WX1= 1.4673E- 4: WX2= 8.67E- 5

6020 RETURN

7000 REM 输入初始数据

7010 DATA 2, 0, 2, 1, 1

7020 DATA 0, 2, 0, 30

7030 DATA - 9, 1, - 4, 3

程序运算结果如下:

RUN

TYPE1= 2 L1= 0 L= 2

L₂= 3

E= 1

NME= 0 NP= 2 NQ= 0

N= 30

NO.	P	XP
-----	---	----

1	- 9	1
---	-----	---

2	- 4	3
---	-----	---

您计算什么(WHAT DO YOU COMPUTE)?

1——内力(INTER FORCE)

2——内力和应力(INTER FORCE AND STRESS)

3—— 内力、应力和变形(INTER FORCE AND STRESS
AND DEFORMATION)

SW= ? 2

屏幕显示如图 9-11。

计算结果, 最大拉应力为 $(ST)_{\max} = 28546.71\text{kPa}$, 小于材料许用拉应力; 最大压应力为: $(ST)_{\min} = 45674\text{kPa}$, 小于材料许用压应力。所示梁的强度足够。

例 3 试求图 9-12 所示阶梯梁的最大挠度和最大转角。

输入内容

本题中结构参数和载荷不是具体数字, 而是文字参数, 必须将它们化为无量纲参数输入。若长度以梁的长度 L 为单位, 力以 P 为单位, 弹性系数以 E 为单位, 梁的截面抗弯刚度以 I 为单位, 抗

图 9-11

弯截面模量以 W 为单位, 则
程序计算得到的弯矩以 PL
为单位, 弯曲应力以 PL/W
为单位, 挠度以 PL^3/EI 为单
位, 转角以 PL^2/EI 为单位。
于是用户输入梁截面几何性
质的子程序和初始数据如
下:

图 9-12

```
6000 REM 子程序: 用户输入梁截面几何性质
6010 IF X> 0.5 GOTO 6030
6020 IZX= 2: WX1= 2: WX2= 2: GOTO 6040
6030 IZX= 1: WX1= 1: WX2= 1
6040 RETURN
7000 REM 输入初始数据
7010 DATA 1, 0, 1, 0, 1
7020 DATA 0, 1, 0, 100
7030 DATA - 1, 1
程序运算结果如下:
```

```
      RUN
TYPE1= 2          L1= 0          L= 1
```

$$L_2 = 0$$

$$NME = 0 \quad NP = 1 \quad NQ = 0$$

$$N = 100$$

$$NO. \quad P \quad XP$$

$$1 \quad -1 \quad 1$$

您计算什么(WHAT DO YOU COMPUTE)?

1——内力(INTER FORCE)

2——内力和应力(INTER FORCE AND STRESS)

3—— 内力、应力和变形(INTER FORCE AND STRESS
AND DEFORMATION)

$$SW = ? \quad 3$$

计算结果屏幕显示如图 9-13。

图 9-13

由图 9-13 得 $Q_{\max} = P$, $M_{\max} = PL$, 最大弯曲应力 $\sigma_{\max} = 0.5PL/W$, $\delta_{\max} = 0.1846PL^3/EI$, $\theta_{\max} = 0.3075PL^2/EI$ 。

§ 9-4 组合变形的数值解法

1. 程序框图:

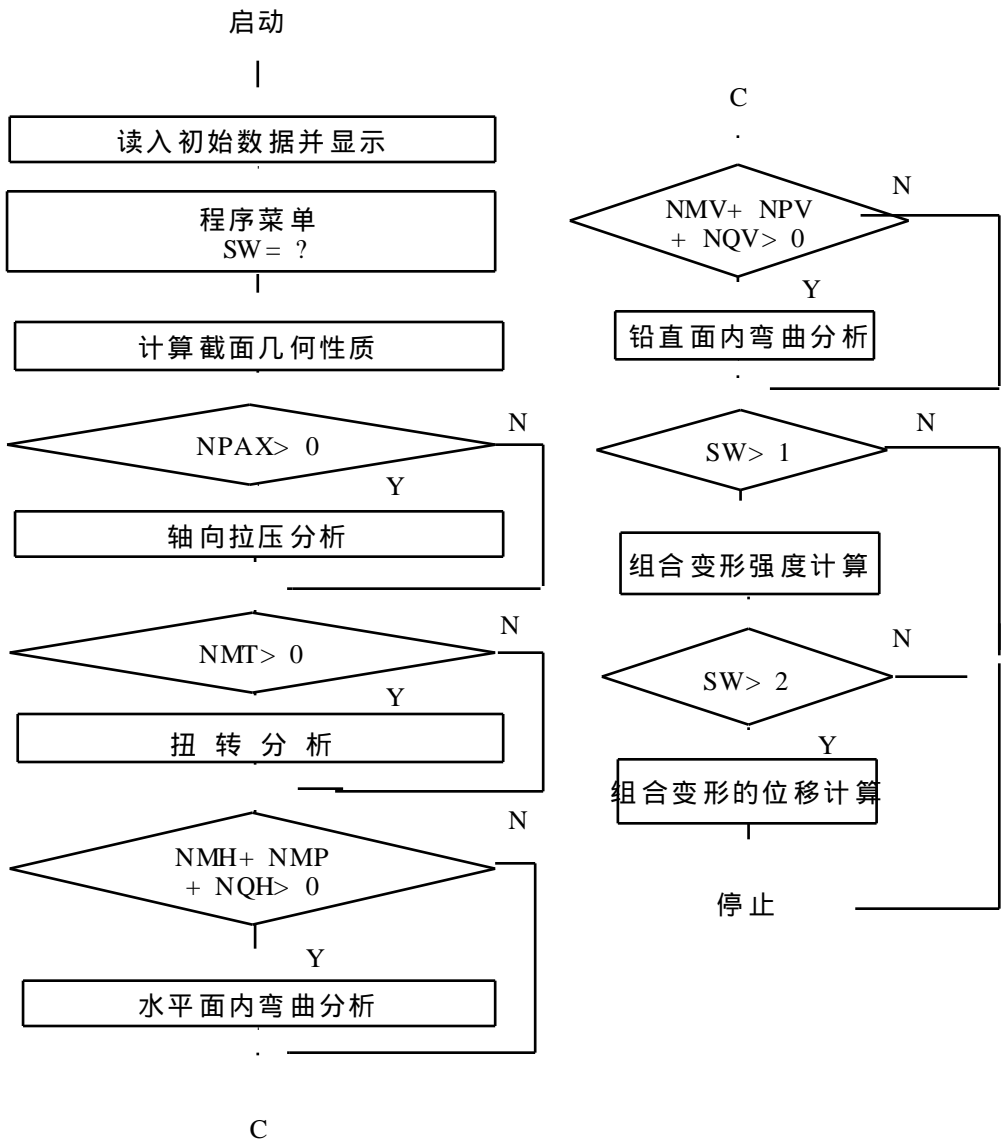


图 9-14

2. 程序列表:

2 REM 直杆组合变形分析程序.COMB. BAS

4 DIM T(N), R(N), V(N), DV(N), W(N), DW(N), F(N), FIN(N), WN(N), SEQ(N)

6 REM 输入初始数据并显示

8 GOSUB 200

10 REM 程序菜单

12 PRINT " 您想计算什么(WHAT DO YOU COMPUTE) ? "

14 PRINT " 1——内力(INTER FORCE) "

16 PRINT " 2——内力和应力(INTER FORCE AND STRESS) "

18 PRINT " 3——内力、应力和变形(INTER FORCE AND STRESS AND

```

    DEFORMATION) ”
20 INPUT “ SW= ”;SW
22 IF SW < 2 GOTO 32
24 REM 计算截面几何性质
26 GOSUB 400
28 PRINT “ 用第三或第四强度理论? (3 或 4) ”
29 PRINT “ WHICH IS USED TRIED OF FOURTH THEORY OF
    STRENGTH ? (3OR4) ”
30 INPUT “ W2= ”;W2:CLS:SCREEN 2
31 DIM ST 1(N),ST2(N),ST 3(N),ST4(N),ST 5(N)
32 REM 轴向拉、压变形分析
34 IF NPX > 0 THEN GOSUB 530
36 REM 扭转变形分析
38 IF NMT > 0 THEN GOSUB 600
40 REM 水平面内弯曲变形分析
42 IF NMH + NPH + NQH > 0 THEN GOSUB 700
44 REM 铅直平面内弯曲变形分析
46 IF NMV + NPV + NQV > 0 THEN GOSUB 800
48 IF SW = 1 GOTO 118
50 REM 直杆组合变形强度计算
52 IF SHAPE = 1 THEN GOSUB 900 ELSE GOSUB 940
54 FOR I = 0 TO N:F(I) = SEQ(I):NEXT I
56 GOSUB 4800
58 W$ = “ SEQ ”:X0 = 30:Y0 = 165:GOSUB 5000
60 IF SW = 2 GOTO 118
62 REM 直杆组合变形刚度计算
64 LOCATE (Y0 + 15) / 8,1
66 IF NPX = 0 GOTO 74
68 FOR I = 0 TO N:F(I) = U(N):NEXT I
70 GOSUB 4800
72 PRINT “ (U)max= ”;F1;TAB(25);“ X= ”;X1;TAB(40);“ (U)min= ”;F2;
    TAB(60);“ X= ”;X2
74 IF NMT = 0 GOTO 82
75 GOSUB 2600
76 FOR I = 0 TO N:F(I) = R(I):NEXT I
78 GOSUB 4800
80 PRINT “ (ROT)max= ”;F1;TAB(25);“ X= ”;X1;TAB(40);“ (ROT)min
    = ”;F2;TAB(60);“ X= ”;X2
82 IF NMH + NPH + NQH = 0 GOTO 104

```

```

92 FOR I = 0 TO N: F(I) = V(I): NEXT I
94 GOSUB 4800
96 PRINT " (V)max = "; F1; TAB(25); " X= "; X1; TAB(40); " (V)min = "; F2;
    TAB(60); " X= "; X2
98 FOR I = 0 TO N: F(I) = DV(I): NEXT I
100 GOSUB 4800
102 PRINT " (DV)max = "; F1; TAB(25); " X= "; X1; TAB(40); " (DV)min
    = "; F2; TAB(60); " X= "; X2
104 IF NMV + NPV + NQV = 0 GOTO 118
106 FOR I = 0 TO N: F(I) = W(I): NEXT I
108 GOSUB 4800
110 PRINT " (W)max = "; F1; TAB(25); " X= "; X1; TAB(40); " (W)min = ";
    F2; TAB(60); " X= "; X2
112 FOR I = 0 TO N: F(I) = DV(I): NEXT I
114 GOSUB 4800
116 PRINT " (DW)max = "; F1; TAB(25); " X= "; X1; TAB(40); " (DW)min
    = "; F2; TAB(60); " X= "; X2
118 END

200 REM 读入初始数据并显示
202 READ TYPE1, SHAPE, L1, L, L2, E, G, N
203 H = (L1 + L2 + L) / N
204 PRINT " TYPE1= "; TYPE1; TAB(10); " SHAPE= "; SHAPE
206 PRINT " L1= "; L1; TAB(10); " L= "; L; TAB(20); " L2= "; L2
208 PRINT " E= "; E; TAB(10); " G= "; G; TAB(20); " N= "; N
210 DIM M(N), Y(N), DY(N), P(10, 2), ME(10, 2), Q(5, 4)
212 READ NPX, NMT, NMH, NPH, NQH, NMV, NPV, NQV
214 PRINT " NPX= "; NPX; TAB(10); " NMT= "; NMT
216 PRINT " NMH= "; NMH; TAB(10); " NPH= "; NPH; TAB(20); " NQH
    = "; NQH
218 PRINT " NMV= "; NMV; TAB(10); " NPV= "; NPV; TAB(20);
    " NQV= "; NQV
219 DIM PX(NPX, 2), MT(NMT, 2), MH(NMH, 2), PH(NPH, 2), QH
    (NQH, 4), MV(NHV, 2), PV(NPV, 2), QV(NQV, 4)

```

```

220 IF NPX = 0 GOTO 232
222 PRINT :PRINT " NO. "; TAB(10); " PX "; TAB(20); " XP "
224 FOR K = 1 TO NPX
226 READ PX (K, 1), PX(K, 2)
228 PRINT TAB(3); K; TAB(10); PX(K, 1); TAB(20); PX(K, 2)
230 NEXT K
232 IF NMT = 0 GOTO 244
234 PRINT :PRINT " NO. "; TAB(10); " MT "; TAB(20); " XM "
236 FOR K = 1 TO NMT
238 READ MT (K, 1), MT(K, 2)
240 PRINT TAB(3); K; TAB(10); MT(K, 1); TAB(20); MT(K, 2)
242 NEXT K
244 IF NMH = 0 GOTO 256
246 PRINT :PRINT " NO. "; TAB(10); " MH "; TAB(20); " XM "
248 FOR K = 1 TO NMH
250 READ MH(K, 1), MH(K, 2)
252 PRINT TAB(3); K; TAB(10); MH(K, 1); TAB(20); MH(K, 2)
254 NEXT K
256 IF NPH = 0 GOTO 270
258 PRINT:PRINT " NO. "; TAB(10); " PH "; TAB(20); " XP "
260 FOR K = 1 TO NPH
262 READ PH(K, 1), PH(K, 2)
264 PRINT TAB(3); K; TAB(10); PH(K, 1); TAB(20); PH(K, 2)
268 NEXT K
270 IF NQH = 0 GOTO 282
272 PRINT:PRINT " NO. "; TAB(10); " OH1 "; TAB(20); " QH2 "; TAB
    (30); " X1 "; TAB(40); " X2 "
274 FOR K = 1 TO NQH
276 READ QH(K, 1), QH(K, 2), QH(K, 3), QH(K, 4)
278 PRINT TAB(3); K; TAB(10); QH(K, 1); TAB(20); QH(K, 2); TAB
    (30); QH(K, 3); TAB(40); QH(K, 4)
280 NEXT K
282 IF NMV = 0 GOTO 294

```

```

284 PRINT: PRINT " NO. "; TAB(10); " MV "; TAB(20); " XM "
286 FOR K = 1 TO NMV
288 READ MV(K, 1), MV(K, 2)
290 PRINT TAB(3); K; TAB(10); MV(K, 1); TAB(20); MV(K, 2)
292 NEXT K
294 IF NPV = 0 GOTO 306
296 PRINT: PRINT " NO. "; TAB(10); " PV "; TAB(20); " XP "
298 FOR K = 1 TO NPV
300 READ PV(K, 1), PV(K, 2)
302 PRINT TAB(3); K; TAB(10); PV(K, 1); TAB(20); PV(K, 2)
304 NEXT K
306 IF NQV = 0 GOTO 318
308 PRINT: PRINT " NO. "; TAB(10); " QV1 "; TAB(20); " QV2 "; TAB
    (30); " X1 "; TAB(40); " X2 "
310 FOR K = 1 TO NQV
312 READ QV(K, 1), QV(K, 2), QV(K, 3), QV(K, 4)
314 PRINT TAB(3); K; TAB(10); QV(K, 1); TAB(20); QV(K, 2); TAB
    (30); QV(K, 3); TAB(40); QV(K, 4)
316 NEXT K
318 RETURN
400 REM 子程序: 计算截面几何性质
405 DIM A(N), IH(N), IV(N), IP(N), WH(N), WV(N), WN1(N), WN2
    (N)
410 FOR I = 0 TO N
415 X = I * H: GOSUB 6000
420 IF SHAPE = 2 GOTO 445
425 A(I) = 3.14159 * D * D / 4: WH(I) = 3.14159 * D * D * D / 32
430 WV(I) = WH(I): WN1(I) = WH(I) * 2
435 IH(I) = WH(I) * D / 2: IV(I) = IH(I): IP(I) = 2 * IV(I)
440 GOTO 505
445 C = HX / BX: A(I) = HX * BX: WH(I) = HX * BX * BX / 6
450 IH(I) = WH(I) * BX / 2: WV(1) = BX * HX * HX / 6
455 IV(I) = WV(I) * HX / 2

```

```

460 IF C > 2 GOTO 480
465 K1 = 0.231 + (0.038 - 0.016 * (C - 1.5)) * (C - 1.5)
470 K2 = 0.858 - (0.204 - 0.16 * (C - 1.5)) * (C - 1.5)
475 K3 = 0.196 + (0.088 - 0.044 * (C - 1.5)) * (C - 1.5):GOTO
    495
480 K1 = 0.282 + (0.0133 - 0.00238 * (C - 4)) * (C - 4)
485 K2 = 0.745 - (0.0133 - 0.00613 * (C - 4)) * (C - 4)
490 K3 = 0.281 + (0.0175 - 0.00425 * (C - 4)) * (C - 4)
495 WN1(I) = K1 * HX * BX * BX:WN2(I) = WN(I) / K2
500 IP(I) = K3 * HX * BX * BX * BX
505 NEXT I
510 RETURN
530 REM 子程序:轴向拉、压变形分析
535 DIM U(N):NP = NPX
540 FOR K = 1 TO NP:P(K,1) = PX(K,1):P(K,2) = PX(K,2):NEXT
    K
542 FOR I = 0 TO N
545 X = I * H:GOSUB 1000
550 FIN(I) = NX
553 NEXT I
555 FOR I= 0 TO N:F(I)= FIN(I):NEXT I
560 GOSUB 4800
565 W$ = " N ":X0= 30:Y0= 25:GOSUB 5000
570 IF SW= 1 GOTO 590
575 FOR I= 0 TO N:ST1(I)= ABS(FIN(I))/A(I):NEXT I
580 IF SW= 2 GOTO 590
585 GOSUB 1600
590 RETURN
600 REM 子程序:扭转变形分析
610 FOR I= 0 TO N
615 X= I * H:GOSUB 2000
620 T(I)= TX:NEXT I
630 FOR I= 0 TO N:F(I)= T(I):NEXT I

```

```

635 GOSUB 4800
640 W$ = " T ": X0= 30: Y0= 60
644 GOSUB 5000
645 IF SW= 1 GOTO 680
650 FOR I= 0 TO N
655 ST2(I)= ABS(T(I))/WN1(I)
660 IF SHAPE= 2 THEN ST3(I)= ABS(T(I))/WN2(I)
665 NEXT I
670 IF SW= 2 GOTO 680
675 GOSUB 2600
680 RETURN
700 REM 子程序: 水平面内弯曲变形分析
705 NME= NMH: NP= NPH: NQ= NQH
710 FOR K= 1 TO NME: NE(K, 1)= MH(K, 1): ME(K, 2)= MH(K, 2):
      NEXT K
715 FOR K= 1 TO NP: P(K, 1)= PH(K, 1): P(K, 2)= PH(K, 2): NEXT K
720 FOR K= 1 TO NQ
725 FOR J= 1 TO 4: Q(K, J)= QH(K, J): NEXT J
730 NEXT K
735 GOSUB 3650
740 FOR I= 0 TO N: F(I)= M(I): NEXT I
745 GOSUB 4800
750 W$ = " MH ": X0= 30: Y0= 95: GOSUB 5000
755 IF SW= 1 GOTO 790
760 FOR I= 0 TO N: ST4(I)= ABS(M(I))/WH(I): NEXT I
765 IF SW= 2 GOTO 790
770 GOSUB 3850
775 FOR I= 0 TO N
780 V(I)= Y(I): DV(I)= DY(I)
785 NEXT I
790 RETURN
800 REM 子程序: 铅直面内弯曲变形分析
805 NME= NMV: NP= NPV: NQ= NQV

```

```

810 FOR K= 1 TO NME:ME(K, 1)= MV(K, 1): ME(K, 2)= MV(K, 2):
    NEXT K
815 FOR K= 1 TO NP:P(K, 1)= PV(K, 1):P(K, 2)= PV(K, 2):NEXT K
820 FOR K= 1 TO NQ
825 FOR J= 1 TO 4:Q(K, J)= QV(K, J):NEXT J
830 NEXT K
835 GOSUB 3650
840 FOR I= 0 TO N:F(I)= M(I): NEXT I
845 GOSUB 4800
850 W$= " MV ":X0= 30:Y0= 130:GOSUB 5000
855 IF SW= 1 GOTO 890
860 FOR I= 0 TO N:ST5(I)= ABS(M(I))/WV(I): NEXT I
865 IF SW= 2 GOTO 890
870 GOSUB 3850
875 FOR I= 0 TO N
880 W(I)= Y(I):DW(I)= DY(I)
885 NEXT I
890 RETURN
900 REM 子程序: 计算圆截面杆各截面上危险点的相当应力
910 FOR I= 0 TO N
915 C1= (ST1(I)+ SQR(ST4(I)^ 2+ ST5(I)^ 2))^ 2:C2= ST2(I)^ 2
920 IF W2= 3 THEN SEQ(I)= SQR(C1+ 4* C2)ELSE SEQ(I)= SQR(C1
    + 3* C2)
925 NEXT I
930 RETURN
940 REM 子程序: 计算矩形截面杆各截面上危险点相当应力
945 FOR I= 0 TO N
950 S1= ST1(I)+ ST4(I)+ ST5(I)
955 C1= (ST1(I)+ ST4(I))^ 2:C2= ST2(I)^ 2
960 IF W2= 3 THEN S2= SQR(C1+ 4* C2) ELSE S2= SQR(C1+ 3* C2)
965 C1= (ST1(I)+ ST5(I))^ 2:C2= ST3(I)^ 2
970 IF W2= 3 THEN S3= SQR(C1+ 4* C2) ELSE S2= SQR(C1+ 3* C2)
975 IF S1< S2 THEN S1= S2

```



```

980 IF S1< S3 THEN S1= S3
985 SEQ(I) = S1
990 NEXT I
995 RETURN
1000 REM 子程序: 计算集中力在任意截面上引起的轴力
1010 NX= 0
1020 FOR K= 1 TO NP
1030 IF TYPE1= 1 THEN RA= P(K, 1) ELSE RA= 0
1040 NX= NX+ RA
1050 IF X> P(K, 2) THEN NX= NX- P(K, 1)
1060 NEXT K
1070 RETURN
1600 REM 子程序: 计算杆的轴向位移
1610 C= 0.5* H/E: U(0)= 0
1620 C1= FIN(0)/A(0)
1630 FOR I= 1 TO N
1640 C2= FIN(I)/A(I)
1650 U(I)= U(I- 1)+ C* (C1+ C2)
1660 C1= C2
1670 NEXT I
1680 RETURN
2000 REM 子程序: 计算集中外力偶矩在任意截面上引起的扭矩
2010 TX= 0
2020 FOR K= 1 TO NMT
2030 IF TYPE1= 1 THEN RA= MT(K, 1) ELSE RA= 0
2040 TX= TX+ RA
2050 IF X> MT(K, 2) THEN TX= TX- MT(K, 1)
2060 NEXT K
2070 RETURN
2600 REM 子程序: 计算杆的扭转角
2610 C= 0.5* H/G: R(0)= 0
2620 C1= T(0)/IP(0)
2630 FOR I= 1 TO N

```

```

2640 C2= T(I)/IP(I)
2650 R(I)= R(I- 1)+ C* (C1+ C2)
2660 C1= C2
2670 NEXT I
2680 RETURN
3000 REM 子程序: 计算集中外力偶在任意截面上引起的内力
3010 QX= 0:MX= 0
3020 FOR K= 1 TO NME
3030 ON TYPE1 GOTO 3040,3050
3040 MX= MX+ ME(K, 1):GOTO 3080
3050 A= ME(K, 1)/L:B= - A
3060 IF X> L1 THEN QX= QX+ A:MX+ A* (X- L1)
3070 IF X> L1+ L THEN QX= QX+ B:MX= MX+ B* (X- L1- L)
3080 IF X> ME(K, 2) THEN MX= MX- ME(K, 1)
3090 NEXT K
3100 RETURN
3200 REM 子程序: 计算集中外力在任意截面上引起的内力
3210 QX= 0:MX= 0
3220 FOR K= 1 TO NP
3230 ON TYPE1 GOTO 3240,3260
3240 A= - P(K, 1):MA= P(K, 1)* P(K, 2)
3250 QX= QX+ A:MX= MX+ MA+ A* X:GOTO 3290
3260 B= - P(K, 1)* (P(K, 2)- L1)/L:A= - B- P(K, 1)
3270 IF X> L1 THEN QX= QX+ A:MX= MX+ A* (X- L1)
3280 IF X> L1+ L THEN QX= QX+ B:MX= MX+ B* (X- L1- L)
3290 IF X> P(K, 2) THEN QX= QX+ P(K, 1):MX= MX+ P(K, 1)* (X-
    P(K, 2))
3300 NEXT K
3310 RETURN
3400 REM 子程序: 计算分布载荷在任意截面上引起的内力
3410 QX= 0: MX= 0
3420 FOR K= 1 TO NQ
3430 DQ= Q(K, 2)- Q(K, 1):DX= Q(K, 4)- Q(K, 3)

```

```

3440 R1= Q(K, 1) * DX:R2= DQ* DX/2
3450 ON TYPE1 GOTO 3460, 3490
3460 A= - R1- R2
3470 MA= R1* (Q(K, 3)+ Q(K, 4))/2+ R2* (Q(K, 3)+ 2* DX/3)
3480 QX= QX+ A:MX= MX+ MA+ A* X:GOTO 3530
3490 B= - (R1* (Q(K, 3)+ DX/2- L1)+ R2* (Q(K, 3)+ 2* DX/3-
      L1))/L
3500 A= - R1- R2- B
3510 IF X> L1 THEN QX= QX+ A:MX= MX+ A* (X- L1)
3520 IF X> L1 + L THEN QX= QX+ B:MX= MX+ B* (X- L1- L)
3530 IF X< = Q(K, 3) GOTO 3560
3540 XX= X- Q(K, 3):R1= Q(K, 1) * XX:R2= 0.5 * DQ* XX* XX/DX
3550 QX= QX+ R1+ R2:MX= MX+ (0.5* R1+ R2/3) * XX
3560 IF X< = Q(K, 4) GOTO 3590
3570 XX= X- Q(K, 4):R1= Q(K, 2) * XX:R2= 0.5 * DQ* XX* XX/DX
3580 QX= QX- R1- R2:MX= MX- (0.5* R1+ R2/3) * XX
3590 NEXT K
3600 RETURN
3650 REM 子程序: 计算平面弯曲变形的弯矩
3660 FOR I= 0 TO N
3670 X= I* H:M(I)= 0
3680 IF NME= 0 GOTO 3710
3690 GOSUB 3000
3700 M(I)= M(I)+ MX
3710 IF NP= 0 GOTO 3740
3720 GOSUB 3200
3730 M(I)= M(I)+ MX
3740 IF NQ= 0 GOTO 3770
3750 GOSUB 3400
3760 M(I)= M(I)+ MX
3770 NEXT I
3780 RETURN
3850 REM 子程序: 计算梁的挠度和转角

```

```

3860 FOR I= 0 TO N
3870 M(I) = M(I) / IZ(I)
3880 NEXT I
3890 C = H * H / E: Y(0) = 0: Y(1) = 0.5 * C * M(0)
3900 FOR I= 1 TO N- 1: Y(I+ 1) = C * M(I) + 2 * Y(I) - Y(I- 1): NEXT
    I
3910 IF TYPE1= 1 GOTO 3940
3920 IA= INT(L/H): IB= INT((L1+ L)/H): K= (Y(IB) - Y(IA)) / L
3930 FOR I= 0 TO N: Y(I) = Y(I) - Y(IA) - K * (I - IA) * H: NEXT I
3940 C= 0.5/H: DY(0) = C * (- 3 * Y(0) + 4 * Y(1) - Y(2))
3950 FOR I= 1 TO N- 1: DY(I) = C * (Y(I+ 1) - Y(I- 1)): NEXT I
3960 DY(N) = C * (Y(N- 2) - 4 * Y(N- 1) + 3 * (Y(N)))
3970 RETURN
4800 REM 子程序: 求函数最大值和最小值通用子程序
4810 F1= - 1E+ 10: F2= 1E+ 10
4820 FOR I= 0 TO N
4830 IF F(I) > F1 THEN F1= F(I): I1= I
4840 IF F(I) < F2 THEN F2= F(I): I2= I
4850 HENT I
4860 X1= I1 * H: X2= I2 * H
4870 RETURN
5000 REM 子程序: 画函数图像
5010 LINE (X0, Y0) - (X0+ 220, Y0): LOCATE (Y0- 2) * 25/200, (X0+
    330) * 80/640: PRINT " X "
5020 LINE (X0, Y0+ 9) - (X0, Y0- 12): LOCATE (Y0- 12) * 25/200,
    (X0- 15) * 80/640: PRINT W $
5030 K1= 200/(L1+ L2+ L)
5040 IF ABS(F1) > ABS(F2) THEN K1= 12/ABS(F1) ELSE K2= 12/ABS
    (F2)
5050 PSET (X0, Y0- K2 * F(0))
5060 FOR I= 1 TO N
5070 X= I * H: LINE- (X0+ K1 * X, Y0- K2 * F(I))
5080 NEXT I

```

```

5090 IR= (Y0- 14)* 25/ 200:IC= (X0+ 250)* 80/ 640
5100 LOCATE IR, IC: PRINT“ ( ”; W $ ;“ )max = ”; F1, TAB( IC+ 25);“ X
    = ”;X1
5110 LOCATE IR+ 1, IC:PRINT“ ( ”; W $ ;“ )min= ”; F2, TAB( IC+ 25);“ X
    = ”;X2
5120 RETURN

```

3. 程序说明:

(1) 程序中变量和数组的意义

TYPEI——杆的类型

TYPE1= 1 为左端固定, 右端自由杆,
 TYPE1= 2 为具有球面滚珠轴承支承的两边外伸杆;

SHAPE——截面形状。SHAPE= 1 为圆形, SHAPE= 2 为矩形;

L₁——左外伸臂长;
 L——杆的跨度;
 L₂——右外伸臂长;
 E——拉压弹性模量;
 G——剪切弹性模量;
 D——圆截面杆的直径;
 BX——矩形截面杆的截面宽度 B;
 HX——矩形截面杆的截面高度 H;
 N——直杆的分段数目;
 NPX——轴向集中力数;
 NMT——转动集中力数;
 NMH——水平面内集中力偶数;
 NPH——水平面内集中力数;
 NQH——水平面内分布载荷组数;
 NMV——铅垂面内集中力偶数;
 NPV——铅垂面内集中力数;

NQV ——铅垂面内分布载荷组数;
 $K1、K2、K3$ ——矩形截面杆扭转时的系数;
 $A(N)$ ——存放杆的横截面面积;
 $IP(N)$ ——存放截面极惯矩;
 $WN1(N)、WN2(N)$ ——存放抗扭截面模量;
 $IH(N)$ ——存放水平面内弯曲轴惯矩;
 $WH(N)$ ——存放水平面抗弯曲截面模量;
 $IV(N)$ ——存放铅垂面内弯曲轴惯矩;
 $MV(N)$ ——存放铅垂面内抗弯曲截面模量;
 $PX(NPX, 2)$ ——存放轴向集中力;
 $MT(NMT, 2)$ ——存放扭转集中力偶;
 $MH(NMH, 2)$ ——存放水平面内集中力偶;
 $PH(NPH, 2)$ ——存放水平面内集中力;
 $QH(NQH, 4)$ ——存放水平面内分布载荷;
 $MV(NMV, 2)$ ——存放铅垂面内集中力偶;
 $QV(NQV, 4)$ ——存放铅垂面内分布载荷;
 $FIN(N)$ ——存放轴向力;
 $ST1(N)$ ——存放轴向拉、压应力;
 $U(N)$ ——存放轴向位移;
 $T(N)$ ——存放扭矩;
 $ST2(N)、ST3(N)$ ——存放扭转切应力;
 $R(N)$ ——存放截面扭转角;
 $ST4(N)$ ——存放水平面内弯曲应力;
 $V(N)$ ——存放水平面内挠度;
 $DV(N)$ ——存放水平面内转角;
 $ST5(N)$ ——存放铅垂面内弯曲应力;
 $W(N)$ ——存放铅垂面内挠度;
 $DW(N)$ ——存放铅垂面内转角;
 $M(N)、Y(N)、DY(N)$ ——工作单元;
 $F(N)、P(10, 2)$ ——工作单元;

ME(10, 2)、Q(5, 4)——工作单元。

(2) 各子程序的意义:

子程序: 输入初始数据并显示(200 ~ 318);

子程序: 计算截面几何性质(400 ~ 510);

子程序: 轴向拉、压变形分析(530 ~ 590);

子程序: 扭转变形分析(600 ~ 680);

子程序: 水平面内弯曲变形分析(700 ~ 790);

子程序: 铅直面内弯曲变形分析(800 ~ 890);

子程序: 计算圆截面杆截面上危险应力(900 ~ 930);

子程序: 计算矩形截面杆截面上危险应力(940 ~ 995);

子程序: 计算集中力在任意截面上的轴力(1000 ~ 1070);

子程序: 计算杆的轴向位移(1600 ~ 1680);

子程序: 计算集中外力偶矩在任意截面上引起的扭矩(2000 ~ 2070);

子程序: 计算杆的扭转角(2600 ~ 2680);

子程序: 计算集中力偶在任意截面上引起的内力(3000 ~ 3100);

子程序: 计算集中力在任意截面上引起的内力(3200 ~ 3310);

子程序: 计算分布载荷在任意截面上引起的内力(3400 ~ 3600);

子程序: 计算梁的结点内力(3650 ~ 3780);

子程序: 计算梁的挠度和转角(3850 ~ 3970);

子程序: 求函数最大值和最小值通用子程序(4800 ~ 4870);

子程序: 画函数图像通用子程序(5000 ~ 5120);

子程序: 用户输入杆横截面尺寸 D 或 B、H 的子程序(6000 ~ 6990); 输入形式可参考例题; 若只进行内力分析, 可不编写此子程序;

子程序: 用户初始数据输入格式(7000 ~ 7100);

7000 REM 子程序: 用户输入初始数据

7010 DATA TYPE1, SHAPE, L1, L, L2, E, G, N

7020 DATA NPX, NMT, NMH, NPH, NQH, NMV, NPV, NQV

7030 DATA PX(NPX, 2) (若 NPX= 0 此项不输入)

7040 DATA MT(NMT, 2) (若 NMT= 0 此项不输入)

7050 DATA MH(NMH, 2) (若 NMH= 0 此项不输入)

7060 DATA PH(NPH, 2) (若 NPH= 0 此项不输入)

7070 DATA QH(NQH, 4) (若 NQH= 0 此项不输入)

7080 DATA MV(NMV, 2) (若 NMV= 0 此项不输入)

7090 DATA PV(NPV, 2) (若 NPV= 0 此项不输入)

7100 DATA QV(NQV, 4) (若 NQV= 0 此项不输入)

(3)单位: 力——kN

长度——m

4. 程序算例:

某滚齿机传动轴的尺寸如图 9-15a 所示。该轴所受的载荷分解成基本载荷情况如图 9-15b 所示。轴的材料为 45 号钢, 许用应力 $[\sigma] = 85\text{MPa}$ 。试对该轴进行强度校核。

程序输入内容

6000 REM 子程序: 用户输入轴的直径

6010 IF X> 0.015 GOTO 6030

6020 D= 0.025: GOTO 6080

6030 IF X> 0.097 GOTO 6050

6040 D= 0.035 GOTO 6080

6050 IF X> 0.115 GOTO 6070

6060 D= 0.05 GOTO 6080

6070 D= 0.025

6080 RETURN

7000 REM 子程序: 用户输入初始数据

7010 DATA 2, 1, 0.0235, 0.065, 0.0445, 1, 0.4, 50

7020 DATA 0, 2, 0, 2, 0, 0, 2, 0

7030 DATA - 0.0217, 0, 0.0217, 0.133

7035 DATA 0.87, 0, 0.542, 0.133

7040 DATA - 0.316, 0, - 0.257, 0.133

程序运行结果

图 9-15

RUN		
TYPE1= 2	SHAPE= 1	
L ₁ = 0.0235	L= 0.065	L ₂ = 0.0445
E= 1	G= 0.4	N= 50
NPAX= 0	NMT= 2	
NMH= 0	NPH= 2	NQH= 0
NMV= 0	NPV= 2	NQV= 0
NO.	MT	XM
1	- 0.0217	0
2	0.0217	0.133
NO.	PH	XP
1	0.87	0
2	0.542	0.133
NO.	PV	XP

1	- 0.316	0
2	- 0.257	0.133

您计算什么(WHAT DO YOU COMPUTE)?

1——内力(INTER FORCE)

2——内力和应力(INTER FORCE AND STRESS)

3—— 内力、应力和变形(INTER FORCE AND STRESS
AND DEFORMATION)

SW= ? 3

用第三或是第四强度理论?

WHICH IS USED TRIED FOURTH FHEORY OF
STRENGTH? 3 or 4)

W2= ? 3

屏幕显示如图 9-16。从图 9-16 可知危险截面在 $x = 8.77799$

图 9-16

- 02m, 即图 9-15 支座 B 处。按照第三强度理论最大相当应力 $\sigma_{\max} = 8162.388\text{KPa}$ 比许用应力小得很多, 轴的安全储备较高。

附录 型钢 表

1 热轧等边角钢(GB9787- 88)

b——边宽;	r_0 ——顶端圆弧半径;
d——边厚;	I——惯性矩;
r——内圆弧半径;	i——惯性半径;
r_1 ——边端内弧半径;	W——截面系数;
r_2 ——边端外弧半径;	z_0 ——重心距离。

角 钢 号 数	尺寸 (mm)			截 面 面 积 × 10 ² (mm ²)	理 论 重 量 × 9.8 (N/m)	外 表 面 积 (m ² /m)	参 考 数 值										z × 10 (mm)
	b	d	r				x - x			x ₀ - x ₀			y ₀ - y ₀			x ₁ - x ₁	
							I × 10 ⁴ (mm ⁴)	i × 10 (mm)	W _x × 10 ³ (mm ³)	I _{x0} × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _{x0} × 10 (mm)	W _{x0} × 10 ³ (mm ³)	I _{y0} × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _{y0} × 10 (mm)	W _{y0} × 10 ³ (mm ³)	I _{x1} × 10 ⁴ (mm ⁴)	
2	20	3	3.5	1.132	0.889	0.078	0.40	0.59	0.29	0.63	0.75	0.45	0.17	0.39	0.20	0.81	0.60
		4		1.459	1.145	0.077	0.50	0.58	0.36	0.78	0.73	0.55	0.22	0.38	0.24	1.09	0.64
2.5	25	3	4.5	1.432	1.124	0.098	0.82	0.76	0.46	1.29	0.95	0.73	0.34	0.49	0.33	1.57	0.73
		4		1.859	1.459	0.097	1.03	0.74	0.59	1.62	0.93	0.92	0.43	0.48	0.40	2.11	0.76
3.0	30	3	4.5	1.749	1.373	0.117	1.46	0.91	0.68	2.31	1.15	1.09	0.61	0.59	0.51	2.71	0.85
		4		2.276	1.786	0.117	1.84	0.90	0.87	2.92	1.13	1.37	0.77	0.58	0.62	3.63	0.89
3.6	36	3	5	2.109	1.656	0.141	2.58	1.11	0.99	4.09	1.39	1.61	1.07	0.71	0.76	4.68	1.09
		4		2.756	2.163	0.141	3.29	1.09	1.28	5.22	1.38	2.05	1.37	0.70	0.93	6.25	1.04
4.0	40	5	5	3.382	2.654	0.141	3.95	1.08	1.56	6.24	1.36	2.45	1.65	0.70	1.09	7.84	1.07
		3		2.359	1.852	0.157	3.59	1.23	1.23	5.69	1.55	2.01	1.49	0.79	0.96	6.41	1.09
		4		3.086	2.422	0.157	4.60	1.22	1.60	7.29	1.54	2.58	1.91	0.79	1.19	8.56	1.13
		5		3.791	2.976	0.156	5.53	1.21	1.96	8.76	1.52	3.01	2.30	0.78	1.39	10.74	1.13

续上表

角 钢 号 数	尺寸 (mm)			截面面积 × 10 ² (mm ²)	理论重量 × 9.8 (N/m)	外表面积 (m ² /m)	参 考 数 值										z × 10 (mm)
	b	d	r				x - x			x0 - x0			y0 - y0			x1 - x1	
							I × 10 ⁴ (mm ⁴)	i × 10 (mm)	W × 10 ³ (mm ³)	I _x × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _x × 10 (mm)	W _x × 10 ³ (mm ³)	I _{y0} × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _{y0} × 10 (mm)	W _{y0} × 10 ³ (mm ³)	I _{x1} × 10 ⁴ (mm ⁴)	
4.5	45	3	5	2.659	2.088	0.177	5.17	1.40	1.58	8.20	1.76	2.58	2.14	0.90	1.24	9.12	1.22
		4		3.486	2.736	0.177	6.65	1.38	2.05	10.56	1.74	3.32	2.75	0.89	1.54	12.18	1.26
		5		4.292	3.369	0.176	8.04	1.37	2.51	12.74	1.72	4.00	3.33	0.88	1.81	15.25	1.30
		6		5.076	3.985	0.176	9.33	1.36	2.95	11.76	1.70	4.64	3.89	0.88	2.06	18.36	1.33
5	50	3	5.5	2.971	2.332	0.197	7.18	1.55	1.96	11.37	1.96	3.22	2.98	1.00	1.57	12.50	1.34
		4		3.897	3.059	0.197	9.26	1.54	2.56	14.70	1.94	4.16	3.82	0.99	1.96	16.69	1.38
		5		4.803	3.770	0.196	11.21	1.53	3.13	17.79	1.92	5.03	4.64	0.98	2.31	20.90	1.42
		6		5.688	4.465	0.196	13.05	1.52	3.68	20.68	1.91	5.85	5.42	0.98	2.63	25.14	1.46
5.6	56	3	6	3.343	2.624	0.221	10.19	1.75	2.48	16.14	2.20	4.08	4.24	1.13	2.02	17.56	1.48
		4		4.390	3.446	0.220	13.18	1.73	3.24	20.92	2.18	5.28	5.46	1.11	2.52	23.43	1.53
		5		5.415	4.251	0.220	16.02	1.72	3.97	25.42	2.17	6.42	6.61	1.10	2.98	29.33	1.57
		8		8.367	6.568	0.219	23.63	1.68	6.03	37.37	2.11	9.44	9.89	1.09	4.16	47.24	1.68
6.3	63	4	7	4.978	3.907	0.248	19.03	1.96	4.13	30.17	2.46	6.78	7.89	1.26	3.29	33.35	1.70
		5		6.143	4.822	0.248	23.17	1.94	5.08	36.77	2.45	8.25	9.57	1.25	3.90	41.73	1.74
		6		7.288	5.721	0.247	27.12	1.93	6.00	43.03	2.43	9.66	11.20	1.24	4.46	50.14	1.78
		8		9.515	7.469	0.247	34.46	1.90	7.75	54.56	2.40	12.25	14.33	1.23	5.47	67.11	1.85
		10		11.657	9.151	0.246	41.09	1.88	9.39	64.85	2.36	14.56	17.33	1.22	6.36	84.31	1.93

续上表

用 钢 号 数	尺寸 (mm)			截面面积 × 10 ² (mm ²)	理论重量 × 9.8 (N/m)	外表面积 (m ² /m)	参 考 数 值										z× 10 (mm)	
							x ₀ - x ₀			y ₀ - y ₀			x ₁ - x ₁					
	b	d	r				I _x × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _x × 10 (mm)	W _x × 10 ³ (mm ³)	I _x × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _x × 10 (mm)	W _x × 10 ³ (mm ³)	I _y × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _y × 10 (mm)	W _y × 10 ³ (mm ³)	I _x × 10 ⁴ (mm ⁴)		
7	70	4	8	5.570	4.372	0.275	26.39	2.18	5.14	41.80	2.74	8.44	10.99	1.40	4.17	45.74	1.86	
		5		6.875	5.397	0.275	32.21	2.16	6.32	51.08	2.73	10.32	13.34	1.39	4.95	57.21	1.91	
		6		8.160	6.406	0.275	37.77	2.15	7.48	59.93	2.71	12.11	15.61	1.38	5.67	68.73	1.95	
		7		9.424	7.398	0.275	43.09	2.14	8.59	68.35	2.69	13.81	17.82	1.38	6.34	80.29	1.99	
		8		10.667	8.373	0.274	48.17	2.12	9.68	76.37	2.68	15.43	19.98	1.37	6.98	91.92	2.03	
7.5	75	5	9	7.367	5.818	0.295	39.97	2.33	7.32	63.30	2.92	11.94	16.63	1.50	5.77	70.56	2.04	
		6		8.797	6.905	0.294	46.95	2.31	8.64	74.38	2.90	14.02	19.51	1.49	6.67	84.55	2.07	
		7		10.160	7.976	0.294	53.57	2.30	9.93	84.96	2.89	16.02	22.18	1.48	7.44	98.71	2.11	
		8		11.503	9.030	0.294	59.96	2.28	11.20	95.07	2.88	17.93	24.86	1.47	8.19	112.97	2.15	
		10		14.126	11.089	0.293	71.98	2.26	13.64	113.92	2.84	21.48	30.05	1.46	9.56	141.71	2.22	
8	80	5	9	7.912	6.211	0.315	48.79	2.48	8.34	77.33	3.13	13.67	20.25	1.60	6.66	85.36	2.15	
		6		9.397	7.376	0.314	57.35	2.47	9.87	90.98	3.11	18.08	23.72	1.59	7.65	102.50	2.19	
		7		10.860	8.525	0.314	65.58	2.46	11.37	104.07	3.10	18.40	27.09	1.58	8.58	119.70	2.23	
		8		12.303	9.658	0.314	73.49	2.44	12.83	116.60	3.08	20.61	30.39	1.57	9.46	136.97	2.27	
		10		15.126	11.874	0.313	88.43	2.42	15.64	140.09	3.04	24.76	36.77	1.56	11.08	171.74	2.35	

续上表

用 钢 号 数	尺寸 (mm)			截面面积 × 10 ² (mm ²)	理论重量 × 9.8 (N/m)	外表面积 (m ² /m)	参 考 数 值										z× 10 (mm)
	b	d	r				x - x			x ₀ - x ₀			y ₀ - y ₀			x ₁ - x ₁	
							I _x × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _x × 10 (mm)	W _x × 10 ³ (mm ³)	I _x × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _x × 10 (mm)	W _x × 10 ³ (mm ³)	I _y × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _y × 10 (mm)	W _y × 10 ³ (mm ³)	I _x × 10 ⁴ (mm ⁴)	
9	90	6	10	10.637	8.350	0.354	82.77	2.79	12.61	131.26	3.51	20.63	34.28	1.80	9.95	145.87	2.44
		7		12.301	9.656	0.354	94.83	2.78	14.54	150.47	3.50	23.64	39.18	1.78	11.19	170.30	2.48
		8		13.944	10.946	0.353	106.47	2.76	16.42	163.97	3.48	26.55	43.97	1.78	12.35	194.80	2.52
		10		17.167	13.476	0.353	128.58	2.74	20.07	203.90	3.45	32.04	53.26	1.76	14.52	244.07	2.59
		12		20.306	15.940	0.352	149.22	2.71	23.57	236.21	3.41	37.12	62.22	1.75	16.49	293.76	2.67
10	100	6	12	11.932	9.366	0.393	114.95	3.01	15.68	181.98	3.90	25.74	47.92	2.00	12.69	200.07	2.67
		7		13.796	10.830	0.393	131.86	3.09	18.10	208.97	3.89	29.55	54.74	1.99	14.26	233.54	2.71
		8		15.638	12.276	0.393	148.24	3.08	20.47	235.07	3.88	33.24	61.41	1.98	15.75	267.09	2.76
		10		19.261	15.120	0.392	179.51	3.05	25.06	284.68	3.84	40.26	74.35	1.96	18.54	334.48	2.84
		12		22.800	17.898	0.391	208.90	3.03	29.48	330.95	3.81	46.80	86.84	1.95	21.08	402.34	2.91
		14		26.256	20.611	0.391	236.53	3.00	33.73	374.06	3.77	52.90	99.00	1.94	23.44	470.75	2.99
		16		29.627	23.257	0.390	262.53	2.98	37.82	414.16	3.74	58.57	110.89	1.94	25.63	539.9	3.06
11	110	7	12	15.196	11.928	0.433	177.16	3.41	22.05	280.94	4.30	36.12	73.38	2.20	17.51	310.64	2.96
		8		17.238	13.532	0.433	199.46	3.40	24.95	316.49	4.28	40.69	82.42	2.19	19.39	355.20	3.01
		10		21.261	16.690	0.432	242.19	3.38	30.60	384.39	4.25	49.42	99.98	2.17	22.91	444.65	3.09
		12		25.200	19.782	0.431	282.55	3.35	36.05	448.17	4.22	57.62	116.93	2.15	26.15	534.60	3.16
		14		29.056	22.809	0.431	320.71	3.32	41.31	508.01	4.18	65.31	133.40	2.14	29.14	625.16	3.24

续上表

用 钢 号 数	尺寸 (mm)			截面面积 × 10 ² (mm ²)	理论重量 × 9.8 (N/m)	外表面积 (m ² /m)	参 考 数 值										z× 10 (mm)
	b	d	r				x - x			x ₀ - x ₀			y ₀ - y ₀			x ₁ - x ₁	
							I × 10 ⁴ (mm ⁴)	i × 10 (mm)	W _x × 10 ³ (mm ³)	I _x × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _x × 10 (mm)	W _x × 10 ³ (mm ³)	I _y × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _y × 10 (mm)	W _y × 10 ³ (mm ³)	I _x × 10 ⁴ (mm ⁴)	
12. 5	125	8	14	19.750	15.504	0.492	297.03	3.88	32.52	470.89	4.88	53.28	123.16	2.50	25.86	521.01	3.37
		10		24.373	19.133	0.491	361.67	3.85	39.97	573.89	4.85	64.93	149.46	2.48	30.62	651.93	3.45
		12		28.912	22.696	0.491	423.16	3.83	41.17	671.44	4.82	75.96	174.88	2.46	35.03	783.42	3.53
		14		33.367	26.193	0.490	481.65	3.80	54.16	763.73	4.78	86.41	199.57	2.45	39.13	915.61	3.61
14	140	10	14	27.373	21.488	0.551	514.65	4.34	50.58	817.27	5.46	82.56	212.04	2.78	39.20	915.11	3.82
		12		32.512	25.522	0.551	603.68	4.31	59.80	958.79	5.43	96.85	248.57	2.76	45.02	1099.28	3.90
		14		37.567	29.490	0.550	688.81	4.28	68.75	1093.56	5.40	110.47	284.06	2.75	50.45	1284.22	3.98
		16		42.539	33.393	0.549	770.24	4.26	77.46	1221.81	5.36	123.42	318.67	2.74	55.55	1470.07	4.06
16	160	10	16	31.502	24.729	0.630	779.53	4.98	66.70	1237.30	6.27	109.36	321.76	3.20	52.76	1365.33	4.31
		12		37.441	29.391	0.630	916.58	4.95	78.98	1455.68	6.24	128.67	377.49	3.18	60.74	1639.57	4.39
		14		43.296	33.987	0.629	1048.36	4.92	90.95	1665.02	6.20	147.17	431.70	3.16	68.244	1914.68	4.47
		16		49.067	38.518	0.629	1175.08	4.89	102.63	1865.57	6.17	164.89	484.59	3.14	75.31	2190.82	4.55
18	180	12	16	42.241	33.159	0.710	1321.35	5.59	100.82	2100.10	7.05	165.00	542.61	3.58	78.41	2332.80	4.89
		14		48.896	38.388	0.709	1514.48	5.56	116.25	2407.42	7.02	189.14	625.53	3.56	88.38	2723.48	4.97
		16		55.467	43.542	0.709	1700.99	5.54	131.13	2703.37	6.98	212.40	698.60	3.55	97.83	3115.29	5.05
		18		61.955	48.634	0.708	1875.12	5.50	145.64	2988.24	6.94	234.78	762.01	3.51	105.14	3502.43	5.13
20	200	14	18	54.642	42.894	0.788	2103.55	6.20	144.70	3343.26	7.82	236.40	863.83	3.98	111.82	3734.10	5.46
		16		62.013	48.680	0.788	2366.15	6.18	163.65	3760.89	7.79	265.93	971.41	3.96	123.96	4270.39	5.54
		18		69.301	54.401	0.787	2620.64	6.15	182.22	4164.54	7.75	294.48	1076.74	3.94	135.52	4808.13	5.62
		20		76.505	60.056	0.787	2867.30	6.12	200.42	4554.55	7.72	322.06	1180.04	3.93	146.55	5347.51	5.69
		24		90.661	71.168	0.785	2338.25	6.07	236.17	5294.97	7.64	374.41	1381.53	3.90	166.55	6457.16	5.87

- 注：1. $r_1 = \frac{1}{3}d$, $r_2 = 0$, $r_0 = 0$ 。
2. 角钢长度：2~4号，长3~9m；4/5~8号，长4~12m；9~14号，长4~19m；16~20号，长6~19m。
3. 一般采用材料：Q215A, Q235A, Q235A · F。

2 热轧不等边角钢(GB9788- 88)

B——长边宽度；
 d——边厚；
 r_1 ——边端内弧半径；
 r_0 ——顶端圆弧半径；
 i——惯性半径；
 x_0 ——重心距离；
 b——短边宽度；
 r——内圆弧半径；
 r_2 ——边端外弧半径；
 I——惯性矩；
 W——截面系数；
 y_0 ——重心距离。

角 钢 号 数	尺寸 (mm)				截面面积 × 10 ² (mm ²)	理论重量 × 9.8 (N/ m)	外表 面积 (m ² / m)	参 考 数 值													
								x - x			y- y			x ₁ - x ₁		y ₁ - y ₁		u- u			
	B	b	d	r				I _x × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _x × 10 (mm)	W _x × 10 ³ (mm ³)	I _y × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _y × 10 (mm)	W _y × 10 ³ (mm ³)	I _{x1} × 10 ⁴ (mm ⁴)	y ₀ × 10 (mm)	I _{y1} × 10 ⁴ (mm ⁴)	x ₀ × 10 (mm)	I _u × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _u × 10 (mm)	W _u × 10 ³ (mm ³)	tg
2.5/ 1.6	25	16	3	3.5	1.162	0.912	0.080	0.70	0.78	0.43	0.22	0.44	0.19	1.56	0.86	0.43	0.42	0.14	0.34	0.16	0.392
			4		1.499	1.176	0.079	0.88	0.77	0.55	0.27	0.43	0.24	2.09	0.90	0.59	0.46	0.17	0.34	0.20	0.381
3.2/ 2	32	20	3	4	1.492	1.171	0.102	1.53	1.01	0.72	0.46	0.55	0.30	3.27	1.08	0.82	0.49	0.28	0.43	0.25	0.382
			4		1.939	1.522	0.101	1.93	1.00	0.93	0.57	0.54	0.39	4.37	1.12	1.12	0.53	0.35	0.42	0.32	0.374
4/ 2.5	40	25	3	4	1.890	1.484	0.127	3.08	1.28	1.15	0.93	0.70	0.49	6.39	1.32	1.59	0.59	0.56	0.54	0.40	0.386
			4		2.467	1.936	0.127	3.93	1.26	1.49	1.18	0.69	0.63	8.53	1.37	2.14	0.63	0.71	0.54	0.52	0.381

续上表

角 钢 号 数	尺寸 (mm)				截 面 面 积 × 10 ² (mm ²)	理 论 重 量 × 9.8 (N/ m)	外 表 面 积 (m ² /m)	参 考 数 值													
								x- x			y- y			x ₁ - x ₁		y ₁ - y ₁		u- u			
	B	b	d	r				I _x × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _x × 10 (mm)	W _x × 10 ³ (mm ³)	I _y × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _y × 10 (mm)	W _y × 10 ³ (mm ³)	I _{x1} × 10 ⁴ (mm ⁴)	y ₀ × 10 (mm)	I _{y1} × 10 ⁴ (mm ⁴)	x ₀ × 10 (mm)	I _u × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _u × 10 (mm)	W _u × 10 ³ (mm ³)	tg
4.5/ 2.8	45	28	3	5	2.149	1.687	0.143	4.45	1.44	1.47	1.34	0.79	0.62	9.10	1.47	2.23	0.64	0.80	0.61	0.51	0.383
			4		2.806	2.203	0.143	5.69	1.42	1.91	1.70	0.78	0.80	12.13	1.51	3.00	0.68	1.02	0.60	0.66	0.380
5/ 3.2	50	32	3	5.5	2.431	1.908	0.161	6.24	1.60	1.84	2.02	0.91	0.82	12.49	1.60	3.31	0.73	1.20	0.70	0.68	0.404
			4		3.177	2.494	0.160	8.02	1.59	2.39	2.58	0.90	1.06	16.65	1.65	4.45	0.77	1.53	0.69	0.87	0.402
5.6/ 3.6	56	36	3	6	2.743	2.153	0.181	8.88	1.80	2.32	2.92	1.03	1.05	17.54	1.78	4.70	0.80	1.73	0.79	0.87	0.408
			4		3.590	2.818	0.180	11.45	1.79	3.03	3.76	1.02	1.37	23.39	1.82	6.33	0.85	2.23	0.79	1.13	0.408
			5		4.415	3.466	0.180	13.86	1.77	3.71	4.49	1.01	1.65	29.25	1.87	7.94	0.88	2.67	0.78	1.36	0.404
6.3/ 4	63	40	4	7	4.058	3.185	2.202	16.49	2.02	3.87	5.23	1.14	1.70	33.30	2.04	8.63	0.92	3.12	0.88	1.40	0.398
			5		4.993	3.920	0.202	20.02	2.00	4.74	6.31	1.12	2.71	41.63	2.08	10.86	0.95	3.76	0.87	1.71	0.396
			6		5.908	4.638	0.201	23.36	1.96	5.59	7.29	1.11	2.43	49.98	2.12	13.12	0.99	4.34	0.86	1.99	0.393
			7		6.802	5.339	0.201	26.53	1.98	6.40	8.24	1.10	2.78	58.07	2.15	15.47	1.03	4.97	0.86	2.29	0.389
7/ 4.5	70	45	4	7.5	4.547	3.570	0.226	23.17	2.26	4.36	7.55	1.29	2.17	45.92	2.24	12.26	1.02	4.40	0.98	1.77	0.410
			5		5.609	4.403	0.225	27.95	2.23	5.92	9.13	1.28	2.65	57.10	2.28	15.39	1.06	5.40	0.98	2.19	0.407
			6		6.647	5.218	0.225	32.54	2.21	6.95	10.62	1.26	3.12	68.35	2.32	18.58	1.09	6.35	0.98	2.59	0.404
			7		7.657	6.011	0.225	37.22	2.20	8.03	12.01	1.25	3.57	79.99	2.36	21.84	1.13	7.16	0.97	2.94	0.402

续上表

角 钢 号 数	尺寸 (mm)				截 面 面 积 × 10 ² (mm ²)	理 论 重 量 × 9.8 (N/ m)	外 表 面 积 (m ² / m)	参 考 数 值													
								x - x			y- y			x ₁ - x ₁		y ₁ - y ₁		u- u			
	B	b	d	r				I _x × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _x × 10 (mm)	W _x × 10 ³ (mm ³)	I _y × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _y × 10 (mm)	W _y × 10 ³ (mm ³)	I _{x1} × 10 ⁴ (mm ⁴)	y ₀ × 10 (mm)	I _{y1} × 10 ⁴ (mm ⁴)	x ₀ × 10 (mm)	I _u × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _u × 10 (mm)	W _u × 10 ³ (mm ³)	tg
(7. 5 / 5)	75	50	5	8	6. 125	4. 804	0. 245	34. 86	2. 39	6. 83	12. 61	1. 44	3. 30	70. 00	2. 40	21. 04	1. 17	7. 41	1. 10	2. 74	0. 435
			6		7. 260	5. 699	0. 245	41. 12	2. 38	8. 12	14. 70	1. 42	3. 88	84. 30	2. 44	25. 37	1. 21	8. 54	1. 08	3. 19	0. 435
			8		9. 467	7. 431	0. 244	52. 39	2. 35	10. 52	18. 53	1. 40	4. 99	112. 50	2. 52	34. 23	1. 29	10. 87	1. 07	4. 10	0. 429
			10		11. 590	9. 098	0. 244	62. 71	2. 33	12. 79	21. 96	1. 38	6. 04	140. 80	2. 60	43. 43	1. 36	13. 10	1. 06	4. 99	0. 423
8/ 5	80	50	5	8	6. 375	5. 005	0. 255	41. 96	2. 56	7. 78	12. 82	1. 42	3. 32	85. 21	2. 60	21. 06	1. 14	7. 66	1. 10	2. 74	0. 388
			6		7. 560	5. 935	0. 255	49. 49	2. 56	9. 25	14. 95	1. 41	3. 91	102. 53	2. 65	25. 41	1. 18	8. 85	1. 08	3. 20	0. 387
			7		8. 724	6. 848	0. 255	56. 16	2. 54	10. 58	16. 96	1. 39	4. 48	119. 33	2. 69	29. 82	1. 21	10. 18	1. 08	3. 70	0. 384
			8		9. 867	7. 745	0. 254	62. 83	2. 52	11. 92	18. 85	1. 38	5. 03	136. 41	2. 73	34. 32	1. 25	11. 38	1. 07	4. 16	0. 381
9/ 5. 6	90	56	5	9	7. 212	5. 661	0. 287	60. 45	2. 90	9. 92	18. 32	1. 59	4. 21	121. 32	2. 91	29. 53	1. 25	10. 98	1. 23	3. 49	0. 385
			6		8. 557	6. 717	0. 286	71. 03	2. 88	11. 74	21. 42	1. 58	4. 96	145. 59	2. 95	35. 58	1. 29	12. 90	1. 23	4. 18	0. 384
			7		9. 880	7. 756	0. 286	81. 01	2. 86	13. 49	24. 36	1. 57	5. 70	169. 66	3. 00	41. 71	1. 33	14. 67	1. 22	4. 72	0. 382
			8		11. 183	8. 779	0. 286	91. 03	2. 85	15. 27	27. 15	1. 56	6. 41	194. 17	3. 04	47. 93	1. 36	16. 34	1. 21	5. 29	0. 380
10/ 6. 3	100	63	6	10	9. 617	7. 550	0. 320	99. 06	3. 21	14. 64	30. 94	1. 79	6. 35	199. 71	3. 24	50. 50	1. 43	18. 42	1. 38	5. 25	0. 394
			7		11. 111	8. 722	0. 320	113. 45	3. 29	16. 88	35. 26	1. 78	7. 29	233. 00	3. 28	59. 14	1. 47	21. 00	1. 38	6. 02	0. 393
			8		12. 584	9. 878	0. 319	127. 37	3. 18	19. 03	39. 39	1. 77	8. 21	266. 32	3. 32	67. 88	1. 50	23. 50	1. 37	6. 78	0. 391
			10		15. 467	12. 142	0. 319	153. 81	3. 15	23. 32	47. 12	1. 74	9. 98	333. 06	3. 40	85. 73	1. 58	28. 33	1. 35	8. 24	0. 387

续上表

角 钢 号 数	尺寸 (mm)				截面面积 × 10 ² (mm ²)	理论重量 × 9.8 (N/m)	外表 面积 (m ² /m)	参 考 数 值													
								x - x			y - y			x ₁ - x ₁		y ₁ - y ₁		u - u			
	B	b	d	r				I _x × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _x × 10 (mm)	W _x × 10 ³ (mm ³)	I _y × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _y × 10 (mm)	W _y × 10 ³ (mm ³)	I _{x1} × 10 ⁴ (mm ⁴)	y ₀ × 10 (mm)	I _{y1} × 10 ⁴ (mm ⁴)	x ₀ × 10 (mm)	I _u × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _u × 10 (mm)	W _u × 10 ³ (mm ³)	tg
10 /8)	100	80	6	10	10.637	8.350	0.354	107.04	3.17	15.19	61.24	2.40	10.16	199.83	2.95	102.68	1.97	31.65	1.72	8.37	0.627
			7		12.301	9.656	0.354	122.73	3.16	17.52	70.08	2.39	11.71	233.20	3.00	119.98	2.01	36.17	1.72	9.60	0.626
			8		13.944	10.946	0.353	137.92	3.14	19.81	78.58	2.37	13.21	266.61	3.04	137.37	2.05	40.58	1.71	10.80	0.625
			10		17.167	13.476	0.353	166.87	3.12	24.24	94.65	2.35	16.12	333.63	3.12	172.48	2.13	49.10	1.69	13.12	0.622
11/ 7	110	70	6	10	10.637	8.350	0.354	133.37	3.54	17.85	42.92	2.01	7.90	265.78	3.53	69.08	1.57	25.36	1.54	6.53	0.403
			7		12.301	9.656	0.354	153.00	3.53	20.60	49.01	2.00	9.09	310.07	3.57	80.82	1.61	28.95	1.53	7.50	0.402
			8		13.944	10.946	0.353	172.04	3.51	23.50	54.87	1.98	10.25	354.39	3.62	92.70	1.65	32.45	1.53	8.45	0.401
			10		17.167	13.476	0.353	208.39	3.43	28.54	65.88	1.96	12.48	443.13	3.70	116.83	1.72	39.20	1.51	10.29	0.397
12.5 /8	125	80	7	11	14.096	11.066	0.403	227.93	4.02	26.26	74.42	2.30	12.01	454.99	4.01	120.32	1.80	43.81	1.76	9.92	0.408
			8		15.989	12.551	0.403	256.77	4.01	30.41	83.49	2.28	13.56	519.99	4.06	137.85	1.84	49.15	1.75	11.18	0.407
			10		19.712	15.474	0.402	312.04	3.98	37.33	100.67	2.26	16.56	650.09	4.14	173.40	1.92	59.45	1.74	13.64	0.404
			12		23.351	18.330	0.402	364.41	3.95	44.01	116.67	2.24	19.43	780.39	4.22	209.67	2.00	69.35	1.72	16.01	0.400
14/ 9	140	90	8	12	18.038	14.160	0.453	365.64	4.50	38.48	120.69	2.59	17.34	730.53	4.50	195.79	2.04	70.83	1.98	14.31	0.411
			10		22.261	17.475	0.452	445.50	4.47	47.31	146.03	2.56	21.22	913.20	4.58	245.92	2.12	85.82	1.96	17.48	0.409
			12		26.400	20.724	0.451	521.59	4.44	55.87	169.79	2.54	24.95	1096.09	4.66	296.89	2.19	100.21	1.95	20.51	0.406
			14		30.456	23.908	0.451	594.10	4.42	64.18	192.10	2.51	28.54	1279.26	4.74	348.82	2.27	114.13	1.94	23.52	0.403

续上表

角 钢 号 数	尺寸 (mm)				截 面 面 积 $\times 10^2$ (mm ²)	理 论 重 量 $\times 9.8$ (N/ m)	外 表 面 积 (m ² / m)	参 考 数 值													
								x - x			y- y			x ₁ - x ₁		y ₁ - y ₁		u- u			
	B	b	d	r				I_x $\times 10^4$ (mm ⁴)	k $\times 10$ (mm)	W_k $\times 10^3$ (mm ³)	I_y $\times 10^4$ (mm ⁴)	i_y $\times 10$ (mm)	W_y $\times 10^3$ (mm ³)	I_{x1} $\times 10^4$ (mm ⁴)	y_0 $\times 10$ (mm)	I_{y1} $\times 10^4$ (mm ⁴)	x_0 $\times 10$ (mm)	I_u $\times 10^4$ (mm ⁴)	i_u $\times 10$ (mm)	W_u $\times 10^3$ (mm ³)	tg
16 / 10	160	100	10	13	25.315	19.872	0.512	668.69	5.14	62.13	205.03	2.85	26.56	1362.89	5.24	336.59	2.28	121.74	2.19	21.92	0.390
			12		30.054	23.592	0.511	784.91	5.11	73.49	239.06	2.82	31.28	1635.56	5.32	405.94	2.36	142.33	2.17	25.79	0.388
			14		34.709	27.247	0.510	896.30	5.08	84.56	239.06	2.82	31.28	1635.56	5.32	405.94	2.36	142.33	2.17	25.79	0.388
			16		39.281	30.835	0.510	1003.04	5.05	95.33	301.60	2.77	40.24	2181.79	5.48	548.22	2.51	182.57	2.16	33.44	0.382
18/ 11	180	110	10	14	28.373	22.273	0.571	956.25	5.80	78.96	278.11	3.13	32.49	1940.40	5.89	447.22	2.44	166.50	2.42	26.88	0.376
			12		33.712	26.464	0.571	1124.72	5.78	93.53	325.03	3.10	38.32	2328.38	5.98	538.94	2.52	194.87	2.40	31.66	0.374
			14		38.967	30.589	0.570	1286.91	5.75	107.76	369.55	3.08	43.97	2716.60	6.06	631.95	2.59	222.30	2.39	36.32	0.372
			16		44.139	34.649	0.569	1443.06	5.72	121.64	411.82	3.06	49.44	3105.15	6.14	726.46	2.67	248.94	2.38	40.87	0.369
20/ 12.5	200	125	12	14	37.912	29.761	0.641	1570.90	6.44	116.73	483.16	3.57	49.99	3193.85	6.54	787.74	2.83	285.79	2.74	41.23	0.392
			14		43.867	34.436	0.640	1800.97	6.41	134.65	550.83	3.54	57.44	3726.17	6.62	922.47	2.91	326.58	2.73	47.34	0.390
			16		49.739	39.045	0.639	2033.35	6.38	152.18	615.44	3.52	64.69	4258.86	6.70	1058.86	2.99	366.21	2.71	53.32	0.388
			18		55.526	43.588	0.639	2238.30	6.35	169.33	677.19	3.49	71.74	4792.00	6.78	1197.13	3.06	404.83	2.70	59.18	0.385

- 注：1. $r_1 = \frac{1}{3}d$, $r_2 = 0$, $r_0 = 0$ 。
2. 角钢长度：2.5/1.6 ~ 5.6/3.6 号，长 3 ~ 9m；3/4 ~ 9/5.6 号，长 4 ~ 12m；10/6.3 ~ 14/9 号，长 4 ~ 19m；16/10 ~ 20/12.5 号，长 6 ~ 19m。
3. 一般采用材料：Q215A, Q235A, Q235A · F。

3 热轧普通槽钢(GB707- 88)

h——高度；r₁——腿端圆弧半径；
 b——腿宽；I——惯性矩；
 d——腰厚；W——截面系数；
 t——平均腿厚；i——惯性半径；
 r——内圆弧半径；z₀- y- y 与- y₁- y₂ 轴线间距离。

型 号	尺寸(mm)						截面面积 × 10 ² (mm ²)	理论得量 × 9. 8 (N/ m)	参 考 数 值							
	h	b	d	t	r	r ₁			x- x			y- y			y ₁ - y ₁	z ₀ × 10 ⁴ (mm ⁴)
									W _x × 10 ³ (mm ³)	I _x × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _x × 10 (mm)	W _y × 10 ³ (mm ³)	I _y × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _y × 10 (mm)	I _y × 10 ⁴ (mm ⁴)	
5	50	37	4. 5	7	7	3. 5	6. 93	5. 44	10. 4	26. 0	1. 94	3. 55	8. 3	1. 10	20. 9	1. 35
6. 3	63	40	4. 8	7. 5	7. 5	3. 75	8. 45	6. 63	16. 1	50. 8	2. 45	4. 50	11. 9	1. 19	28. 4	1. 36
8	80	43	5	8	8	4	10. 25	8. 04	25. 3	101. 3	3. 15	5. 79	16. 6	1. 27	37. 4	1. 43
10	100	48	5. 3	8. 5	8. 5	4. 25	12. 75	10. 00	39. 7	198. 3	3. 95	7. 80	25. 6	1. 41	54. 9	1. 52
12. 6	126	53	5. 5	9	9	4. 5	15. 69	12. 32	62. 1	371. 4	4. 95	10. 24	38. 0	1. 57	77. 1	1. 59
14 ^a _b	140	58	6	9. 5	9. 5	4. 75	18. 51	14. 53	80. 5	563. 7	5. 52	13. 01	53. 2	1. 70	107. 1	1. 71
	140	60	8	9. 5	9. 5	4. 75	21. 31	16. 73	87. 1	609. 4	5. 35	14. 12	61. 1	1. 69	120. 6	1. 67
16a	160	63	6. 5	10	10	5	21. 96	17. 24	108. 3	866. 2	6. 28	16. 30	73. 3	1. 83	144. 1	1. 80
16	160	65	8. 5	10	10	5	25. 16	19. 75	116. 8	934. 5	6. 10	17. 55	83. 4	1. 82	160. 8	1. 75

续上表

型 号	尺寸(mm)						截面面积 × 10 ² (mm ²)	理论重量 × 9.8 (N/m)	参 考 数 值							
	h	b	d	t	r	r ₁			x- x			y- y			y ₁ - y ₁	z ₀ × 10 (mm)
									W _x × 10 ³ (mm ³)	I _x × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _x × 10 (mm)	W _y × 10 ³ (mm ³)	I _y × 10 ⁴ (mm ⁴)	i _y × 10 (mm)	I _y × 10 ⁴ (mm ⁴)	
18a 18	180	68	7	10.5	10.5	5.25	25.69	20.17	141.4	1272.7	7.04	20.03	98.6	1.96	189.7	1.88
	180	70	9	10.5	10.5	5.25	29.29	22.99	152.2	1369.9	6.84	21.52	111	1.95	210.1	1.84
20a 20	200	73	7.0	11.0	11.0	5.5	28.83	22.63	178	1780	7.86	24.2	128.6	2.11	244.0	2.01
	200	75	9.0	11.0	11.0	5.5	32.83	25.77	191	1910	7.64	25.9	143.6	2.09	268.4	1.95
22a 22	220	77	7.0	11.5	11.5	5.8	31.84	24.99	218	2390	8.67	28.2	157.8	2.23	298.2	2.10
	220	79	9.0	11.5	11.5	5.8	36.24	28.45	234	2570	8.42	30.1	176.4	2.21	326.3	2.03
a 25b c	250	78	7.0	12.0	12.0	6.0	34.91	27.41	270	3370	9.823	30.6	175.53	2.24	322.26	2.07
	250	80	9.0	12.0	12.0	6.0	39.91	31.33	282	3530	9.405	32.7	196.42	2.22	353.19	1.98
	250	82	11.0	12.0	12.0	6.0	44.91	35.26	295	3690	9.065	35.9	218.42	2.21	384.13	1.92
a 28b c	280	82	7.5	12.5	12.5	6.2	40.03	31.42	340	4760	10.91	35.7	217.99	2.33	387.57	2.10
	280	84	9.5	12.5	12.5	6.2	45.63	35.82	366	5130	10.6	37.9	242.14	2.30	427.59	2.05
	280	86	11.5	12.5	12.5	6.2	51.23	40.21	393	5500	10.35	40.3	267.60	2.29	426.60	1.95
a 36b c	320	88	8.0	14.0	14.0	7.0	48.51	38.08	475	7600	12.49	46.5	304.79	2.50	552.31	2.24
	360	98	11.0	16.0	16.0	8.0	68.11	53.46	703	12700	13.63	66.9	496.7	2.70	880.40	2.37
	360	100	13.0	16.0	16.0	8.0	75.31	59.11	746	13400	13.36	70.0	536.4	2.67	947.90	2.34
a	400	100	10.5	18.0	18.0	9.0	75.06	58.92	879	17600	15.30	78.8	592.0	2.81	1067.70	2.49
40b	400	102	12.5	18.0	18.0	9.0	83.06	65.20	932	18600	14.98	82.5	640.0	2.78	1135.60	2.44
c	400	104	14.5	18.0	18.0	9.0	91.06	71.48	986	19700	14.71	86.2	687.8	2.75	1220.70	2.42

注: 1. 槽钢长度: 5~8号, 长5~12m; 10~18号, 长5~19m; 20~40号, 长6~19m。

2. 一般采用材料: Q215A, Q235A, Q235A · F

4 热轧普通工字钢(GB706- 88)

h——高度；r₁——腿端圆弧半径；
b——腿宽度；I——惯性矩；
d——腰厚度；W——截面系数；
t——平均腿厚度；i——惯性半径；
r——内圆弧半径；S——半截面的静力矩。

型 号	尺寸(mm)						截面面积 × 10 ² (mm ²)	理 论 重 量 × 9.8 (N/ m)	参 考 数 值						
	h	b	d	t	r	r ₁			x- x				y- y		
									I _x × 10 ⁴ (mm ⁴)	W _x × 10 ³ (mm ³)	i _x × 10 (mm)	I _x :S _x × 10 (mm)	I _y × 10 ⁴ (mm ⁴)	W _y × 10 ³ (mm ³)	i _y × 10 (mm)
10	100	68	4.5	7.6	6.5	3.3	14.3	11.2	245	49.0	4.14	8.59	33.0	9.72	1.52
12.6	126	74	5	8.4	7	3.5	18.1	14.2	488	77.5	5.20	10.85	46.0	12.70	1.61
14	140	80	5.5	9.1	7.5	3.8	21.5	16.9	712	102	5.76	12.0	64.4	16.1	1.73
16	160	88	6	9.9	8	4	26.1	20.5	1130	141	6.58	13.8	93.1	21.2	1.89
18	180	94	6.5	10.7	8.5	4.3	30.6	24.1	1660	185	7.36	15.4	122	26.0	2.00
20a	200	100	7	11.4	9	4.5	35.5	27.9	2370	237	8.15	17.2	158	31.5	2.12
20b	200	102	9	11.4	9	4.5	35.5	31.1	2500	250	7.96	16.0	169	33.1	2.06
22a	220	110	7.5	12.3	9.5	4.8	42	33.1	3400	309	8.99	18.9	225	40.9	2.31
22b	220	112	9.5	12.3	9.5	4.8	46.4	36.5	3570	325	8.78	18.7	239	42.7	2.27

续上表

型 号	尺寸 (mm)						面面积 × 10 ² (mm ²)	理 论 得 理 × 9.8 (N/m)	参 考 数 值						
	h	b	d	t	r	r1			x- x				y- y		
									I _x × 10 ⁴ (mm ⁴)	W _x × 10 ³ (mm ³)	i _x × 10 ⁴ (mm)	I _x : S _x × 10 (mm)	I _y × 10 ⁴ (mm ⁴)	W _y × 10 ³ (mm ³)	i _y × 10 (mm)
25a	250	116	8	13	10	5	48.5	38.1	5020	402	10.18	21.58	280	48.3	2.40
25b	250	116	10	13	10	5	53.5	42.0	5280	423	9.94	21.27	309	52.4	2.40
28a	280	122	8.5	13.7	10.5	5.3	55.45	43.5	7110	508	11.32	24.62	345	56.5	2.50
28b	280	124	10.5	13.7	10.5	5.3	61.05	47.9	7480	534	11.08	24.24	379	61.2	2.49
32a	320	130	9.5	15	11.5	5.8	67.05	52.7	11100	692	12.84	27.46	460	70.8	2.62
32b	320	132	11.5	15	11.5	5.8	73.45	57.7	11600	726	12.58	27.09	502	76.0	2.61
32c	320	134	13.5	15	11.5	5.8	79.95	62.8	12200	760	12.34	26.77	544	81.2	2.61
36a	360	136	10	15.8	12	6	76.3	60.0	15800	875	14.40	30.7	552	81.2	2.69
36b	360	138	12	15.8	12	6	83.5	65.7	16500	919	14.10	30.3	582	84.3	2.64
36c	360	140	14	15.8	12	6	90.7	71.3	17300	962	13.80	29.9	612	87.4	2.60
36c	360	140	14	15.8	12	6	90.7	71.3	17300	962	13.80	29.9	612	87.4	2.60
40a	400	142	10.5	16.5	12.5	6.3	86.1	67.6	21700	1090	15.90	34.1	660	93.2	2.77
40b	400	144	12.5	16.5	12.5	6.3	94.1	73.0	22800	1140	15.60	33.6	692	96.2	2.71
40c	400	146	14.5	16.5	12.5	6.3	102	80.2	23900	1190	15.20	33.2	727	99.6	2.65

续上表

型 号	尺寸 (mm)						面面积 × 10 ² (mm ²)	理论得理 × 9.8 (N/m)	参 考 数 值						
	h	b	d	t	r	r1			x- x				y- y		
									I _x × 10 ⁴ (mm ⁴)	W _x × 10 ³ (mm ³)	i _x × 10 (mm)	I _x :S _x × 10 (mm)	I _y × 10 ⁴ (mm ⁴)	W _y × 10 ³ (mm ³)	i _y × 10 (mm)
45a	450	150	11.5	18	13.5	6.8	102	80.4	3220	1430	17.70	38.6	855	114	2.89
45b	450	152	13.5	18	13.5	6.8	111	87.5	33800	1500	17.40	38	894	118	2.84
45c	450	154	15.5	18	13.5	6.8	120	94.5	35300	1570	17.10	37.6	938	122	2.79
50a	500	158	12	20	14	7	119	93.6	46500	1860	19.70	42.8	1120	142	3.07
50b	500	160	14	20	14	7	129	101.5	48600	1940	19.40	42.4	1170	146	3.01
50c	500	162	16	20	14	7	139	109.4	50600	2080	19.00	41.8	1220	151	2.96
56a	560	166	12.5	21	14.5	7.3	135.25	106.3	65600	2340	22.02	47.73	1370	165	3.18
56b	560	168	14.5	21	14.5	7.3	146.45	115.1	68500	2450	21.63	47.17	1490	174	3.16
56c	560	170	16.5	21	14.5	7.3	157.85	123.9	71400	2550	21.27	46.66	1560	183	3.16
63a	630	176	13	22	15	7.5	154.9	121.4	93900	2980	24.52	54.17	1700	193	3.31
63b	630	178	15	22	15	7.5	167.5	131.3	98000	3160	24.20	53.51	1812	204	3.29
63c	630	180	17	22	15	7.5	180.1	141.2	102000	3300	23.82	52.92	1924	214	3.27

注: 1. 工字钢长度: 10 ~ 18 号, 长 5 ~ 19m, 20 ~ 63 号, 长 6 ~ 19m。

2. 一般采用材料: Q215A, Q235A, Q235A · F

习题答案

第一章

1-2 $\sigma_1 = 63.7\text{MPa}$ $\sigma_2 = 93.5\text{MPa}$

1-3 $\sigma_1 = 50\text{MPa}$ $\sigma_2 = 100\text{MPa}$ $\sigma_3 = -100\text{MPa}$

1-4 $\sigma_{AB} = 75\text{MPa}$ $\sigma_{BC} = 45\text{MPa}$

1-5 $\sigma_{CD} = -100\text{MPa}$ $\sigma_{BC} = -75\text{MPa}$ $\sigma_{AC} = 125\text{MPa}$

1-6 $\delta = 0.125\text{mm}$

1-7 $E = 205\text{MPa}$ $\nu = 0.32$

1-8 $F = 53\text{kN}$ $\delta_D = 1.43\text{mm}$

1-9 $\sigma = 151\text{MPa}$ $\delta_E = 0.79\text{mm}$

1-10 (1) $A = 833.3\text{mm}^2$ (2) $d = 17.8\text{mm}$
(3) $F = 15.7\text{kN}$

1-11 $n = 8$ 个

1-12 $F = 38.6\text{kN}$

1-13 $A_1 = 1073\text{mm}^2$ $A_2 = 486\text{mm}^2$

1-14 (1) $A_1 = 200\text{mm}^2$ $A_2 = 50\text{mm}^2$

(2) $A_2 = 50\text{mm}^2$ $A_1 = 266.7\text{mm}^2$

1-15 $\alpha = -30^\circ$ $\sigma = 30\text{MPa}$ $\tau = -17.3\text{MPa}$

1-16 $\sigma = 58\text{MPa}$ $\tau = 49\text{MPa}$

1-17 $\alpha = 26.6^\circ$ $F = 16.8\text{kN}$

1-18 $F_A = Fb/l$ $F_B = Fa/l$ $c = \frac{F_{ab}}{EAL}$

1-19 $e = b(E_1 - E_2) / 2(E_1 + E_2)$

$$1-20 \quad F_B = E_2 A_2 (F_a - E_1 A_1) / (E_1 A_1 b + E_2 A_2 a)$$

$$1-21 \quad F = 1131 \text{ kN}$$

$$1-22 \quad (a) \quad \sigma_{\text{中}} = 6.7 \text{ MPa} \quad \sigma_{\text{边}} = -3.3 \text{ MPa}$$

$$(b) \quad \sigma_{\text{中}} = -\frac{10}{3} \text{ MPa} \quad \sigma_{\text{边}} = \frac{10}{6} \text{ MPa}$$

$$1-23 \quad \sigma = 66.67 \text{ MPa}$$

第 二 章

$$2-3 \quad (1) \text{ 实心轴} \quad \sigma_{\text{max}} = 14.9 \text{ MPa}, \quad \sigma_{\text{min}} = 0$$

$$\text{空心轴} \quad \sigma_{\text{max}} = 14.6 \text{ MPa}, \quad \sigma_{\text{min}} = 10.9 \text{ MPa}$$

$$(2) \quad \varphi = 9.2 \times 10^{-3} \text{ rad}, \quad \varphi_1 = 0.46 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$2-4 \quad (1) T_{\text{max}} = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$(2) \quad \sigma = 10 \text{ MPa}$$

$$(3) \quad \varphi = 8.7 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$(4) \quad \sigma = 6 \text{ MPa} \quad \varphi = -1.2 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$2-5 \quad \sigma = 81.5 \text{ MPa} \quad \varphi_{AC} = 2.3 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

$$2-6 \quad d = 39.3 \text{ mm} \quad D_1 = 41.2 \text{ mm}$$

$$2-7 \quad d = 97 \text{ mm}$$

$$2-8 \quad P = 5.3 \text{ kW}$$

$$2-9 \quad \sigma_1 = 24.3 \text{ MPa}; \quad \sigma_H = 23.8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_V = 22.5 \text{ MPa}$$

$$2-10 \quad d = 21.7 \text{ mm}, \quad G = 11.2 \text{ kN}$$

$$2-11 \quad d = 98.2 \text{ mm}$$

$$2-12 \quad d = 100 \text{ mm}$$

$$2-13 \quad T = \frac{f}{3} F d$$

第 三 章

3-5 $\sigma = E \frac{d}{D+d}$

3-6 实心轴 $\sigma = 500\text{MPa}$, 空心轴 $\sigma = 294\text{MPa}$

3-7 $\sigma_1 = \sigma_2 = 108\text{MPa}$, $\sigma_3 = 95.5\text{MPa}$, $\sigma_4 = 0$

3-8 $\tau_{\max} = 30\text{MPa}$, $\sigma_{\max} = 50\text{MPa}$

3-9 $\sigma_A = -27.2\text{MPa}$, $\sigma_B = 0$, $\sigma_C = 54.3\text{MPa}$

3-10 (a) $I_z = 145770\text{cm}^4$

(b) $I_z = 7720\text{cm}^4$

3-11 $b = 2a$

3-12 $\sigma_a = 28.9\text{MPa}$, $\sigma_a = 0.32\text{MPa}$; $\sigma_b = 34.7\text{MPa}$, $\sigma_b =$; $\sigma_{\max} = 44.6\text{MPa}$; $\sigma_{\max} = 1.25\text{MPa}$

3-13 矩形: $h = 92.8\text{mm}$ $A = 43\text{cm}^2$

I 字型: $N_{\geq 12.6}$ $A = 18.1\text{cm}^2$

圆形: $d = 87.86\text{mm}$ $A = 60.6\text{cm}^2$

圆环形: $D = 89.8\text{mm}$ $A = 47.5\text{cm}^2$

3-14 $h = 38\text{mm}$, $d = 19\text{mm}$, $b = 9.5\text{mm}$

3-15 A 处: $\tau = 24.1\text{MPa}$, $\sigma = 52.4\text{MPa}$

D 处: $\tau = 26.2\text{MPa}$

3-16 $\sigma_{\max} = 140\text{MPa}$

3-17 $F = 44.2\text{kN}$

3-18 $q = 15.68\text{kN/m}$

3-19 $F = 3.75\text{kN}$

3-20 $F = 29.4\text{kN}$, $\sigma = 80\text{MPa}$, $\sigma = 50.7\text{MPa}$

3-21 C: $\tau_{\max} = 1.5Fl_a/I$; B: $\sigma_{\max} = 2Fl_a/I$

3-22 $b = 510\text{mm}$

3-23 $a = 3l/13$

3-24 $N_{\geq 28a}$

$$3-25 \quad (b) \quad B = -7ql^3/6EI, v_{By} = -41ql^4/24EI$$

$$3-26 \quad (a) \quad B = 5ql^3/6EI, v_{By} = 2ql^4/3EI$$

$$(b) \quad B = 7ql^3/6EI, v_{By} = 11ql^4/12EI$$

$$3-27 \quad c = 5Fl^2/4EI, v_c = \frac{3Fl^3}{2EI}$$

$$3-28 \quad N_{\text{g}22a}$$

$$3-29 \quad l = 10.3m$$

$$3-30 \quad (a) \quad F_A = 3F/4, F_B = 7F/4, M_A = \frac{Fl}{2}W$$

$$(b) \quad F_A = F_c = 5F/16, F_B = 11F/8$$

$$3-31 \quad F_N = 6qa^2A/(3I + 8a^2A)$$

$$3-32 \quad 2N_{\text{g}16a}$$

第 四 章

$$4-1 \quad = 88.5MPa \quad \sigma_{bs} = 83.3MPa$$

$$4-2 \quad = 88.5MPa \quad \sigma_{bs} = 52.1MPa$$

$$4-3 \quad d = 12.3mm$$

$$4-4 \quad [\sigma] = 80MPa$$

$$4-5 \quad F = 420N$$

$$4-6 \quad D = 61.2mm$$

$$4-7 \quad = 2.83mm$$

$$4-8 \quad d = 34mm, t = 10.4mm$$

$$4-9 \quad = 28.6MPa \quad \sigma_{bs} = 95.2MPa$$

$$4-10 \quad n = 5$$

$$4-11 \quad M_e = d^2[\sigma](1.5R_1^2 + R_2^2/R_1)$$

$$4-12 \quad \sigma_3 = \sigma_8 = 0.877F$$

$$4-13 \quad \sigma_3 = 2.55kN$$

第 五 章

5-1 $\sigma_x = 127.4\text{MPa}$, $\sigma_y = 0$, $\sigma_z = 38.2\text{MPa}$

5-2 (a) $\sigma_x = -52.5\text{MPa}$, $\sigma_y = 0$, $\sigma_z = 0$

(b) $\sigma_x = -26.25\text{MPa}$, $\sigma_y = 0$, $\sigma_z = 0$

(c) $\sigma_x = \sigma_y = 0$, $\sigma_z = 5.25\text{MPa}$

(d) $\sigma_x = 26.25\text{MPa}$, $\sigma_z = 3.94\text{MPa}$, $\sigma_y = 0$

(e) $\sigma_x = 52.5\text{MPa}$, $\sigma_z = 0$, $\sigma_y = 0$

5-3 (a) $\alpha = 45^\circ$, $\sigma = 0$, $\tau = 50\text{MPa}$

(b) $\alpha = -60^\circ$, $\sigma = -34.6\text{MPa}$, $\tau = 20\text{MPa}$

(c) $\alpha = -45^\circ$, $\sigma = 90\text{MPa}$, $\tau = -40\text{MPa}$

(d) $\alpha = 60^\circ$, $\sigma = 31\text{MPa}$, $\tau = -11\text{MPa}$

5-4 (a) $\sigma_1 = 20 + 20 \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 20 - 20 \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\alpha = 22.5^\circ$

(b) $\sigma_1 = 20 + 20 \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 20 - 20 \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\alpha = 67.5^\circ$

(c) $\sigma_1 = 30$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -70$, $\alpha = -71.56^\circ$

(d) $\sigma_1 = 40 + 10 \sqrt{\frac{1}{5}}$, $\sigma_2 = 40 - 10 \sqrt{\frac{1}{5}}$, $\sigma_3 = 0$, $\alpha = 58.28^\circ$

5-5 (a) $\sigma_1 = 50$, $\sigma_2 = 20$, $\sigma_3 = -30$, $\sigma_{\max} = 40\text{MPa}$

(b) $\sigma_1 = 50$, $\sigma_2 = -20$, $\sigma_3 = -50$, $\sigma_{\max} = 50\text{MPa}$

(c) $\sigma_1 = 90$, $\sigma_2 = 30$, $\sigma_3 = -10$, $\sigma_{\max} = 50\text{MPa}$

5-6 $M_e = \frac{d^3 E}{16(H)} \cdot 45^\circ$

5-7 $F = 20\text{kN}$

5-8 按第一强度理论(a)点为危险点;按第三强度理论(c)为危险点。

5-9 按第三强度理论, $t = 8.3\text{mm}$;按第四强度理论 $t = 7.2\text{mm}$

5-10 $t = FD/4[\]$

5-11 $\sigma_{eq2} = 24.1\text{MPa}$

$$5-12 \quad \sigma_{eq3} = 143.1 \text{MPa}, \quad \sigma_{eq4} = 133.7 \text{MPa}$$

第 六 章

$$6-1 \quad \tau_{\max} = 97.97 \text{MPa}, \quad \sigma_{\text{enx}} = 39.17 \text{MPa}$$

$$6-2 \quad h = 21.8 \text{mm}$$

$$6-3 \quad \sigma_{\max} = 120.9 \text{MPa}。 \text{可用}$$

$$6-4 \quad (a) \sigma_{\max} = 195.2 \text{MPa} \text{ 不安全} \quad (b) \sigma_{\max} = 183.2 \text{MPa} \text{ 安求}$$

$$6-5 \quad t_g = (D^2 + d^2) / 4hD$$

$$6-7 \quad d = 60 \text{mm}$$

$$6-8 \quad (a) F = 9.82 \text{kN}, (b) F = 2.07 \text{kN}, (c) \text{对钢制杆许可载荷无变化; 对铸铁杆许可载荷有变化。}$$

$$6-9 \quad d = 52 \text{mm}$$

$$6-10 \quad \sigma_{eq4} = 119.5 \text{MPa}$$

$$6-11 \quad \text{计算轮自主 } d = 49.3 \text{mm}, \text{ 不针对 } d = 48 \text{mm}$$

$$6-12 \quad d = 69.3 \text{mm}$$

$$6-13 \quad d = 60.9 \text{mm}$$

$$6-14 \quad \sigma_{eq3} = 107.4 \text{MPa}$$

$$6-15 \quad \sigma_{eq3} = 150 \text{MPa}, \quad \sigma_{eq4} = 132.3 \text{MPa}$$

$$6-16 \quad \sigma_{eq4} = 159.8 \text{MPa} \quad T = 904.3 \text{N} \cdot \text{m} \quad M = 628 \text{N} \cdot \text{m}$$

第 七 章

$$7-6 \quad \sigma_d = 15 \text{MPa}, \quad f_d = 20 \text{mm}$$

$$7-7 \quad d = \frac{v}{W} \frac{3FEI}{eg}$$

$$7-8 \quad (a) t = 388.88 \text{mm}, \quad (b) h = 9.66 \text{mm}$$

$$7-9 \quad \sigma_m = 530.6 \text{MPa}, \quad \sigma_a = 88.5 \text{MPa} \quad r = 0.714$$

$$7-10 \quad n = 1.28$$

$$7-11 \quad n = 3.58 > [n] \text{安全}$$

7-12 (a) $M = 405 \text{ kN} \cdot \text{m}$, (b) $M = 7.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$

第 八 章

8-1 $F_c > F_b > F_a$

8-2 (a) $F_{cr} = 37.8 \text{ kN}$, (b) $F_{cr} = 52.6 \text{ kN}$, (c) $F_{cr} = 459 \text{ kN}$

8-3 $p = 99$, $l = 572 \text{ mm}$

8-4 $n = 5.45 > n_{st}$ 安全

8-5 矩形: $F_{cr} = 374 \text{ kN}$; 圆形: $F_{cr} = 636 \text{ kN}$;
环形: $F_{cr} = 752 \text{ kN}$; 正方形: $F_{cr} = 644 \text{ kN}$ 。

8-6 $F_{cr} = 118.6 \text{ kN}$; $n = 1.69 < n_{st}$ 不安全

8-7 $F = 400 \text{ kN}$

8-8 $T = 29.2^\circ$

8-9 $F_{cr} = \sqrt{2}^2 EI / a^2$ 反向时 $F_{cr} = ^2 EI / 2a^2$

8-10 $[F] = 51.6 \text{ kN}$