

弦理论

目录

1	相对论弦	1
1.1	相对论点粒子	1
1.1.1	量子化	3
1.1.2	Ein Einbein	5
1.2	Nambu-Goto 作用量	6
1.2.1	Nambu-Goto 作用量的对称性	9
1.2.2	运动方程	10
1.3	Polyakov 作用量	10
1.3.1	Polyakov 作用量的对称性	12
1.3.2	规范固定	14
1.4	模式展开	17
1.4.1	重新审视约束	18
2	量子弦	20
2.1	快速了解协变量子化	20
2.1.1	鬼	22
2.1.2	约束	22
2.2	光锥量子化	24
2.2.1	光锥规范	25
2.2.2	量子化	28

2.3	弦的粒子谱	32
2.3.1	快子	32
2.3.2	第一激发态	33
2.3.3	更高的激发态	37
2.4	Lorentz 不变量	38
2.5	A Nod to the Superstring	40
3	开弦和 D-膜	42
3.1	量子化	45
3.1.1	基态	46
3.1.2	第一激发态：光子	47
3.1.3	更高的激发态与 Regge 轨道	48
3.1.4	Another Nod to the Superstring	48
3.2	膜动力学：Dirac 作用量	49
3.3	多个膜：胶子	51
4	共形场论简介	53
4.0.1	欧几里德空间	54
4.0.2	共形变换的全纯性	55
4.1	经典层面	55
4.1.1	能量-动量张量	56
4.1.2	诺特流	58
4.1.3	一个例子：自由标量场	59
4.2	量子层面	60
4.2.1	算符乘积展开	60
4.2.2	Ward 恒等式	62
4.2.3	初级算符	65
4.3	一个例子：自由标量场	69

4.3.1	传播子	69
4.3.2	题外话：二维无 Goldstone 玻色子	71
4.3.3	能量-动量张量和初级算符	72
4.4	中心荷	74
4.4.1	c 代表 Casimir	77
4.4.2	Weyl 反常	78
4.4.3	c 代表 Cardy	81
4.4.4	有关 c 的一个定理	83
4.5	Virasoro 代数	86
4.5.1	径向量子化	86
4.5.2	Virasoro 代数	89
4.5.3	Virasoro 代数的表示	91
4.5.4	么正性的影响	92
4.6	态-算符映射	93
4.6.1	一些简单的结果	96
4.6.2	我们最喜欢的例子：自由标量场	97
4.7	简论有边界的共形场论	100
5	Polyakov 路径积分和鬼	102
5.1	路径积分	102
5.1.1	Faddeev-Popov 方法	103
5.1.2	Faddeev-Popov 行列式	106
5.1.3	鬼	107
5.2	鬼 CFT	108
5.3	弦理论的临界“维度”	111
5.3.1	The Usual Nod to the Superstring	112
5.3.2	题外话：非临界弦	113
5.4	态和顶点算符	114

5.4.1	一个例子：平直空间中的闭弦	116
5.4.2	一个例子：平直空间中的开弦	117
5.4.3	更一般的 CFT	118
6	弦的相互作用	119
6.1	计算什么	119
6.1.1	拓扑求和	121
6.2	闭弦的树级振幅	124
6.2.1	冗余规范对称性：SL(2,C)	124
6.2.2	Virasoro-Shapiro 振幅	126
6.2.3	经验教训	129
6.3	开弦的散射	133
6.3.1	Veneziano 振幅	135
6.3.2	D-膜的张力	136
6.4	单圈振幅	137
6.4.1	环面的模空间	137
6.4.2	单圈配分函数	140
6.4.3	解释弦的配分函数	143
6.4.4	那么弦论是有限的吗？	146
6.4.5	超越微扰理论？	147
6.5	附录：积分和伽玛函数的游戏	148
7	低能有效作用量	151
7.1	Einstein 方程	152
7.1.1	Beta 函数	153
7.1.2	Ricci 流	157
7.2	其他耦合	157
7.2.1	带荷弦和 B 场	157

7.2.2	胀子	159
7.2.3	Beta 函数	161
7.3	低能有效作用量	161
7.3.1	弦标架和 Einstein 标架	162
7.3.2	修正 Einstein 方程	164
7.3.3	Nodding Once More to the Superstring	165
7.4	一些简单解	167
7.4.1	紧致化	168
7.4.2	弦本身	169
7.4.3	磁膜	171
7.4.4	远离临界维度	174
7.4.5	The Elephant in the Room: 快子	177
7.5	重新审视 D-膜: 背景规范场	177
7.5.1	Beta 函数	178
7.5.2	Born-Infeld 作用量	181
7.6	DBI 作用量	182
7.6.1	耦合到闭弦场	183
7.7	Yang-Mills 作用量	185
7.7.1	Type II 超弦理论中的 D-膜	189
8	紧致化与 \mathbf{T}-对偶	191
8.1	时空视角	191
8.1.1	圈上移动	193
8.2	世界面视角	194
8.2.1	无质量态	196
8.2.2	带荷场	196
8.2.3	增强规范对称性	197
8.3	为什么大圆圈和小圆圈是一样的	198

8.3.1	T-对偶的路径积分导数	200
8.3.2	开弦的 T-对偶	201
8.3.3	超弦的 T-对偶	202
8.3.4	Mirror Symmetry	202

1 相对论弦

所有关于弦理论的课程都是从点粒子的讨论开始的。我们的也不例外。我们将进行一次相对论点粒子物理学的旅程，并且取得一些重要的教训，在我们学习弦理论时将携带这些教训。

1.1 相对论点粒子

我们想写下描述质量为 m 的相对论性粒子的拉格朗日量。在弦理论的预期中，我们将考虑 D 维的闵可夫斯基空间 $\mathbf{R}^{1,D-1}$ 。在这个笔记中，我们使用记号

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, \dots, +1)$$

如果我们用坐标 $X^\mu = (t, \vec{x})$ 那么作用量为：

$$S = \int dt L = -m \int dt \sqrt{1 - \dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}} \quad (1.1)$$

为了证明这是正确的，我们可以计算与 \vec{x} 共轭的动量 \vec{p} ，以及能量 E ，它等于哈密顿量。

$$\vec{p} = \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}}} \quad , \quad E = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - L = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$$

这两者在狭义相对论课程中应该很熟悉。

尽管拉格朗日量 (1.1) 是正确的，但它并不完全令人满意。原因是时间 t 和空间 \vec{x} 在这个拉格朗日量中扮演着非常不同的角色。位置 \vec{x} 是一个动力学自由度。相反，时间 t 仅仅是标记位置的参数。然而 Lorentz 变换应该混合了 t 和 \vec{x} 并且这种对称性在 (1.1) 中并不完全明显。我们能找到一个时间和空间平等的新拉格朗日量吗？

一种可能性是将时间和空间都视为标记。这就引出了场论的概念。然而，在这门课程中，我们将对另一种可能性更感兴趣：我们将把时间提升到一个动力学自由度。乍一看，这可能看起来很奇怪：自由度是我们描述系统

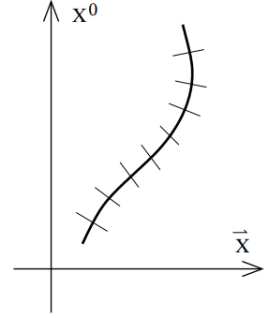
最自然的方式之一。如果不从根本上改变我们所说的系统，我们就不应该随意增加更多的自由度。另一种说法是，粒子在空间中可以选择移动，但是它不能在时间中选择移动。它必须在时间中移动。因此，我们需要一种方法来将时间提升到一个自由度，但这不是真正的动力学自由度。我们该怎么做？答案，正如我们现在要展示的，是规范对称性。

考虑作用量，

$$S = -m \int d\tau \sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}^\nu \eta_{\mu\nu}} \quad (1.2)$$

其中 $\mu = 0, \dots, D-1$ 且 $\dot{X}^\mu = dX^\mu/d\tau$ 。我们引入了一个新的参数 τ ，它标记了粒子沿世界线的位置，如图中虚线所示。这个作用量有一个简单的解释：正是这一世界线的固有时 $\int ds$ 。

天真地说，我们现在看起来有 D 个物理的自由度而不是 $D-1$ 个，因为正如承诺的那样，时间方向 $X^0 \equiv t$ 是我们的动力学变量之一： $X^0 = X^0(\tau)$ 。然而，这只是一种错觉。为了了解原因，我们需要注意作用量 (1.2) 具有一个非常重要的属性：重参数化不变性。这意味着我们可以在世界线上选择不同的参数 $\tilde{\tau}$ ，通过任何与 τ 相关的单调函数



$$\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(\tau)$$

检查一下在这种类型的变换下作用量是否不变。积分测度在作用量中的改变为 $d\tau = d\tilde{\tau}|d\tau/d\tilde{\tau}|$ 。同时，速度的改变为 $dX^\mu/d\tau = (dX^\mu/d\tilde{\tau})(d\tilde{\tau}/d\tau)$ 。把这些放在一起，我们看到作用量也可以写在 $\tilde{\tau}$ 的重参数化中，

$$S = -m \int d\tilde{\tau} \sqrt{-\frac{dX^\mu}{d\tilde{\tau}} \frac{dX^\nu}{d\tilde{\tau}} \eta_{\mu\nu}}$$

这样做的结果是，并不是所有的 D 个自由度 X^μ 都是物理的。例如，假设你找到了该系统的解，这样你就知道 X^0 如何随着 τ 变化， X^1 如何随着 τ 改变，等等。并非所有这些信息都有意义，因为 τ 本身没有意义。特别地，我们可以使用我们的重参数化不变性来简单地设置

$$\tau = X^0(\tau) \equiv t \quad (1.3)$$

如果我们将这个选择带入作用量 (1.2) 中，我们就会得到初始作用量 (1.1)。重新参数化不变性是系统的规范对称性。像所有的规范对称性一样，它根本不是真正的对称性。相反，在我们的描述中，这是一种冗余。在目前的情况下，这意味着尽管我们似乎有 D 个自由度 X^μ ，但其中一个假的。

如果我们看动量，其中一个自由度是假的这一事实也会出现，

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} = \frac{m \dot{X}^\nu \eta_{\mu\nu}}{\sqrt{-\dot{X}^\lambda \dot{X}^\rho \eta_{\lambda\rho}}} \quad (1.4)$$

这些动量并不都是独立的。他们满足

$$p^\mu p_\mu + m^2 = 0 \quad (1.5)$$

这是对系统的约束。当然，这是质量为 m 的相对论粒子的质壳约束。从世界线的角度来看，它告诉我们粒子不允许在闵可夫斯基空间中静止不动：至少，它最好在 $(p^0)^2 \geq m^2$ 的情况下，保持类时方向上运动。

作用量 (1.2) 的一个优点是，粒子的庞加莱对称性现在很明显，在世界线上表现为全局对称性

$$X^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu + c^\mu \quad (1.6)$$

其中 Λ 是 Lorentz 变换，满足 $\Lambda^\mu{}_\nu \eta_{\nu\rho} \Lambda^\sigma{}_\rho = \eta^{\mu\sigma}$ ，而 c^μ 对应于平移常量。我们以在我们的系统中引入规范对称性为代价，使所有对称性都得到了体现。类似的规范对称性将出现在相对论性弦中，本课程的大部分内容将致力于理解其后果。

1.1.1 量子化

将这个作用量量子化是 trivial 的。我们引入了一个波函数 $\Psi(X)$ 。这满足了通常的薛定谔方程，

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = H \Psi$$

但是，计算哈密顿量 $H = \dot{X}^\mu p_\mu - L$ ，我们发现它消失了： $H = 0$ 。这并不奇怪。它只是告诉我们波函数不依赖于 τ 。因为波函数是物理的，而正如我

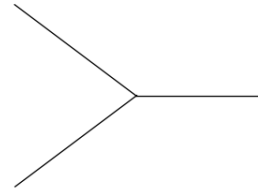
们所看到的， τ 不是，这是意料之中的。请注意，这并不意味着时间已经从问题中消失。相反，在这种相对论的背景下，时间 X^0 是一个算符，就像空间坐标 \vec{x} 一样。这意味着波函数 Ψ 直接是时间和空间的函数。它不像量子力学中的定态，但更类似于非相对论性薛定谔方程的完全积分解。

经典系统具有由 (1.5) 给出的约束。在量子理论中，我们将这种约束作为一个算符方程作用在波函数上，也就是 $(p^\mu p_\mu + m^2)\Psi = 0$ 。使用动量算符的通常表示 $p_\mu = -i\partial/\partial X^\mu$ ，我们认为这个约束是 Klein-Gordon 方程

$$\left(-\frac{\partial}{\partial X^\mu} \frac{\partial}{\partial X^\nu} \eta_{\mu\nu} + m^2\right) \Psi(X) = 0 \quad (1.7)$$

尽管这个方程在场论中很熟悉，但重要的是要认识到它的解释有些不同。在相对论场论中，Klein-Gordon 方程是标量场服从的运动方程。在相对论量子力学中，它是波函数服从的方程。在场论的早期，由于这两个方程是相同的，人们认为应该将波函数视为经典场，并对其进行第二次量子化。这是不正确的，但尽管如此，这种说法还是被保留了，把点粒子视角说成“第一量子化”，把场论视角说成是“第二量子化”是很常见的。

到目前为止，我们只考虑了一个自由点粒子。我们如何将相互作用引入这个框架？我们必须首先决定允许哪些相互作用：也许粒子可以一分为二；也许它可以与其他粒子融合？显然，我们有很多选择。然后，我们会为这些过程分配振幅。么正性的要求会带来某些限制，这将导致反粒子的必要性。我们可以绘制不同相互作用的图——图中给出了一个例子——以这种方式，我们将慢慢建立场理论中熟悉的费曼图展开式。



实际上，这几乎就是 Feynman 本人处理 QED 规则的方式。然而，在实践中，我们很少以这种方式构建粒子相互作用，因为场论框架提供了一种更好的看待事物的方式。相反，这种建立相互作用的方式正是我们稍后对弦所做的。

1.1.2 Ein Einbein

还有另一个作用量描述了相对论性点粒子。我们引入了世界线上的另一个场， $e(\tau)$ ，并写为

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau \left(e^{-1} \dot{X}^2 - em^2 \right) \quad (1.8)$$

其中我们使用了符号 $\dot{X}^2 = \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu \eta_{\mu\nu}$ 。在接下来的课程中，像 X^2 这样的项将总是意味着用闵氏时空度规缩并。

这种形式的作用量使我们看起来好像把世界线理论和一维引力相结合，其中场 $e(\tau)$ 充当 einbein（在广义相对论中引入 vierbeins 的意义）。要看到这一点，注意，我们可以改变符号，用更具暗示性的形式写下这个作用量

$$S = -\frac{1}{2} \int d\tau \sqrt{-g_{\tau\tau}} \left(g^{\tau\tau} \dot{X}^2 + m^2 \right) \quad (1.9)$$

其中 $g_{\tau\tau} = (g^{\tau\tau})^{-1}$ 是世界线上的度规且 $e = \sqrt{-g_{\tau\tau}}$ 。

尽管我们的作用量似乎还有一个自由度 e ，但可以很容易地检查它是否具有与 (1.2) 相同的运动方程。其原因是 e 完全由其运动方程固定， $\dot{X}^2 + e^2 m^2 = 0$ 。将其带入作用量 (1.8) 就回到 (1.2)。

作用量 (1.8) 比 (1.2) 有几个优点。首先，它适应于 $m = 0$ 的无质量粒子。其次，不存在恼人的平方根意味着在路径积分框架中更容易量子化。

作用量 (1.8) 在重参数化下保持不变，现在以看起来更像广义相对论的形式书写。对于由无穷小 η 的参数变换，我们有

$$\tau \rightarrow \tilde{\tau} = \tau - \eta(\tau) \quad , \quad \delta e = \frac{d}{d\tau}(\eta(\tau)e) \quad , \quad \delta X^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau} \eta(\tau) \quad (1.10)$$

einbein e 在世界线上像密度一样变换 ($\tilde{e}(\tilde{\tau}) = (\partial\tilde{\tau}/\partial\tau)^{-1}e(\tau)$)，而每个坐标 X^μ 像世界线标量一样变换 ($\tilde{X}^\mu(\tilde{\tau}) = X^\mu(\tau)$)。

1.2 Nambu-Goto 作用量

一个粒子在闵可夫斯基空间中扫出一条世界线。一根弦扫出一个世界面。我们将用一个类时坐标 τ 和类空坐标 σ 来参数化这个世界面。在本节中，我们将关注闭弦，并将 σ 设为周期性的，范围为

$$\sigma \in [0, 2\pi) \quad (1.11)$$

我们有时会将两个世界面坐标合并为 $\sigma^\alpha = (\tau, \sigma), \alpha = 0, 1$ 。然后弦扫出时空中的一个曲面，该曲面定义了从世界面到闵可夫斯基空间的映射， $X^\mu(\sigma, \tau)$ ，其中 $\mu = 0, \dots, D-1$ 。对于闭弦，我们需要

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X^\mu(\sigma + 2\pi, \tau)$$

在这种情况下，时空有时被称为 target space，以将其与世界面区分开来。

我们需要一个作用量来描述这根弦的动力学。我们要求的关键性质是，我们在世界面上的选择的坐标 σ^α 并不依赖什么。换句话说，弦的作用量应该是重参数化不变的。什么样的作用量会起作用？对于点粒子，作用量与世界线的长度成正比。一个明显的推广是，弦的作用量应该与世界面的面积 A 成比例。这当然是世界面本身的性质，而不是任何参数化的选择。

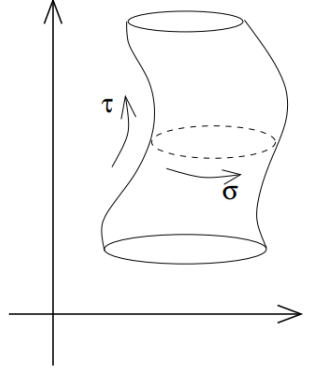
我们如何根据坐标 $X^\mu(\sigma, \tau)$ 得到面积 A ？世界面是一个嵌入时空的曲面。曲面上的诱导度规 $\gamma_{\alpha\beta}$ 是闵可夫斯基空间上平直度规的 pull-back，

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^\beta} \eta_{\mu\nu} \quad (1.12)$$

然后，与世界面面积成比例的作用量由下式给出

$$S = -T \int d^2\sigma \sqrt{-\det \gamma} \quad (1.13)$$

这里 T 是一个比例常数。我们很快就会看到，这是弦的张力，也就是每单位长度的质量。



我们可以把这个作用量写得更明确一点。度规的 pull-back 可由下式给出，

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \dot{X}^2 & \dot{X} \cdot X' \\ \dot{X} \cdot X' & X'^2 \end{pmatrix}$$

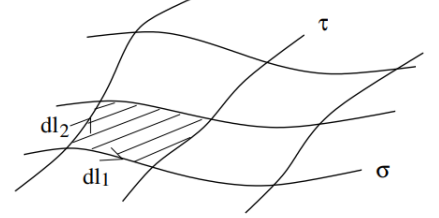
其中 $\dot{X}^\mu = \partial X^\mu / \partial \tau$, $X'^\mu = \partial X^\mu / \partial \sigma$ 。然后作用量采取如下形式，

$$S = -T \int d\sigma^2 \sqrt{-(\dot{X})^2 (X')^2 + (\dot{X} \cdot X')^2} \quad (1.14)$$

这是相对论性弦的 Nambu-Goto 作用量。

作用量 = 面积

如果你不熟悉微分几何，关于度规的 pull-back 的论证可能会有点技巧性。幸运的是，有一种更简单的方式可以看出，作用量 (1.14) 等于世界面所覆盖的面积。对于嵌入欧几里得空间而不是闵可夫斯基空间中的曲面，提出这个论点稍微简单一些。如图所示，我们选择了面的参数 τ 和 σ ，并将欧几里得坐标写成 $\vec{X}(\sigma, \tau)$ 。我们将计算无穷小阴影区域的面积。与边界相切的矢量是，



$$d\vec{l}_1 = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}, \quad d\vec{l}_2 = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau}$$

如果这两个向量之间的角度是 θ ，那么面积由下式给出

$$ds^2 = |d\vec{l}_1| |d\vec{l}_2| \sin\theta = \sqrt{dl_1^2 dl_2^2 (1 - \cos\theta)} = \sqrt{dl_1^2 dl_2^2 - (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)^2} \quad (1.15)$$

其实际上采取 (1.14) 的被积函数的形式。

张力和量纲

现在让我们看看， T 对张力有物理解释。我们把闵可夫斯基坐标写成 $X^\mu = (t, \vec{x})$ 。我们使用规范 $X^0 \equiv t = R\tau$ ，其中 R 是平衡量纲所需的常数（见下文），并在论证的最后消失。当 $d\vec{x}/d\tau = 0$ 时，考虑弦构型的一个瞬间，使

得瞬时动能消失。计算 dt 时间内的作用量为

$$S = -T \int d\tau d\sigma R \sqrt{(d\vec{x}/d\sigma)^2} = -T \int dt (\text{spatial length of string}) \quad (1.16)$$

但是，当动能消失时，作用量与势能的时间积分成比例，

$$\text{potential energy} = T \times (\text{spatial length of string})$$

因此， T 确实是所声称的每单位长度的能量。我们了解到，弦的作用相当于一根弹性带，它的能量随着长度线性增加。（这与你习惯的弹性带不同，弹性带遵循胡克定律，能量随长度呈二次方增加）为了最大限度地减少其势能，弦将希望收缩到零大小。我们将看到，当我们包括量子效应时，这是不可能发生的，因为通常的零点能量。

有一种有点烦人的书写张力的方式，它起源于旧的历史，但在今天很常用

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'} \quad (1.17)$$

用以前的说法， α' 被称为“通用 Regge 斜率”。我们稍后将在本课程中解释原因。

在这一点上，值得指出的是，到目前为止，我们还保留着一些惯例。时空坐标的量纲为 $[X] = -1$ 。相反，世界面坐标被认为是无量纲的， $[\sigma] = 0$ 。（这可以从我们的确认 $\sigma \equiv \sigma + 2\pi$ 中看出）张力等于单位长度的质量且量纲为 $[T] = 2$ 。显然这意味着 $[\alpha'] = -2$ 。因此，我们可以通过下式与长度标度 l_s 关联起来

$$\alpha' = l_s^2 \quad (1.18)$$

弦标度 l_s 是弦理论中出现的自然长度。事实上，在某种意义上（我们将在稍后的课程中更加精确），这个长度尺度是该理论的唯一参数。

真实的弦 vs. 基本弦

在自然界中有几种情况下会出现类似弦的物体。主要例子包括超导体中的磁通管和 QCD 中的色电通量管。宇宙弦，宇宙学中一个流行的推测，是类似的物体，伸展在天空中。在每种情况下，通常都有两个与弦相关的长度刻度：张力 T 和弦的宽度 L 。对于所有这些物体，只要弦的曲率远大于 L ，动力学就由 Nambu-Goto 作用量控制。（在超导体的情况下，应该使用合适的非相对论版本的 Nambu-Goto 作用量）

然而，在其他每一种情况下，Nambu-Goto 作用量都不是故事的结束。作用量中通常会有其他项，这些项取决于弦的宽度。这些项的形式并不普遍，但通常包括形式为 $L \int K^2$ 的刚性片段，其中 K 是世界面的外在曲率。可以添加其他项来描述弦宽度的波动。

弦的尺度 l_s ，或者等价的张力 T ，取决于我们考虑的弦的种类。例如，如果我们对 QCD 通量管感兴趣，那么我们可以

$$T \sim (1\text{GeV})^2 \quad (1.19)$$

在本课程中，我们将考虑宽度为零的基本弦。这在实践中意味着，我们将 Nambu-Goto 作用量作为弦所有配置的完整描述。这些弦将与量子引力有关，弦的张力要大得多，通常比普朗克尺度低一个数量级左右。

$$T \leq M_{pl}^2 = (10^{18}\text{GeV})^2 \quad (1.20)$$

然而，我应该指出，当我们试图将弦论视为量子引力的基本理论时，我们并不真正知道 T 应该取什么值。正如我们稍后将在本课程中看到的，它取决于许多其他方面，最显著的是弦耦合和额外维度的体积。

1.2.1 Nambu-Goto 作用量的对称性

Nambu-Goto 作用量有两种类型的对称性，每种都有不同的性质。

- 庞加莱时空不变性 (1.6)。从世界面角度看，这是一种全局对称性，这意味着标记对称变换的参数 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 和 c^μ 是常数，不依赖世界面坐标 σ^α 。

- 重参数化不变性， $\sigma^\alpha \rightarrow \tilde{\sigma}^\alpha(\sigma)$ 。对于点粒子，这是一个规范对称。它反映了这样一个事实，即我们的描述中存在冗余，因为世界面坐标 σ^α 没有物理意义。

1.2.2 运动方程

为了推导 Nambu-Goto 弦的运动方程，我们首先引入动量，称之为 Π ，因为后面有无数我们想称为 p 的量，

$$\Pi_\mu^\tau = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -T \frac{(\dot{X} \cdot X') X'_\mu - (X'^2) \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}, \quad \Pi_\mu^\sigma = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} = -T \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - (X'^2) X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}$$

运动方程由下式给出，

$$\frac{\partial \Pi_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \Pi_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0$$

这些看起来像是讨厌的非线性方程。事实上，从前面的作用量 (1.13) 开始，有一种稍微好一点的方法来编写这些方程。回忆行列式的变分是 $\delta\sqrt{-\gamma} = (1/2)\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\delta\gamma_{\alpha\beta}$ 。使用 pull-back 度规 $\gamma_{\alpha\beta}$ 的定义，这就产生了运动方程

$$\partial_\alpha(\sqrt{-\det\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\beta X^\mu) = 0 \quad (1.21)$$

虽然这个符号使方程看起来更好，但我们在开玩笑。用 X^μ 表示，他们仍然是相同的方程，仍然很恶心。

1.3 Polyakov 作用量

Nambu-Goto 作用量中的平方根意味着使用路径积分技术进行量子化相当困难。然而，还有另一种形式的弦作用量，它在经典意义上等同与 Nambu-Goto 作用量。它以引入另一个场为代价消除了平方根，

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} \quad (1.22)$$

其中 $g \equiv \det g$ 。这是 Polyakov 作用量。(Polyakov 没有发现这个作用量，但

他知道如何在路径积分中使用它，因此它以他的名字命名。这一作用量的路径积分处理将是第 5 章的主题)。

新的场为 $g_{\alpha\beta}$ 。它是世界面上的动力学度规。从世界面的角度看, Polyakov 作用量是一堆与二维引力耦合的标量场 X 。

X^μ 的运动方程为

$$\partial_\alpha(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\beta X^\mu) = 0 \quad (1.23)$$

这与 Nambu-Goto 作用的运动方程 (1.21) 一致，除了 $g_{\alpha\beta}$ 现在是一个自变量，它由自己的运动方程固定。为了确定这一点，我们变分作用量（再次记住 $\delta\sqrt{-g} = -(1/2)\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} = +(1/2)\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}$ ），

$$\delta S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \partial_\rho X^\mu \partial_\sigma X^\nu) \eta_{\mu\nu} = 0 \quad (1.24)$$

因此，世界面的度规由下式给出，

$$g_{\alpha\beta} = 2f(\sigma)\partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X \quad (1.25)$$

其中函数 $f(\sigma)$ 为

$$f^{-1} = g^{\rho\sigma} \partial_\rho X \cdot \partial_\sigma X$$

对潜在歧义符号的注释：在这里和下面，任何函数 $f(\sigma)$ 对于 $f(\sigma, \tau)$ 总是不完整的：它绝不意味着 f 只依赖于空间世界面坐标。

我们看到 $g_{\alpha\beta}$ 与方程 (1.12) 中定义的 pull-back 度规 $\gamma_{\alpha\beta}$ 并不完全相同；两者相差共形因子 f 。然而，这并不重要，因为值得注意的是， f 在运动方程 (1.23) 中消失。这是因为 $\sqrt{-g}$ 项按 f 缩放，而逆度规 $g^{\alpha\beta}$ 按 f^{-1} 缩放，两个部分相互抵消。因此，我们看到 Nambu-Goto 和 Polyakov 作用量导致了 X 的相同运动方程。

事实上，我们可以更直接地看到，Nambu-Goto 和 Polyakov 的作用量是一致的。我们可以用它的运动方程 $g_{\alpha\beta} = 2f\gamma_{\alpha\beta}$ 代替 Polyakov 作用量 (1.22) 中的 $g_{\alpha\beta}$ 。 f 因子也退出了作用量，原因与它退出运动方程的原因相同。通过这种方式，我们恢复了 Nambu-goto 作用量 (1.13)。

1.3.1 Polyakov 作用量的对称性

事实上，(1.25) 中的因子 $f(\sigma, \tau)$ 的存在并没有影响 X^μ 的运动方程，这反映了 Polyakov 作用量所拥有的额外对称性的存在。让我们更仔细地看一下。首先，Polyakov 作用量仍然具有 Nambu-Goto 作用量的两个对称性，

- 庞加莱不变性。这是世界面上的全局不变性。

$$X^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu + c^\mu$$

- 重参数化不变性，也称为微分同胚。这是世界面上的规范对称性。我们可以将世界面坐标重新定义为 $\sigma^\sigma \rightarrow \tilde{\sigma}^\alpha(\sigma)$ 。场 X^μ 作为世界面标量变换，而 $g_{\alpha\beta}$ 以适用于二维度规的方式进行变换。

$$X^\mu(\sigma) \rightarrow \tilde{X}^\mu(\tilde{\sigma}) = X^\mu(\sigma)$$

$$g_{\alpha\beta}(\sigma) \rightarrow \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{\sigma}) = \frac{\partial \sigma^\gamma}{\partial \tilde{\sigma}^\alpha} \frac{\partial \sigma^\delta}{\partial \tilde{\sigma}^\beta} g_{\gamma\delta}(\sigma)$$

考察对于小量 η ，坐标变换为 $\sigma^\alpha \rightarrow \tilde{\sigma}^\alpha = \sigma^\alpha - \eta^\alpha(\sigma)$ 。场的变换为，

$$\delta X^\mu(\sigma) = \eta^\alpha \partial_\alpha X^\mu$$

$$\delta g_{\alpha\beta}(\sigma) = \nabla_\alpha \eta_\beta + \nabla_\beta \eta_\alpha$$

其中，协变导数定义为 $\nabla_\alpha \eta_\beta = \partial_\alpha \eta_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \eta_\sigma$ 其中的 Levi-Civita 联络由通常表达式与世界面度规关联，

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\alpha g_{\beta\rho} + \partial_\beta g_{\rho\alpha} - \partial_\rho g_{\alpha\beta})$$

除了这些熟悉的对称性之外，还有一种新的对称性，它对 Polyakov 作用量来说是新颖的。它被称为 Weyl 不变性。

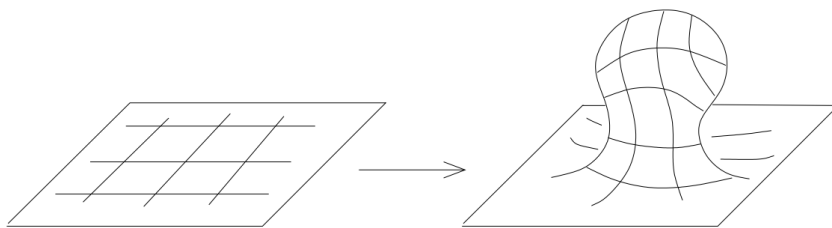
- Weyl 不变性。在这种对称性下， $X^\mu(\sigma) \rightarrow X^\mu(\sigma)$ ，而度规变化为

$$g_{\alpha\beta}(\sigma) \rightarrow \Omega^2(\sigma) g_{\alpha\beta}(\sigma) \quad (1.26)$$

或者，无穷小的情况，对于小量 ϕ 我们可以写成 $\Omega^2(\sigma) = e^{2\phi(\sigma)}$ ，使得

$$\delta g_{\alpha\beta}(\sigma) = 2\phi(\sigma) g_{\alpha\beta}(\sigma)$$

很容易看出，Polyakov 作用量在这种变换下是不变的： Ω^2 因子消失，就像式 (1.25) 中的 f 因子一样，在 $\sqrt{-g}$ 和逆度规 $g^{\alpha\beta}$ 之间抵消。这是弦的规范对称性，正如参数 Ω 取决于世界面坐标 σ 。这意味着通过 Weyl 变换 (1.26) 相关的两个度规将被视为相同的物理态。



我们应该如何看待 Weyl 不变性？这不是坐标变化。相反，它是理论在局部尺度变化下的不变性，它保留了所有直线之间的角度。例如，Polyakov 弦将图中显示的两个世界面度规视为等价的。这太令人惊讶了！而且，正如你可能想象的那样，具有这种性质的理论极为罕见。从上面的讨论中可以清楚地看出，Weyl 不变性的性质对于二维是特殊的，因为只有来自行列式 $\sqrt{-g}$ 的比例因子才能抵消来自逆度规的比例因子。但即使在二维中，如果我们希望保持 Weyl 不变性，那么我们在可以添加到作用量中的相互作用类型上也受到严格限制。例如，我们不允许世界面标量形式的势能项，

$$\int d^2\sigma \sqrt{-g} V(X)$$

这些打破了 Weyl 不变性。我们也不能添加一个世界面宇宙学常数项，

$$\mu \int d^2\sigma \sqrt{-g}$$

这也打破了 Weyl 不变性。我们稍后将在本课程中看到，在量子理论中，对 Weyl 不变性的要求变得更加严格。我们还将看到什么样的相互作用项可以添加到世界面中。事实上，这门课程的大部分内容可以被认为是具有 Weyl 不变性的理论的研究。

1.3.2 规范固定

运动方程 (1.23) 看起来相当糟糕。然而，我们可以使用规范对称性中固有的冗余来选择它们简化的坐标。让我们想想可以用规范对称性做什么。

首先，我们要处理两个重参数化。世界面度规由三个独立的分量。这意味着我们希望能够将任意两个度规部分设置为我们选择的值。我们将选择使度规局部共形平直，这意味着

$$g_{\alpha\beta} = e^{2\phi} \eta_{\alpha\beta} \quad (1.27)$$

其中 $\phi(\sigma, \tau)$ 是世界面上的一些函数。你可以通过写下坐标变换下度规的变化来检查这是否可能，并看到由条件 (1.27) 产生的微分方程至少在局部上有解。选择形式为 (1.27) 的度规称为共形度规。

我们只使用了重参数化不变性来获得度规 (1.27)。我们还有 Weyl 变换要做。显然，可以使用这些来去除度规的最后一个独立分量，并设置 $\phi = 0$,

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \quad (1.28)$$

我们最终得到了世界面上闵可夫斯基坐标下的平直度规。

插曲：如何使度规平直

事实上，使用 Weyl 不变性使任何二维度规平直是一个重要结果。让我们从主要讨论中转移注意，看另一个与世界面上闵可夫斯基坐标的选择无关的证据。在二维欧几里得空间中，可以避免讨厌的负号。考虑与 Weyl 变换相关的两个度规， $g'_{\alpha\beta} = e^{2\phi} g_{\alpha\beta}$ 。检查这两个度规的 Ricci 标量是否相关，

$$\sqrt{g'} R' = \sqrt{g} (R - 2\nabla^2 \phi) \quad (1.29)$$

因此，我们可以选择一个 ϕ ，使新度规的 Ricci 标量消失， $R' = 0$ ，只需求解 ϕ 的微分方程。然而，在二维（但在更高的维度）中，Ricci 标量消失意味着平直度规。原因很简单，因为没有太多的指标可以玩。特别是黎曼张量在二维中的对称性意味着它必须采用以下形式，

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{R}{2} (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma})$$

所以 $R' = 0$ 就足以保证 $R'_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ ，这意味着流形是平直的。在方程 (1.28) 中，我们进一步使用重参数化不变性来选择平面度规为闵可夫斯基度规的坐标。

运动方程和能动张量

在平直度规 (1.28) 的选择下，Polyakov 作用量极大地简化了且成为了 D 个自由标量场。（事实上，这种简化发生在任何共形规范中）

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_\alpha X \cdot \partial^\alpha X \quad (1.30)$$

且 X^μ 的运动方程简化为自由波动方程，

$$\partial_\alpha \partial^\alpha X^\mu = 0 \quad (1.31)$$

现在看起来好得令人难以置信！可怕的方程 (1.23) 真的等同于自由波动方程吗？不完全是这样。我们忘记了一些事情：我们为度规 $g_{\alpha\beta}$ 选择了一种规范。但我们仍然必须确保 $g_{\alpha\beta}$ 的运动方程是满足的。事实上，作用量相对于度规的变分产生了一个相当特殊的量：它是能动张量 $T_{\alpha\beta}$ 。对于归一化约定的特定选择，我们将能动张量定义为

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{2}{T} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}}$$

我们在 (1.24) 得到了关于 $g_{\alpha\beta}$ 的变分。当我们设置 $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ 时，我们得到

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho X \cdot \partial_\sigma X \quad (1.32)$$

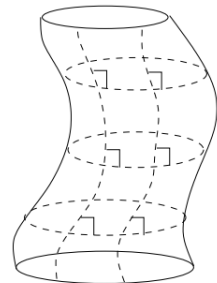
与度规 $g_{\alpha\beta}$ 相关的运动方程简单地给出 $T_{\alpha\beta} = 0$ 。或者更明确地，

$$\begin{aligned} T_{01} &= \dot{X} \cdot X' = 0 \\ T_{00} &= T_{11} = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + X'^2) = 0 \end{aligned} \quad (1.33)$$

因此，我们了解到，弦的运动方程是受运动方程 $T_{\alpha\beta} = 0$ 产生的两个约束 (1.33) 的自由波动方程 (1.31)。

直观感受约束条件

让我们试着对这些约束条件有一些直觉。(1.33) 中的第一个约束有一个简单的含义：我们必须选择参数化，使得常数 σ 的线垂直于常数 τ 的线，如图所示。



但我们可以做得更好。为了获得更多的物理见解，我们需要利用这样一个事实，即我们还没有完全耗尽我们的规范对称性。我们将在第 2.2 节中对此进行更多讨论，但现在可以检查是否存在足够的剩余规范对称性，以允许我们进入静态规范，

$$X^0 \equiv t = R\tau$$

使得 $(X^0)' = 0$ 和 $\dot{X}^0 = R$ ，其中 R 是基于维度所需要的常数。对这个常数的解释很快就会变得清晰起来。然后，写下 $X^\mu = (t, \vec{x})$ ，空间分量的运动方程是自由波动方程，

$$\ddot{\vec{x}} - \vec{x}'' = 0$$

而约束条件变成

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} \cdot \vec{x}' &= 0 \\ \dot{\vec{x}}^2 + \vec{x}'^2 &= R^2 \end{aligned} \tag{1.34}$$

第一个约束告诉我们弦的运动必须垂直于弦本身。换句话说，弦的物理模式是横向振动。没有纵向模式。我们也将第 2.2 节中再次看到这一点。

从第二个约束条件，我们可以理解常数 R 的含义：当 $\dot{\vec{x}} = 0$ 时，它与弦的长度有关，

$$\int d\sigma \sqrt{(d\vec{x}/d\sigma)^2} = 2\pi R$$

当然，如果我们在某个时刻有一根 $\dot{\vec{x}} = 0$ 的紧绷的弦，那么它不会长时间保持这样。它将在自身的张力下收缩。当这种情况发生时，第二个约束方程将弦的长度与弦的瞬时速度联系起来。

1.4 模式展开

运动方程 (1.31) 很容易求解。我们在世界面上引入了光锥坐标，

$$\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$$

根据这个，运动方程可以简单地读出

$$\partial_+ \partial_- X^\mu = 0$$

最一般的解是，

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X_L^\mu(\sigma^+) + X_R^\mu(\sigma^-)$$

对于任意函数 $X_L^\mu(\sigma^+)$ 和 $X_R^\mu(\sigma^-)$ 。它们分别描述了左行波和右行波。当然，该解必须仍然遵循约束 (1.33) 以及周期性边界条件，

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X^\mu(\sigma + 2\pi, \tau) \quad (1.35)$$

最一般的周期解可以在 Fourier 模式中展开，

$$\begin{aligned} X_L^\mu(\sigma^+) &= \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}\alpha' p^\mu \sigma^+ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma^+} \\ X_R^\mu(\sigma^-) &= \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}\alpha' p^\mu \sigma^- + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-} \end{aligned} \quad (1.36)$$

当谈到量子理论时，这种模式展开将非常重要。这里做些简单注释。

- 为了以后的方便，在这个表达式中选择了各种归一化，例如 α' 和 $1/n$ 因子。
- 由于有 σ^\pm 的线性项， X_L 和 X_R 不单独满足周期性边界条件 (1.35)。然而，它们的和在 $\sigma \rightarrow \sigma + 2\pi$ 下是不变的。
- 变量 x^μ 和 p^μ 是弦质心的位置和动量。例如，可以通过研究时空平移对称性 $X^\mu \rightarrow X^\mu + c^\mu$ 产生的诺特流来检查这一点。我们发现守恒荷确实是 p^μ 。
- 由于 X^μ 是实的，这要求 Fourier 模式的系数 α_n^μ 和 $\tilde{\alpha}_n^\mu$ 服从

$$\alpha_n^\mu = (\alpha_{-n}^\mu)^* \quad , \quad \tilde{\alpha}_n^\mu = (\tilde{\alpha}_{-n}^\mu)^* \quad (1.37)$$

1.4.1 重新审视约束

我们仍然必须施加这两个约束 (1.33)。在世界面光锥坐标 σ^\pm 中，它们变为，

$$(\partial_+ X)^2 = (\partial_- X)^2 = 0 \quad (1.38)$$

这些方程给出了动量 p^μ 和 Fourier 模式 α_n^μ 和 $\tilde{\alpha}_n^\mu$ 的约束。要了解这些是什么，让我们看看

$$\begin{aligned} \partial_- X^\mu &= \partial_- X_R^\mu = \frac{\alpha'}{2} p^\mu + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-} \\ &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_n \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-} \end{aligned}$$

其中在第二行中，对所有 $n \in \mathbf{Z}$ 求和，我们定义 α_0^μ 为

$$\alpha_0^\mu \equiv \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu$$

约束 (1.38) 可以写成

$$\begin{aligned} (\partial_- X)^2 &= \frac{\alpha'}{2} \sum_{m,p} \alpha_m \cdot \alpha_p e^{-i(m+p)\sigma^-} \\ &= \frac{\alpha'}{2} \sum_{m,n} \alpha_m \cdot \alpha_{n-m} e^{-in\sigma^-} \\ &\equiv \alpha' \sum_n L_n e^{-in\sigma^-} = 0 \end{aligned}$$

其中我们定义了振动模式的和，

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_m \alpha_{n-m} \cdot \alpha_m \quad (1.39)$$

我们也可以对左行模式做相同的事情，其中我们再次定义了相似的算符模式的和，

$$\tilde{L}_n = \frac{1}{2} \sum_m \tilde{\alpha}_{n-m} \cdot \tilde{\alpha}_m \quad (1.40)$$

其中零模式被定义为，

$$\tilde{\alpha}_0^\mu \equiv \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu$$

事实上， $\tilde{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu$ 看起来无伤大雅，但当我们对弦进行量子化时，这是一个需要记住的关键点。 L_n 和 \tilde{L}_n 是约束的 Fourier 模式。形式为 (1.36) 的弦的任何经典解都必须进一步服从无穷多个约束，

$$L_n = \tilde{L}_n = 0 \quad n \in \mathbf{Z}$$

当我们讨论共形场论时，我们将在更一般的背景下再次遇到这些对象 L_n 和 \tilde{L}_n 。

L_0 和 \tilde{L}_0 产生的约束具有相当特殊的解释。这是因为它们包含了时空动量 p^μ 的平方。但是，时空动量的平方是闵可夫斯基空间中的一个重要的量：它是粒子静止质量的平方，

$$p_\mu p^\mu = -M^2$$

因此， L_0 和 \tilde{L}_0 约束告诉我们，根据激发的振动模式得出弦的有效质量，即

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'} \sum_{n>0} \alpha_n \cdot \alpha_{-n} = \frac{4}{\alpha'} \sum_{n>0} \tilde{\alpha}_n \cdot \tilde{\alpha}_{-n} \quad (1.41)$$

因为 α_0^μ 和 $\tilde{\alpha}_0^\mu$ 都等于 $\sqrt{\alpha'/2} p^\mu$ ，所以我们对不变质量有两个表达式：一个关于右行振动 α_n^μ ，一个关于左行振动 $\tilde{\alpha}_n^\mu$ 。这两项必须相等。这就是所谓的等级匹配。它将在我们转向量子理论的下一节中发挥重要作用。

2 量子弦

本节目标是量子化弦。而弦作用量有规范对称性。有两种方法：

- 我们可以首先量子化系统，然后将规范固定产生的约束作为算符方程施加到系统的物理态上。例如，在 QED 中，这就是我们在 lorentz 规范中使用 Gupta-Bleuler 量子化方法。在弦论中，它将包括时间 X^0 在内的所有场 X^μ 视为算符，并对态施加约束方程 (1.33)。这通常被称为协变量子化。
- 另一种方法是首先求解系统的所有约束，以确定物理上不同的经典解的空间。然后我们量子化这些物理解。例如，在 QED 中，这就是我们在库仑规范中进行的方式。在本章的后面，将看到一种简单的方法来解决自由弦的约束。

两种方法结果应是一致的。都会提出稍微不同的挑战 and 观点。

我们从第一种协变量子化开始。然而只要有困难，我们就会离开！看看问题在哪就够了。然后我们将推进上面描述的第二种方法，它在弦理论中称为光锥量子化。在第 5 节中，我们将回到所有这些问题，用共形场论中更复杂的技术武装起来。

2.1 快速了解协变量子化

我们希望量子化 D 个自由标量场 X^μ ，其动力学由作用量 (1.30) 控制。我们随后希望施加约束

$$\dot{X} \cdot X' = \dot{X}^2 + X'^2 = 0 \quad (2.1)$$

第一步很容易。我们把 X^μ 和它的共轭动量 $\Pi_\mu = (1/2\pi\alpha')\dot{X}_\mu$ 推广到服从正则等时对易关系的算符场，

$$\begin{aligned} [X^\mu(\sigma, \tau), \Pi_\nu(\sigma', \tau)] &= i\delta(\sigma - \sigma')\delta^\mu_\nu \\ [X^\mu(\sigma, \tau), X^\nu(\sigma', \tau)] &= [\Pi_\mu(\sigma, \tau), \Pi_\nu(\sigma', \tau)] = 0 \end{aligned}$$

转换为 Fourier 模式 $x^\mu, p^\mu, \alpha_n^\mu$ 和 $\tilde{\alpha}_n^\mu$ 的对易关系。利用 (1.36)

$$[x^\mu, p_\nu] = i\delta^\mu_\nu \quad \text{and} \quad [\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] = [\tilde{\alpha}_n^\mu, \tilde{\alpha}_m^\nu] = n\eta^{\mu\nu}\delta_{n+m,0} \quad (2.2)$$

其他的都为 0。 x^μ 和 p^μ 的对易关系预计用于控制弦质心位置和动量的算符。 α_n^μ 和 $\tilde{\alpha}_n^\mu$ 的对易关系是谐振子产生和湮灭算符伪装的对易子。伪装的也没那么好。我们只需要定义（现在忽略 μ 指标）

$$a_n = \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}}, \quad a_n^\dagger = \frac{\alpha_{-n}}{\sqrt{n}} \quad n > 0 \quad (2.3)$$

然后 (2.2) 给出熟悉的 $[a_n, a_m^\dagger] = \delta_{mn}$ 。因此，每个标量场都会产生两个无穷大的产生和湮灭算符塔，其中 α_n 在 $n > 0$ 时充当重缩放湮灭算符，在 $n < 0$ 时充当重缩放产生算符。有两个塔，因为我们有右行模式 α_n 和左行模式 $\tilde{\alpha}_n$ 。

有了这些对易关系，我们现在可以开始构建我们理论的 Fock 空间。我们引入了弦的真空态 $|0\rangle$ ，定义服从

$$\alpha_n^\mu |0\rangle = \tilde{\alpha}_n^\mu |0\rangle = 0 \quad \text{for } n > 0 \quad (2.4)$$

弦理论的真空态与场论中的类似对象有不同的解释。这不是时空的真空态。相反，它是一根弦的真空态。这反映这样一个事实上，即算符 x^μ 和 p^μ 为真空提供了额外的结构。弦的真实基态为 $|0\rangle$ ，振动由空间波函数 $\Psi(x)$ 描述。或者，如果我们在动量空间中，真空会携带另一个量子数 p^μ ，这是动量算符的本征值。因此，我们应该把真空写成 $|0; p\rangle$ ，它仍然服从 (2.4)，但现在

$$\hat{p}^\mu |0; p\rangle = p^\mu |0; p\rangle \quad (2.5)$$

其中（这是讲义中唯一的一次）我们对方程左侧的动量算符 \hat{p}^μ 带上帽子以将其与右侧的本征值 p^μ 区分开来。

现在可以通过 $n < 0$ 的产生算符 α_n^μ 和 $\tilde{\alpha}_n^\mu$ 的作用来建立 Fock 空间。一般的态来自于在真空态上与任意数量的产生算符一起作用，

$$(\alpha_{-1}^{\mu_1})^{n_{\mu_1}} (\alpha_{-2}^{\mu_2})^{n_{\mu_2}} \dots (\tilde{\alpha}_{-1}^{\nu_1})^{n_{\nu_1}} (\tilde{\alpha}_{-2}^{\nu_2})^{n_{\nu_2}} \dots |0; p\rangle$$

Fock 空间中的每一个态都是一个不同的激发态。每一种都有对时空中不同种类粒子的解释。我们很快就会看到它们到底是什么粒子。但现在，请注意，因为有无限多的方法可以激发弦，所以在这个理论中有无限多不同种类的粒子。

2.1.1 鬼

构建的 Fock 空间有一个问题：它没有正的范数。原因是其中一个标量场 X^0 在作用量中的动能项存在错误的符号 (1.30)。从对易关系的角度看，表达式中存在闵可夫斯基度规时，就会引起问题

$$[\alpha_n^\mu, \alpha_m^{\nu\dagger}] = n\eta^{\mu\nu}\delta_{n,m}$$

这产生了讨厌的负范数态，其具有类时的激发振动，如

$$\langle p'; 0 | \alpha_1^0 \alpha_{-1}^0 | 0; p \rangle \sim -\delta^D(p - p')$$

这是协变量子化方法中出现的第一个问题。具有负范数的态被称为鬼。为了使理论有意义，必须确保它们不会在任何物理过程中产生。当然，这个问题在 Lorentz 规范中量子化 QED 的尝试中是很熟悉的。在这种情况下，规范对称性起到了拯救作用，因为通过施加规范固定约束可以消除鬼。我们希望在弦理论中也能一样。

2.1.2 约束

虽然目前不会推进，但简单地看看我们在弦理论中有什么样的约束。就 Fourier 模式而言，经典约束可以写成 $L_n = \tilde{L}_n = 0$ ，其中

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_m \alpha_{n-m} \cdot \alpha_m$$

对 \tilde{L}_n 类似。正如在 QED 的 Gupta-Bleuler 量子化，没有将所有这些作为算符方程强加在 Hilbert 空间上。相反，只要求算符 L_n 和 \tilde{L}_n 在夹在两个物理态 $|\text{phys}\rangle$ 和 $|\text{phys}'\rangle$ 之间时使矩阵元为 0，

$$\langle \text{phys}' | L_n | \text{phys} \rangle = \langle \text{phys}' | \tilde{L}_n | \text{phys} \rangle = 0$$

由于 $L_n^\dagger = L_{-n}$ ，因此要求

$$L_n | \text{phys} \rangle = \tilde{L}_n | \text{phys} \rangle = 0 \quad \text{for } n > 0 \quad (2.6)$$

然而，我们仍没有解释如何施加约束 L_0 和 \tilde{L}_0 。这些都是 QED 中不会出现的问题。问题是，与 $n \neq 0$ 的 L_n 不同，当进入量子理论时，算符 L_0 的定义不是唯一的。存在由对易关系 (2.2) 引起的算符排序模糊性。在 L_0 中，使 α_n^μ 算符相互交换会产生额外的常数项。

问题：如何知道量子算符 L_0 中 α_n^μ 的顺序或 \tilde{L}_0 中 $\tilde{\alpha}_n^\mu$ 的顺序？

回答：不知道！然而天真地说，当我们施加约束时，似乎每个不同的选择都会定义一个不同的理论。为了使这种模糊性变得明显，现在让我们选择一种排序方式。我们将量子算符定义为正则排序的，使 $n > 0$ 的湮灭算符 α_n^i 向右移动

$$L_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m} \cdot \alpha_m + \frac{1}{2} \alpha_0^2, \quad \tilde{L}_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-m} \cdot \tilde{\alpha}_m + \frac{1}{2} \tilde{\alpha}_0^2$$

然后，模糊性在我们可以施加的不同约束方程中重新出现，即

$$(L_0 - a) | \text{phys} \rangle = (\tilde{L}_0 - a) | \text{phys} \rangle = 0 \quad (2.7)$$

对于某个常数 a 。

正如我们在经典中看到的那样，算符 L_0 和 \tilde{L}_0 在确定弦的质量谱方面发挥着重要作用，因为它们包含了动量 $\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu = \sqrt{\alpha'/2} p^\mu$ 的二次项。将表达式 (1.41) 与我们对 L_0 和 \tilde{L}_0 的约束方程相结合，我们发现弦的质量谱为，

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'} \left(-a + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m} \cdot \alpha_m \right) = \frac{4}{\alpha'} \left(-a + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-m} \cdot \tilde{\alpha}_m \right)$$

因此，我们了解到，待定常数 a 具有直接的物理效应：它改变了弦的质量谱。在量子理论中， α_n^μ 模式的和与谐振子的数算符有关：他们计算弦的激发模式的数量。量子理论中的等级匹配告诉我们，左行模式的数目必须等于右行模式的数量。

最终，我们会发现，将鬼解耦的需要迫使我们对方常数 a 做出独特的选择。（剧透警告：原来是 $a = 1$ ）事实上，没有鬼的要求比这更强烈。它还限制了理论中标量场的数量。（另一个剧透： $D = 26$ ）如果对协变感兴趣可以读 GSW 的书。相反，我们将展示如何量子化弦，并在光锥规范中导出 a 和 D 的这些值。然而，在经历了共形场论的世界之后，我们将在更接近协变方法的背景下回到这些想法。

2.2 光锥量子化

现在采用本节开头所述的第二种方法。我们将试图找到弦的所有经典解的参数化。这相当于找到了该理论的经典相空间。我们通过求解经典理论中的约束 (2.1) 来实现这一点，只留下物理自由度。

回忆一下，我们固定规范将世界面度规设置为

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$

然而，这不是我们规范自由的终点。仍然存在保留这种度规选择的规范转换。特别是，任意坐标变换 $\sigma \rightarrow \tilde{\sigma}(\sigma)$ ，则度规的改变为

$$\eta_{\alpha\beta} \rightarrow \Omega^2(\sigma)\eta_{\alpha\beta} \quad (2.8)$$

可以通过 Weyl 变换来抵消。这些坐标变换是什么？使用世界面上的光锥坐标来回答这个问题最简单，

$$\sigma^\pm = \tau \pm \sigma \quad (2.9)$$

其中世界面上使用平直度规形式，

$$ds^2 = -d\sigma^+ d\sigma^-$$

在这些坐标中，很明显，任何形式的转换

$$\sigma^+ \rightarrow \tilde{\sigma}^+(\sigma^+) \quad , \quad \sigma^- \rightarrow \tilde{\sigma}^-(\sigma^-) \quad (2.10)$$

简单地将平直度规乘以总因子 (2.8)，因此可以通过补偿 Weyl 变换来抵消。关于这种剩余的规范对称性的一些快速注释：

- 回忆 1.3.2 节中，我们使用了三个规范不变量（2 个重参数化 +1 个 Weyl 变换）用于固定世界面度规 $g_{\alpha\beta}$ 的三个分量。我们在论证时发生了什么？为什么我们还剩下一些规范对称性？原因是 $\tilde{\sigma}^\pm$ 只是一个变量的函数，而不是两个。所以我们确实固定了几乎所有的规范对称性。剩下的是我们开始的全规范对称性中的一组测度零。
- 剩余的重参数化不变性 (2.10) 具有重要的物理含义。回忆一下，运动方程的解的形式为 $X_L^\mu(\sigma^+) + X_R^\mu(\sigma^-)$ 看起来像是解的有 $2D$ 个函数。当然，我们仍然有一些约束条件，就 σ^\pm 而言，

$$(\partial_+ X)^2 = (\partial_- X)^2 = 0 \quad (2.11)$$

这似乎将数字减少到 $2(D-1)$ 个函数。但重参数化不变性 (2.10) 告诉我们，甚至其中一些也是假的，因为我们总是可以改变我们所说的 σ^\pm 。因此，弦的物理理解实际上由 $2(D-2)$ 个函数来描述。但这种计数有一个很好的解释：自由度描述了弦的横向波动。

- 上述注释与第 1.3.2 节中的讨论得出了相同的结论。在那里，为了对约束有一些感觉，我们声称我们可以对一些维度参数 R 使用静态规范 $X^0 = R\tau$ 。利用 (2.10) 的重参数化可以很容易检查这一点。然而，为了完全解决弦约束，事实证明静态规范并没有那么有用。相反，我们将使用一种叫做“光锥规范”的东西。

2.2.1 光锥规范

我们希望规范固定剩余的重参数化不变性 (2.10)。最好的方法是光锥规范。与世界面光锥坐标 (2.9) 不同，引入时空光锥坐标，

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^{D-1}) \quad (2.12)$$

请注意，我们选择了特定的时间方向和特定的空间方向。这意味着所做的任何涉及 X^\pm 的计算都不会是明显的 Lorentz 不变量。你可能觉得不必担

心。尝试提出以下论点：“这些方程看起来可能不是 Lorentz 不变量，但由于我们从 Lorentz 不变量理论开始，最终任何物理过程都保证服从这种对称性。”对吗?! 不幸的是没有。量子场论的一个更微妙有趣的方面是反常的可能性：这都是经典理论的对称性，无法在量子化中幸存下来。在量子理论，如果方程看起来不具有 Lorentz 不变量，那么很可能是因为潜在的物理实际上不是 Lorentz 不变量。稍后要弄清量子理论何时保持经典 Lorentz 对称性。

在光锥坐标中，时空的闵可夫斯基度规为

$$ds^2 = -2dX^+dX^- + \sum_{i=1}^{D-2} dX^i dX^i$$

这意味着指标随 $A_+ = -A^-$ 和 $A_- = -A^+$ 以及 $A_i = A^i$ 而升高和降低。时空矢量的乘积为 $A \cdot B = -A^+B^- - A^-B^+ + A^iB^i$ 。

让我们看看 X^+ 的运动方程的解。其为

$$X^+ = X_L^+(\sigma^+) + X_R^+(\sigma^-)$$

我们现在固定规范。利用重参数化不变性的自由度来选择坐标（将模式展开的求和部分吸收到新的参数中），使得

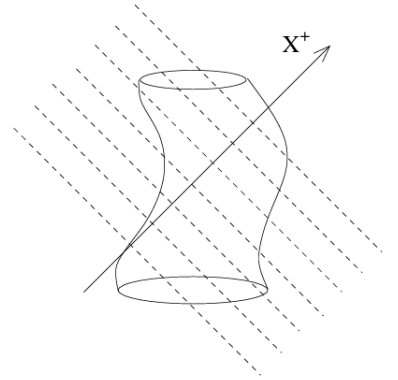
$$X_L^+ = \frac{1}{2}x^+ + \frac{1}{2}\alpha'p^+\sigma^+ \quad , \quad X_R^+ = \frac{1}{2}x^+ + \frac{1}{2}\alpha'p^+\sigma^-$$

你可能认为可以更进一步，消除 p^+ 和 x^+ ，但这是不可能的，因为我们没有完全自由的重参数化不变性，因为所有函数都应该在 σ 中保持周期性。选择这种规范的结果是

$$X^+ = x^+ + \alpha'p^+\tau \tag{2.13}$$

这称为光锥规范。注意，只要 $p^+ \neq 0$ ，总是可以用 τ 的变动来变动 x^+ 。

这个选择 (2.13) 有点令人不安。我们已经确定了一个类时的世界面坐标和一个类光时空坐标。尽管如此，正如从图中看到的，这似乎是一个很好的世界面参数化。可以想象，如果弦是无质量的，并且在 $p^+ = 0$ 的情况下沿 X^- 方向移动，则参数化可能会中断。但除此之外，一切都应该好起来。



求解 X^-

选择 (2.13) 完成了固定重参数化不变性 (2.10) 的工作。正如我们现在将看到的，它还使约束方程变得琐碎。我们首先要担心的是，这种新的规范固定选择可能会产生额外的限制。这能通过观察 X^- 的运动方程来检查，

$$\partial_+ \partial_- X^- = 0$$

但我们可以通过通常的模拟来解决这个问题，

$$X^- = X_L^-(\sigma^+) + X_R^-(\sigma^-)$$

我们仍然受到所有其他限制 (2.11)。在这里，我们看到了在光锥规范中工作的真正好处（这实际上是量子化成为可能的原因）： X^- 完全由这些约束条件决定。例如，第一个约束给出

$$2\partial_+ X^- \partial_+ X^+ = \sum_{i=1}^{D-2} \partial_+ X^i \partial_+ X^i \quad (2.14)$$

利用 (2.13)，变成

$$\partial_+ X_L^- = \frac{1}{\alpha' p^+} \sum_{i=1}^{D-2} \partial_+ X^i \partial_+ X^i \quad (2.15)$$

同样地，

$$\partial_- X_R^- = \frac{1}{\alpha' p^+} \sum_{i=1}^{D-2} \partial_- X^i \partial_- X^i \quad (2.16)$$

因此，除了积分常数，函数 $X^-(\sigma^+, \sigma^-)$ 完全由其他场决定。如果我们写下 X_L^-/X_R^- 的通常的模式展开

$$\begin{aligned} X_L^-(\sigma^+) &= \frac{1}{2}x^- + \frac{1}{2}\alpha' p^- \sigma^+ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^- e^{-in\sigma^+} \\ X_R^-(\sigma^-) &= \frac{1}{2}x^- + \frac{1}{2}\alpha' p^- \sigma^- + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\sigma^-} \end{aligned}$$

则 x^- 是未确定的积分常数，而 p^- 、 α_n^- 和 $\tilde{\alpha}_n^-$ 都由约束 (2.15) 和 (2.16) 固定。例如，振动模式 α_n^- 为，

$$\alpha_n^- = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \frac{1}{p^+} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{D-2} \alpha_{n-m}^i \alpha_m^i \quad (2.17)$$

一个特殊情况是 $\alpha_0^- = \sqrt{\alpha'/2}p^-$ 方程，如下

$$\frac{\alpha' p^-}{2} = \frac{1}{2p^+} \sum_{i=1}^{D-2} \left(\frac{1}{2} \alpha' p^i p^i + \sum_{n \neq 0} \alpha_n^i \alpha_{-n}^i \right) \quad (2.18)$$

我们还从 (2.15) 产生的 $\tilde{\alpha}_0^-$ 方程中得到了 p^- 的另一个方程

$$\frac{\alpha' p^-}{2} = \frac{1}{2p^+} \sum_{i=1}^{D-2} \left(\frac{1}{2} \alpha' p^i p^i + \sum_{n \neq 0} \tilde{\alpha}_n^i \tilde{\alpha}_{-n}^i \right) \quad (2.19)$$

从这两个方程中，我们可以重建以前的、经典的等级匹配条件 (1.41)。但现在有了不同：

$$M^2 = 2p^+ p^- - \sum_{i=1}^{D-2} p^i p^i = \frac{4}{\alpha'} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n>0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i = \frac{4}{\alpha'} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n>0} \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i \quad (2.20)$$

不同的是，现在只对振动 α^i 和 $\tilde{\alpha}^i$ 求和，其中 $i = 1, \dots, D-2$ 。我们将这些称为横向振动。注意，弦不一定在 $X^0 - X^{D-1}$ 平面中，所以这些并不是弦的横向激发。尽管如此，如果我们指定 α^i ，则确定所有其他谐振子模式。从这个意义上说，它们是弦的物理激发。

让我们总结一下目前的情况。最一般的经典解是根据 $2(D-2)$ 个横向振子模式 α_n^i 和 $\tilde{\alpha}_n^i$ 以及描述弦的质心和动量的多个零模式来描述的： x^i, p^i, p^+ 和 x^- 。但是 x^+ 可以被 τ 在 (2.13) 中的位移所吸收，并且 p^- 服从 (2.18) 和 (2.19) 的约束。事实上， p^- 可以被认为是（与）光锥哈密顿量成比例的。确实，我们知道 p^- 在 x^+ 中产生平移，但这相当于 τ 的位移。

2.2.2 量子化

已经确定了物理自由度，现在让我们量子化。我们想推广对易关系。其中一些很简单：

$$\begin{aligned} [x^i, p^j] &= i\delta^{ij} \quad , \quad [x^-, p^+] = -i \\ [\alpha_n^i, \alpha_m^j] &= [\tilde{\alpha}_n^i, \tilde{\alpha}_m^j] = n\delta^{ij}\delta_{n+m,0} \end{aligned} \quad (2.21)$$

所有这些都来自于我们在协变量子化中看到的对易关系 (2.2)¹。

如何处理 x^+ 和 p^- ？我们可以实现 p^- 作为哈密顿量作用在态上。事实上，如果我们将 x^+ 和 p^- 都推广到具有预期对易关系的算符，它将被证明稍微优雅一点（但等价），

$$[x^+, p^-] = -i \quad (2.22)$$

这确实等同于在非相对论量子力学中写 $[t, H] = -i$ ，这在形式层面上是正确的。在目前的情况下，这意味着我们可以再次选择态为 p^μ 的本征态，其中 $\mu = 0, \dots, D$ ，但是约束 (2.18) 和 (2.19) 仍然必须作为对物理态的算符方程来施加。我们很快就会讨论这个问题。

态的 Hilbert 空间与协变量子化中描述的非常相似：定义真空态 $|0; p\rangle$ 使得

$$\hat{p}^\mu |0; p\rangle = p^\mu |0; p\rangle, \quad \alpha_n^i |0; p\rangle = \tilde{\alpha}_n^i |0; p\rangle = 0 \quad \text{for } n > 0 \quad (2.23)$$

且我们通过 $n > 0$ 的产生算符 α_{-n}^i 和 $\tilde{\alpha}_{-n}^i$ 一起作用来构建 Fock 空间。与协变量子化的区别在于，我们只对具有空间指标 $i = 1, \dots, D-2$ 的横向谐振子起作用。因此，构造的 Hilbert 空间是正定的。我们不必担心鬼。

¹作者的话：我们真的不应该这么做。我们所采取的方法的全部目的是量子化物理自由度。一般来说，由此产生的对易关系并不是从更大的理论中继承来的，我们一开始只是闭上眼睛，忘记了我们已经规范固定的所有其他场。我们可以从 (2.17) 中看出这个问题，其中 α_n^- 是根据 α_n^i 确定的。这意味着 α_n^i 的对易关系可能受到 α_n^- 的对易关系的影响，这可能会产生额外的项。处理这一问题的正确程序是计算出经典理论中物理自由度的泊松括号结构。或者，在更华丽的语言中，相空间上的辛形式，示意地看起来像

$$\omega \sim \int d\sigma - d\dot{X}^+ \wedge dX^- - d\dot{X}^- \wedge dX^+ + 2d\dot{X}^i \wedge dX^i$$

对易关系 (2.21) 没有受到影响的原因是辛形式中的 α^- 项乘以 X^+ 。然而 X^+ 在 (2.13) 中给出，它没有振荡模式。这意味着辛形式不会拾取 X^- 的 Fourier 模式，因此不会从 α_n^- 中得到任何校正。这样做的结果是，天真的对易关系 (2.21) 实际上是正确的。

约束

由于 p^- 在我们的理论中不是自变量，我们必须手动将约束 (2.18) 和 (2.19) 作为定义物理态的算符方程。在经典理论中，我们看到这些约束等价于质量壳条件 (2.20)。

但当研究量子理论时，会有一个问题。这与我们在协变量子化中看到的问题相同：在 (2.20) 的右侧，在对振动模式求和中存在排序模糊性。如果我们选择所有算符都是正序的，那么这种模糊性就会在一个整体常数 a 中显现出来，而我们还没有确定这个常数。光锥规范中态质量的最终结果是：

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'} \left(\sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n>0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i - a \right) = \frac{4}{\alpha'} \left(\sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n>0} \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i - a \right)$$

由于我们将在下文中大量使用这个公式，因此引入与谐振子的数算符相关的量是有用的，

$$N = \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n>0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i, \quad \tilde{N} = \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n>0} \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i \quad (2.24)$$

由于 (2.3) 中的因数为 $1/\sqrt{n}$ ，因此这些算符不完全是数算符。 N 和 \tilde{N} 的值通常被称为等级。这意味着“等级匹配”这个名称是有意义的。现在有

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'} (N - a) = \frac{4}{\alpha'} (\tilde{N} - a) \quad (2.25)$$

我们将如何处理这个 a ？在本课程的后面，我们将看到正确的方法。现在，我只想给你一个快速却不是很严格的推导。

Casimir 能量

下面是正则排序常数 a 的启发式推导。假设我们没有注意到存在任何排序模糊性，而是将天真的经典结果直接转化为量子理论，即

$$\frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i = \frac{1}{2} \sum_{n<0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \frac{1}{2} \sum_{n>0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i$$

其中我们对 $i = 1, \dots, D-2$ 的求和隐藏。现在将尝试正则排序的形式，将 $n > 0$ 的湮灭算符 α_n^i 放在右边。这是第一个需要改变的项。我们得到

$$\frac{1}{2} \sum_{n<0} [\alpha_n^i \alpha_{-n}^i - n(D-2)] + \frac{1}{2} \sum_{n>0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i = \sum_{n>0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \frac{D-2}{2} \sum_{n>0} n$$

最后一项显然存在发散。但它似乎至少有一个物理解释：它是无穷多个谐振子的零点能量之和。事实上，在量子场论中遇到了完全相同类型的项，尽管存在歧义，但仍然可以从中提取有趣的物理。这就是 Casimir 力。

让我们回顾一下我们为获得 Casimir 力而采取的步骤。首先，我们引入了紫外截断 $\epsilon \ll 1$ ，可能是在喃喃自语，说没有任何物理板块能够承受非常高的能量量子。不幸的是，在弦理论中，这些话已经不适用于我们了，但让我们无论如何继续吧。我们用以下表达式代替整数上的发散和，

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n &\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\epsilon n} = -\frac{\partial}{\partial \epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\epsilon n} \\ &= -\frac{\partial}{\partial \epsilon} (1 - e^{-\epsilon})^{-1} \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{1}{12} + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned}$$

显然当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时 $1/\epsilon^2$ 发散。这个项应该被重整化。事实上，这对于保持 Polyakov 作用量的 Weyl 不变性是必要的，因为它有助于世界面上的宇宙学常数。在该重整化之后，我们得到了绝妙的答案，拉马努詹凭直觉得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12}$$

虽然是启发式的，但这个论点确实预测了在一维系统中测量的正确的物理 Casimir 能量。例如，这种效应可以在量子自旋链的模拟中看到。

这对弦意味着什么？这意味应取质量公式 (2.25) 中的未知的常数 a 为，

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'} \left(N - \frac{D-2}{24} \right) = \frac{4}{\alpha'} \left(\tilde{N} - \frac{D-2}{24} \right) \quad (2.26)$$

这是我们用来确定弦的质量谱的公式。

Zeta 函数正规化

我理解前面的论点并不令人信服。在这个阶段，可以花一些时间使其更加让人信服，但最好等到课程后期，我们将有共形场论的工具可供使用。我们会重新讨论这个问题，并在第 4.4.1 节中提供 Casimir 能量的一个重要的推导。现在，我只提出一个更不令人信服的论点，称为 ζ 函数正规化。

对于 $\text{Re}(s) > 1$ ，zeta 函数由一下的和定义

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

但是 $\zeta(s)$ 对 s 的所有值都有一个独特的解析延拓。特别地，

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

这很难信服。但这实际上是一个非常有用的技巧，可以得到正确答案。

2.3 弦的粒子谱

最后，我们可以分析单个自由弦的粒子谱。

2.3.1 快子

让我们从 (2.23) 中定义的基态 $|0;p\rangle$ 开始。无激发情况下，质量公式 (2.26) 给出

$$M^2 = -\frac{1}{\alpha'} \frac{D-2}{6} \quad (2.27)$$

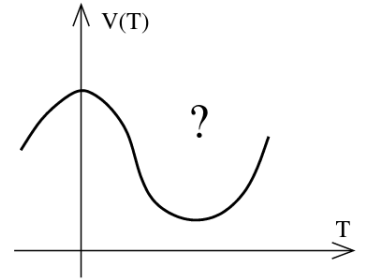
但这有点奇怪。这是一个负质量的平方。这种粒子被称为快子。

事实上，快子并不像你想象的那么病态。如果你以前听说过这些物体，那可能是在狭义相对论的背景下，它们是奇怪的怪物，总是比光速更快。但这不是正确的解释。相反，我们应该更多地用量子场论的语言思考。假设我们在时空中有一个场，我们称之为 $T(X)$ ，它的量子将产生这个粒子。粒子的质量平方就是作用量中的二次项，或者

$$M^2 = \left. \frac{\partial^2 V(T)}{\partial T^2} \right|_{T=0}$$

因此，(2.27) 中的负质量平方告诉我们，我们正在围绕图中所示的快子场的最大势能展开。注意，从这个角度来看，标准模型中 $H = 0$ 的希格斯场也是一个快子。

弦理论被证明位于快子场中的一个不稳定点，这是不幸的。自然的问题是，势能在其他地方是否有一个良好的最小值，如右图所示。没有人知道答案！天真地试图理解这一点是行不通的。我们知道，在 $T = 0$ 附近，对势能的领头阶贡献是负的和二次的。但是，我们可以使用第 6 节中描述的技术来计算其他项。在 $T = 0$ 附近快子势的展开为



$$V(T) = \frac{1}{2}M^2T^2 + c_3T^3 + c_4T^4 + \dots$$

事实证明，势能中的 T^3 项确实产生了一个极小值。但 T^4 这一项再次破坏了它的稳定。此外，在我们即将遇到的理论中， T 场开始与其他标量场混合。玻色弦中快子的最终命运还不清楚。

快子是玻色弦的一个问题。这很可能是因为这个理论没有意义——或者，至少，没有与时间无关的稳定解。或者我们只是还没有弄清楚如何正确地处理快子。无论哪种方式，当我们在世界面上引入费米子并研究超弦时，问题都不会出现。这将涉及几个进一步的技术细节，我们在本课程中不会涉及这些细节。相反，如果我们继续研究玻色弦，我们的时间将得到更好的利用，因为我们学到的所有教训都将直接传递到超弦。然而，人们应该意识到，在整个过程中，不稳定的真空问题将继续困扰着我们。

虽然我们不会详细描述，但我们会有几次对超弦的计算结果进行旁白。

2.3.2 第一激发态

现在来看第一激发态。如果我们用产生算符 α_{-1}^j ，则等级匹配条件 (2.25) 告诉我们，我们还需要使用 $\tilde{\alpha}_{-1}^i$ 算符。这给了我们 $(D-2)^2$ 个粒子态，

$$\tilde{\alpha}_{-1}^i \alpha_{-1}^j |0; p\rangle \quad (2.28)$$

每个都有质量

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'} \left(1 - \frac{D-2}{24} \right)$$

但现在似乎遇到了一个问题。我们的态有空间指标 $i, j = 1, \dots, D-2$ 。算符 α^i 和 $\tilde{\alpha}^i$ 分别在 $SO(D-2) \subset SO(1, D-1)$ 的向量表示中变换，这在光锥规范中是明显的。但最终，我们希望这些态适合于完整 Lorentz 群 $SO(1, D-1)$ 的一些表示。这看起来很难安排。这是在等式 (2.12) 之后发表注释的第一个表现：在光锥规范中观察 Lorentz 不变性是很困难的。

接下来，让我们回顾一下 Wigner 对庞加莱群表示的分类。从 $\mathbf{R}^{1,D-1}$ 中的有质量粒子开始。通过设置 $p^\mu = (m, 0, \dots, 0)$ 进入粒子的静止参考系后，我们可以观察任何内部指标在空间旋转的小群 $SO(D-1)$ 下是如何变换的。这样做的结果是，任何有质量粒子都必须形成 $SO(D-1)$ 的表示。但由 (2.28) 描述的粒子具有 $(D-2)^2$ 个态。没有办法将这些态封装成 $SO(D-1)$ 的表示，这意味着弦的第一激发态不可能形成 D 维庞加莱群的有质量表示。

看起来我们有麻烦了。谢天谢地，有一条出路。如果态是无质量的，那么我们就不能进入静止参考系。我们能够为粒子选择一个时空动量 $p^\mu = (E, 0, \dots, 0, E)$ 。在这种情况下，粒子填充了一个小群 $SO(D-2)$ 的表示。这意味着无质量粒子的内部态比有质量粒子少。例如，在四维中，光子有两个偏振态，但一个有质量的自旋为 1 的粒子必须有三个偏振态。

第一激发态 (2.28) 位于 $SO(D-2)$ 的表示中。我们了解到，如果我们想让量子理论保持我们开始时的 $SO(1, D-1)$ Lorentz 对称性，那么这些态必须是无质量的。只有当时空维度为

$$D = 26$$

这是我们第一次推导出玻色弦的临界维数。

此外，我们发现我们的理论包含了一堆无质量粒子。无质量粒子之所以有趣，是因为它们会产生远距离的力。让我们更仔细地看看弦给我们的是什么无质量粒子。态 (2.28) 在 $SO(24)$ 的 $\mathbf{24} \otimes \mathbf{24}$ 表示中变换。这些分解

为三个不可约的表示：

$$\text{traceless symmetric} \oplus \text{anti-symmetric} \oplus \text{singlet (=trace)}$$

对于这些模式中的每一种，我们都将时空中的无质量场联系起来，这样就可以用这些场的量子来识别弦振荡。这些场是：

$$G_{\mu\nu}(X) \quad , \quad B_{\mu\nu}(X) \quad , \quad \Phi(X) \quad (2.29)$$

其中，第一个是最有趣的，我们稍后会多说一些。第二个通常称为反对称张量场。它也被称为“Kalb-Ramond 场”，或者在微分几何的语言中，称为“2-form”。标量场称为胀子。这三个无质量场是所有弦理论的共同点。我们将在稍后的课程中进一步了解这些场所扮演的角色。

$SO(24)$ 的对称无迹表示中的粒子特别令人感兴趣。这是一个无质量的自旋为 2 的粒子。然而，最初由 Feynman 和 Weinberg 提出的一般论点认为，任何无质量自旋为 2 的粒子的相互作用理论都必须等价于广义相对论²。因此，我们应该用时空度规来识别场 $G_{\mu\nu}(X)$ 。现在稍作停顿，回顾这些论点的主旨。

为什么无质量自旋 2= 广义相对论

让我们把时空度规称为 $G_{\mu\nu}(X)$ 。我们可以在平直空间周围展开为

$$G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(X)$$

那么 Einstein-Hilbert 作用量具有 h 的幂的展开式。如果我们截断为二次阶，我们就有了一个自由理论，我们可以用通常的规范方式愉快地量子化它：我们将 $h_{\mu\nu}$ 提升为算符，并引入了相关的产生和湮灭算符 $a_{\mu\nu}$ 和 $a_{\mu\nu}^\dagger$ 。这种看待引力的方式让那些在广义相对论的几何世界中长大的人深恶痛绝。但从粒子物理学的语言来看，它是非常标准的：它只是一个无质量自旋为 2 的场 $h_{\mu\nu}$ 的量子化。

²关于这一点的一个非常可读的描述可以在 Feynman 引力讲座的前几章中找到。

然而，即使在这个简单层面上，由于时空闵可夫斯基度规的不定性，也存在问题。生成算符和湮灭算符的正则量子化关系示意性地具有以下形式，

$$[a_{\mu\nu}, a_{\rho\sigma}^\dagger] \sim \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}$$

但这将导致 Hilbert 空间的负范数态来自于与类时的产生算符的作用。例如形式的一个引力子态，

$$a_{0i}^\dagger |0\rangle \quad (2.30)$$

具有负模。这一点现在已经很熟悉了：如果试图对规范理论进行协变量子化，这是经常遇到的问题。事实上，广义相对论是一个规范理论。规范变换是微分同胚。我们希望这能将量子引力理论从这些负模态中拯救出来。

更仔细地观察小波动 $h_{\mu\nu}$ 的规范对称性是什么样子。现在已破坏了 Einstein-Hilbert 作用量，只留下了 h 中的二次项。包括所有的指标收缩，有

$$S_{EH} = \frac{M_{pl}^2}{2} \int d^4x \left[\partial_\mu h^\rho{}_\rho \partial_\nu h^{\mu\nu} - \partial^\rho h^{\mu\nu} \partial_\mu h_{\rho\nu} + \frac{1}{2} \partial_\rho h_{\mu\nu} \partial^\rho h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu h^\nu{}_\nu \partial^\mu h^\rho{}_\rho \right] + \dots$$

可以检查这种截断作用在规范对称性下是不变的，

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \quad (2.31)$$

对于任何函数 $\xi_\mu(X)$ 。规范对称性是微分同胚不变性的残余，局限于远离平直空间的小偏差。有了这种规范不变性，就可以证明，就像 QED 一样，负模态与所有物理过程解耦。

总之，只有当存在规范对称性来消除负范数态时，无质量自旋为 2 的场的理论才有意义。在广义相对论中，这种规范对称性源于微分同胚不变性。Feynman 和 Weinberg 的论点现在反过来运行这个逻辑。它是这样的：假设有一个无质量的，自旋为 2 的粒子。然后，在线性化的水平上，它必须在规范对称性 (2.31) 下不变，以消除负范数态。此外，当引入相互作用项时，这种对称性必须存在。但做到这一点的唯一方法是确保得到的理论服从微分几何不变性。这意味着任何相互作用的、无质量自旋为 2 的粒子的理论都是爱因斯坦引力，也许还辅以更高的导数项。

我们还没有证明弦论包括 $h_{\mu\nu}$ 的相互作用，但稍后会讨论这个问题。更重要的，我们还将明确地看到爱因斯坦场方程是如何直接在弦论中产生的。

关于时空规范不变性的一点注释

我们偷偷把时空场的指标写成 $\mu, \nu = 0, \dots, 25$ ，而不是 $i, j = 1, \dots, 24$ 。之所以被允许这样做，是因为 $G_{\mu\nu}$ 和 $B_{\mu\nu}$ 都具有时空规范对称性，这使我们能够消除适当的模式。事实上，这正是进入上述讨论的规范对称性 (2.31)。从弦的光锥形式中不可能看到这些时空规范对称性，因为通过构造，我们只找到物理态（尽管仅凭一致性，规范对称性必须存在）。推进协变计算的主要优势之一是，它确实让我们看到了时空规范对称性是如何从弦世界面中出现的。详细信息请参阅 GSW。我们也将第 5 节中简要回到这个问题。

2.3.3 更高的激发态

我们通过选择 $D = 26$ 确保它们是无质量的，来拯救第一激发态的 Lorentz 不变性。但现在我们已经使用了一次这个技巧，我们仍然需要担心所有其他激发态。它们还携带着取值范围为 $i, j = 1, \dots, D - 2 = 24$ 的指标，根据质量公式 (2.26)，它们都是有质量的，因此必须形成 $SO(D - 1)$ 的表示。看来我们又遇到麻烦了。

检查等级 $N = \tilde{N} = 2$ 的弦。在右行 sector，现在有两种不同的态： $\alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j |0\rangle$ 和 $\alpha_{-2}^i |0\rangle$ 。在左行 sector 也是如此，这意味着等级 2 的态总数为（用符号表示，希望这是显而易见的，但可能在技术上是错误的）

$$(\alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j \oplus \alpha_{-2}^i) \otimes (\tilde{\alpha}_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j \oplus \tilde{\alpha}_{-2}^i) |0; p\rangle$$

这些态的质量为 $M^2 = 4/\alpha'$ 。我们有多少个态？在左行 sector 中，有，

$$\frac{1}{2}(D - 2)(D - 1) + (D - 2) = \frac{1}{2}D(D - 1) - 1$$

但是，值得注意，这确实很适合 $SO(D - 1)$ 表示即无迹对称张量表示。

事实上，可以证明弦的所有激发态都很好符合 $SO(D - 1)$ 表示。Lorentz 不变性唯一需要的一致性要求是固定第一激发态： $D = 26$ 。

请注意，如果我们对量子引力的基本理论感兴趣，那么所有这些激发态的质量都将接近普朗克尺度，因此在粒子物理实验中不太可能观测到。尽管如此，正如我们在讨论散射振幅时所看到的，正是这种无限态塔的存在驯服了引力的紫外行为。

2.4 Lorentz 不变量

前面的讨论使我们能够以最快的方式导出弦论的临界维度和谱。但推导在某些地方有点不和谐。Casimir 能量的计算在第一次看到它时是不令人满意的。同样，在第一激发能级上需要无质量粒子的解释是正确的，但考虑到我们对结果的高度重视，这似乎相当廉价。

正如已经多次提到的，我们很快就会做得更好，对这些问题，特别是关键层面，有一些实际的见解。但在这里，我只想简单地描绘一下如何在光锥量子化的框架内变得更加严格。正如我们看到的，问题是当我们在光锥规范中量子化时，是否保持时空 Lorentz 对称性。可以更仔细地研究这一点。

首先，回到自由标量场 (1.30) 的作用量，在实施光锥规范固定之前。在这里，完整的庞加莱对称性是显而易见的：它在世界面上表现为全局对称，

$$X^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu X^\nu + c^\mu \quad (2.32)$$

但请记住，在场论中，全局对称性会产生诺特流及其相关的守恒荷。与庞加莱变换相关的诺特流是什么？我们可以从变换 $X^\mu \rightarrow X^\mu + c^\mu$ 开始。经过计算我们可以得到流为，

$$P^\alpha_\mu = T \partial^\alpha X_\mu \quad (2.33)$$

这实际上是一个守恒流，因为 $\partial_\alpha p^\alpha_\mu = 0$ 只是一个运动方程。类似地，我们可以计算与 Lorentz 变换相关的 $\frac{1}{2}D(D-1)$ 个流。它们是

$$J^\alpha_{\mu\nu} = P^\alpha_\mu X_\nu - P^\alpha_\nu X_\mu$$

当运动方程被遵循时，不难验证 $\partial_\alpha J^\alpha_{\mu\nu} = 0$ 。

这个流产生的守恒荷由 $M_{\mu\nu} = \int d\sigma J_{\mu\nu}^\tau$ 给出。使用 X^μ 的模式展开 (1.36)，这些可以写成

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{\mu\nu} &= (p^\mu x^\nu - p^\nu x^\mu) - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu - \alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu) - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\tilde{\alpha}_{-n}^\nu \tilde{\alpha}_n^\mu - \tilde{\alpha}_{-n}^\mu \tilde{\alpha}_n^\nu) \\ &\equiv l^{\mu\nu} + S^{\mu\nu} + \tilde{S}^{\mu\nu}\end{aligned}$$

第一部分 $l^{\mu\nu}$ 是弦的轨道角动量，而剩下的部分 $S^{\mu\nu}$ 和 $\tilde{S}^{\mu\nu}$ 告诉我们由于激发的振动模式产生的角动量。经典地，这些服从 Lorentz 代数的泊松括号。此外，如果我们用协变方法进行量子化，则相应的算符服从 Lorentz 李代数的交换关系，即

$$[\mathcal{M}^{\rho\sigma}, \mathcal{M}^{\tau\nu}] = \eta^{\sigma\tau} \mathcal{M}^{\rho\nu} - \eta^{\rho\tau} \mathcal{M}^{\sigma\nu} + \eta^{\rho\nu} \mathcal{M}^{\sigma\tau} - \eta^{\sigma\nu} \mathcal{M}^{\rho\tau}$$

然而，在光锥规范中事情没有那么容易。洛伦兹不变性是不能保证的，一般来说，也不存在。寻找它的正确方法是确保上面的 Lorentz 代数由生成元 $\mathcal{M}^{\mu\nu}$ 生成。事实证明，确凿的证据在于对易关系，

$$[\mathcal{M}^{i-}, \mathcal{M}^{j-}] = 0$$

这个方程在光锥规范中成立吗？问题是，它涉及算符 p^- 和 α_n^- ，就其他算符而言，这两个算符都由 (2.17) 和 (2.18) 固定。因此，任务是计算对易关系 $[\mathcal{M}^{i-}, \mathcal{M}^{j-}]$ ，给定物理自由度的对易关系 (2.21)，并检查它是否消失。为此，我们将排序模糊度 a 和时空维度 D 恢复为任意变量，然后继续。

涉及轨道角动量 l^{i-} 的部分相当简单。（事实上，有一个小的微妙之处，因为我们必须首先通过用 $1/2(x^\mu p^\nu + p^\nu x^\mu)$ 替换 $x^\mu p^\nu$ 来确保算符 $l^{\mu\nu}$ 是厄密算符）真正的困难来自于计算对易关系 $[S^{i-}, S^{j-}]$ 。这太乱了³。经过乏味的计算，我们得到，

$$\begin{aligned}[\mathcal{M}^{i-}, \mathcal{M}^{j-}] &= \frac{2}{(p^+)^2} \sum_{n>0} \left(\left[\frac{D-2}{24} - 1 \right] n + \frac{1}{n} \left[a - \frac{D-2}{24} \right] \right) (\alpha_{-n}^i \alpha_n^j - \alpha_{-n}^j \alpha_n^i) \\ &\quad + \frac{2}{(p^+)^2} \sum_{n>0} \left(\left[\frac{D-2}{24} - 1 \right] n + \frac{1}{n} \left[a - \frac{D-2}{24} \right] \right) (\tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^j - \tilde{\alpha}_{-n}^j \tilde{\alpha}_n^i)\end{aligned}$$

³Gleb Arutyunov 的讲义中提供了这一计算的步骤演练。

一般来说，右手边不会消失。我们了解到，相对论性弦只能在平直的闵可夫斯基空间中量子化，

$$D = 26 \quad \text{and} \quad a = 1$$

2.5 A Nod to the Superstring

我们不会在本课程中提供超弦的详细信息，但会偶尔停下来发表一些中肯的评论。虽然下面只是一份事实清单，但它有望对你的指导有所帮助。

玻色弦和超弦之间的关键区别在于在其世界面上添加了费米子模式。由此产生的世界面理论是超对称的。（至少在所谓的 Neveu Schwarz-Ramond 形式中是这样）因此叫“超弦”。应用量子化过程，可以得到以下结果：

- 超弦的临界维度为 $D = 10$ 。
- 谱中没有快子。
- 无质量玻色子场 $G_{\mu\nu}$ ， $B_{\mu\nu}$ 和 Φ 都是超弦谱的一部分。在这种情况下， $B_{\mu\nu}$ 有时被称为 Neveu-Schwarz 2-form。还有无质量的时空费米子，以及更多的无质量玻色子场。正如我们现在所讨论的，这些额外玻色子场的确切形式取决于我们所考虑的超弦理论。

虽然玻色弦是独特的，但在世界面中添加费米子时，可以做出许多离散的选择。这就产生了一些不同的微扰超弦理论。（尽管后来的发展表明，它们实际上都是同一框架的一部分，有时被称为 M-理论）这些离散选项中最重要的是，我们是否在弦的左行和右行区域中都添加费米子，或者我们是否选择费米子只在一个方向上移动，通常被视为右行。这产生了两类弦论。

- Type II 弦同时具有左右移动的世界面费米子。由此产生的 $D = 10$ 维时空理论具有 $\mathcal{N} = 2$ 的超对称性，这意味着 32 个超对称荷。
- Heterotic 弦有右行的费米子。由此产生的时空理论具有 $\mathcal{N} = 1$ 的超对称性，即 16 个超对称荷。

在每一种情况下，我们都可以做出一个进一步的离散选择。这给我们留下了四个超弦理论。在每种情况下，无质量玻色子场包括 $G_{\mu\nu}$ ， $B_{\mu\nu}$ 和 Φ 以及一些额外的场。

- **Type IIA:** 在 type II 理论中，弦的额外无质量玻色子激发被称为 Ramond-Ramond 场。对于 Type IIA，它们是 1-form C_μ 和 3-form $C_{\mu\nu\rho}$ 。每一个都被认为是一个规范场。规范不变信息存在于形式为 $F = dC$ 的场强中。
- **Type IIB:** Ramond-Ramond 规范场由一个标量 C ，一个 2-form $C_{\mu\nu}$ 和一个 4-form $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ 组成。4-form 被限制为具有自对偶场强： $F_5 = \star F_5$ 。(事实上，这个说法几乎是正确的……我们将在第 7.3.3 节中对此进行更深入的研究)
- **Heterotic SO(32):** 杂化弦没有 Ramond-Ramond 场。相反，每一个都有一个时空中的非阿贝尔规范场。Heterotic 弦是以规范群命名的。例如，Heterotic $SO(32)$ 弦在十维上产生了 $SO(32)$ 的 Yang-Mills 理论。
- **Heterotic $E_8 \times E_8$:** 线索就在名字里。这根弦在十维上产生了 $E_8 \times E_8$ 的 Yang-Mills 场。

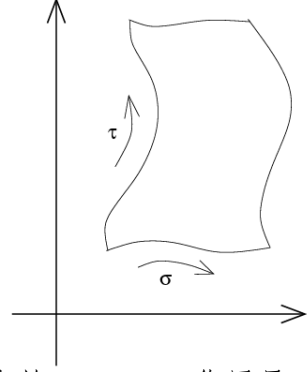
有时有人说在十个维度上有五个微扰超弦理论。这里我们只提到了四个。剩下的理论被称为 Type I，包括在平直的十维空间中移动的开弦和闭弦。我们将在下一节中顺便提及它。

3 开弦和 D-膜

在本节中，我们将讨论开弦的动力学。显然它们的特征是存在两个端点。我们的目标是了解这些端点的影响。弦的空间坐标由参数化

$$\sigma \in [0, \pi]$$

弦上一般点的动力学受局部物理的支配。这意味着一般的点不知道它是闭弦还是开弦的一部分。因此，开弦的动力学仍然必须用 Polyakov 作用量来描述。但现在必须补充其他内容：边界条件来告诉我们端点是如何移动的。为了看到这一点，我们来看看共形规范中的 Polyakov 作用量



$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_\alpha X \cdot \partial^\alpha X$$

像往常一样，我们通过找到作用量的极值来推导运动方程。这涉及分部积分。让我们考虑弦从 $\tau = \tau_i$ 的一些初始位形演变到 $\tau = \tau_f$ 的一些最终位形：

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^\pi d\sigma \partial_\alpha X \cdot \partial^\alpha \delta X \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma (\partial^\alpha \partial_\alpha X) \cdot \delta X + \text{total derivative} \end{aligned}$$

对于开弦，全微分取边界贡献

$$\frac{1}{2\pi\alpha'} \left[\int_0^\pi d\sigma \dot{X} \cdot \delta X \right]_{\tau=\tau_i}^{\tau=\tau_f} - \frac{1}{2\pi\alpha'} \left[\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau X' \cdot \delta X \right]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi}$$

第一项是我们在使用最小作用量原理时总是得到的那种。运动方程是通过要求 $\delta X^\mu = 0$ 在 $\tau = \tau_i$ 和 τ_f 时导出的，因此它消失了。然而，第二项是新的。为了让它也消失，我们需要

$$\partial_\sigma X^\mu \delta X_\mu = 0 \quad \text{at} \quad \sigma = 0, \pi$$

为了满足这一点，我们可以施加两种不同类型的边界条件：

- Neumann 边界条件。

$$\partial_\sigma X^\mu = 0 \quad \text{at} \quad \sigma = 0, \pi \quad (3.1)$$

因为对 δX^μ 没有限制，所以这种条件允许弦的末端自由移动。为了解这个结果，我们可以重复对闭弦所做的工作，在关于某个维度常数 R 的静态规范 $X^0 \equiv t = R\tau$ 中。然后，如方程 (1.34) 所示，约束条件为

$$\dot{\vec{x}} \cdot \vec{x}' = 0 \quad \text{and} \quad \dot{\vec{x}}^2 + \vec{x}'^2 = R^2$$

但是在弦的端点， $\vec{x}' = 0$ 。第二个方程式告诉我们， $|d\vec{x}/dt| = 1$ 。或者，换句话说，弦的端点以光速移动。

- Dirichlet 边界条件

$$\delta X^\mu = 0 \quad \text{at} \quad \sigma = 0, \pi \quad (3.2)$$

这意味着弦的端点位于空间中的某个恒定位置， $X^\mu = c^\mu$ 。

乍一看，Dirichlet 边界条件可能有点奇怪。为什么弦会固定在点 c^μ ？这一点有什么特别？历史上很少考虑 Dirichlet 条件。直到 Polchinski 才发生变化。

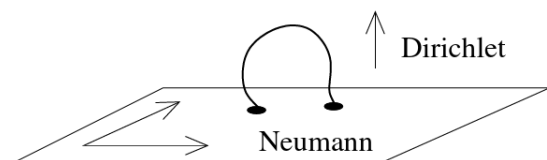
考虑一些坐标的 Dirichlet 边界条件和其他坐标的 Neumann 边界条件。这意味在弦的两个端点处有

$$\begin{aligned} \partial_\sigma X^a &= 0 & \text{for} \quad a = 0, \dots, p \\ X^I &= c^I & \text{for} \quad I = p+1, \dots, D-1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

弦端点固定在时空中 $(p+1)$ 维超曲面中，使 $SO(1, D-1)$ 群被分解为，

$$SO(1, D-1) \rightarrow SO(1, p) \times SO(D-p-1)$$

这个超曲面被称为 D-膜，或者，当我们想指定它的维数时，称为 D_p-膜。这里 D 代表 Dirichlet，而 p 是膜的空间维数。因此，在这种语言中，D0-膜是一个粒子；D1-膜本身就是一根弦；D2-膜是膜等等。膜位于横向空间中的特定位置 c^I 处。但是对这个超曲面的解释是什么呢？



事实证明，D-膜超曲面应被认为是一个新的、动力学物体。这是一个概念上的跳跃，并不明显。人们很久才认识到这一事实。弦理论不仅仅是一种弦理论：它还包含更高维度的膜。在第 7.5 节中，我们还会看到更多。注释：

- 我们已经定义了空间中无限大的 D-膜。然而，我们也可以通过指定弦可以结束的闭合表面来定义有限 D-膜。
- 在许多情况下，我们想要描述在所有方向上都具有 Neumann 边界条件的弦，这意味着弦在整个时空中可以自由移动。最好从填充空间的 D-膜的角度来理解这一点。没有 Dirichlet 条件意味着 D-膜无处不在！
- 上述 D_p -膜在 X^0 方向上总是 Neumann 边界条件。 X^0 有 Dirichlet 条件意味着什么？显然这很奇怪，因为它定在固定的时间点。称为瞬子。这种“D-瞬子”通常被称为 D(-1)-膜。与量子理论隧道效应有关。

模式展开

我们对弦进行通常的模式展开，其中 $X^\mu = X_L^\mu(\sigma^+) + X_R^\mu(\sigma^-)$ ，并且

$$\begin{aligned} X_L^\mu(\sigma^+) &= \frac{1}{2}x^\mu + \alpha' p^\mu \sigma^+ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma^+} \\ X_R^\mu(\sigma^-) &= \frac{1}{2}x^\mu + \alpha' p^\mu \sigma^- + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^-} \end{aligned} \quad (3.4)$$

边界条件将关系强加给弦的模式。它们很容易检查：

- 端点处的 Neumann 边界条件， $\partial_\sigma X^a = 0$ ，要求

$$\alpha_n^a = \tilde{\alpha}_n^a \quad (3.5)$$

- 端点处的 Dirichlet 边界条件， $X^I = c^I$ ，要求

$$x^I = c^I, \quad p^I = 0, \quad \alpha_n^I = -\tilde{\alpha}_n^I$$

因此，对于这两个边界条件，我们只有一组振动，比如 α_n 。然后通过边界条件来确定 $\tilde{\alpha}_n$ 。

值得指出的是，开弦 (3.4) 和闭弦 (1.36) 之间的 p^μ 项相差 2 倍。这是为了确保当 $\sigma \in [0, \pi]$ 时，开弦的 p^μ 保留了对弦的时空动量的解释。要看到这一点，需要检查与世界面上 X^μ 的变换相关的诺特流：它在 (2.33) 中给出。则守恒荷为

$$P^\mu = \int_0^\pi d\sigma (P^\tau)^\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \dot{X}^\mu = p^\mu$$

正如所说的那样。请注意，我们需要使用 Neumann 条件 (3.5) 来确保 Fourier 模式不会对该积分产生影响。

3.1 量子化

为了量子化，将场 x^a 和 p^a 以及 α_n^μ 推广为算符。模式展开中的其他元素由边界条件固定。一个明显但重要的是，位置和动量 x^a 和 p^a 有一个时空指标，取值为 $a = 0, \dots, p$ 。这意味着空间波函数只取决于膜的坐标，而不是整个时空。另一种说法是，对开弦进行量子化会产生被限制在膜上的态。

要确定谱在光锥规范中是最简单的。时空光锥坐标被选择为位于膜内，

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^p)$$

量子化以与闭弦相同的方式进行，直到我们得出态的质量公式，它是弦的横向模式之和。

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\sum_{i=1}^{p-1} \sum_{n>0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \sum_{i=p+1}^{D-1} \sum_{n>0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i - a \right)$$

第一个是对平行于膜的模式求和，第二个是在垂直于膜的模式求和。值得注意一下与闭弦公式的区别。首先，总体相差 4。这可以追溯到在我们上面讨论的模式扩展中， p^μ 前面缺少 1/2 的因子。其次，只对 α 模式求和。由于边界条件的原因， $\tilde{\alpha}$ 模式不是独立的。

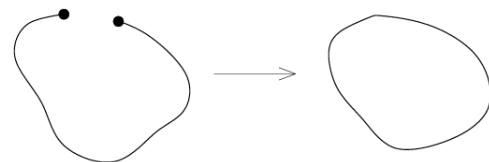
开弦和闭弦

在质量公式中，我们又得到了因正则排序而产生的常数 a 。就像在闭弦的情况下一样，要求量子理论的 Lorentz 对称性——这次是约化对称性 $SO(1, p) \times SO(D - p - 1)$ ——迫使我们做出选择

$$D = 26 \quad \text{and} \quad a = 1$$

这些值与我们为闭弦找到的值相同。这反映了一个重要的事实：开弦和闭弦并不是不同的理论。它们都是同一理论中的不同状态。

更确切地说，开弦理论必须包含闭弦。这是因为，一旦我们考虑相互作用，一个开弦就可以连接起来形成一个闭弦，如图所示。我们将在第 6 节中查看相互作用。这是否以另一种方式起作用的问题——也就是说闭弦理论是否需要开弦——是一个更复杂的问题，在超弦的上下文中陈述得最清楚。对于 type II 超弦，开弦和 D-膜是必要的成分。对于 heterotic 超弦，似乎没有开弦，也没有 D-膜。对于玻色子理论，开弦似乎是一个必要的成分，尽管我不知道有什么致命的论点。但由于我们不确定该理论是否因快子的存在而存在，这一点可能没有意义。在本课的剩余部分中，我们将以与 type II 弦相同的方式看待玻色子弦，并假设该理论包括闭弦和开弦及其相关的 D-膜。



3.1.1 基态

基态定义为

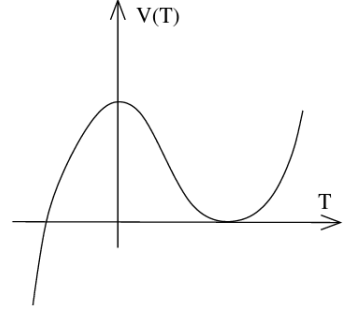
$$\alpha_n^i |0; p\rangle = 0 \quad n > 0$$

空间指标现在跑遍 $i = 1, \dots, p - 1, p + 1, \dots, D - 1$ 。基态有质量

$$M^2 = -\frac{1}{\alpha'}$$

它又是超光速的。它的质量是闭弦快子的一半。正如我们上面所说的，

这一次快子被限制在膜内。与闭弦快子相反，开弦快子现在已经被很好地理解了，它的势能如图所示。解释是膜是不稳定的。它会衰变，很像场论中的共振态。它通过分解为闭弦模式来实现这一点。这个过程的终点——对应于图中 $T > 0$ 处的最小值——只是一个没有 D-膜的态。势能在最小值和 $T = 0$ 时的值之间的差是 D-膜的张力。



注意，尽管在 $T > 0$ 时存在势的极小值，但它不是全局极小值。势能似乎在边界左边下降。这一点仍然没有得到很好的理解。有人认为它在某种程度上与闭弦快子有关。

3.1.2 第一激发态：光子

第一激发态是无质量的。它们分为两类：

- 垂直于膜的谐振子，

$$\alpha_{-1}^a |0; p\rangle \quad a = 1, \dots, p-1$$

时空指标 a 位于膜内，因此该态在 $SO(1, p)$ Lorentz 群下进行变换。它是膜上的一个自旋为 1 的粒子，换句话说，它是一个光子。我们引入膜上的规范场 A_a 其中 $a = 0, \dots, p$ ，它的量子被这个光子认同。

- 平行于膜的谐振子，

$$\alpha_{-1}^I |0; p\rangle \quad I = p+1, \dots, D-1$$

这些态是膜的 $SO(1, p)$ Lorentz 群下的标量。它们可以被认为是由存在于膜上的标量场 ϕ^I 产生的。这些标量有一个很好的解释：它们是膜在横向方向上的波动。这是我们第一次暗示 D-膜是一个动力学对象。注意，尽管 ϕ^I 是膜的 $SO(1, p)$ Lorentz 群下的标量场，但它们确实在平行于膜的 $SO(D-p-1)$ 旋转群下以矢量形式变换。这表现为膜的世界体上的全局对称性。

3.1.3 更高的激发态与 Regge 轨道

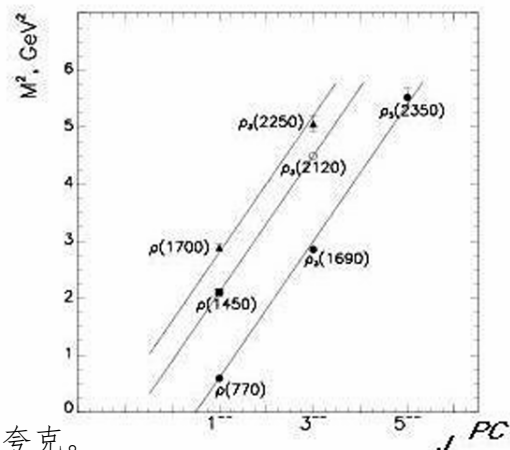
在等级为 N 时，弦态的质量为

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}(N - 1)$$

这些态的最大自旋来自对称张量。它是

$$J_{max} = N = \alpha' M^2 + 1$$

绘制自旋与质量的平方，我们发现一条直线。这些通常被称为 Regge 轨迹。（或 Chew-Frautschi 轨迹）它们出现在自然界的介子和重子谱中。图中显示了一些涉及 ρ 介子的例子。这些细长的 Regge 轨迹暗示了一幅天真的画面，介子是由约束通量管连接的两个旋转夸克。



与 QCD 的强子谱相匹配所需的弦张力值为 $T \sim 1\text{GeV}$ 。强相互作用和开放弦之间的这种关系是弦论发展的最初动机之一，正是从这里开始，参数 α' 获得了（公认很少使用的）名称“Regge 斜率”。在现代，开弦与夸克之间的联系在 AdS/CFT 对应关系中得以延续。

3.1.4 Another Nod to the Superstring

正如超对称消除了闭弦超子，它也消除了开弦超子。开弦是 type II 弦理论的组成部分。可能的 D-膜是

- type IIA 弦理论具有偶数 p 的稳定 Dp -膜。
- type IIB 弦理论具有奇数 p 的稳定 Dp -膜。

D 膜在 type II 弦理论中是稳定的最重要原因是它们在 Ramond-Ramond 场下带荷。（这其实是 Polchinski 的真知灼见，让人们认真对待 D 膜）。然而，type II 弦理论也包含不稳定膜，其中 p 在 type IIA 中为奇数， p 在 type IIB 中为偶数。

第五种弦理论（实际上是第一个被发现的弦理论）被称为 Type I。与其他弦理论不同，它包含在平坦的十维 Lorentz 不变时空中移动的开弦和闭弦。它可以被认为是 Type IIB 理论，有一堆充满空间的 D9-膜，还有一个叫做定向平面的东西。你可以在 Polchinski 上读到这篇文章。

正如我们上面提到的，heterotic 弦没有（有限能量）D 膜。这是由于在任何将左行模式反映为右行模式的尝试中存在不一致性。

3.2 膜动力学：Dirac 作用量

我们引入了 D-膜作为开弦的固定边界条件。然而，我们已经看到了一个暗示，这些物体本身就是动力学的，因为无质量标量激发 ϕ^I 可以自然地解释为膜的横向波动。事实上，如果一个理论同时包括开弦和闭弦，那么 D-膜必须是动力学的，因为在引力理论中不可能有刚性物体。随着课程的进展，D-膜的动力学性质将变得更加清晰。

但是任何动力学物体都应该有个作用量来描述它如何运动。此外，经过在第 1 节中的讨论，我们已经知道这是什么了！仅基于 Lorentz 不变性和重参数化不变性，该作用量必须是 Nambu-Goto 作用量的高维扩展。这是

$$S_{Dp} = -T_p \int d^{p+1}\xi \sqrt{-\det\gamma} \quad (3.6)$$

其中 T_p 是我们稍后将确定的 Dp-膜的张力，而 ξ^a , $a = 0, \dots, p$ 是膜的世界体坐标。 γ_{ab} 是时空度规在世界体上的 pull-back,

$$\gamma_{ab} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} \eta_{\mu\nu}$$

这被称为 Dirac 作用量。在 Nambu 和 Goto 在弦的背景下重新发现它之前的一段时间，Dirac 第一次把它写下来作为一种膜。

为了与场 ϕ^I 联系，我们可以使用 Dirac 作用量的重新参数化不变性来达到静态规范。对于无限平直的 Dp-膜，我们可以选择

$$X^a = \xi^a \quad a = 0, \dots, p$$

然后用下面的式子将波动 ϕ^I 与动力学横向坐标认同

$$X^I(\xi) = 2\pi\alpha'\phi^I(\xi) \quad I = p+1, \dots, D-1$$

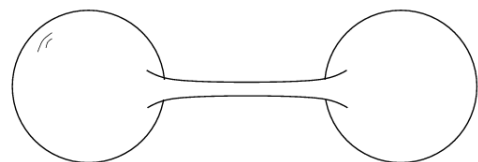
然而，Dirac 作用量不可能是故事的全部。它描述了 D-膜的横向波动，但对生活在 D-膜上的 $U(1)$ 规范场 A_μ 没有什么可说的。必须有一些作用量来描述这个规范场是如何移动的。我们将在第 7 节中回到这一点。

弦有什么特别之处？

我们可以尝试量子化 D-膜的 Dirac 作用量 (3.6)，就像我们量子化弦的作用量一样。这可能吗？目前的答案是否定的。似乎既有技术上的障碍，也有原理上的障碍。技术问题只是它很难。Weyl 不变性是我们攻击弦的主要武器之一，但它不适用于更高维的物体。

原理上的问题是，对膜或更高维物体进行量子化不会产生具有粒子解释的离散态谱。通过这种方式，它们看起来与弦有着根本的不同。

让我们凭直觉了解为什么会出现这种情况。弦的能量与其长度成正比。这确保了弦的行为或多或少像我们熟悉的松紧带。D2-膜呢？现在能量与面积成正比。在你的脑海里，你可能在想一张类似橡胶的床单。但受 Dirac 作用量控制的膜和更高维度的物体并不像家用橡胶片那样起作用。它们更灵活。这是因为薄膜可以在相同的面积上形成许多不同的形状。例如，长度为 L 且半径为 $1/L$ 的管状膜对于所有的 L 具有相同的面积；短而粗，或长而细。这意味着可以在膜上形成细长的尖峰，而不需要额外的能量。特别是，由细长管连接的物体具有相同的能量，无论它们的间隔如何。在量子化之后，这种性质产生了连续的态谱。量子膜，或更高维的物体，并没有我们在弦中看到的单粒子解释。人们期望量子膜能够描述多粒子态。



3.3 多个膜：胶子

考虑两个平行的 Dp-膜。开弦现在有两个选择。要么两端落在同一个膜上，要么两端分别落在两个不同的膜上。让我们考虑两端落在两个不同的膜上的情况

$$X^I(0, \tau) = c^I \quad \text{and} \quad X^I(\pi, \tau) = d^I$$

其中 c^I 和 d^I 是两个膜的位置。就模式扩展而言（考虑左行波和右行波具有不同的动量），这要求

$$X^I = c^I + \frac{(d^I - c^I)\sigma}{\pi} + \text{oscillator modes}$$

然后读取经典约束

$$\partial_+ X \cdot \partial_+ X = \alpha'^2 p^2 + \frac{|\vec{d} - \vec{c}|^2}{4\pi^2} + \text{oscillator modes} = 0$$

这意味着经典的质量壳条件是

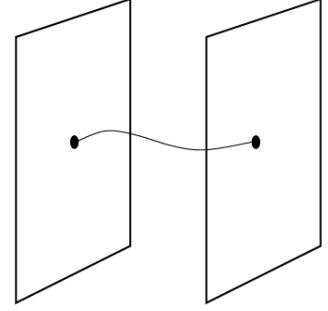
$$M^2 = \frac{|\vec{d} - \vec{c}|^2}{(2\pi\alpha')^2} + \text{oscillator modes}$$

这个额外的项有一个明显的解释：这是两个膜之间的弦在两个膜被拉远的过程中附加的能量。该弦的量子化与以前一样进行。在我们包括正则排序常数之后，当 $|\vec{d} - \vec{c}|^2 < 4\pi^2\alpha'$ 时，这个弦的基态仍是类快子的。或者换句话说讲，当膜与膜接近亚弦尺度，膜之间的弦的基态是类快子的。

这一点显然可以推广到 N 平行膜的情况。弦的每个端点都有 N 个可能的位置。我们可以用数字 $m, n = 1, \dots, N$ 标记每个端点，告诉我们它的端点在哪个膜上。这个标记有时被称为 Chan-Paton 因子。

现在考虑一下所有膜在时空中处于同一位置的情况。每个端点可以位于 N 个不同的膜上，总共给出 N^2 种可能性。这些弦中的每一个都有一个开弦的质量谱，这意味着现在每种类型都有 N^2 个不同的粒子。将相关场排列在 $N \times N$ 厄米矩阵内是很自然的。然后得到开弦快子 T^m_n 和无质量场

$$\phi^m_n, \quad (A_a)^m_n \quad (3.7)$$



在这里，矩阵的组成部分告诉我们场来自哪个弦。对角线分量由两端在同一膜上的弦产生。

规范场 A_a 特别有趣。这样写，它看起来像一个 $U(N)$ 规范联络。我们稍后会看到情况确实如此。可以证明，当 N 个膜重合时，膜的 $U(1)^N$ 规范对称性增强为 $U(N)$ 。标量场 ϕ^I 在这一对称性的伴随表示中变换。

4 共形场论简介

本节的目的是熟悉二维共形场论的基本语言⁴。这是一个在弦论之外有许多应用的主题，最显著的是在统计物理学中，它提供了对临界现象的描述。此外，事实证明，二维共形场论提供了罕见的相互作用但完全可解的量子场论的例子。近年来，由于在 AdS/CFT 对应关系中的作用，人们的注意力集中在高维的共形场论上。

共形变换是坐标的变化 $\sigma^\alpha \rightarrow \tilde{\alpha}^\alpha(\sigma)$ ，使得度规变化

$$g_{\alpha\beta}(\sigma) \rightarrow \Omega^2(\sigma)g_{\alpha\beta}(\sigma) \quad (4.1)$$

共形场论 (CFT) 是在这些变换下不变的场论。这意味着该理论的物理性质在所有长度尺度上看起来都是一样的。共形场论关心角度，但不关心距离。

形式 (4.1) 的变换有不同的解释，这取决于我们是考虑固定背景度规 $g_{\alpha\beta}$ ，还是考虑动态背景度规。当度规是动态的，变换是微分同胚的；这是一个规范对称。当背景固定时，变换应该被认为是一种物理对称，从点 σ^α 转换到点 $\tilde{\sigma}^\alpha$ 。现在，这是一个具有相应守恒流的全局对称性。

在 Polyakov 形式的弦理论中，度规是动态的，变换 (4.1) 是冗余的规范变换：即可以通过 Weyl 变换来消除的微分同胚变换。

相反，在本节中，我们将主要对基于固定背景的理论感兴趣。除了一些明显的例外，我们通常会认为这种背景是平的。这是我们在研究量子场论时所习惯的情况。

⁴Belavin、Polyakov 和 Zamalodchikov 的开创性论文 “Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory”, Nucl. Phys. B241 (1984) 首次描述了本节中涵盖的大部分材料。Friedan、Martinec 和 Shenker 在 “Conformal Invariance, Supersymmetry and String Theory”, Nucl. Phys. B271 (1986) 中解释了它在弦理论中的应用。学习共形场论的权威参考是 Ginsparg 的优秀评论。

当然，我们可以在对固定或波动的背景下定义的理论的思考之间交替。当背景度规固定时，任何具有微分同胚性和 Weyl 不变性的二维引力理论都将退化为共形不变理论。类似地，任何共形不变理论都可以与二维引力耦合，在那里它将产生一个同时具有微分同胚性和 Weyl 不变性的经典理论。注意“经典”一词！从某种意义上说，这门课程的全部目的是理解最后一句话何时也适用于量子层面。

尽管共形场论是量子场论的一个子集，但用来描述它们的语言有点不同。这在一定程度上是出于必要。只有当理论没有优选的长度尺度时，变换 (4.1) 下的不变性才成立。但这意味着理论中不可能有任何东西像质量或康普顿波长那样。换句话说，共形场论只支持无质量激发。我们所问的问题不是粒子和 S-矩阵的问题。相反，我们将关注共形变换下的关联函数和不同算符的行为。

4.0.1 欧几里德空间

尽管我们最终对闵可夫斯基号差的世界面感兴趣，但如果我们使用欧几里得世界面，它会更简单、更优雅。这里没有什么有趣的事情——我们所做的一切也可以在闵可夫斯基空间中重新表述。

欧几里得世界面坐标为 $(\sigma^1, \sigma^2) = (\sigma^1, i\sigma^0)$ ，这有助于形成复坐标，

$$z = \sigma^1 + i\sigma^2 \quad \text{and} \quad \bar{z} = \sigma^1 - i\sigma^2$$

这是光锥坐标在欧几里德空间中的类比。基于这种类比，通常将全纯函数称为“左行的”，将反全纯函数称作“右行的”。

全纯导数是

$$\partial_z \equiv \partial = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2) \quad \text{and} \quad \partial_{\bar{z}} \equiv \bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)$$

他们遵循 $\partial z = \bar{\partial} \bar{z} = 1$ 和 $\partial \bar{z} = \bar{\partial} z = 0$ 。我们通常在平直的欧几里得空间中工作，度规为

$$ds^2 = (d\sigma^1)^2 + (d\sigma^2)^2 = dzd\bar{z} \quad (4.2)$$

写为分量形式为

$$g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \quad \text{and} \quad g_{z\bar{z}} = \frac{1}{2}$$

根据这种约定，测度因子为 $dzd\bar{z} = 2d\sigma^1 d\sigma^2$ 。我们定义 delta 函数，使得 $\int d^2z \delta(z, \bar{z}) = 1$ 。注意，因为我们也有 $\int d^2\sigma \delta(\sigma) = 1$ ，这意味着两个 delta 函数之间有 2 的因子差。矢量的指标向上时： $v^z = (v^1 + iv^2)$ 和 $v^{\bar{z}} = (v^1 - iv^2)$ 。当指标下降时，向量为 $v_z = \frac{1}{2}(v^1 - iv^2)$ 和 $v_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(v^1 + iv^2)$ 。

4.0.2 共形变换的全纯性

在复欧几里得坐标 z 和 \bar{z} 中，平面空间的共形变换很简单：它们是坐标的任何全纯变化，

$$z \rightarrow z' = f(z) \quad \text{and} \quad \bar{z} \rightarrow \bar{z}' = \bar{f}(\bar{z})$$

在这种变换下， $ds^2 = dzd\bar{z} \rightarrow |df/dz|^2 dzd\bar{z}$ ，实际上采取形式 (4.1)。注意，我们有无穷多个共形变换——事实上，一整个值为 $f(z)$ 的函数。这对于二维共形场论来说是特殊的。在高维中，共形变换的空间是一个有限维群。对于定义在 $\mathbf{R}^{p,q}$ 上的理论，当 $p+q > 2$ 时，共形群是 $SO(p+1, q+1)$ 。

二维共形变换的几个特别简单和重要的例子是

- $z \rightarrow z + a$ ：这是一个平移。
- $z \rightarrow \zeta z$ ：对于 $|\zeta| = 1$ 这是旋转，对于 $\zeta \neq 1$ 是标度变换（或扩张）。

出于许多目的，将 z 和 \bar{z} 视为自变量是最简单的。通过这样做，实际上是在将世界面从 \mathbf{R}^2 扩展到 \mathbf{C}^2 。这将使我们能够利用复数方法中的各种定理。但是，我们做这样的操作时应当牢记，我们最终的结果一定是出现在由 $\bar{z} = z^*$ 定义的实平面 $\mathbf{R}^2 \subset \mathbf{C}^2$ 上的。

4.1 经典层面

我们首先导出在共形变换 (4.1) 下保持不变的经典理论中的一些性质。

4.1.1 能量-动量张量

任何场论中最重要的对象之一是能量-动量张量。这以通常的方式定义为由平移不变性产生的守恒流的矩阵，

$$\delta\sigma^\alpha = \epsilon^\alpha$$

在平直时空中，平移是共形变换的一种特殊情况。

在任何理论中，都有一种一般方法来推导能量-动量张量。假设我们在平直空间 $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ 。回想一下，我们通常可以通过将对称性中出现的常数参数 ϵ 提升为时空坐标的函数来导出守恒流。作用量的变分必须是这样的形式，

$$\delta S = \int d^2\sigma J^\alpha \partial_\alpha \epsilon \quad (4.3)$$

对于场的任意函数 J^α 。这确保了当 ϵ 为常数时，作用量的变分消失，这当然是对称性的定义。但是，当运动方程满足时，不仅仅是常数 ϵ ，对 $\epsilon(\sigma)$ 做任意变分，我们必须有 $\delta S = 0$ 。这意味着当满足运动方程时， J^α 必须满足

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0$$

函数 J^α 是我们的守恒流。

让我们看看这如何应用在平移不变性。如果我们将 ϵ 提升为世界面变量的函数，则作用量的变分必须是形式 (4.3)。但 J^α 是什么？在这一点上，我们做了一件可爱的事情。考虑同样的理论，但现在与动态的背景度规 $g_{\alpha\beta}(\sigma)$ 耦合。换句话说，与引力耦合。然后我们可以看到变换

$$\delta\sigma^\alpha = \epsilon^\alpha(\sigma)$$

作为一个微分同胚变换，我们知道由于微分同胚不变性，只要我们对度规做相应的变换，这个理论是不变的

$$\delta g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \epsilon_\beta + \partial_\beta \epsilon_\alpha$$

这意味着，如果我们只是对原始理论中的坐标进行变换，那么作用量的变

化一定与我们只变换度规得到的结果相反。（因为同时执行这两种变换会使作用量保持不变）所以我们有

$$\delta S = - \int d^2\sigma \frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta} = -2 \int d^2\sigma \frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}} \partial_\alpha \epsilon_\beta$$

请注意，这个表达式中的 $\delta S/\delta g_{\alpha\beta}$ 是一个泛函导数。我们现在有了由平移不变性引起的守恒流。我们将添加一个归一化常数，它在弦论中是标准的（尽管不一定在其他领域），并将能量-动量张量定义为

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} \quad (4.4)$$

如果我们有一个平直的世界面，我们在 $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ 上计算 $T_{\alpha\beta}$ ，得到的表达式服从 $\partial^\alpha T_{\alpha\beta} = 0$ 。如果我们在一个弯曲的世界面上，那么能量-动量张量是协变守恒的， $\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = 0$ 。

能量动量张量是无迹的

在共形理论中， $T_{\alpha\beta}$ 具有一个非常重要的性质：它的迹为 0。为了看到这一点，让我们根据标度变换来变分作用量，标度变换是共形变换的特殊情况，

$$\delta g_{\alpha\beta} = \epsilon g_{\alpha\beta} \quad (4.5)$$

然后我们有

$$\delta S = \int d^2\sigma \frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} \epsilon T^\alpha{}_\alpha$$

但这在共形理论中必须为 0，因为标度变换是一种共形变换。所以

$$T^\alpha{}_\alpha = 0$$

这是共形场论在任何维度上都具备的关键特征。许多理论在经典层面上都具有这一特征，包括四维中的 Maxwell 理论和 Yang-Mills 理论。然而，在量子层面上保存要困难得多。（Yang-Mills 理论在量子层面上无法成为共形场论）从技术上讲，困难是由于在规范理论时需要引入一个尺度，而共形场论不能建立在特定尺度上。在这里，我们将对二维理论感兴趣，这些理论成功地在量子层面上保持了共形对称性。

展望：即使共形不变性在二维量子理论中仍然存在，消失的迹 $T^\alpha_\alpha = 0$ 也只能在平直空间中成立。我们将在第 4.4.2 节中得出这一结果。

复坐标系下的能动张量

在复坐标系中， $z = \sigma^1 + i\sigma^2$ ，消失的迹 $T^\alpha_\alpha = 0$ 变为

$$T_{z\bar{z}} = 0$$

同时，守恒方程 $\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ 变为 $\partial T^{zz} = \bar{\partial} T^{\bar{z}\bar{z}} = 0$ 。或降下 T 的指标，

$$\bar{\partial} T_{zz} = 0 \quad \text{and} \quad \partial T_{\bar{z}\bar{z}} = 0$$

换句话说， $T_{zz} = T_{zz}(z)$ 是全纯函数，而 $T_{\bar{z}\bar{z}} = T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z})$ 是反全纯函数。记为

$$T_{zz}(z) \equiv T(z) \quad \text{and} \quad T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}) \equiv \bar{T}(\bar{z})$$

4.1.2 诺特流

能量-动量张量 $T_{\alpha\beta}$ 提供了平移的诺特流。与其他共形变换相关的流是什么？考虑无穷小的变换，

$$z' = z + \epsilon(z) \quad , \quad \bar{z}' = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z})$$

其中，与上面的两个例子相联系，常数 ϵ 对应于平移，而 $\epsilon(z) \sim z$ 对应于旋转和伸缩。为了计算流，我们将使用之前看到的相同技巧：我们将参数 ϵ 提升为依赖于世界面坐标的函数。但它已经是世界面坐标的一半的函数了，所以现在这意味着 $\epsilon(z) \rightarrow \epsilon(z, \bar{z})$ 。然后我们可以计算作用量的变分，再次使用我们可以对度规进行补偿变分的事实，

$$\begin{aligned} \delta S &= - \int d^2\sigma \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} \delta g^{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma T_{\alpha\beta} (\partial^\alpha \delta \sigma^\beta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d^2z \frac{1}{2} [T_{zz} (\partial^z \delta z) + T_{\bar{z}\bar{z}} (\partial^{\bar{z}} \delta \bar{z})] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d^2z [T_{zz} \partial_{\bar{z}} \epsilon + T_{\bar{z}\bar{z}} \partial_z \bar{\epsilon}] \end{aligned} \tag{4.6}$$

首先注意，如果 ϵ 是全纯的并且 $\bar{\epsilon}$ 是反全纯的，那么我们立即得到 $\delta S = 0$ 。当然，这就是我们手上有对称性的说法。（在上面的推导中，我们在哪里使用了这个理论是共形的。在导出第三行的地方，我们需要 $T_{z\bar{z}} = 0$ ）

在这个阶段，让我们使用将 z 和 \bar{z} 视为自变量的技巧。我们观察来自于 z 和 \bar{z} 位移的独立的流。让我们先来看看对称性

$$\delta z = \epsilon(z) \quad , \quad \delta \bar{z} = 0$$

我们可以通过使用让小参数依赖于位置的标准技巧从 (4.6) 中读出守恒流。由于 $\epsilon(z)$ 已经取决于位置，这时提升 $\epsilon \rightarrow \epsilon(z)f(\bar{z})$ 其中 f 为某些函数，然后观察 (4.6) 中的 $\bar{\partial}f$ 项。这给了我们流

$$J^z = 0 \quad \text{and} \quad J^{\bar{z}} = T_{zz}(z) \epsilon(z) \equiv T(z) \epsilon(z) \quad (4.7)$$

重要的是，我们发现流本身也是全纯的。我们可以检查一下，这确实是一个守恒流：它应该满足 $\partial_\alpha J^\alpha = \partial_z J^z + \partial_{\bar{z}} J^{\bar{z}} = 0$ 。但事实上，它这样做是有剩余空间的：它满足更强的条件 $\partial_{\bar{z}} J^{\bar{z}} = 0$ 。

类似地，可以看到 $\delta \bar{z} = \bar{\epsilon}(\bar{z})$ 与 $\delta z = 0$ 变换。我们得到了反全纯流 \bar{J} ,

$$\bar{J}^z = \bar{T}(\bar{z}) \bar{\epsilon}(\bar{z}) \quad \text{and} \quad \bar{J}^{\bar{z}} = 0 \quad (4.8)$$

4.1.3 一个例子：自由标量场

让我们来说明一些关于自由标量场的经典共形理论的想法，

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_\alpha X \partial^\alpha X$$

请注意，与我们之前的作用量 (1.30) 相比，没有整体负号。这是因为我们现在使用的是欧几里德世界面度规。当然，自由标量场的理论是非常简单的。在这个理论中，我们可以计算任何我们感兴趣的東西。尽管如此，它仍然会展现出足够的结构，为我们在 CFT 中遇到的所有抽象概念提供一个例子。因此，自由标量场将被证明是贯穿这部分课程的一个很好的伙伴。

首先，让我们检查一下这个自由标量场实际上是共形的。特别是，我们可以重新缩放 $\sigma^\alpha \rightarrow \lambda \sigma^\alpha$ 。如果我们从主动变换的意义上看待这一点，坐标保持不变，但点 σ 处的场的值移动到点 $\lambda\sigma$ 。这意味着，

$$X(\sigma) \rightarrow X(\lambda^{-1}\sigma) \quad \text{and} \quad \frac{\partial X(\sigma)}{\partial \sigma^\alpha} \rightarrow \frac{\partial X(\lambda^{-1}\sigma)}{\partial \sigma^\alpha} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial X(\tilde{\sigma})}{\partial \tilde{\sigma}}$$

其中我们定义 $\tilde{\sigma} = \lambda^{-1}\sigma$ 。来自拉格朗日量中的两个导数的因子 λ^{-2} 抵消了来自测度 $d^2\sigma = \lambda^2 d^2\tilde{\sigma}$ 的雅可比因子，使作用量不变。注意， X 的任何多项式相互作用项都会破坏共形不变性。

该理论的能量-动量张量使用 (4.4) 来定义，

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\alpha'} \left(\partial_\alpha X \partial_\beta X - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (\partial X)^2 \right) \quad (4.9)$$

其确实满足 $T^\alpha_\alpha = 0$ 。能量-动量张量在复坐标系中看起来要简单得多。易得 $T_{z\bar{z}} = 0$ ，其他两个分量为

$$T = -\frac{1}{\alpha'} \partial X \partial X \quad \text{and} \quad \bar{T} = -\frac{1}{\alpha'} \bar{\partial} X \bar{\partial} X$$

X 的运动方程为 $\partial \bar{\partial} X = 0$ 。一般的经典解可分解为，

$$X(z, \bar{z}) = X(z) + \bar{X}(\bar{z})$$

当在这个解上计算时， T 和 \bar{T} 分别是全纯函数和反全纯函数。

4.2 量子层面

目前为止，我们的讨论是经典的。现在转向量子理论。我们要讨论的第一个概念实际上是任何量子场论的一个特征。但它确实是在 CFT 的背景下产生的：算符乘积展开。

4.2.1 算符乘积展开

让我们首先描述一下我们所说的 CFT 中的局域算符是什么意思。我们还将把这些对象称为场。CFT 和更通用的量子场论在术语上略有不同。通常在

量子场论中，“场” ϕ 这个术语，是指出现在作用量中并在路径积分时被积的对象。相反，在 CFT 中，术语“场”指的是我们可以写下的任何局域表达式。这包括 ϕ ，但也包括导数 $\partial^n \phi$ 或复合算符，如 $e^{i\phi}$ 。所有这些都被认为是 CFT 中的不同的场。从中可以清楚地看出，CFT 中所有“场”的集合总是无限的，尽管如果你习惯于使用量子场论，你只会谈论有限数量的基本对象 ϕ 。显然，这没什么好害怕的。这只是语言的变化：这并不意味着我们的理论变得更加困难。

我们现在定义算符乘积展开（OPE）。这是一个关于局域算符相互靠近时会发生什么的描述。其思想是，在临点插入的两个局域算符可以通过其中一个点的一系列算符来近似。让我们用 \mathcal{O}_i 表示 CFT 中的所有局域算符，其中 i 遍历所有的算符。那么 OPE 是

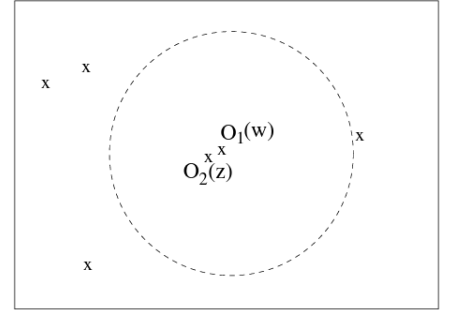
$$\mathcal{O}_i(z, \bar{z})\mathcal{O}_j(w, \bar{w}) = \sum_k C_{ij}^k(z-w, \bar{z}-\bar{w})\mathcal{O}_k(w, \bar{w}) \quad (4.10)$$

这里 $C_{ij}^k(z-w, \bar{z}-\bar{w})$ 是一组函数，基于平移不变性，仅取决于两个算符之间的距离。我们将写出许多形式为 (4.10) 的算符方程，明确它们的准确含义很重要：它们始终应被理解为在时序关联函数中插入算符时成立的关系，

$$\langle \mathcal{O}_i(z, \bar{z}) \mathcal{O}_j(w, \bar{w}) \dots \rangle = \sum_k C_{ij}^k(z-w, \bar{z}-\bar{w}) \langle \mathcal{O}_k(w, \bar{w}) \dots \rangle$$

其中 \dots 可以是我們选择的任何其他插入的算符。显然，不断地写 $\langle \dots \rangle$ 会很乏味。所以我们没有。而将它隐含在表达式中。还有一些关于 OPE 的进一步警告值得强调

- 关联函数总是被假定为时间排序的。（或者我们将在第 4.5.1 节中讨论的类似内容）这意味着，就 OPE 而言，由于算符的排序无论如何都是在关联函数中确定的，所以所有的算符都是可对易的。所以我们必须有 $\mathcal{O}_i(z, \bar{z})\mathcal{O}_j(w, \bar{w}) = \mathcal{O}_j(w, \bar{w})\mathcal{O}_i(z, \bar{z})$ 。（这里有一个警告：如果算符是 Grassmann 的，那么它们在交换时会额外加上一个负号，即使是在时序乘积中也是如此）。



- 关联函数中其他算符的插入（上面用 ... 表示）是任意的。只是它们的距离应该大于 $|z-w|$ 。事实证明——相当值得注意的是——在 CFT 中，OPE 是精确的描述，其收敛半径等于到最近的插入算符的距离。我们将在第 4.6 节回到这一点。收敛半径在图中用虚线表示。
- 当 $z \rightarrow w$ 时 OPE 具有奇异行为。事实上，这种奇异行为将是我们唯一关心的事情！它将包含与对易关系相同的信息，并告诉我们算符如何在对称性下变换。事实上，在许多方程中，我们将简单地将奇异项写在 OPE 中，并将非奇异项表示为 $+\dots$ 。

4.2.2 Ward 恒等式

量子场论中诺特定理的思想被称为 Ward 恒等式的算符方程所保留。这里我们导出了与共形不变性相关的 Ward 恒等式。我们首先考虑一个具有对称性的一般理论。稍后我们将限制于共形对称性。

路径积分游戏

我们将借此机会熟悉使用路径积分的一些基本技术。从模式上讲，路径积分采用以下形式

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}$$

其中 ϕ 共同表示所有场（在路径积分意义上... 而不是 CFT 意义上!）。我们考虑的量子理论的对称性体现在如下无穷小变换上

$$\phi' = \phi + \epsilon \delta\phi$$

满足作用量和测度都保持不变，

$$S[\phi'] = S[\phi] \quad \text{and} \quad \mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi$$

（事实上，我们只需组合 $\mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}$ 是不变的，但这个微妙之处在本课程中并不重要）。使用之前在经典理论中使用的技巧相同的技巧，并推广 $\epsilon \rightarrow \epsilon(z)$ 。

如果 ϵ 是常数，则积分测度乘 $\exp(-S)$ 是不变的，因此在 ϵ 的领头阶，其变分必须与梯度 $\partial_\alpha \epsilon$ 成比例。我们有

$$\begin{aligned} Z &\longrightarrow \int \mathcal{D}\phi' \exp(-S[\phi']) \\ &= \int \mathcal{D}\phi \exp\left(-S[\phi] - \frac{1}{2\pi} \int J^\alpha \partial_\alpha \epsilon\right) \\ &= \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \left(1 - \frac{1}{2\pi} \int J^\alpha \partial_\alpha \epsilon\right) \end{aligned}$$

其中 $1/2\pi$ 的因子只是一种约定， \int 是 $\int d^2\sigma \sqrt{g}$ 的简写。请注意，现在的流 J^α 也可能有来自测度变换和作用量的贡献。

现在是聪明的一步。尽管积分变量发生了变化，但配分函数的实际值根本不会改变。毕竟，我们只是重新定义了一个虚拟的积分变量 ϕ 。所以上面的表达式必须等于原来的 Z 。或者换句话说，

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \left(\int J^\alpha \partial_\alpha \epsilon \right) = 0$$

更重要的是，上式必须对所有 ϵ 都成立。这给了我们诺特定理的量子版本：流散度的真空期望值为 0：

$$\langle \partial_\alpha J^\alpha \rangle = 0$$

我们可以重复这些技巧，得出一些更有力的结论。让我们看看当我们在路径积分中有其他内容插入时会发生什么。时间排序关联函数由下式给出

$$\langle \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \mathcal{O}_n(\sigma_n) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \mathcal{O}_n(\sigma_n)$$

我们可以将这些视为插入平面上特定点的算符，如图所示。如上所述，算符 \mathcal{O}_i 是我们从 ϕ 场形成的任何一般表达式。在我们感兴趣的对称性下，算符会以某种方式发生变化，比如

$$\mathcal{O}_i \rightarrow \mathcal{O}_i + \epsilon \delta \mathcal{O}_i$$

再一次有 $\epsilon \rightarrow \epsilon(\sigma)$ 。作为第一步，我们选择 $\epsilon(\sigma)$ 使它只有远离算符 \mathcal{O}_i 插入处的贡献，如第一个图所示。那么，

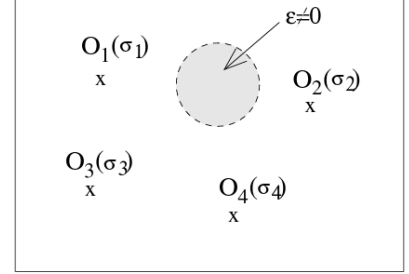
$$\delta \mathcal{O}_i(\sigma_i) = 0$$

上面的推导以完全相同的方式给出

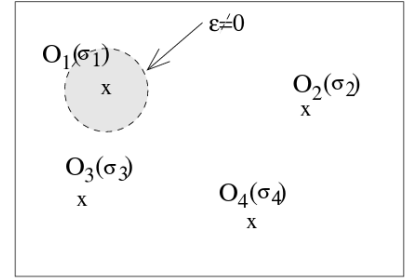
$$\langle \partial_\alpha J^\alpha(\sigma) \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \mathcal{O}_n(\sigma_n) \rangle = 0 \quad \text{for } \sigma \neq \sigma_i$$

因为这对任何远离 σ 插入的算符都成立，所以根据 4.2.1 节的讨论，我们可以写出算符方程

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0$$



但是如果有算符插入在与 J^α 相同的点上呢？换句话说，当 σ 接近其中一个插入点时会发生什么？由此得到的公式称为 Ward 恒等式。为了推导这些，让 $\epsilon(\sigma)$ 在某些包含 σ_1 但不含其他点的区域非零，如第二个图所示。最简单的选择就是让 $\epsilon(\sigma)$ 在阴影区域内为常数，在阴影区域外为零。现在使用与以前相同的过程，我们发现原始关联函数等于，



$$\frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \left(1 - \frac{1}{2\pi} \int J^\alpha \partial_\alpha \epsilon \right) (\mathcal{O}_1 + \epsilon \delta \mathcal{O}_1) \mathcal{O}_2 \dots \mathcal{O}_n$$

考察 ϵ 的领头阶，这给出

$$-\frac{1}{2\pi} \int_\epsilon \partial_\alpha \langle J^\alpha(\sigma) \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \rangle = \langle \delta \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \rangle \quad (4.11)$$

其中左边的积分仅在 ϵ 非零的区域上。这就是 Ward 恒等式。

共形变换的 Ward 恒等式

Ward 恒等式 (4.11) 适用于任何对称性。现在让我们看看它们在应用于共形变换时会给出什么。推导过程中还需要两个步骤。第一个简单地来自于我们在二维中工作的事实，我们可以使用 Stokes 定理将 (4.11) 左侧的积分转换为边界附近的线积分。设 \hat{n}^α 为垂直于边界的单位向量。对于任何向量 J^α ，我们有

$$\int_\epsilon \partial_\alpha J^\alpha = \oint_{\partial\epsilon} J_\alpha \hat{n}^\alpha = \oint_{\partial\epsilon} (J_1 d\sigma^1 - J_2 d\sigma^2) = -i \oint_{\partial\epsilon} (J_z dz - J_{\bar{z}} d\bar{z})$$

其中我们已在笛卡尔坐标 σ^α 和复坐标中给出了表达式。如第 4.0.1 节所述，指标下降的向量的复数分量定义为 $J_z = \frac{1}{2}(J_1 - iJ_2)$ 和 $J_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(J_1 + iJ_2)$ 。因此，将其应用于 Ward 恒等式 (4.11)，对于二维理论

$$\frac{i}{2\pi} \oint_{\partial\epsilon} dz \langle J_z(z, \bar{z}) \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \rangle - \frac{i}{2\pi} \oint_{\partial\epsilon} d\bar{z} \langle J_{\bar{z}}(z, \bar{z}) \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \rangle = \langle \delta \mathcal{O}_1(\sigma_1) \dots \rangle$$

到目前为止，我们的推导适用于二维中的任何守恒流 J 。在这个阶段，我们专门研究共形变换 (4.7) 和 (4.8) 产生的流。这里发生了一些好的事情，因为 J_z 是全纯的，而 $J_{\bar{z}}$ 是反全纯的。这意味着围道积分只是提取留数，

$$\frac{i}{2\pi} \oint_{\partial\epsilon} dz J_z(z) \mathcal{O}_1(\sigma_1) = -\text{Res}[J_z \mathcal{O}_1]$$

其中这意味着两个算符之间的 OPE 中的留数，

$$J_z(z) \mathcal{O}_1(w, \bar{w}) = \dots + \frac{\text{Res}[J_z \mathcal{O}_1(w, \bar{w})]}{z - w} + \dots$$

所以我们找到一个好的方法来写共形变换的 Ward 恒等式。如果再次将 z 和 \bar{z} 视为自变量，Ward 恒等式将分为两部分。根据变分 $\delta z = \epsilon(z)$ ，有

$$\delta \mathcal{O}_1(\sigma_1) = -\text{Res}[J_z(z) \mathcal{O}_1(\sigma_1)] = -\text{Res}[\epsilon(z) T(z) \mathcal{O}_1(\sigma_1)] \quad (4.12)$$

其中第二个等式中，利用共形流 (4.7)。同样，从变分 $\delta \bar{z} = \bar{\epsilon}(\bar{z})$ ，我们有

$$\delta \mathcal{O}_1(\sigma_1) = -\text{Res}[\bar{J}_{\bar{z}}(\bar{z}) \mathcal{O}_1(\sigma_1)] = -\text{Res}[\bar{\epsilon}(\bar{z}) \bar{T}(\bar{z}) \mathcal{O}_1(\sigma_1)]$$

其中负号来自于 $\oint d\bar{z}$ 边界积分取了相反方向的事实。

这个结果意味着，如果知道算符与能动张量 $T(z)$ 和 $\bar{T}(\bar{z})$ 之间的 OPE，那么就立即知道算符在共形对称下如何变换。或者，在这基础上，如果知道一个算符是如何变换的，那么至少知道它与 T 和 \bar{T} 之间的部分 OPE。

4.2.3 初级算符

Ward 恒等式允许我们通过观察算符在共形对称性下的变换来开始拼凑一些 OPE。虽然我们还不知道一般共形对称性的作用，但我们可以通过看两个最简单的例子来开始取得进展。

平移：如果 $\delta z = \epsilon$ ，一个常数，则算符变换为

$$\mathcal{O}(z - \epsilon) = \mathcal{O}(z) - \epsilon \partial \mathcal{O}(z) + \dots$$

平移的诺特流是能量-动量张量 T 。形式 (4.12) 中的 Ward 恒等式告诉我们 T 与任何算符 \mathcal{O} 的 OPE 必须是如下形式，

$$T(z)\mathcal{O}(w, \bar{w}) = \dots + \frac{\partial \mathcal{O}(w, \bar{w})}{z - w} + \dots \quad (4.13)$$

类似地，具有 \bar{T} 的 OPE 为

$$\bar{T}(\bar{z})\mathcal{O}(w, \bar{w}) = \dots + \frac{\bar{\partial} \mathcal{O}(w, \bar{w})}{\bar{z} - \bar{w}} + \dots \quad (4.14)$$

旋转和缩放：变换

$$z \rightarrow z + \epsilon z \quad \text{and} \quad \bar{z} \rightarrow \bar{z} + \bar{\epsilon} \bar{z} \quad (4.15)$$

ϵ 为纯虚数时描述了旋转， ϵ 为实数时描述了缩放（扩张）。并非所有算符在这些操作下都具有良好的变换属性。这完全类似于量子力学中的说法，即并非所有态都能在哈密顿量 H 和角动量算符 L 下具有良好变换性质。然而，在量子力学中，我们知道 H 和 L 的本征态可以被选择为 Hilbert 空间的基，当然，要假设 $[H, L] = 0$ 。

CFT 中的算符也有同样的描述：我们可以选择在旋转和缩放下具有良好变换性质的局域算符作为基。事实上，我们将在第 4.6 节中看到，局域算符实际上对应一个态。

定义：算符 \mathcal{O} 被称为具有权重 (h, \tilde{h}) ，如果在变换 $\delta z = \epsilon z$ 和 $\delta \bar{z} = \bar{\epsilon} \bar{z}$ ， \mathcal{O} 的变换为

$$\delta \mathcal{O} = -\epsilon(h\mathcal{O} + z\partial\mathcal{O}) - \bar{\epsilon}(\tilde{h}\mathcal{O} + \bar{z}\bar{\partial}\mathcal{O}) \quad (4.16)$$

在这个表达式中，对于任何算符，都可以得到项 $\partial\mathcal{O}$ 。它们只是来于 $\mathcal{O}(z - \epsilon z, \bar{z} - \bar{\epsilon} \bar{z})$ 的展开。项 $h\mathcal{O}$ 和 $\tilde{h}\mathcal{O}$ 对于作为扩张和旋转的本征态的算符是特殊的。一些注释：

- h 和 \tilde{h} 都是实数。在西 CFT 中，所有算符都有 $h, \tilde{h} \geq 0$ 。我们将在第 4.5.4 节证明这一点。
- 权重并不像看上去那么陌生。它们只是告诉我们算符在旋转和缩放下是如何变换的。但我们已经有了这些概念的名字。旋转条件下的本征值通常称为自旋， s ，并根据权重给出

$$s = h - \tilde{h}$$

同时，算符的缩放量纲 Δ 为

$$\Delta = h + \tilde{h}$$

- 为了了解这些定义的动机，值得回顾一下旋转和标度变换是如何作用于基本坐标的。旋转由以下算符实现

$$L = -i(\sigma^1 \partial_2 - \sigma^2 \partial_1) = z\partial - \bar{z}\bar{\partial}$$

而引起标度扩张的算符 D 是

$$D = \sigma^\alpha \partial_\alpha = z\partial + \bar{z}\bar{\partial}$$

- 缩放量纲只不过是我们通常通过量纲分析将其与场和算符关联起来的熟悉的“量纲”。例如，世界面导数总是将算符的量纲增加一： $\Delta[\partial] = +1$ 。棘手的部分是，场在经典理论中的天真量纲不一定与量子理论中的量纲相同。

让我们将变换律 (4.16) 与 Ward 恒等式 (4.12) 进行比较。由旋转和缩放 $\delta z = \epsilon z$ 产生的诺特流在 (4.7) 中给出：它是 $J(z) = \epsilon z T(z)$ 。这意味着 $J\mathcal{O}$ OPE 的留数将决定 $T\mathcal{O}$ OPE 中的 $1/z^2$ 项。当然，类似的论点也适用于 $\delta\bar{z} = \epsilon\bar{z}$ 和 \bar{T} 。因此，其结果是，对于具有权重 (h, \tilde{h}) 的算符 \mathcal{O} ，具有 T 和 \bar{T} 的 OPE 采用以下形式

$$\begin{aligned} T(z)\mathcal{O}(w, \bar{w}) &= \dots + h \frac{\mathcal{O}(w, \bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\partial \mathcal{O}(w, \bar{w})}{z-w} + \dots \\ \bar{T}(\bar{z})\mathcal{O}(w, \bar{w}) &= \dots + \tilde{h} \frac{\mathcal{O}(w, \bar{w})}{(\bar{z}-\bar{w})^2} + \frac{\partial \mathcal{O}(w, \bar{w})}{\bar{z}-\bar{w}} + \dots \end{aligned}$$

初级算符

初级算符是其具有 T 和 \bar{T} 的 OPE 分别在 $(z-w)^{-2}$ 阶或 $(\bar{z}-\bar{w})^{-2}$ 阶截断的算符。没有更高的奇点：

$$\begin{aligned} T(z)\mathcal{O}(w, \bar{w}) &= h \frac{\mathcal{O}(w, \bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\partial \mathcal{O}(w, \bar{w})}{z-w} + \text{non-singular} \\ \bar{T}(\bar{z})\mathcal{O}(w, \bar{w}) &= \tilde{h} \frac{\mathcal{O}(w, \bar{w})}{(\bar{z}-\bar{w})^2} + \frac{\partial \mathcal{O}(w, \bar{w})}{\bar{z}-\bar{w}} + \text{non-singular} \end{aligned}$$

由于我们现在知道了 $T\mathcal{O}$ OPE 中的所有奇点，我们可以在所有共形变换下重建变换。初级算符的重要性在于它们具有特别简单的变换属性。专注于 $\delta z = \epsilon(z)$ ，我们有

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{O}(w, \bar{w}) &= -\text{Res}[\epsilon(z) T(z) \mathcal{O}(w, \bar{w})] \\ &= -\text{Res} \left[\epsilon(z) \left(h \frac{\mathcal{O}(w, \bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\partial \mathcal{O}(w, \bar{w})}{z-w} + \dots \right) \right] \end{aligned}$$

我们想研究光滑的共形变换，因此要求 $\epsilon(z)$ 本身在 $z=w$ 时没有奇点。然后我们可以 Taylor 展开

$$\epsilon(z) = \epsilon(w) + \epsilon'(w)(z-w) + \dots$$

我们了解到初级算符在一般共形变换 $\delta z = \epsilon(z)$ 下的无穷小变换为

$$\delta \mathcal{O}(w, \bar{w}) = -h\epsilon'(w) \mathcal{O}(w, \bar{w}) - \epsilon(w) \partial \mathcal{O}(w, \bar{w}) \quad (4.17)$$

反全纯变换 $\delta \bar{z} = \bar{\epsilon}(\bar{z})$ 也有类似的表达式。

方程 (4.17) 适用于无穷小共形变换。整合起来发现初级算符在有限共形变换下的变换是一件简单的事情，

$$z \rightarrow \tilde{z}(z) \quad \text{and} \quad \bar{z} \rightarrow \tilde{\bar{z}}(\bar{z})$$

初级算符的一般变换为

$$\mathcal{O}(z, \bar{z}) \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{z}, \tilde{\bar{z}}) = \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \right)^{-h} \left(\frac{\partial \tilde{\bar{z}}}{\partial \bar{z}} \right)^{-\tilde{h}} \mathcal{O}(z, \bar{z}) \quad (4.18)$$

事实证明，CFT 中感兴趣的主要对象之一是初级场的权重谱 (h, \tilde{h}) 。这相当于在量子场论中计算粒子的质量谱。在统计力学的背景下，初级算符的权重是临界指数。

4.3 一个例子：自由标量场

让我们看看这一切是如何对自由标量场起作用的。我们将从熟悉一些使用路径积分的技术开始。作用量是

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_\alpha X \partial^\alpha X \quad (4.19)$$

经典的运动方程为 $\partial^2 X = 0$ 。让我们从如何使用路径积分导出量子理论中的类似说法开始。我们需要的关键事实是，全导数的路径积分为 0，就像在普通积分中一样。由此我们得出，

$$0 = \int \mathcal{D}X \frac{\delta}{\delta X(\sigma)} e^{-S} = \int \mathcal{D}X e^{-S} \left[\frac{1}{2\pi\alpha'} \partial^2 X(\sigma) \right]$$

但这只是 Ehrenfest 定理，该定理指出算符的期望值服从经典运动方程，

$$\langle \partial^2 X(\sigma) \rangle = 0$$

4.3.1 传播子

我们要做的下一件事是计算 X 的传播子。我们可以使用正则量子化来实现这一点，但再次使用路径积分来了解它是如何工作的将是有用的。这一次我们看到，

$$0 = \int \mathcal{D}X \frac{\delta}{\delta X(\sigma)} [e^{-S} X(\sigma')] = \int \mathcal{D}X e^{-S} \left[\frac{1}{2\pi\alpha'} \partial^2 X(\sigma) X(\sigma') + \delta(\sigma - \sigma') \right]$$

所以这次我们有

$$\langle \partial^2 X(\sigma) X(\sigma') \rangle = -2\pi\alpha' \delta(\sigma - \sigma') \quad (4.20)$$

请注意，如果我们用正则方法计算，我们会找到相同的答案：由于所有的关联函数都是时间排序的，因此在这种计算中产生了 delta-函数。

我们现在可以把 (4.20) 看作传播子 $\langle X(\sigma) X(\sigma') \rangle$ 的一个微分方程。为了求解这个方程，我们需要以下标准结果

$$\partial^2 \ln(\sigma - \sigma')^2 = 4\pi \delta(\sigma - \sigma') \quad (4.21)$$

这很重要，让我们快速检查一下这是不是真的。这是 Stokes 定理的一个简单应用。设 $\sigma' = 0$ 并积分 $\int d^2\sigma$ 。我们显然从右手边得到 4π 。左手边给出

$$\int d^2\sigma \partial^2 \ln(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) = \int d^2\sigma \partial^\alpha \left(\frac{2\sigma_\alpha}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right) = 2 \oint \frac{(\sigma d\sigma^2 - \sigma_2 d\sigma^1)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

切换到极坐标 $\sigma_1 + i\sigma_2 = re^{i\theta}$ ，我们可以将此表达式重写为

$$2 \int \frac{r^2 d\theta}{r^2} = 4\pi$$

确认了 (4.21)。将这个结果应用于我们的方程 (4.20)，我们得到了二维自由标量的传播子，

$$\langle X(\sigma)X(\sigma') \rangle = -\frac{\alpha'}{2} \ln(\sigma - \sigma')^2$$

当 $\sigma \rightarrow \sigma'$ 传播子具有奇点。这是一种紫外发散现象，在所有场论中都很常见。当 $|\sigma - \sigma'| \rightarrow \infty$ 它也有奇点。这告诉了我们一些重要的事情，我们将在第 4.3.2 节中提及。

最后，我们可以重复我们的技巧，看看路径积分中的全导数，现在在路径积分中用其他算符插入 $\mathcal{O}_1(\sigma_1), \dots, \mathcal{O}_n(\sigma_n)$ 。只要 $\sigma, \sigma' \neq \sigma_i$ ，那么整个分析就和以前一样进行。但这正是我们写算符乘积方程的标准，

$$X(\sigma)X(\sigma') = -\frac{\alpha'}{2} \ln(\sigma - \sigma')^2 + \dots \quad (4.22)$$

我们也可以用复坐标来写。经典的运动方程 $\partial\bar{\partial}X = 0$ 允许我们将算符 X 分成左行和右行部分，

$$X(z, \bar{z}) = X(z) + \bar{X}(\bar{z})$$

我们只关注左行部分。这时有算符乘积展开，

$$X(z)X(w) = -\frac{\alpha'}{2} \ln(z - w) + \dots$$

对数意味着 $X(z)$ 在共形变换下没有任何好的性质。因此，“基本场” X 并不是这个理论真正感兴趣的对象！然而，我们可以看看 X 的导数。这有一个相当好看的 OPE，

$$\partial X(z)\partial X(w) = -\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{(z - w)^2} + \text{non-singular} \quad (4.23)$$

4.3.2 题外话：二维无 Goldstone 玻色子

传播子中的红外发散具有重要的物理意义。让我们首先指出量子力学和量子场论在 $d = 3 + 1$ 维度上的一大区别。由于描述这两种理论的语言截然不同，你甚至可能没有意识到这种差异的存在。

考虑一条线上粒子的量子力学。这是自由标量场 X 的 $d = 0 + 1$ 维理论。让我们准备粒子处于某种局域态——比如高斯波函数 $\Psi(X) \sim \exp(-X^2/L^2)$ 。然后会发生什么？波函数开始传播。且传播不会停止。事实上，系统的基态之一正是一个无限宽的均匀波函数，它不是 Hilbert 空间中的一个态，因为它是不可归一化的。

现在我们将其与 $d = 3 + 1$ 维场论中自由标量场 X 的情况进行比较。现在我们认为这是一个没有势的标量。物理是非常不同的：该理论具有由期望值 $\langle X \rangle$ 确定的无限多个基态。真空周围的小波动是无质量的：它们是具有破坏平移不变性 $X \rightarrow X + c$ 的 Goldstone 玻色子。

我们看到，在 $d = 0 + 1$ 和 $d = 3 + 1$ 维度的场论中，物理是非常不同的。在量子力学中，波函数沿着平直的方向传播，但在高维场论中则不然。但是在 $d = 1 + 1$ 和 $d = 2 + 1$ 维度中会发生什么呢？事实证明， $d = 1 + 1$ 维的场论更像量子力学：波函数传播。 $d = 2 + 1$ 维度及更高维度的理论表现出相反的行为：它们有 Goldstone 玻色子。看到这个的地方是传播子。在 d 时空维度中，它采用以下形式

$$\langle X(r)X(0) \rangle \sim \begin{cases} 1/r^{d-2} & d \neq 2 \\ \ln r & d = 2 \end{cases}$$

其仅在 $d = 1$ 和 $d = 2$ 时在大的 r 处发散。如果我们通过插入算符 $X(0)$ 来轻微地扰动真空，这个关联函数告诉我们这种扰动是如何随着距离而衰减的。低维的红外发散告诉我们波函数想要扩散。

波函数在低维中的传播意味着没有自发对称性破坏，也没有 Goldstone 玻色子。这被称为 Coleman-Mermin-Wagner 定理。然而请注意，它肯定不会禁止二维中的无质量激发：它只禁止类 Goldstone 玻色子的无质量激发。

4.3.3 能量-动量张量和初级算符

我们想用其他算符计算 T 的 OPE。首先，什么是 T ？我们在 (4.9) 中的经典理论中计算了它。它是

$$T = -\frac{1}{\alpha'} \partial X \partial X \quad (4.24)$$

但需要小心这在量子理论中的意义。它涉及定义在同一点的两个算符的乘积，如果我们天真地对待它，这必然意味着发散。在正则量子化中，我们会试图通过将所有湮灭算符向右放置来达到正则排序。这保证了真空能为零。在这里，我们做了一些基本上等价的事情，但没有提及产生和湮灭算符：

$$T = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X \partial X : \equiv -\frac{1}{\alpha'} \lim_{z \rightarrow w} (\partial X(z) \partial X(w) - \langle \partial X(z) \partial X(w) \rangle) \quad (4.25)$$

这样构造便会自然地得到 $\langle T \rangle = 0$ 。

有了 T 的这个定义，让我们开始计算 OPE，以确定理论中的初级场。

命题 1: ∂X 是权重为 $h = 1$ 和 $\tilde{h} = 0$ 的初级场。

证明: 我们需要弄清楚如何得到正则排序的算符乘积

$$T(z) \partial X(w) = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X(z) \partial X(z) : \partial X(w)$$

左侧的算符是按时间顺序排列的（因为此类型的所有算符表达式都位于按时间排序的关联函数中）。相反，右边是正则排序算符的乘积。但我们知道如何改变正则排序乘积成为时间排序乘积：这就是 Wick 定理的内容。尽管我们在 (4.25) 中定义了正则排序，而没有参考产生和湮灭算符，但 Wick 定理仍然成立。我们必须对所有可能的算符对的缩并求和，其中“缩并”意味着我们用传播子替换算符对，

$$\overbrace{\partial X(z) \partial X(w)} = -\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{(z-w)^2}$$

使用这个，我们有

$$T(z) \partial X(w) = -\frac{2}{\alpha'} \partial X(z) \left(-\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{(z-w)^2} + \text{non-singular} \right)$$

这里的“非奇异”部分包括完全正则排序项： $T(z)\partial X(w)$ 。只有奇异部分是我们感兴趣的。继续，我们有

$$T(z)\partial X(w) = \frac{\partial X(z)}{(z-w)^2} + \dots = \frac{\partial X(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial^2 X(w)}{z-w} + \dots$$

这实际上是权重 $h = 1$ 的初级算符的 OPE。 \square

注意 $n > 1$ 的高阶导数 $\partial^n X$ 不是初级的。例如，正如我们在 OPE 中看到的那样， $\partial^2 X$ 的权重 $(h, \tilde{h}) = (2, 0)$ ，但不是初级算符，

$$T(z)\partial^2 X(w) = \partial_w \left[\frac{\partial X(w)}{(z-w)^2} + \dots \right] = \frac{2\partial X(w)}{(z-w)^3} + \frac{2\partial^2 X(w)}{(z-w)^2} + \dots$$

事实是场 $\partial^n X$ 的权重 $(h, \tilde{h}) = (n, 0)$ 符合我们的自然直觉：每个导数提供自旋 $s = 1$ 和量纲 $\Delta = 1$ ，而场 X 似乎没有贡献，或者说我们想当然地会认为这反映了它具有经典意义下的零量纲。然而，在量子理论中，说 X 具有零量纲是不正确的：由于其 OPE(4.22) 的对数行为，其具有不明确的数量纲。这导致了以下更令人惊讶的结果

命题 2：场： e^{-ikX} ：是初级的，权重为 $h = \tilde{h} = \alpha' k^2/4$ 。

这个结果不是我们从经典理论中猜测的⁵。事实上，很明显，它有量子起源，因为权重与 α' 成比例， α' 与 \hbar 位于作用量之外的同一位置（如果我们没有将其设置为 1）。还要注意，这意味着自由标量场的谱是连续的。这与 X 的范围是非紧致的这一事实有关。一般来说 CFT 将有一个离散的谱。

证明：让我们先计算 ∂X 的 OPE。我们有

$$\begin{aligned} \partial X(z) : e^{ikX(w)} : &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \partial X(z) : X(w)^n : \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{(n-1)!} : X(w)^{n-1} : \left(-\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{z-w} \right) + \dots \quad (4.26) \\ &= -\frac{i\alpha' k}{2} \frac{e^{ikX(w)}}{z-w} + \dots \end{aligned}$$

⁵然而，我们可以通过一点重新规范化的知识来猜测。事实上，我们之前在统计场论的讲座中得出了这个结果，在那里我们计算了 Sine-Gordon 模型中的 RG 流；参见这些讲座的 4.4.3 节。

由此，我们可以用 T 来计算 OPE。

$$\begin{aligned} T(z) : e^{ikX(w)} : &= -\frac{1}{\alpha'} : \partial X(z) \partial X(z) : : e^{ikX(w)} : \\ &= \frac{\alpha' k^2}{4} \frac{e^{ikX(w)} :}{(z-w)^2} + ik \frac{e^{ikX(w)} :}{z-w} + \dots \end{aligned}$$

其中第一个项来自两个缩并，而第二个项来自单个缩并。在最后一项中，用 ∂_w 代替 ∂_z ，我们得到

$$T(z) : e^{ikX(w)} : = \frac{\alpha' k^2}{4} \frac{e^{ikX(w)} :}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w : e^{ikX(w)} :}{z-w} + \dots \quad (4.27)$$

证明： $e^{ikX(w)}$ 确实是初级的。我们会经常遇到这个算符，但会选择简化表示并删除正则排序的冒号。从现在起，将假定正则排序。 \square

最后，让我们检查一下 T 本身的 OPE。这又一次只是一个 Wick 缩并的练习。

$$\begin{aligned} T(z)T(w) &= \frac{1}{\alpha'^2} : \partial X(z) \partial X(z) : : \partial X(w) \partial X(w) : \\ &= \frac{2}{\alpha'^2} \left(-\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{(z-w)^2} \right)^2 - \frac{4}{\alpha'^2} \frac{\alpha'}{2} \frac{\partial X(z) \partial X(w) :}{(z-w)^2} + \dots \end{aligned}$$

第一项前的因子 2 来自两种缩并方式；第二项中的因子 4 来自于执行单个缩并的方式的数量。继续得到，

$$\begin{aligned} T(z)T(w) &= \frac{1/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} - \frac{2}{\alpha'} \frac{\partial^2 X(w) \partial X(w) :}{z-w} + \dots \\ &= \frac{1/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} - \frac{2}{\alpha'} \frac{\partial T(w)}{z-w} + \dots \end{aligned} \quad (4.28)$$

我们了解到，在单个自由标量场的理论中， T 不是初级算符。它是一个权重 $(h, \tilde{h}) = (2, 0)$ 的算符，但由于 $(z-w)^{-4}$ 项，它不是初级的。事实上，能量-动量张量的这种性质是所有 CFT 的一个普遍特征，我们现在将对此进行更详细的探索。

4.4 中心荷

在任何 CFT 中，非初级算符最突出的例子是能量-动量张量本身。

对于自由标量场，我们已经看到 T 是权重 $(h, \tilde{h}) = (2, 0)$ 的算符。这在任何 CFT 中都是正确的。原因很简单： $T_{\alpha\beta}$ 的量纲 $\Delta = 2$ ，因为我们通过在空间上积分来获得能量。它的自旋 $s = 2$ ，因为它是一个对称的 2-张量。但这两条信息相当于 T 具有权重 $(2, 0)$ 的陈述。类似地， \bar{T} 具有权重 $(0, 2)$ 。这意味着 TT OPE 采用如下形式，

$$T(z)T(w) = \dots + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \dots$$

$\bar{T}\bar{T}$ 也是类似的。在这次展开中，我们还能有什么其他条件？由于每个项的量纲 $\Delta = 4$ ，因此出现在右侧的任何算符都必须为

$$\frac{\mathcal{O}_n}{(z-w)^n} \quad (4.29)$$

其中 $\Delta[\mathcal{O}_n] = 4 - n$ 。但是，在西 CFT 中，不存在 $h, \tilde{h} < 0$ 的算符。（我们很快就会证明这一点）所以我们能得到的最奇异的项是 $(z-w)^{-4}$ 阶。这个项必须乘以一个常数。我们写下

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \dots$$

并且类似地，

$$\bar{T}(\bar{z})\bar{T}(\bar{w}) = \frac{\tilde{c}/2}{(\bar{z}-\bar{w})^4} + \frac{2\bar{T}(\bar{w})}{(\bar{z}-\bar{w})^2} + \frac{\bar{\partial}\bar{T}(\bar{w})}{\bar{z}-\bar{w}} + \dots$$

常数 c 和 \tilde{c} 称为中心荷。（有时它们被称为向左移动和向右移动的中心荷）它们也许是表征 CFT 的最重要的数。我们已经可以对这两个数中包含的信息有一些直觉。回顾自由标量场 (4.28)，我们看到它具有 $c = \tilde{c} = 1$ 。如果我们考虑 D 个非相互作用的自由标量场，我们将得到 $c = \tilde{c} = D$ 。这给了我们一个提示： c 和 \tilde{c} 以某种方式测量 CFT 中的自由度的数量。从深层意义上讲，这是真的！但是，请注意： c 不一定是整数。

在继续之前，有必要停下来解释一下为什么在 TT OPE 中没有包含 $(z-w)^{-3}$ 项。原因是 OPE 必须服从 $T(z)T(w) = T(w)T(z)$ ，因为如前所

述，这些算符方程都被认为在时间排序的关联函数内。因此，快速的答案是， $(z-w)^{-3}$ 项在 $z \leftrightarrow w$ 下不会不变。然而，你可能想知道 $(z-w)^{-1}$ 项是如何满足此属性的。让我们看看这是如何工作的：

$$T(w)T(z) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(z)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(z)}{w-z} + \dots$$

现在我们可以 Taylor 展开 $T(z) = T(w) + (z-w)\partial T(w) + \dots$ 和 $\partial T(z) = \partial T(w) + \dots$ 。在上面的表达式中使用这个，我们发现

$$T(w)T(z) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w) + 2(z-w)\partial T(w)}{(z-w)^2} - \frac{\partial T(w)}{z-w} + \dots = T(z)T(w)$$

Taylor 展开的这个技巧拯救了 $(z-w)^{-1}$ 项。它不适用于 $(z-w)^{-3}$ 项。

能量的变换

所以 T 不是初级的，除非 $c = 0$ 。我们很快就会看到，所有的理论都有 $c > 0$ 。这对 T 的变换意味着什么？

$$\begin{aligned} \delta T(w) &= -\text{Res}[\epsilon(z)T(z)T(w)] \\ &= -\text{Res}\left[\epsilon(z)\left(\frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \dots\right)\right] \end{aligned}$$

如果 $\epsilon(z)$ 不包含奇异项，我们可以展开

$$\epsilon(z) = \epsilon(w) + \epsilon'(w)(z-w) + \frac{1}{2}\epsilon''(w)(z-w)^2 + \frac{1}{6}\epsilon'''(w)(z-w)^3 + \dots$$

从中我们发现

$$\delta T(w) = -\epsilon(w)\partial T(w) - 2\epsilon'(w)T(w) - \frac{c}{12}\epsilon'''(w) \quad (4.30)$$

这是无穷小的版本。我们想知道 T 在有限共形变换 $z \rightarrow \tilde{z}(z)$ 下会变成什么样子。答案是

$$\tilde{T}(\tilde{z}) = \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z}\right)^{-2} \left[T(z) - \frac{c}{12}S(\tilde{z}, z)\right] \quad (4.31)$$

其中 $S(\tilde{z}, z)$ 被称为 Schwarzian 导数并定义为

$$S(\tilde{z}, z) = \left(\frac{\partial^3 \tilde{z}}{\partial z^3}\right) \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z}\right)^{-1} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial z^2}\right)^2 \left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z}\right)^{-2} \quad (4.32)$$

简单地检查 Schwarzian 导数是否具有给出 (4.30) 的正确无穷小形式。它的关键性质是保留了连续共形变换的群结构。

4.4.1 c 代表 Casimir

注意， T 的变换 (4.31) 中的额外项并不取决于 T 本身。特别是，对所有态的计算都是相同的。它只影响能量中的常数项或零模式。换句话说，它是系统的 Casimir 能量。

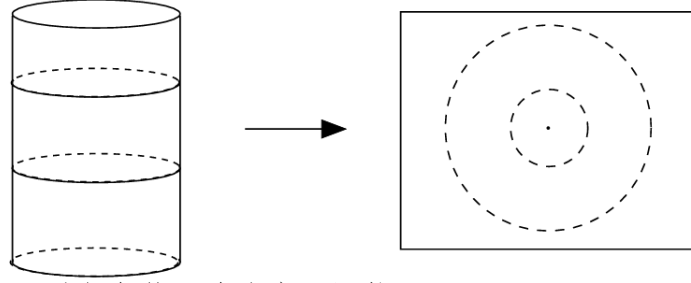
让我们来看一个稍后将被证明对弦有用的示例。考虑欧几里得圆柱体，参数化为

$$w = \sigma + i\tau, \quad \sigma \in [0, 2\pi)$$

我们可以通过以下公式进行从圆柱面到复平面的共形变换

$$z = e^{-iw}$$

圆柱面和平面通过共形映射相关联的事实意味着，如果我们理解圆柱面上的给定 CFT，那么我们会立即理解平面上的 CFT。反之亦然。请注意，圆柱面上的恒定时间切片映射到半径恒定的圆。原点 $z = 0$ 是遥远的过去 $\tau \rightarrow \infty$ 。



在这种变换下， T 会变成什么样子？Schwarzian 导数可以很容易地计算为 $S(z, w) = 1/2$ 。所以我们发现，

$$T_{\text{cylinder}}(w) = -z^2 T_{\text{plane}}(z) + \frac{c}{24} \quad (4.33)$$

假设当理论在平面上定义时，基态能量为 0: $\langle T_{\text{plane}} \rangle = 0$ 。圆柱面上会发生什么？我们想看看哈密顿量，它定义为

$$H \equiv \int d\sigma T_{\tau\tau} = - \int d\sigma (T_{ww} + \bar{T}_{\bar{w}\bar{w}})$$

共形变换然后告诉我们圆柱面上的基态能量是

$$E = -\frac{2\pi(c + \tilde{c})}{24} \quad (4.34)$$

这确实是圆柱面上的（负）Casimir 能量。对于自由标量场，我们有 $c = \tilde{c} = 1$ 和能量密度 $E/2\pi = -1/12$ 。这与我们在第 2.2.2 节中得到的结果相同，但这一次我们扔掉了无穷大，没有什么有趣的事情。

应用：Luscher 项

如果观察一个物理系统，圆柱体的半径为 L 。在这种情况下，Casimir 能量由 $E = -2\pi(c + \tilde{c})/24L$ 给出。这在类 QCD 理论中有一个应用。考虑限制理论中的两个夸克，它们相隔距离 L 。如果约束通量管的张力为 T ，那么只要 $TL \leq m$ ，即最轻夸克的质量，弦就是稳定的。作为 L 的函数的弦的能量由下式给出

$$E(L) = TL + a - \frac{\pi c}{24L} + \dots$$

这里 a 是一个待定常数，而 c 计算 QCD 通量管的自由度。（由于弦末尾的反射边界条件，这里没有 \tilde{c} 的类似）如果弦没有内部自由度，则两个横向波动的 $c = 2$ 。这种对弦能量的贡献被称为 Luscher 项。

4.4.2 Weyl 反常

中心荷影响能量-动量张量还有另一种方式。回想一下，在经典理论中，CFT 的定义特征之一是能动张量的迹为 0，

$$T^\alpha{}_\alpha = 0$$

然而，在量子理论中，情况更为微妙。虽然 $\langle T^\alpha{}_\alpha \rangle$ 确实在平直空间中为 0，但如果我们将理论放在弯曲的背景上，它将不再是真的。本节旨在表明

$$\langle T^\alpha{}_\alpha \rangle = -\frac{c}{12}R \quad (4.35)$$

其中 R 是二维世界面的 Ricci 标量。在推导这个公式之前，注释一下：

- 方程 (4.35) 适用于理论中的任何态，而不仅仅是真空。这反映了一个事实，即它来自于对理论中对短程发散的约束。但是，在短距离内，所有有限能态看起来基本相同。
- 因为 $\langle T^\alpha{}_\alpha \rangle$ 对于任何态都是相同的，所以它必须等于仅取决于背景度规的某个值。这个东西应该是局部的，并且必须是量纲为 2。唯一的候选者是 Ricci 标量 R 。因此， $\langle T^\alpha{}_\alpha \rangle \sim R$ 公式是最普遍的可能性。唯一的问题是：系数是多少。特别是，它是非零的吗？

- 通过适当选择坐标，我们总是可以将任何二维度规设为 $g_{\alpha\beta} = e^{2\omega}\delta_{\alpha\beta}$ 的形式。在这些坐标中，Ricci 标量为

$$R = -2e^{-2\omega}\partial^2\omega \quad (4.36)$$

它明确地取决于函数 ω 。方程 (4.35) 告诉我们，任何 $c \neq 0$ 的共形理论都至少有一个物理可观测值 $\langle T^\alpha_\alpha \rangle$ ，它在与 Weyl 变换 ω 相关的背景上取不同的值。这一结果被称为 Weyl 反常，有时也被称为迹反常。

- 对于高维的共形场论，也存在一个 Weyl 反常。例如，四维 CFT 由两个数字 a 和 c 表征，这两个数字在 Weyl 反常中作为系数出现，

$$\langle T^\mu_\mu \rangle_{4d} = \frac{c}{16\pi^2} C_{\rho\sigma\kappa\lambda} C^{\rho\sigma\kappa\lambda} - \frac{a}{16\pi^2} \tilde{R}_{\rho\sigma\kappa\lambda} \tilde{R}^{\rho\sigma\kappa\lambda}$$

其中 C 是 Weyl 张量， \tilde{R} 是黎曼张量的对偶。

- 方程 (4.35) 仅涉及左移动的中心荷 c 。你可能想知道左移动的区域有什么特别之处。答案当然是否定的。我们也有

$$\langle T^\alpha_\alpha \rangle = -\frac{\tilde{c}}{12} R$$

平直空间中具有不同 c 和 \tilde{c} 是可接受的。然而若希望这些理论在固定的弯曲背景下是一致的，那么需要 $c = \tilde{c}$ 。这是引力反常的例子。

- Weyl 不变性要求 $c = 0$ 的事实在弦理论中是重要的。第五章会看到。

现在将证明 Weyl 反常公式 (4.35)。首先，需要推导一个中间公式： $T_{z\bar{z}}T_{w\bar{w}}$ 的 OPE。当然，在经典理论中，我们发现共形不变性需要 $T_{z\bar{z}} = 0$ 。现在将展示它在量子理论中的微妙之处。

我们的出发点是能量守恒方程，

$$\partial T_{z\bar{z}} = -\bar{\partial} T_{zz}$$

使用它，我们可以用熟悉的 TT OPE 来表达我们想要的 OPE，

$$\partial_z T_{z\bar{z}}(z, \bar{z}) \partial_w T_{w\bar{w}}(w, \bar{w}) = \bar{\partial}_{\bar{z}} T_{zz} \bar{\partial}_{\bar{w}} T_{ww} = \bar{\partial}_{\bar{z}} \bar{\partial}_{\bar{w}} \left[\frac{c/2}{(z-w)^4} + \dots \right] \quad (4.37)$$

现在你可能会认为右手边消失了：毕竟，它是全纯量的反全纯导数 $\bar{\partial}$ 。但我们不应该如此随意，因为在 $z = w$ 处有一个奇点。例如考虑以下等式，

$$\bar{\partial}_{\bar{z}} \partial_z \ln|z - w|^2 = \bar{\partial}_{\bar{z}} \frac{1}{z - w} = 2\pi \delta(z - w, \bar{z} - \bar{w}) \quad (4.38)$$

我们在方程 (4.21) 之后证明了这一说法。（与 (4.21) 相差 2 的因子可以追溯到我们在第 4.0.1 节中为复坐标定义的约定）看看 (4.38) 中的中间步骤，我们再次得到了全纯函数的反全纯导数，你可能会忍不住说这也消失了。但你错了：微妙的事情因为奇异性而发生，方程 (4.38) 告诉我们，函数 $1/z$ 秘密地取决于 \bar{z} 。（这实际上应该被理解为一个关于分布的声明，其中 delta 函数与任意测试函数集成）利用这个结果，我们可以写

$$\bar{\partial}_{\bar{z}} \bar{\partial}_{\bar{w}} \frac{1}{(z - w)^4} = \frac{1}{6} \bar{\partial}_{\bar{z}} \bar{\partial}_{\bar{w}} \left(\partial_z^2 \partial_w \frac{1}{z - w} \right) = \frac{\pi}{3} \partial_z^2 \partial_w \bar{\partial}_{\bar{w}} \delta(z - w, \bar{z} - \bar{w})$$

将其插入关联函数 (4.37) 中，并去掉两边的 $\partial_z \partial_w$ 导数，最终得到了我们想要的，

$$T_{z\bar{z}}(z, \bar{z}) T_{w\bar{w}}(w, \bar{w}) = \frac{c\pi}{6} \partial_z \bar{\partial}_{\bar{w}} \delta(z - w, \bar{z} - \bar{w}) \quad (4.39)$$

因此， $T_{z\bar{z}}$ 和 $T_{w\bar{w}}$ 的 OPE 几乎消失了，但当 $z \rightarrow w$ 存在一些奇怪的奇异行为。这通常被称为算符之间的接触项，正如我们所展示的，它是确保能量动量守恒所必需的。现在将看到，这个接触项是造成 Weyl 反常的原因。

我们假设在平坦空间中。 $\langle T^\alpha_\alpha \rangle = 0$ 。我们的目标是导出 $\langle T^\alpha_\alpha \rangle$ 在平直空间附近的表达式。首先，考虑在度规 $\delta g_{\alpha\beta}$ 的一般位移下 $\langle T^\alpha_\alpha \rangle$ 的变分。使用能量动量张量 (4.4) 的定义，我们得到

$$\begin{aligned} \delta \langle T^\alpha_\alpha(\sigma) \rangle &= \delta \int \mathcal{D}\phi e^{-S} T^\alpha_\alpha(\sigma) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \mathcal{D}\phi e^{-S} \left(T^\alpha_\alpha(\sigma) \int d^2\sigma' \sqrt{g} \delta g^{\beta\gamma} T_{\beta\gamma}(\sigma') \right) \end{aligned}$$

如果我们现在限制到 Weyl 变换，那么到平直度规的变分是 $\delta g_{\alpha\beta} = 2\omega \delta_{\alpha\beta}$ ，所以反度规的变分是 $\delta g^{\alpha\beta} = -2\omega \delta^{\alpha\beta}$ 。这给出

$$\delta \langle T^\alpha_\alpha(\sigma) \rangle = -\frac{1}{2\pi} \int \mathcal{D}\phi e^{-S} \left(T^\alpha_\alpha(\sigma) \int d^2\sigma' \omega(\sigma') T^\beta_\beta(\sigma') \right) \quad (4.40)$$

现在来看看为什么 OPE(4.39) 决定了 Weyl 异常。我们需要在复坐标和笛卡尔坐标之间转换，保持因子为 2。我们有

$$T^\alpha_\alpha(\sigma)T^\beta_\beta(\sigma') = 16 T_{z\bar{z}}(z, \bar{z})T_{w\bar{w}}(w, \bar{w})$$

同时，使用 4.0.1 中规定的惯例，有 $8\partial_z\bar{\partial}_{\bar{w}}\delta(z-w, \bar{z}-\bar{w}) = -\partial^2\delta(\sigma-\sigma')$ 。这给了我们笛卡尔坐标系中的 OPE

$$T^\alpha_\alpha(\sigma)T^\beta_\beta(\sigma') = -\frac{c\pi}{3}\partial^2\delta(\sigma-\sigma')$$

将其代入 (4.40) 并分部积分，将两个导数移动到共形因子 ω 上。剩下，

$$\delta\langle T^\alpha_\alpha\rangle = \frac{c}{6}\partial^2\omega \quad \Rightarrow \quad \langle T^\alpha_\alpha\rangle = -\frac{c}{12}R$$

其中，为了进入最后一步，使用了 (4.36)，由于是无穷小的，可以替换 $e^{-2\omega} \approx 1$ 。这完成了 Weyl 异常的证明，至少对于无限接近平直的空间是这样。对于一般的 2d 曲面， R 保持在右边的事实简单地从方程 (4.35) 之后的注释中得出，最恰当的是，需要表达式是重参数化不变的。

4.4.3 c 代表 Cardy

Casimir 效应和 Weyl 反常具有相似之处。在这两种情况下，中心荷为能量提供了额外的贡献。现在展示一个不同的中心荷化身：高能态密度。

现在研究欧几里得环面上的共形场论。保持 $\sigma \in [0, 2\pi)$ ，且 τ 为周期性的，

$$\tau \in [0, \beta)$$

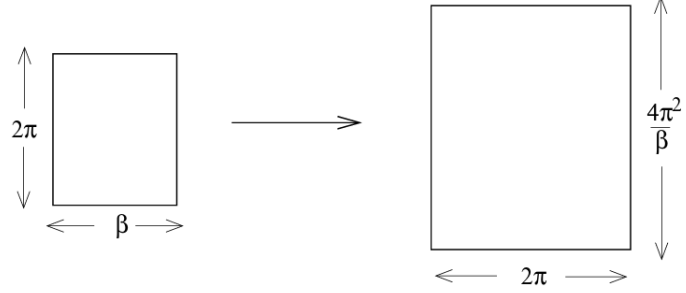
具有周期欧几里得时间的理论的配分函数有一个非常自然的解释：它与理论在温度 $T = 1/\beta$ 时的自由能有关。

$$Z[\beta] = \text{Tre}^{-\beta H} = e^{-\beta F} \quad (4.41)$$

在非常低的温度下， $\beta \rightarrow \infty$ ，自由能由最低能量态支配。所有其他态都被指数抑制。但我们在 4.4.1 中看到，圆柱体上的真空态具有 Casimir 能量 $H = -c/12$ 。因此，在低温极限下，分配函数近似为

$$Z \rightarrow e^{c\beta/12} \quad \text{as } \beta \rightarrow \infty \quad (4.42)$$

现在诀窍来了。在欧几里得空间中，圆环体的两个方向是平等的。我们完全可以自由地决定 σ 是“时间”， τ 是“空间”。这无法更改配分函数的值。所以让我们交换一下。与我们原来的配分函数相比，我们希望空间方向的范围为 $[0, 2\pi)$ 。令人高兴的是，由于我们理论的共形性质，我们通过缩放来安排



$$\tau \rightarrow \frac{2\pi}{\beta}\tau, \quad \sigma \rightarrow \frac{2\pi}{\beta}\sigma$$

现在我们回到起点，但时间方向取 $\sigma \in [0, 4\pi^2/\beta)$ 中的值。这告诉我们高温和低温分配函数是相关的，

$$Z[4\pi/\beta] = Z[\beta]$$

这被称为模不变性。我们将在第 6.4 节中再次看到它。写下 $\beta' = 4\pi^2/\beta$ ，这告诉我们配分函数的高温行为

$$Z[\beta'] \rightarrow e^{c\pi^2/3\beta'} \quad \text{as } \beta' \rightarrow 0$$

但配分函数的高温极限是对理论中的所有状态进行采样。在熵的基础上，这种采样是由高能态主导的。所以这个计算告诉我们有多少高能态。

为了更明确地看到这一点，让我们在统计力学中做一些基本的操作。任何系统都有一个态密度 $\rho(E) = e^{S(E)}$ ，其中 $S(E)$ 是熵。自由能为

$$e^{-\beta F} = \int dE \rho(E) e^{-\beta E} = \int dE e^{S(E) - \beta E}$$

在二维中，所有系统都有一个熵，它在大能量下的比例为

$$S(E) \rightarrow N\sqrt{E} \tag{4.43}$$

系数 N 计算自由度的数量。 $S \sim \sqrt{E}$ 相当于 $F \sim T^2$ ，这与一维理论中的能量密度相适应。要看到这一点，我们只需要通过鞍点 $S'(E_*)\beta$ 来近似积

分。从 (4.43)，这给了我们自由能

$$F \sim N^2 T^2$$

现在可以更明确地说明中心荷。在共形场论中，高能态的熵由下式给出

$$S(E) \sim \sqrt{cE}$$

这是 Cardy 的公式。对系数进行更仔细的分析表明，态的高能量密度按

$$S(E) \rightarrow 2\pi \sqrt{\frac{c}{6} \left(ER - \frac{c}{24} \right)} \quad (4.44)$$

其中偏移量是我们之前推导的 Casimir 能量 (4.34)。这是左边的贡献。根据 \tilde{c} ，右边也有类似的贡献。

4.4.4 有关 c 的一个定理

Zamolodchikov 给出的一个结果，即 c -定理，进一步加权了理论中中心荷和自由度之间的联系。 c -定理的思想是退后一步，看看所有理论的空间以及它们之间的重整化群 (RG) 流。

共形场论是特殊的。它们是重整化群的不动点，在所有长度尺度上看起来都是一样的。可以考虑通过向作用添加额外项来扰动共形场论，

$$S \rightarrow S + \alpha \int d^2\sigma \mathcal{O}(\sigma)$$

这里 \mathcal{O} 是理论的局域算符，而 α 是某个系数。根据 \mathcal{O} 的量纲 Δ ，可分为

- $\Delta < 2$: 在这种情况下， α 具有正量纲： $[\alpha] = 2 - \delta$ 。这种变形被称为相关变形，因为它们在红外线中很重要。RG 流使我们脱离了最初的 CFT。只有当我们达到一个新的 CFT 时，我们才会停止流动（当 $c = 0$ 时，这可能是微不足道的）。
- $\Delta = 2$: 常数 α 是无量纲的。这种变形被称为临界变形。变形理论定义了一种新的 CFT。

- $\Delta > 2$: 常数 α 具有负量纲。这些变形无关紧要。红外物理仍然由最初的 CFT 描述。但紫外物理发生了改变。

当从紫外理论转向红外时，我们预计信息会丢失。c-定理使这种直觉精确。该定理在所有理论的空间上展示了一个函数 c ，它沿着 RG 流单调递减。在固定点上， c 与 CFT 的中心荷一致。

c-定理的热力学证明

c-定理有许多不同的证明。在这里，我们给出一个特别物理的。其基本思想是将系统加热到有限的温度 T 并计算声速。c-定理来自于声速不超过光速的要求（在我们的惯例中，光速只是 1）。我应该提醒你，这一节的论点风格与其他课程有些不同。但是，如果没有别的，它提醒你，不能因为你在学习弦论，就忽视基础物理！

让我们首先从 CFT 开始。为了简单起见，我们假设 $c = \tilde{c}$ 。然后，从 (4.44)，我们得到了渐近行为

$$S(E) \rightarrow 4\pi \sqrt{\frac{cER}{6}}$$

其中我们减少了 $c/24$ 的偏移，总体系数是 4π ，而不是 2π ，因为我们同时包括左移动和右移动区域。为了与熟悉的热力学公式进行比较，我们用空间体积 $V = 2\pi R$ 来表示，所以

$$S(E) \rightarrow 4\pi \sqrt{\frac{\pi cEV}{3}}$$

现在，温度被定义为

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = 2\pi \sqrt{\frac{\pi cV}{3E}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{E} = 2\pi T \sqrt{\frac{\pi cV}{3}}$$

由此，我们可以将 CFT 的熵计算为温度的函数，而不是能量的函数

$$S(T) = \frac{8\pi^3 cVT}{3} \quad \Rightarrow \quad s(T) = \frac{8\pi^3}{3} T \quad (4.45)$$

其中 $s = S/V$ 是熵密度。

现在我们来考虑一个更普遍的情况。我们将从 UV 中的一些中心荷为 c_{UV} 的 CFT 流到 IR 中的另一个中心荷为 c_{IR} 的 CFT。这可能是因为最终的理论是有缺陷的——这意味着一切都是无质量的——在这种情况下， $c_{IR} = 0$ 。我们的目标是证明，无论流量如何，我们总是有 $c_{UV} \leq c_{IR}$ （如果根本没有流量，则相等）。为了实现这一点，我们需要利用一些热力学恒等式。特别是，我们需要遵循结果

命题：

$$s = \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_V \quad (4.46)$$

P 表示压力。

证明： 给定能量 $E = E(S, V)$ ，热力学第一定律告诉我们

$$dE = Tds - PdV$$

自由能被定义为 $F(T, V) = E - TS$ ，并且服从

$$dF = -SdT - PdV \quad (4.47)$$

但自由能是广泛的，这意味着它实际上必须与 V 成比例，因为这是它所依赖的唯一广延量。所以

$$F(T, V) = -P(T)V$$

从中我们了解到

$$dF = -\frac{\partial P}{\partial T}VdT - PdV$$

与 (4.47) 进行比较，得到了命题的结果 (4.46)。 □

最后，我们回顾一下，系统中的声速由

$$c_s^2 = \frac{dP}{d\epsilon}$$

其中 $\epsilon = E/V$ 是能量密度。在固定响度下，我们有

$$dE = TdS \quad \Rightarrow \quad d\epsilon = Tds$$

所有这些都意味着我们可以将声速表示为

$$c_s^2 = \frac{1}{T} \frac{dP}{ds} = \frac{1}{T} \frac{dP}{dT} \frac{dT}{ds} = \frac{s}{T} \frac{dT}{ds} \frac{d \log T}{d \log s}$$

这是我们需要的关键结果。现在我们定义一个热 c -函数

$$\chi = \frac{s}{T}$$

正如我们在 (4.45) 中所看到的，当我们有 CFT 时，函数 χ 与中心荷成比例： $\chi = 8\pi^3 c/3$ 。如果我们从 UV 中的中心荷为 c_{UV} 的 CFT 流到 IR 中的另一个中心荷为 c_{IR} 的 CFT，那么当我们改变温度时， χ 将在这两个值之间插值（乘以 $8\pi^3/3$ ）。为了证明这一理论，我们需要证明，当我们降低温度，从而激发较低能量的自由度时，函数 χ 必然会降低。我们将 χ 与声速联系起来，

$$\frac{1}{c_s^2} = \frac{d \log S}{d \log T} = \frac{d \log(\chi T)}{d \log T} = 1 + \frac{d \log \chi}{d \log T}$$

根据因果关系，我们必须使 $c_s^2 \leq$ （当我们有 CFT 时相等），因此

$$\frac{d \log \chi}{d \log T} \geq 0 \Rightarrow \frac{d \chi}{dT} \geq 0$$

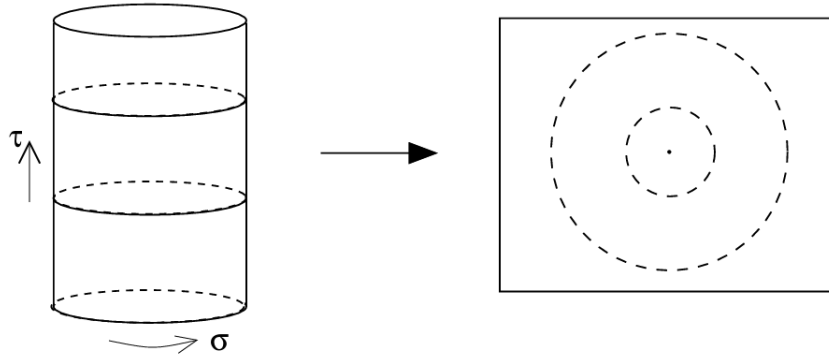
但这正是我们想要的。我们了解到，我们必然有 $c_{UV} \geq c_{IR}$ 。这就是 c 定理。

4.5 Virasoro 代数

到目前为止，我们的讨论仅限于 CFT 的算符。我们没有说任何关于态的事情。现在对此进行补救。我们首先仔细观察圆柱面和平面之间的映射。

4.5.1 径向量子化

要讨论量子场论中的态，我们需要思考它们在哪里以及如何演化。例如，考虑在平面上定义的二维量子场论。传统上，当量子化这个理论时，我们用笛卡尔坐标 (t, x) 对平面进行参数化，我们称之为“时间”和“空间”。态存在于类空截面上。哈密顿量生成时间平移，从而控制态的演化。



然而，圆柱面和平面之间的映射提出了一种不同的方法来量子化平面上的 CFT。圆柱体上的复坐标为 ω ，而平面上的坐标为 z 。它们的关系为，

$$\omega = \sigma + i\tau, \quad z = e^{-i\omega}$$

在圆柱面上，态存在于 σ 为常数的空间切片上，并通过哈密顿量演化，

$$H = \partial_\tau$$

在映射到平面之后，哈密顿量变成了扩张算符

$$D = z\partial + \bar{z}\bar{\partial}$$

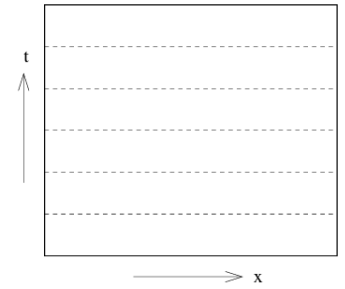
圆柱面的类空截面对应于平面上半径恒定的圆。它们的演化受扩张算符 D 的支配。这种理论方法被称为径向量子化。

通常在量子场论中，我们对时间排序的关联函数感兴趣。圆柱体上的时间顺序变为平面上的径向顺序。对关联函数中的算符进行排序，使得在较大径向距离处插入的算符向左移动。

Virasoro 生成元

让我们看看在平面上计算的能动张量 $T(z)$ 会变成什么样子。在圆柱面上，我们可以用 Fourier 展开分解 T 。

$$T_{\text{cylinder}}(w) = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} L_m e^{imw} + \frac{c}{24}$$



在转换 (4.33) 到平面之后，这就变成了洛朗展开式

$$T(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{L_m}{z^{m+2}}$$

和往常一样，类似的说法也适用于右行 sector

$$\bar{T}(\bar{z}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{L}_m}{\bar{z}^{m+2}}$$

我们可以将这些表达式反解，得到用 $T(z)$ 表示的 L_m 。我们需要取一个合适的围道积分

$$L_n = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{n+1} T(z) \quad , \quad \tilde{L}_n = \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \bar{z}^{n+1} \bar{T}(\bar{z}) \quad (4.48)$$

其中，如果我们只想要 L_n 或 \tilde{L}_n ，我们必须确保在围道内没有其他算符插入。

在径向量子化中， L_n 是与共形变换 $\delta z = z^{n+1}$ 相关的守恒荷。为了看到这一点，回忆 (4.7) 中给出的相应的守恒流，是 $J(z) = z^{n+1} T(z)$ 。此外，围道积分 $\int dz$ 映射到圆柱面上空间切片周围的积分。这告诉我们 L_n 是守恒荷，其中“守恒”意味着它在圆柱面上的时间演化下或在平面上的径向演化下是恒定的。类似地， \tilde{L}_n 是与共形变换 $\delta \bar{z} = \bar{z}^{n+1}$ 相关的守恒荷。

当我们进入量子理论时，守恒荷成为变换的生成元。因此，算符 L_n 和 \tilde{L}_n 生成共形变换 $\delta z = z^{n+1}$ 和 $\delta \bar{z} = \bar{z}^{n+1}$ 。它们被称为 Virasoro 生成元。特别是，我们最喜欢的两个共形变换是

- L_{-1} 和 \tilde{L}_{-1} 在平面中生成平移。
- L_0 和 \tilde{L}_0 生成缩放和旋转。

系统的哈密顿量——测量圆柱面上态的能量——被映射到平面上的扩张算符中。当作用于理论的态时，此算符表示为

$$D = L_0 + \tilde{L}_0$$

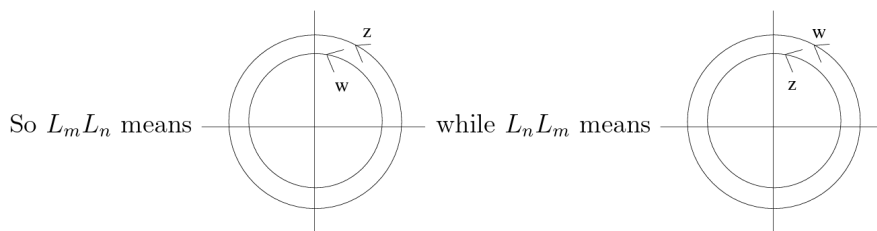
4.5.2 Virasoro 代数

如果我们有一些守恒荷，我们应该做的第一件事就是计算它们的代数。然后，这个代数的表示对理论的态进行分类。（例如，想想氢原子中的角动量）对于共形对称性，我们想要确定 L_n 生成元服从的代数。这是一个很好的事实，对易关系实际上隐含在 TT 的 OPE 中。让我们看看如何做到这一点。

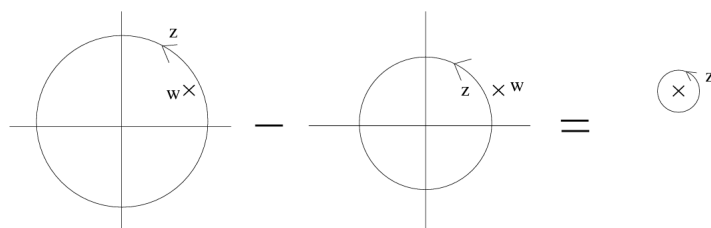
想要计算 $[L_m, L_n]$ 。把 L_m 写成 $\oint dz$ 上的一个围道积分，把 L_n 写成 $\oint dw$ 上的围道积分。（注意：现在 z 和 w 都表示复平面上的坐标）对易子

$$[L_m, L_n] = \left(\int \frac{dz}{2\pi i} \oint \frac{dw}{2\pi i} - \oint \frac{dw}{2\pi i} \int \frac{dz}{2\pi i} \right) z^{m+1} w^{n+1} T(z) T(w)$$

这到底意味着什么?! 我们需要记住，所有的算符方程都被视为存在于时间排序的关联函数中。除了现在我们在 z 平面上，这个描述已经转化为径向排序的关联函数：外面的在左边，内部的在右边。



计算对易子的技巧是首先固定 w 并进行 $\oint dz$ 积分。得到的围道是，



换句话说，我们围绕一个不动点 w 进行 z 积分，得到

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= \oint \frac{dw}{2\pi i} \oint_w \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} w^{n+1} T(z) T(w) \\ &= \oint \frac{dw}{2\pi i} \text{Res} \left[z^{m+1} w^{n+1} \left(\frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \dots \right) \right] \end{aligned}$$

为了计算 $z = w$ 处的留数，我们首先需要对 z^{m+1} 围绕点 w 进行 Taylor 展开，

$$z^{m+1} = w^{m+1} + (m+1)w^m(z-w) + \frac{1}{2}m(m+1)w^{m-1}(z-w)^2 + \frac{1}{6}m(m^2-1)w^{m-2}(z-w)^3 + \dots$$

然后留数从三个项中的每一项中获得贡献，

$$[L_m, L_n] = \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{n+1} \left[w^{m+1} \partial T(w) + 2(m+1)w^m T(w) + \frac{c}{12}m(m^2-1)w^{m-2} \right]$$

为了进一步，最简单的方法是将第一项进行分部积分。然后我们对 w 进行积分。但对于前两项，所得积分的形式为 (4.48)，并给出 L_{m+n} 。在第三项，我们获得了极点。最终结果是

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}$$

这就是著名的 Virasoro 代数。 \tilde{L}_n 满足完全相同的代数，但 c 被 \tilde{c} 取代。当然， $[L_n, \tilde{L}_m] = 0$ 。 c 在 Virasoro 代数中作为一个额外项的出现是它被称为“中心荷”的原因。一般来说，中心荷是指在一个代数中与其他所有项均对易的额外项。

共形 = 微分同胚 + Weyl

我们可以为 Virasoro 代数建立一些直觉。我们知道 L_n 产生共形变换 $\delta z = z^{n+1}$ 。让我们考虑一些密切相关的问题：坐标变换 $\delta z = z^{n+1}$ 。这些是由矢量场生成的

$$l_n = z^{n+1} \partial_z \quad (4.49)$$

但计算它们的对易关系很简单：

$$[l_n, l_m] = (m-n)l_{m+n}$$

这就是 Virasoro 代数的第一部分。但中心项呢？需要记住的关键点是，正如我们在本章开头所强调的，共形变换不仅仅是坐标的重新参数化：这是一个重新参数化，然后是一个补偿的 Weyl 重新缩放。Virasoro 代数中的中心项是由于 Weyl 重缩放。

4.5.3 Virasoro 代数的表示

有了守恒荷代数，我们现在就可以开始了解共形对称性是如何依据表示将态分类的。

假设我们有一些 L_0 和 \tilde{L}_0 的本征态 $|\psi\rangle$ 。

$$L_0 |\psi\rangle = h |\psi\rangle, \quad \tilde{L}_0 |\psi\rangle = \tilde{h} |\psi\rangle$$

回到圆柱面上，上式相当于指态具有能量

$$\frac{E}{2\pi} = h + \tilde{h} - \frac{c + \tilde{c}}{24}$$

因此，我们将本征值 h 和 \tilde{h} 称为态的能量。通过与 L_n 算符的作用，我们可以进一步得到更多本征态

$$L_0 L_n |\psi\rangle = (L_n L_0 - n L_n) |\psi\rangle = (h - n) L_n |\psi\rangle$$

这告诉我们 L_n 是上升还是下降算符取决于 n 的符号。当 $n > 0$ 时， L_n 降低态的能量，而 L_{-n} 升高态的能量。如果能谱有下界，那么对于 $n > 0$ ，必须存在一些被所有 L_n 和 \tilde{L}_n 湮灭的态。这种态被称为初级态。它们服从

$$L_n |\psi\rangle = \tilde{L}_n |\psi\rangle = 0 \quad \text{for all } n > 0$$

在表示论的语言中，它们也被称为最高权态。它们是能量最低的态。

Virasoro 代数的表示现在可以通过用 $n > 0$ 的上升算符 L_{-n} 作用于初级态来构建。显然，这构造出一个无限的态的塔。以这种方式获得的所有态都被称为 descendants。从初始的初级态 $|\psi\rangle$ ，塔散开为...

$$|\psi\rangle$$

$$L_{-1} |\psi\rangle$$

$$L_{-1}^{-2} |\psi\rangle, L_{-2} |\psi\rangle$$

$$L_{-1}^3 |\psi\rangle, L_{-1} L_{-2} |\psi\rangle, L_{-3} |\psi\rangle$$

整个态的集合称为 Verma 模。它们是 Virasoro 代数的不可约表示。这意味着，如果我们知道初级态的能谱，那么我们就知道整个理论的能谱。

一些注释：

- 真空态 $|0\rangle$ 的 $h = 0$ 。这个态服从

$$L_n |0\rangle = 0 \quad \text{for all } n \geq -1 \quad (4.50)$$

请注意，此态保留最大数量的对称性：像所有的初级态一样，它被 $n > 0$ 的 L_n 湮灭，但它也被 L_0 和 L_{-1} 湮灭。这符合我们的直觉，即真空态在尽可能多的对称性下应该是不变的。你可能认为可以更进一步，要求真空态对所有 n 都服从 $L_n |0\rangle = 0$ 。但这与 Virasoro 代数中的中心荷项不一致。要求 (4.50) 是我们能做的最好的了。

- 这次讨论应敲响警钟。在弦的协变量子化中看到非常相似的东西，其中施加条件 (2.6) 作为约束。第 5 节会看到初级态和弦质量谱的联系。
- 你应该注意一个微妙之处：Verma 模中的态不一定是独立的。某些特定态的线性组合可能为 0。这种线性组合被称为空态。空态的存在取决于 h 和 c 的值。例如，假设我们在一个理论中，中心荷为 $c = 2h(5-8h)/(2h+1)$ ，其中 h 是初级态 $|\psi\rangle$ 的能量。然后很容易检查以下组合是否具有 0 范数：

$$L_{-2} |\psi\rangle - \frac{3}{2(2h+1)} L_{-1}^2 |\psi\rangle \quad (4.51)$$

- 初级态和第 4.2.3 节中定义的初级算符之间存在密切关系。事实上，初级态的能量 h 和 \tilde{h} 将恰好是初级算符的权重。4.6 会进行进一步描述。

4.5.4 么正性的影响

一个理论必须遵守一个物理要求，而我们迄今忽略了这一点：么正性。这就是在闵可夫斯基号差时空中，概率是守恒的。如果我们有一个支配时间演化的厄密哈密顿量，则么正性立即随之而来。但到目前为止，我们讨论在某种程度上是代数的，我们还没有强制执行这个条件。让我们现在开始。

我们回溯到欧几里得圆柱，然后再回到闵可夫斯基圆柱，在那里我们可以问关于时间演化的问题。这里的哈密顿密度采用以下形式

$$\mathcal{H} = T_{ww} + T_{\bar{w}\bar{w}} = \sum_n L_n e^{-in\sigma^+} + \tilde{L}_n e^{-in\sigma^-}$$

因此，为了使哈密顿量是厄密的，我们需要

$$L_n = L_{-n}^\dagger$$

这一要求对 CFT 结构施加了一些强有力约束。在这里看看由于么正性和物理 Hilbert 空间不包含负范数态的要求而产生了几个琐碎但重要的约束。

- $h \geq 0$: 这一事实源于对模的观察，

$$|L_{-1}|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|L_{+1}L_{-1}|\psi\rangle = \langle\psi|[L_{+1}, L_{-1}]|\psi\rangle = 2h\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$$

$h = 0$ 的唯一态是真空态 $|0\rangle$ 。

- $c > 0$: 要看到这一点，我们可以看看

$$|L_{-n}|0\rangle|^2 = \langle 0|[L_n, L_{-n}]|0\rangle = \frac{c}{12}n(n^2 - 1) \geq 0 \quad (4.52)$$

因此 $c \leq 0$ 。如果 $c = 0$ ，由真空态激发的一系列态中唯一的态就是真空本身。即，整个理论中唯一的态就是真空本身。因此，任何非平凡的 CFT 都具有 $c > 0$ 。

还有更多的此类要求限制了这一理论。但对于 $c < 1$ 的 CFT，这些要求足以对所有理论进行分类和求解。

4.6 态-算符映射

本节中描述了共形场论的一个重要的方面：态和局域算符之间的映射。

首先，让我们了解一些观点。在一个典型的量子场论中，态和局域算符是非常不同的对象。虽然局域算符存在于时空中的一个点上，但态存在于

整个空间切片上。如果我们写一个薛定谔表示下的波函数，这一点就很清楚了。在场论中，这个对象实际上是一个波泛函， $\Psi[\phi(\sigma)]$ ，描述了空间中每个点 σ 处的（但在一个固定时间）每个场构型 $\phi(\sigma)$ 的概率。

考虑到态和局域算符的不同，在 CFT 中，它们存在同构，这令人惊讶：它被称为态-算符映射。关键点是圆柱面中的遥远过去映射到复平面中的单个点 $z = 0$ 。因此，指定圆柱面上过去的态相当于指定原点处的局域扰动。

为了做到这一点，需要回忆一下如何使用路径积分写下波函数。通过在泛函积分上设置不同的边界条件来计算不同的态。让我们从回到量子力学开始，回顾一些简单的事实。粒子从时间 τ_i 的位置 x_i 移动到时间 τ_f 的位置 x_f 的传播子由下式给出

$$G(x_f, x_i) = \int_{x(\tau_i)=x_i}^{x(\tau_f)=x_f} \mathcal{D}x e^{iS}$$

这意味着，如果系统在时间 τ_i 以波函数 $\psi_i(x_i)$ 描述的某种态开始，那么（忽略所有归一化系数）它将演化为态

$$\psi_f(x_f, \tau_f) = \int dx_i G(x_f, x_i) \psi_i(x_i, \tau_i)$$

从中可以吸取两个教训。首先，为了确定给定点 x_f 处的波函数的值，我们计算了满足 $x(\tau_f) = x_f$ 路径限制的路径积分。其次，初始态 $\psi(x_i)$ 作为初始边界条件下积分的权重因子。

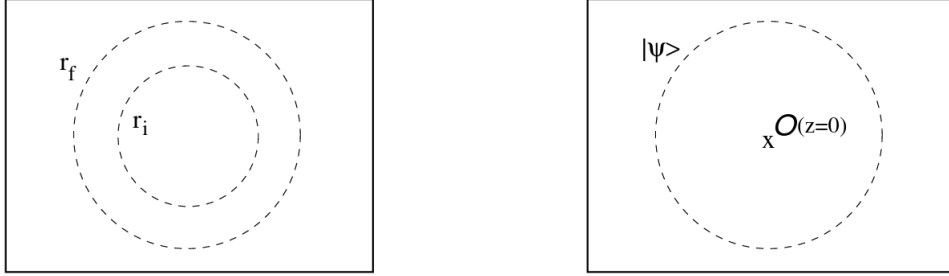
现在在场论中写下同样公式来处理波泛函。我们处理圆柱面上的欧几里得路径积分。如果在时间 τ_i 从某个态 $\Psi_i[\psi_i(\sigma)]$ 开始，那么它将演化为态

$$\Psi_f[\phi_f(\sigma), \tau_f] = \int \mathcal{D}\phi_i \int_{\phi(\tau_i)=\phi_i}^{\phi(\tau_f)=\phi_f} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \Psi_i[\phi_i(\sigma), \tau_i]$$

我们如何在映射到复平面之后为态写出类似的表达式？现在，态被定义在半径不变的圆上，比如 $|z| = r$ ，演化由扩张算符控制。假设初始态定义为 $|z| = r_i$ 。在路径积分中，我们在所有具有固定边界条件的场上积分 $\phi(r_i) = \phi_i$ 和 $\phi(r_f) = \phi_f$ ，在图中所示的环面的两个边缘上，

$$\Psi_f[\phi_f(\sigma), r_f] = \int \mathcal{D}\phi_i \int_{\phi(r_i)=\phi_i}^{\phi(r_f)=\phi_f} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \Psi_i[\phi_i(\sigma), r_i]$$

这是场论中定义态的传统方法，尽管有点扭曲，因为正在进行径向量子化。我们看到，初始态的影响是在 $|z| = r_i$ 处改变内环上路径积分的权重。



现在让我们看看，当我们将初始态带回遥远的过去，并最终回到 $z = 0$ 时，会发生什么？我们现在必须在整个圆盘上积分 $|z| \leq r_f$ ，而不是在环面上积分。初始态的唯一影响现在是改变 $z = 0$ 点处的路径积分的权重。但这正是我们所说的在那个点插入的局域算符的意思。这意味着每个局域算符 $\mathcal{O}(z = 0)$ 在理论上定义了不同的态，

$$\Psi[\phi_f; r] = \int^{\phi(r)=\phi_f} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \mathcal{O}(z = 0)$$

我们现在对圆盘内的所有场构型进行积分，包括 $z = 0$ 时场的所有可能值，这类似于对内圈上的边界条件 $\int \mathcal{D}\phi_i$ 进行积分。

- 态-算符映射仅在共形场论中成立，在共形场理论中，可以将圆柱面映射到平面。它也适用于高维的共形场论（其中 $\mathbf{R} \times \mathbf{S}^{D-1}$ 可以映射到平面 \mathbf{R}^D ）。在非共形场论中，一个典型局部算符会产生许多不同态。
- 态-算符映射并没有说理论中的态数等于算符数：这从来都不是真的。它确实说，态与局域算符是一一对应的。
- 你可能会认为你以前见过这样的东西。在自由场的正则量子化中，我们通过产生算符的作用在 Fock 空间中产生态。这不是一回事！产生算符与局域算符相差无几。它们是局部算符的 Fourier 变换。
- 我们可以通过这种方式产生一个特殊的态：真空。这是通过将恒等算

符 **1** 插入到路径积分中而产生的。回到圆柱面图中，这只是意味着我们将态传播回时间 $\tau = -\infty$ ，这是欧几里得路径积分中使用的标准技巧，用来投影出除基态以外的所有的态。出于这个原因，真空有时在算符符号中表示为 $|1\rangle$ 。

4.6.1 一些简单的结果

让我们使用态-算符映射来总结对共形场论的研究中出现的一些悬念。

首先，我们定义了两个我们称之为“初级”的对象：态和算符。态-算符映射将两者联系起来。考虑态 $|\mathcal{O}\rangle$ ，它是通过在 $z = 0$ 时将初级算符 \mathcal{O} 插入路径积分而构建的。我们可以看看，

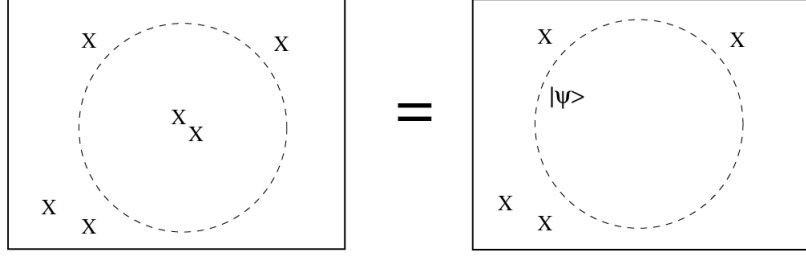
$$\begin{aligned} L_n |\mathcal{O}\rangle &= \int \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z) \mathcal{O}(z=0) \\ &= \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} \left(\frac{h\mathcal{O}}{z^2} + \frac{\partial\mathcal{O}}{z} + \dots \right) \end{aligned} \quad (4.53)$$

在这个表达式中，路径积分 $\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}$ 变成了什么？答案是，它仍然隐含在那里。请记住，像 (4.48) 这样的算符表达式只在关联函数中成立。但是把一个算符放在关联函数中与把它放在路径积分中用 $e^{-S[\phi]}$ 加权，是一样的。

从 (4.53) 我们可以看出各种生成元对态的影响

- $L_{-1} |\mathcal{O}\rangle = |\partial\mathcal{O}\rangle$ ：事实上，这适用于所有算符，而不仅仅是初级算符。这是意料之中的事，因为 L_{-1} 是平移生成元。
- $L_0 |\mathcal{O}\rangle = h |\mathcal{O}\rangle$ ：这适用于在缩放条件下具有良好定义的变换的任何算符。
- $L_n |\mathcal{O}\rangle = 0$ for all $n > 0$ 。这只适用于初级算符 \mathcal{O} 。此外，我们要求 $|\mathcal{O}\rangle$ 成为一个初级态。

这有一个重要的后果。之前说过，在 CFT 中计算的最重要的事情之一是初级算符的权重谱。这似乎是一件有点晦涩的事情。但现在我们看到它有了更直接的物理意义。它是定义在圆柱面上的能量谱和角动量理论的态。



另一个悬念：在定义具有特定权重的算符时，我们声明我们总是可以在 D 和 L 下具有特定特征值的算符的基础上工作。这紧接着我们总是可以在圆柱面上找到 H 和 L 的本征态的基。

最后，我们可以使用态-算符映射的概念来理解为什么 OPE 在共形场论中如此有效。假设我们对一些关联函数感兴趣，其中插入了算符，如图所示。OPE 的表述是，我们可以用 $z = 0$ 时的算符之和来替换两个内部算符，而与虚线外的情况无关。作为一个算符描述，这听起来相当令人惊讶。但这是通过计算到虚线的路径积分来实现的，在这一点上，两个算符的唯一作用是确定我们的态。这为我们提供了一种理解为什么 CFT 中的 OPE 是精确的，收敛半径等于下一个最近插入。

4.6.2 我们最喜欢的例子：自由标量场

让我们通过再次返回到自由标量场来说明态-算符映射。在欧几里得圆柱上，我们有模式展开

$$X(w, \bar{w}) = x + \alpha' p \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n e^{inw} + \tilde{\alpha}_n e^{in\bar{w}})$$

我们在闵可夫斯基空间中保留了实数的要求，这给了我们 $\alpha_n^* = \alpha_n$ 和 $\tilde{\alpha}_n^* = \tilde{\alpha}_{-n}$ 。我们在第 4.3 节中看到， X 不具有良好的共形特性。在转换到 $z = e^{-iw}$ 平面之前，我们应该处理圆柱面上的初级场，

$$\partial_w X(w, \bar{w}) = -i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_n \alpha_n e^{inw} \quad \text{with } \alpha_0 \equiv i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p$$

由于 ∂X 是权重为 $h = 1$ 的初级场，因此它到平面的变换由 (4.18) 给出，其为

$$\partial_z X(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial w} \right)^{-1} \partial_w X(w) = -i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_n \frac{\alpha_n}{z^{n+1}}$$

$\bar{\partial} X$ 也是类似的。反过来，我们得到了一个值为 α_n 的围道积分的方程，

$$\alpha_n = i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^n \partial X(z) \quad (4.54)$$

正如 TT OPE 允许我们在上一节中确定 $[L_m, L_n]$ 对易关系一样，因此 $\partial X \partial X$ OPE 包含关于 $[\alpha_m, \alpha_n]$ 对易关系的信息。计算是直接的，

$$\begin{aligned} [\alpha_m, \alpha_n] &= -\frac{2}{\alpha'} \left(\oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{dw}{2\pi i} - \frac{dw}{2\pi i} \frac{dz}{2\pi i} \right) z^m w^n \partial X(z) \partial X(w) \\ &= -\frac{2}{\alpha'} \oint \frac{dw}{2\pi i} \text{Res}_{z=w} \left[z^m w^n \left(\frac{-\alpha'/2}{(z-w)^2} + \dots \right) \right] \\ &= m \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{m+n-1} = m \delta_{m+n,0} \end{aligned}$$

其中，在从第二行到第三行的过程中，我们进行了 z 在 w 处的 Taylor 展开。令人欣慰的是，最终结果与我们在弦理论中使用正则量子化导出的对易关系 (2.2) 一致。

自由标量场的态-算符映射

现在让我们来看看态和局域算符之间的映射。我们从正则量子化中知道，Fock 空间是通过在真空 $|0\rangle$ 上作用 $m > 0$ 的产生算符 α_{-m} 来定义的。当 $m > 0$ 时，真空态本身服从 $\alpha_m |0\rangle = 0$ 。最后，还有零模式 $\alpha_0 \sim p$ ，它为所有态提供了另一个量子数。一个一般的态为

$$\prod_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}^{k_m} |0; p\rangle$$

让我们尝试通过在路径积分中插入算符来恢复这些态。我们的第一个任务是检查真空态是否真的等同于单位算符的插入。换句话说，圆上理论的基态波泛函 $|z| = r$ 真的由下式给出吗？

$$\Psi_0[X_f] = \int^{X_f(r)} \mathcal{D}X e^{-S[X]} \quad (4.55)$$

我们想检查这是否满足真空态的定义，即当 $m > 0$ 时， $\alpha_m |0\rangle = 0$ 。我们如何用算符对波泛函进行运算？我们仍然应该在所有场构型 $X(z, \bar{z})$ 上积分，服从 $X(|z| = r) = X_f$ 的边界条件。但现在我们应该在某个 $|w| < r$ 处插入围道积分 (4.54)（因为，毕竟，态只会在我们用 α_m 作用它之后消失，而不是之前！）。所以我们看到

$$\alpha_m \Psi_0[X_f] = \int^{X_f} \mathcal{D}X e^{-S[X]} \oint \frac{dw}{2\pi i} w^m \partial X(w)$$

路径积分由自由标量场的作用量 (4.19) 加权。如果给定的构型在圆盘 $|z| < r$ 内的某个地方发散，那么作用量也会发散。这确保了只有在圆盘内部没有奇异性的光滑函数 $\partial X(z)$ 才有贡献。但对于这样的函数，我们

$$\oint \frac{dw}{2\pi i} w^m \partial X(w) = 0 \quad \text{for all } m \leq 0$$

因此，态 (4.55) 实际上是真空态。事实上，由于 α_0 也湮灭了这种态，因此它被确定为动量消失的真空态。

该理论的激发态如何？

命题： $\alpha_{-m} |0\rangle = |\partial^m X\rangle$ 。我们的意思是，态 $\alpha_{-m} |0\rangle$ 可以由路径积分建立，

$$\alpha_{-m} |0\rangle = \int \mathcal{D}X e^{-S[X]} \partial^m X(z=0) \quad (4.56)$$

证明：我们可以通过用湮灭算符 α_n 作用于 $|\partial^m X\rangle$ 来检验这一点。

$$\alpha_n |\partial^m X\rangle \sim \int^{X_f(r)} \mathcal{D}X e^{-S[X]} \oint \frac{dw}{2\pi i} w^n \partial X(w) \partial^m X(z=0)$$

我们可以专注于算符插入并使用 OPE(4.23)。我们放弃了路径积分，只关注算符方程（因为，毕竟，算符方程只在关联函数中有意义，这与路径积分是一样的）。我们有

$$\oint \frac{dw}{2\pi i} w^n \partial_z^{m-1} \frac{1}{(w-z)^2} \Big|_{z=0} = m! \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{n-m-1} = 0 \quad \text{unless } m = n$$

这证实了态 (4.56) 具有正确的属性。 □

最后，我们应该考虑零模式，或者动量 $\alpha_0 \sim p$ 。使用上述技术（连同 OPE(4.26)）可以简单地表明，一个态的动量是通过插入初级算符 e^{ipX} 而产生的。例如，

$$|0; p\rangle \sim \int \mathcal{D}X e^{-S[X]} e^{ipX(z=0)}$$

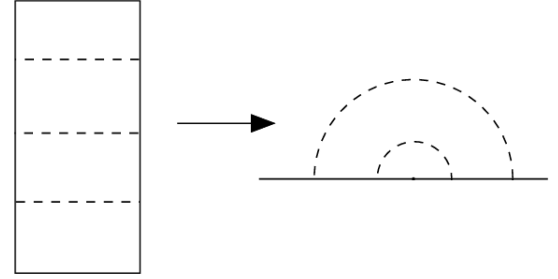
4.7 简论有边界的共形场论

开弦存在于空间坐标 $\sigma \in [0, \pi]$ 的无限长带上。在这里，我们只对相应的共形场论做一些简短的评论。

和以前一样，我们可以定义复坐标 $w = \sigma + i\tau$ ，并形成共形映射

$$z = e^{-iw}$$

这一次，映射将我们带到上半平面： $\text{Im}z \leq 0$ 。弦的端点被映射到实轴， $\text{Im}z = 0$ 。



我们之前的大部分讨论都像以前一样进行。但现在我们需要考虑 $\text{Im}z = 0$ 时的边界条件。让我们先来看 $T_{\alpha\beta}$ 。回想一下，能量-动量张量的存在是因为平移不变性。我们在平行于边界的方向上仍然具有平移不变性——我们称之为相关的切向量 t^α 。但是垂直于边界的平移不变性被打破了——我们称之为法向量 n^α 。其结果是 $T_{\alpha\beta}t^\beta$ 仍然是一个守恒流。

为了实现 Neumann 边界条件，我们坚持没有流流出边界。条件是

$$T_{\alpha\beta}n^\alpha t^\beta = 0 \quad \text{at } \text{Im}z = 0$$

在复坐标系中，它们变成

$$T_{zz} = T_{\bar{z}\bar{z}} \quad \text{at } \text{Im}z = 0$$

有一种简单的实现方法：我们通过定义将 T_{zz} 的定义从上半平面扩展到整个复平面

$$T_{zz}(z) = T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z})$$

对于闭弦，我们在整个平面上都有函数 T 和 \tilde{T} 。但对于开弦，我们在整个平面上只有一个，比如说， T 。这包含与上半平面中的 T 和 \tilde{T} 相同的信息。在整个平面上工作并只关注 T 更简单。相应地，我们现在只有一套 Virasoro 生成元，

$$L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T_{zz}(z)$$

开弦不存在独立的 \tilde{L}_n 。

计算自由标量场的传播子时，也有类似的加倍技巧。标量场 $X(z, \bar{z})$ 仅在上半平面中定义。假设要实现 Neumann 边界条件。然后传播算符定义为

$$\langle X(z, \bar{z}) X(w, \bar{w}) \rangle = G(z, \bar{z}; w, \bar{w})$$

其服从 $\partial^2 G = -2\pi\alpha'\delta(z-w, \bar{z}-\bar{w})$ ，服从边界条件

$$\partial_\sigma G(z, \bar{z}; w, \bar{w})|_{\sigma=0} = 0$$

但我们在电动力学课程中解决了这样的问题。一种有用的方法是在下半平面中引入“镜像荷”。我们现在让 $X(z, \bar{z})$ 在整个复平面上变化，其动力学由传播子控制

$$G(z, \bar{z}; w, \bar{w}) = -\frac{\alpha'}{2} \ln|z-w|^2 - \frac{\alpha'}{2} \ln|\bar{z}-\bar{w}|^2 \quad (4.57)$$

剩下的关于 CFT 的大部分讨论继续进行，只有细微的差异。然而，有一点很简单，但值得强调，因为它稍后会很重要。这涉及到态-算符映射。回想一下导致得出这个想法的逻辑：考虑条带上固定时间的一个态，并将其传播回过去的无穷大 $\tau \rightarrow \infty$ 。经过映射到半平面后，经过无穷大又是原点。但现在起点就在边界上。我们了解到，态-算符映射将态与边界上定义的局部算符相关联。

这一事实确保了条带上的理论比圆柱上的理论具有更少的态。例如，对于自由标量场，Neumann 边界条件要求在 $\text{Im}z = 0$ 时 $\partial X = \bar{\partial} X$ 。（这是根据条带上 $\sigma = 0$ 处的 $\partial_\sigma X = 0$ 的要求得出的）在圆柱上，算符 ∂X 和 $\bar{\partial} X$ 产生不同的态；在条带上，它们产生相同的态。当然，这反映了在开弦的量化中看到的情况，其中边界条件意味着我们只有一半的振荡模式可以使用。

5 Polyakov 路径积分和鬼

在上一章的开头，我们强调共形对称有两种截然不同的解释，这取决于我们考虑的是固定的二维背景还是动力学的二维背景。在统计物理学的应用中，背景是固定的，共形对称是全局对称。相反，在弦理论中，背景是动力学的。共形对称是规范对称，是微分同胚不变性和 Weyl 不变性的残余。

但规范对称性根本不是对称性。在我们对系统的描述中，它们是冗余的。因此，我们不能失去它们，它们在量子理论中不出现反常是至关重要的。最坏的情况是，关于规范反常的理论毫无意义。（例如，由于这个原因，Yang-Mills 理论只与左手基本费米子耦合是一个荒谬的理论）充其量，恢复量子理论是可能的，但几乎可以肯定的是，它与你开始的理论无关。

把上一章的一些结果拼凑在一起，看起来我们有麻烦了。我们看到 Weyl 对称性是反常的，因为能量-动量张量的期望值在与 Weyl 对称性相关的背景上取不同的值：

$$\langle T^\alpha_\alpha \rangle = -\frac{c}{12} R$$

在固定背景下，这只是有趣的。在动力学背景下，这是致命的。我们能做什么？似乎唯一的出路是确保我们的理论具有 $c = 0$ 。但我们已经看到，对于所有非平凡的酉 CFT， $c > 0$ 。我们似乎陷入僵局。在本节中，我们将发现漏洞。事实证明，我们确实需要 $c = 0$ ，但有一种方法可以实现这一点。

5.1 路径积分

在欧几里得空间中，Polyakov 作用量为，

$$S_{\text{Poly}} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \delta_{\mu\nu}$$

从现在起，我们将用路径积分的方法来分析弦⁶。我们集成了所有嵌入坐标

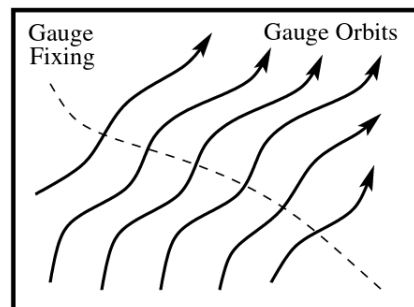
⁶Polyakov 在 “Quantum geometry of bosonic strings,” , Phys. Lett. B 103, 207 (1981) 中首次对弦路径积分进行了分析。

X^μ 和所有世界面度规 $g_{\alpha\beta}$ 。路径积分示意性地表示为，

$$Z = \frac{1}{\text{Vol}} \int \mathcal{D}g \mathcal{D}X e^{-S_{\text{Poly}}[X,g]}$$

“Vol” 一词至关重要。它指的是这样一个事实，即我们不应该在所有的场构型上积分，而应该只积分那些与微分同胚和 Weyl 对称性无关的物理上不同的构型。由于路径积分，正如所写的，对所有场求和，“Vol” 项意味着我们需要除以场空间上规范作用量的体积。

要使情况更明确，需要将所有场构型的积分分为两部分：那些与物理上不同的构型相对应的——在图中用虚线示意性地表示——以及和规范变换相对应的那些——用实线表示。除以 “Vol” 只是去掉了沿实线规范轨道积分产生的配分函数。



在一个普通积分中，如果我们改变坐标，那么我们会为我们的问题选择一个雅可比因子。路径积分也不例外。我们想把积分变量分解成物理场和规范轨道。棘手的部分是弄清楚我们得到了什么雅可比因子。值得庆幸的是，有一种标准的方法来确定雅可比因子，最早由 Faddeev 和 Popov 提出。这种方法适用于所有规范对称性，包括 Yang-Mills。

5.1.1 Faddeev-Popov 方法

我们有两个规范对称性：微分同胚和 Weyl 变换。我们将用 ζ 来示意性地表示这两者。度规在一般规范变换下的变换是 $g \rightarrow g^\zeta$ 。这是下式的简写

$$g_{\alpha\beta}(\sigma) \rightarrow g_{\alpha\beta}^\zeta(\sigma') = e^{2\omega(\sigma)} \frac{\partial \sigma^\gamma}{\partial \sigma'^\alpha} \frac{\partial \sigma^\delta}{\partial \sigma'^\beta} g_{\gamma\delta}(\sigma)$$

在二维中，这些规范对称性允许我们将度规转换为我们喜欢的任何形式——比如， \hat{g} 。这被称为基准度规，将代表我们对规范固定的选择。注意：

- 首先，我们不能将任何二维度规放入选择的 \hat{g} 形式中。这只在局域适用。在全球范围内，如果世界面具有圆柱或球面的拓扑，但对于更高亏格曲面则不存在这种情况。我们将在第 6 节中重新讨论这个问题。

- 其次，将度规局部固定到 \hat{g} 并不能固定所有的规范对称性。我们仍然需要处理共形对称性。我们也将第 6 节中重新讨论这一点。

我们的目标是只积分物理上不等价的构型。为了实现这一点，首先考虑 \hat{g} 在规范轨道上的积分。对于规范变换 ζ 的某个值，构型 g^ζ 将与我们的原始度规 g 一致。我们可以把一个 delta-函数放在积分中，得到

$$\int \mathcal{D}\zeta \delta(g - \hat{g}^\zeta) = \Delta_{FP}^{-1}[g] \quad (5.1)$$

这个积分不等于 1，因为需要考虑雅可比因子。这类似于 $\int dx \delta(f(x)) = 1/|f'|$ ，在 $f(x) = 0$ 处进行计算。在上面的方程中，我们把这个雅可比因子写成 Δ_{FP}^{-1} 。其倒数，即 Δ_{FP} ，称为 Faddeev-Popov 行列式。我们将很快对其进行明确计算。一些注释：

- 整个过程相当正式，在试图定义路径积分时遇到了通常的困难。正如 Yang-Mills 理论一样，我们会发现它得到了合理的答案。
- 我们将假设我们的规范固定是好的，这意味着上图中的虚线正好穿过每个物理上不同的构型一次。等价地，对规范变换的积分 $\mathcal{D}\zeta$ 与 delta-函数恰好重合一次，我们不必担心离散的模糊性（在 QCD 中称为 Gribov copies）。
- 该测度类似于李群的 Haar 测度，在左右作用下不变

$$\mathcal{D}\zeta = \mathcal{D}(\zeta'\zeta) = \mathcal{D}(\zeta\zeta')$$

当 Yang-Mills 理论中的规范固定时，要做的第一件事是证明 Faddeev-Popov 行列式 Δ_{FP} 是规范不变量。然而，我们在这里的路线有点微妙。正如我们在上面强调的，Weyl 反常意味着我们最初的理论实际上不能保持规范不变。我们将看到，Faddeev-Popov 行列式也失败了，但在某些情况下，它可以抵消原来的失败，留下一个定义明确的理论。

Faddeev-Popov 方法首先在路径积分中插入一个单位因子，形式为

$$1 = \Delta_{FP}[g] \int \mathcal{D}\zeta \delta(g - \hat{g}^\zeta)$$

我们将把得到的路径积分表达式称为 $Z[\hat{g}]$ ，因为它取决于基准度规 \hat{g} 的选择。我们要做的第一件事是使用 $\delta(g - \hat{g}^\zeta)$ delta-函数来对度规进行积分，

$$\begin{aligned} Z[\hat{g}] &= \frac{1}{\text{Vol}} \int \mathcal{D}\zeta \mathcal{D}X \mathcal{D}g \Delta_{FP}[g] \delta(g - \hat{g}^\zeta) e^{-S_{\text{Poly}}[X, g]} \\ &= \frac{1}{\text{Vol}} \int \mathcal{D}\zeta \mathcal{D}X \Delta_{FP}[\hat{g}^\zeta] e^{-S_{\text{Poly}}[X, \hat{g}^\zeta]} \end{aligned} \quad (5.2)$$

在这个阶段，被积函数依赖于 \hat{g}^ζ ，其中 ζ 是微分同胚和 Weyl 变换的简写。方程中的所有东西在微分同胚下都是不变的，但 Weyl 变换是另一回事。我们知道量子理论 $\int \mathcal{D}X e^{-S_{\text{Poly}}}$ 存在 Weyl 反常。作用量 S_{Poly} 在 Weyl 重新缩放下是不变的，因此微妙之处必须来自测度。同时，预计会发生什么，我们会发现 Faddeev-Popov 行列式 Δ_{FP} 也存在类似的问题。

然而，如果我们发现自己处于一种幸运的情况，问题消失了，那么事情就会很好地解决。在这种情况下，(5.2) 右边的所有东西在微分同胚和 Weyl 变换下都是不变的，我们可以写

$$Z[\hat{g}] = \frac{1}{\text{Vol}} \int \mathcal{D}\zeta \mathcal{D}X \Delta_{FP}[\hat{g}] e^{-S_{\text{Poly}}[X, \hat{g}]}$$

但现在，没有什么取决于规范变换 ζ 。事实上，这正是我们想要分离的规范轨道上的积分，它抵消了外部的“Vol”因子。我们只剩下

$$Z[\hat{g}] = \int \mathcal{D}X \Delta_{FP}[\hat{g}] e^{-S_{\text{Poly}}[X, \hat{g}]} \quad (5.3)$$

这是物理上不同构型的积分——上图中的虚线。我们看到，Faddeev-Popov 行列式正是我们需要的雅可比因子。

显然，只有当我们发现自己处于理论 (5.2) 是真正的 Weyl 不变量的情况下，上述讨论才会成功。我们的下一个任务是了解这种情况何时发生，这意味着我们需要弄清楚当我们进行 Weyl 变换时 Δ_{FP} 会变成什么样子。

5.1.2 Faddeev-Popov 行列式

我们仍然需要计算 $\Delta_{FP}[\hat{g}]$ 。其定义见 (5.1)。让我们来看看规范变换 ζ ，它接近恒等式。在这种情况下，当度规 g 接近基准度规 \hat{g} 时，delta-函数 $\delta(\hat{g} - \hat{g}^\zeta)$ 将为非零。事实上，只要看看 delta-函数 $\delta(\hat{g} - \hat{g}^\zeta)$ 就足够了，它只有在 $\zeta = 0$ 时才是非零的。我们取一个由 $\omega(\sigma)$ 参数化的无穷小 Weyl 变换和一个无穷小微分同胚 $\delta\sigma^\alpha = v^\alpha(\sigma)$ 。度规的变化是

$$\delta\hat{g}_{\alpha\beta} = 2\omega\hat{g}_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha$$

将其插入 delta-函数，Faddeev-Popov 行列式的表达式变为

$$\Delta_{FP}^{-1}[\hat{g}] = \int \mathcal{D}\omega \mathcal{D}v \delta(2\omega\hat{g}_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha) \quad (5.4)$$

其中我们已经用群的李代数上的积分 $\mathcal{D}\omega \mathcal{D}v$ 代替了规范群上的积分 $\mathcal{D}\zeta$ ，因为我们接近恒等式。（我们还隐藏了测度因子中 v_α 上的下标，以保持事物看起来整洁）

在这个阶段，用积分 Fourier 形式表示 delta-函数是有用的。对于单个 delta-函数，这是 $\delta(x) = \int dp \exp(2\pi i p x)$ 。但 (5.4) 中的 delta-函数实际上是一个 delta-泛函：它限制了整个函数。相应地积分表示是用泛函积分表示，

$$\Delta_{FP}^{-1}[\hat{g}] = \int \mathcal{D}\omega \mathcal{D}v \mathcal{D}\beta \exp \left(2\pi i \int d^2\sigma \sqrt{\hat{g}} \beta^{\alpha\beta} [2\omega\hat{g}_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha] \right)$$

其中 $\beta^{\alpha\beta}$ 是世界面上的对称 2-张量。

我们现在简单地做 $\int \mathcal{D}\omega$ 积分。它没有任何导数，所以它只是作为拉格朗日乘子，令

$$\beta^{\alpha\beta} \hat{g}_{\alpha\beta} = 0$$

换句话说，在进行 ω 积分后， $\beta^{\alpha\beta}$ 是对称的且无迹的。从现在起，我们将把它作为 $\beta^{\alpha\beta}$ 的定义。所以，我们终于有了

$$\Delta_{FP}^{-1}[\hat{g}] = \int \mathcal{D}v \mathcal{D}\beta \exp \left(4\pi i \int d^2\sigma \sqrt{\hat{g}} \beta^{\alpha\beta} \nabla_\alpha v_\beta \right)$$

5.1.3 鬼

前面的操作为我们提供了 Δ_{FP}^{-1} 的表达式。但我们想把它倒过来得到 Δ_{FP} 。值得庆幸的是，有一个简单的方法可以实现这一点。因为被积函数在 v 和 β 中是二次的，我们知道积分计算算符 ∇_α 的逆行列式。（严格地说，它计算 α_β 在对称无迹张量上投影的逆行列式。这一观察结果很重要，因为它意味着相关算符是一个二次矩阵，这对于讨论行列式是必要的）但是，我们也知道如何根据路径积分来写下行列式 Δ_{FP} 的表达式，而不是它的逆表达式：我们只需要用反对易场来代替对易积分变量，

$$\begin{aligned}\beta_{\alpha\beta} &\rightarrow b_{\alpha\beta} \\ v^\alpha &\rightarrow c^\alpha\end{aligned}$$

其中 b 和 c 都是 Grassmann 值场（即反对易）。它们被称为鬼场。这给出了 Faddeev-Popov 行列式的最终表达式，

$$\Delta_{FP}[g] = \int \mathcal{D}b \mathcal{D}c \exp[iS_{\text{ghost}}]$$

其中鬼作用量被定义为

$$S_{\text{ghost}} = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} b_{\alpha\beta} \nabla^\alpha c^\beta \quad (5.5)$$

在最后一步，我们选择重新缩放 b 场和 c 场，得到作用前面的 $1/2\pi$ 因子。（这只会改变配分函数的归一化，这无关紧要）回到欧几里得空间，因子 i 消失了。全配分函数 (5.3) 的表达式为

$$Z[\hat{g}] = \int \mathcal{D}X \mathcal{D}b \mathcal{D}c \exp(-S_{\text{Poly}}[X, \hat{g}] - S_{\text{ghost}}[b, c, \hat{g}])$$

发生了一些美好的事情。尽管鬼场是作为一些辅助结构引入的，但它们现在与动力学场 X 处于相同的基础上。我们了解到，规范的固定是有代价的：我们的理论有额外的鬼场。

这些鬼场的作用是抵消非物理规范自由度，只留下 X^μ 的 $D-2$ 横向模式。与光锥量子化不同，它们以保持 Lorentz 不变性的方式实现了这一点。

简化鬼作用量

鬼作用量 (5.5) 看着很简单。但如果在共形规范中，它将看起来更简单，

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = e^{2\omega} \delta_{\alpha\beta}$$

行列式是 $\sqrt{\hat{g}} = e^{2\omega}$ 。回想一下，在复坐标中，测度为 $d^2\sigma = 1/2 d^2z$ ，而我们可以使用 $\nabla^z = g^{z\bar{z}} \nabla_{\bar{z}} = 2e^{-2\omega} \nabla_{\bar{z}}$ 。我们有

$$S_{\text{ghost}} = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b_{zz} \nabla_{\bar{z}} c^z + b_{\bar{z}\bar{z}} \nabla_z c^{\bar{z}})$$

在推导这一点时，请记住，不存在场 $b_{z\bar{z}}$ ，因为 $b_{\alpha\beta}$ 是无迹的。好的来了：协变导数实际上只是普通的导数。要了解为什么会有这种情况，查看

$$\nabla_{\bar{z}} c^z = \partial_{\bar{z}} c^z + \Gamma_{\bar{z}\alpha}^z c^\alpha$$

但是 Christoffel 符号由

$$\Gamma_{\bar{z}\alpha}^z = \frac{1}{2} g^{z\bar{z}} (\partial_{\bar{z}} g_{\alpha\bar{z}} + \partial_{\alpha} g_{\bar{z}\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} g_{\bar{z}\alpha}) = 0 \quad \text{for } \alpha = z, \bar{z}$$

所以在共形规范中，鬼作用量分解为两个自由理论，

$$S_{\text{ghost}} = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b_{zz} \partial_{\bar{z}} c^z + b_{\bar{z}\bar{z}} \partial_z c^{\bar{z}})$$

作用量不取决于共形因子 ω 。换句话说，它是 Weyl 不变量，而不需要改变 b 和 c ：因此它们在 Weyl 变换下都是中性的。

(值得指出的是， $b_{\alpha\beta}$ 和 c^α 在 Weyl 变换下是中性的。但是，如果我们升高或下降这些指标，那么场就会选择度规的因子。因此 $b^{\alpha\beta}$ 和 c_α 在 Weyl 变换下不会是中性的)

5.2 鬼 CFT

固定 Weyl 和微分同胚规范对称性留下了两个新的动力学鬼场， b 和 c 。两者都是 Grassmann (即反对易) 变量。它们的动力学由 CFT 决定。定义

$$\begin{aligned} b &= b_{zz} \quad , \quad \bar{b} = b_{\bar{z}\bar{z}} \\ c &= c^z \quad , \quad \bar{c} = c^{\bar{z}} \end{aligned}$$

鬼作用量为

$$S_{\text{ghost}} = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b\bar{\partial}c + \bar{b}\partial\bar{c})$$

它给出了运动方程

$$\bar{\partial}b = \partial\bar{b} = \bar{\partial}c = \partial\bar{c} = 0$$

所以我们看到 b 和 c 是全纯场，而 \bar{b} 和 \bar{c} 则是反全纯场。

在进行量子化之前，我们需要从经典理论中获得最后一点信息： bc 鬼的能动张量。计算有点麻烦。我们使用能动张量 (4.4) 的一般定义，这要求我们在一般背景下回到理论 (5.5)，并改变度规 $g^{\alpha\beta}$ 。复杂性有两个方面。首先，我们从 Christoffel 符号中得到一个贡献，它潜伏在协变导数 ∇^α 中。其次，我们还必须记住， $b_{\alpha\beta}$ 是无迹的。但这是一个本身取决于度规的条件： $b_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = 0$ 。为了解释这一点，我们应该在施加无痕的作用上添加拉格朗日乘子。在正确地改变度规之后，我们可以安全地回到平直的空间，在那里最终结果相当简单。我们有 $T_{z\bar{z}} = 0$ ，正如我们对任何共形理论所必须的那样。同时给出了能动张量的全纯部分和反全纯部分，

$$T = 2(\partial c)b + c\partial b \quad , \quad \bar{T} = 2(\bar{\partial}\bar{c})\bar{b} + \bar{c}\bar{\partial}\bar{b} \quad (5.6)$$

算符乘积展开

我们可以使用我们在上一章中使用的标准路径积分技术来计算这些场的 OPE。在接下来的内容中，我们将只关注 CFT 的全纯部分。例如，

$$0 = \int \mathcal{D}b\mathcal{D}c \frac{\delta}{\delta b(\sigma)} [e^{-S_{\text{ghost}}} b(\sigma')] = \int \mathcal{D}b\mathcal{D}c e^{-S_{\text{ghost}}} \left[-\frac{1}{2\pi} \bar{\partial}c(\sigma)b(\sigma') + \delta(\sigma - \sigma') \right]$$

这告诉我们

$$\bar{\partial}c(\sigma)b(\sigma') = 2\pi\delta(\sigma - \sigma')$$

类似地，观察 $\delta/\delta c(\sigma)$ 可以得到

$$\bar{\partial}b(\sigma)c(\sigma') = 2\pi\delta(\sigma - \sigma')$$

我们可以使用我们最喜欢的公式 $\bar{\partial}(1/z) = 2\pi\delta(z, \bar{z})$ 来积分这两个方程。我们了解到，场之间的 OPE 为

$$\begin{aligned} b(z)c(w) &= \frac{1}{z-w} + \dots \\ c(w)b(z) &= \frac{1}{w-z} + \dots \end{aligned}$$

事实上，第二个方程来自第一个方程和费米统计。 $b(z)b(w)$ 和 $c(z)c(w)$ 的 OPE 没有奇异部分。它们在 $z \rightarrow w$ 时消失。

最后，我们需要该理论的能动张量。经过正则排序之后，给出

$$T(z) = 2 : \partial c(z)b(z) : + : c(z)\partial b(z) :$$

通过这种选择， b 和 c 对在 Weyl 重缩放下是中性的张量场具有适当的权重。

初级场

我们现在将证明 b 和 c 都是初级场，权重分别为 $h = 2$ 和 $h = -1$ 。让我们从 c 开始。具有能动张量的 OPE 为

$$\begin{aligned} T(z)c(w) &= 2 : \partial c(z)b(z) : c(w) + : c(z)\partial b(z) : c(w) \\ &= \frac{2\partial c(z)}{z-w} - \frac{c(z)}{(z-w)^2} + \dots = -\frac{c(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial c(w)}{z-w} + \dots \end{aligned}$$

确认 c 的权重为 -1 。当用 b 来计算 OPE 时，需要对负号更小心。有

$$\begin{aligned} T(z)b(w) &= 2 : \partial c(z)b(z) : b(w) + : c(z)\partial b(z) : b(w) \\ &= -2b(z) \left(\frac{-1}{(z-w)^2} \right) - \frac{\partial b(z)}{z-w} = \frac{2b(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial b(w)}{z-w} + \dots \end{aligned}$$

表明 b 的权重为 2 。正如我们多次指出的，共形 = 微分同胚 + Weyl。我们前面提到，场 b 和 c 在 Weyl 变换下是中性的。这反映在它们的权重中，这仅仅是由于它们的指标结构所规定的微分同胚： b_{zz} 和 c^z 。

中心荷

最后，我们可以计算 TT OPE 来确定 bc 鬼系统的中心荷。

$$\begin{aligned} T(z)T(w) &= 4 : \partial c(z)b(z) : : \partial c(w)b(w) : + 2 : \partial c(z)b(z) : : c(w)\partial b(w) : \\ &\quad + 2 : c(z)\partial b(z) : : \partial c(w)b(w) : + : c(z)\partial b(z) : : c(w)\partial b(w) : \end{aligned}$$

对于这些项中的每一项，进行两次缩并对 OPE 的贡献为 $(z-w)^{-4}$ 。还有两种方法可以进行一次缩并。根据导数的命中情况，这些函数会给出 $(z-w)^{-1}$ 或 $(z-w)^{-2}$ 或 $(z-w)^{-3}$ 的贡献。最终结果是

$$\begin{aligned} T(z)T(w) = & \frac{-4}{(z-w)^4} + \frac{4 : \partial c(z)b(w) :}{(z-w)^2} - \frac{4 : b(z)\partial c(w) :}{(z-w)^2} \\ & - \frac{4}{(z-w)^4} + \frac{2 : \partial c(z)\partial b(w) :}{z-w} - \frac{4 : b(z)c(w) :}{(z-w)^3} \\ & - \frac{4}{(z-w)^4} - \frac{4 : c(z)b(w) :}{(z-w)^3} + \frac{2 : \partial b(z)\partial c(w) :}{z-w} \\ & - \frac{1}{(z-w)^4} - \frac{: c(z)\partial b(w) :}{(z-w)^2} + \frac{\partial b(z)c(w)}{(z-w)^2} + \dots \end{aligned}$$

经过一些 Taylor 展开，将 $f(z)$ 函数转化为 $f(w)$ 函数，再加上一些项的集合，这可以写成，

$$T(z)T(w) = \frac{-13}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \dots$$

首先要注意的是，它确实具有 TT OPE 所期望的形式。其次，也是最重要的，需要注意的是 bc 鬼系统的中心荷：它是

$$c = -26$$

5.3 弦理论的临界“维度”

把这些碎片拼在一起。我们了解到，规范固定微分同胚和 Weyl 规范对称性导致引入鬼，鬼贡献中心荷 $c = -26$ 。我们还了解到，除非 $c = 0$ ，否则 Weyl 对称性是反常的。由于 Weyl 对称性是规范对称性，所以我们保持它是至关重要的。我们被迫将正确的自由度添加到弦中，以抵消鬼的贡献。

最简单的可能是添加 D 个自由标量场。它们中的每一个对中心荷的贡献都是 $c = 1$ ，所以只有选择

$$D = 26$$

这与我们在第 2 章中发现的结果一致：它是弦理论的临界维度。

然而，我们没有理由必须使用自由标量场。一致性要求只是弦的自由度由 $c = 26$ 的 CFT 来描述。任何 CFT 都可以。每个这样的 CFT 描述了一个弦可以在其中传播的不同背景。如果你愿意的话， $c = 26$ 的 CFT 的空间可以被认为是弦论经典解的空间。

我们了解到弦论的“临界维度”有点用词不当：这确实是一个“临界的中心荷”。只有对于相当特殊的 CFT，这种中心荷才能被认为是时空维度。

例如，如果我们想描述在四维闵可夫斯基空间中移动的弦，我们可以将 $D = 4$ 个自由标量（其中一个将是类时的）与其他一些 $c = 22$ 的 CFT 一起使用。这个 CFT 可能有几何解释，也可能是更抽象的东西。 $c = 22$ 的 CFT 有时被称为该理论的“内部区域”。当我们谈论“弦论的额外隐藏维度”时，这就是我们真正的意思。我们将在第 7 节中看到一些描述弯曲空间的 CFT 的例子。

还有最后一个微妙之处：我们需要小心回到闵可夫斯基空间的过渡。毕竟，我们希望 CFT 的一个方向， X^0 ，有一个反常符号的动力学项。一种安全的方法是将 X^0 保持为自由标量场，剩余的自由度由 $c = 25$ 的 CFT 描述。然而，这似乎并不令人满意，因为它不允许时空在时间上演化——当然，如果我们想了解早期宇宙宇宙学，这些当然是必要的。在时间相关背景下理解弦的世界面仍然存在一些技术障碍。为了取得进展，并讨论弦宇宙学，通常通过处理我们将在第 7 节中导出的低能量有效作用来绕过这个问题。

5.3.1 The Usual Nod to the Superstring

超弦在世界面上还有另一个规范对称性：超对称性。这会产生更多的鬼，即所谓的 $\beta\gamma$ 系统，其中心荷为 $+11$ 。一致性要求弦的自由度具有中心荷 $c = 26 - 11 = 15$ 。

然而，现在 CFT 本身在超对称性下必须是不变的，这意味着玻色子与费米子匹配。如果我们加上 D 个玻色子，那么我們也需要加上 D 个费米子。自由玻色子的 $c = 1$ ，而自由费米子的 $c = 1/2$ 。因此，我们应该加上

的自由玻色子的总数是 $D(1 + 1/2) = 15$ ，这给了我们超弦的临界维度：

$$D = 10$$

5.3.2 题外话：非临界弦

值得停下谈谈 Polyakov 在四页纸的论文中做了什么。他的主要关注不是 $D = 26$ 的临界弦，而是 $D \neq 26$ 的非临界弦。从上面的讨论中，我们知道这些都受到 Weyl 反常的影响。事实上，有一种方法可以理解这种情况。

出发点是从开始就放弃 Weyl 不变性。从 D 个自由标量场耦合到一个动力学世界面度规 $g_{\alpha\beta}$ 开始（更普遍地说，可以有任何 CFT）。我们仍然希望保持重参数化不变性，但现在忽略了 Weyl 不变性的约束。当然，这似乎与 Nambu-Goto 弦没有太大关系，无论如何请继续。在没有 Weyl 不变性的情况下，一个额外项可以自然添加到二维理论中：一个世界面宇宙学常数 μ ，

$$S_{\text{non-critical}} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} (g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + \mu)$$

要了解配分函数在 Weyl 重缩放下是如何变化。将有两项贡献：一个来自显式 μ 依赖性，一个来自 Weyl 反常。考虑与 Weyl 变换相关的两个度规

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = e^{2\omega} g_{\alpha\beta}$$

当我们改变 ω 时，配分函数 $Z[g]$ 变化为

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \omega} &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}X e^{-S} \left(-\frac{\partial S}{\partial \hat{g}_{\alpha\beta}} \frac{\partial \hat{g}_{\alpha\beta}}{\partial \omega} \right) \\ &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}X e^{-S} \left(-\frac{1}{2\pi} \sqrt{\hat{g}} T^\alpha{}_\alpha \right) \\ &= \frac{c}{24\pi} \sqrt{\hat{g}} \hat{R} - \frac{1}{2\pi\alpha'} \mu e^{2\omega} \\ &= \frac{c}{24\pi} \sqrt{g} (R - 2\nabla^2 \omega) - \frac{1}{2\pi\alpha'} \mu e^{2\omega} \end{aligned}$$

其中，在最后两行中，我们使用了 Weyl 反常 (4.35) 和 Ricci 曲率之间的关系 (1.29)。在这些公式中出现的中心荷包括来自鬼的贡献，

$$c = D - 26$$

现在可以把它当作配分函数 Z 的微分方程来求解。这使我们能用其他世界面度规上定义的 $Z[g]$ 表示这个世界面度规上定义的配分函数 $Z[\hat{g}]$ 。关系为，

$$Z[\hat{g}] = Z[g] \exp \left[-\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} \left(2\mu e^{2\omega} - \frac{c\alpha'}{6} (g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \omega \partial_\beta \omega + R\omega) \right) \right]$$

我们看到缩放模式 ω 继承了一个动力学项。它现在作为一个新的动力学标量场出现在理论中。由于指数势项乘以 μ ，它通常被称为刘维尔场。解决这个理论相当困难⁷。还要注意，我们的新标量场 ω 出现在 Ricci 标量 R 的乘积的最后一项中。我们将在第 7.2.1 节中描述这一点的重要性。我们还将在第 7.4.4 节中看到这种拉格朗日量的另一个推导。

5.4 态和顶点算符

在第二章中，我们确定了弦在平直空间中的谱。一般弦背景的质量谱是多少？该理论由 b 和 c 鬼以及 $c = 26$ 的 CFT 组成。乍一看，我们似乎有一个大大扩大的 Hilbert 空间，因为我们可以与来自所有场的产生算符一起操作，包括鬼。然而，正如你所料，并非所有这些态都是物理态。在正确解释规范对称性之后，只有一些子集幸存下来。

在具有鬼的规范固定作用中确定物理 Hilbert 空间的优雅方法被称为 BRST 量子化。你将在“高级量子场论”课程中学习它，并将其应用于 Yang-Mills 理论。虽然正确的弦谱构造采用了 BRST 方法，但由于时间不够，我们不会在这里描述它。Polchinski 的书第 4.2 节对一般方法及其在弦中的应用进行了非常清晰的描述。

相反，我们将就着让一个没有基础知识的人尝试确定弦的谱。我们的策略是简单地假装鬼不在那里，并专注于物质 CFT 的场（即，如果我们谈论的是平直空间，则为 X^μ 场）所产生的态。正如我们将在下一节中解释的那样，如果我们只对树级散射振幅感兴趣，那么这就足够了。

⁷可以在 Seiberg 的文章中找到一篇很好的评论“Notes on Quantum Liouville Theory and Quantum Gravity”，Prog. Theor. Phys. Supl. 102 (1990) 319。

为了说明如何计算弦的谱，让我们回到平直 $D = 26$ 维闵可夫斯基空间和第 2.1 节中对协变量量子化的讨论。我们发现，物理态 $|\Psi\rangle$ 受到 Virasoro 约束 (2.6) 和 (2.7) 的约束

$$L_n |\Psi\rangle = 0 \quad \text{for } n > 0$$

$$L_0 |\Psi\rangle = a |\Psi\rangle$$

并且对于 \tilde{L}_n 类似

$$\tilde{L}_n |\Psi\rangle = 0 \quad \text{for } n > 0$$

$$\tilde{L}_0 |\Psi\rangle = \tilde{a} |\Psi\rangle$$

其中，我们仅简要地考虑了左移动区域和右移动区域的不同正则排序系数 a 和 \tilde{a} 的可能性。但在共形场论中，有一个符合这些要求的态的名字：它们是初级态的权重 (a, \tilde{a}) 。

那么，我们如何修复正则排序的模糊性 a 和 \tilde{a} 呢？一个简单的方法是首先使用态-算符映射将态替换为世界面上的算符插入： $|\Psi\rangle \rightarrow \mathcal{O}$ 。但我们对算符 \mathcal{O} 有进一步的要求：规范不变性。有两种规格对称性：重参数化不变性和 Weyl 对称性。两者都限制了可能的态。

让我们从考虑重参数化不变性开始。在最后一节中，我们将算符放置在世界面的特定点上。但在一个具有动力学度规的理论中，这不会产生微分同胚不变算符。要使对象在世界面坐标的重参数化下保持不变，应该在整个世界面上进行积分。因此，我们的算符插入（在共形规范中）具有如下形式，

$$V \sim \int d^2z \mathcal{O} \quad (5.7)$$

这里的 \sim 符号反映了这样一个事实，即我们已经丢掉了整体归一化常数，我们将在下一节中回到这个常数。

在世界面上进行积分可以处理微分同胚。但 Weyl 对称性呢？在重新缩放下，测度 d^2z 的权重为 $(-1, -1)$ 。要进行补偿，算符 \mathcal{O} 必须具有权重 $(+1, +1)$ 。这就是我们修复正则排序模糊性的方法：我们需要 $a = \tilde{a} = 1$ 。注意，这与我们在第 2 章中在光锥量子化中导出的正规排序系数 $a = 1$ 一致。

这就是弦谱的粗略推导。物理态是权重为 $(+1, +1)$ 的 CFT 的初级态。与这些态相关联的算符 (5.7) 被称为顶点算符。

5.4.1 一个例子：平直空间中的闭弦

让我们使用这种新语言来重新推导平直空间中闭弦的谱。我们从弦的基态开始，它之前被确定为快子。正如我们在第 4 节中看到的，CFT 的真空与恒等算符有关。但我们也有零模式。我们可以通过与算符 $e^{ip \cdot X}$ 作用，给出弦动量 p^μ 。因此，与弦的基态相关联的顶点算符是

$$V_{\text{tachyon}} \sim \int d^2z : e^{ip \cdot X} : \quad (5.8)$$

在第 4.3.3 节中，我们证明了算符 $e^{ip \cdot X}$ 是初级算符，权重为 $h = \tilde{h} = \alpha' p^2/4$ 。但 Weyl 不变性要求算符具有权重 $(+1, +1)$ 。只有态的质量如下时才成立

$$M^2 \equiv -p^2 = -\frac{4}{\alpha'}$$

这正是我们在第 2 节中看到的快子的质量。

现在来看第一个激发态。在协变量子化中，它们的形式为 $\zeta_{\mu\nu} \alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0; p\rangle$ ，其中 $\zeta_{\mu\nu}$ 是一个常数张量，它决定了态的类型及其偏振。（回想一下：无迹对称 $\zeta_{\mu\nu}$ 对应引力子，反对称 $\zeta_{\mu\nu}$ 对应 $B_{\mu\nu}$ 场， $\zeta_{\mu\nu}$ 的迹对应称为胀子的标量）根据 (4.56)，与该态相关联的顶点算符为，

$$V_{\text{excited}} \sim \int d^2z : e^{ip \cdot X} \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu : \zeta_{\mu\nu} \quad (5.9)$$

其中， ∂X^μ 给出了 α_{-1}^μ 的激发，而 $\bar{\partial} X^\mu$ 则给出了 $\tilde{\alpha}_{-1}^\mu$ 的激发。很容易检查这个算符的权重是 $h = \tilde{h} = 1 + \alpha' p^2/4$ 。因此，Weyl 不变性要求

$$p^2 = 0$$

证实了弦的第一激发态确实是无质量的。然而，我们仍然需要检查 (5.9) 中的算符是否实际上是初级算符。我们知道 ∂X 是初级的，我们知道 $e^{ip \cdot X}$ 是

初级的，但现在我们想考虑它们在正则排序中坐在一起。这意味着 Wick 缩并中存在额外的项，这些项在 OPE 中产生 $1/(z-w)^3$ 项，可能会破坏我们算符的初级地位。一个这样的项来自双缩并，其中一个包含 $e^{ip \cdot X}$ 算符。这就产生了一个与 $p^\mu \zeta_{\mu\nu}$ 成比例的让人讨厌的项。与 \bar{T} 相同的缩并产生了一个与 $p^\nu \zeta_{\nu\mu}$ 成比例的项。为了使这些项消失，极化张量必须满足

$$p^\mu \zeta_{\mu\nu} = p^\nu \zeta_{\nu\mu} = 0$$

这正是无质量粒子所期望的横向偏振条件。

5.4.2 一个例子：平直空间中的开弦

如第 4.7 节所述，开弦的顶点算符插入到世界面的边界 $\partial\mathcal{M}$ 上。我们仍然需要确保这些算符是微分同胚不变量，这是通过在 $\partial\mathcal{M}$ 上积分来实现的。开弦快子的顶点算符是

$$V_{\text{tachyon}} \sim \int_{\partial\mathcal{M}} ds : e^{ip \cdot X} :$$

我们需要计算边界算符的量纲： $e^{ip \cdot X} :$ 。这与闭弦不同。这是由于在具有边界的空间上的自由标量场的传播子 (4.57) 中存在镜像荷。这个传播子出现在 OPE 中的 Wick 缩并中，并影响权重。让我们看看为什么会出现这种情况。首先我们观察单个标量场 X ，

$$\begin{aligned} \partial X(z) : e^{ipX(w, \bar{w})} : &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ip)^n}{(n-1)!} : X(w, \bar{w})^{n-1} : \left(-\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{z-w} - \frac{\alpha'}{2} \frac{1}{z-\bar{w}} \right) + \dots \\ &= -\frac{i\alpha' p}{2} : e^{ipX(w, \bar{w})} : \left(\frac{1}{z-w} + \frac{1}{z-\bar{w}} \right) + \dots \end{aligned}$$

根据这个结果我们现在可以计算与 T 的 OPE，

$$T(z) : e^{ipX(w, \bar{w})} := \frac{\alpha' p^2}{4} : e^{ipX} : \left(\frac{1}{z-w} + \frac{1}{z-\bar{w}} \right)^2 + \dots$$

当算符： $e^{ipX(w, \bar{w})} :$ 放置在边界 $w = \bar{w}$ 上时，这就变成了

$$T(z) : e^{ipX(w, \bar{w})} := \frac{\alpha' p^2 : e^{ipX(w, \bar{w})} :}{(z-w)^2} + \dots$$

这告诉我们边界算符： $e^{ip \cdot X} :$ 确实是初级算符，权重为 $\alpha' p^2$ 。

对于开弦，Weyl 不变性要求算符的权重为 +1，以抵消来自边界积分 $\int ds$ 的 -1 的缩放量纲。所以开弦基态的质量是

$$M^2 \equiv -p^2 = -\frac{1}{\alpha'}$$

与第 3 节中计算的开弦快子的质量一致。

光子的顶点算符为

$$V_{\text{photon}} \sim \int_{\partial\mathcal{M}} ds \zeta_a : \partial X^a e^{ip \cdot X} : \quad (5.10)$$

其中指标 $a = 0, \dots, p$ 现在只在那些具有 Neumann 边界条件的方向上运动，这些边界条件平行于膜世界体。这是一个初级算符的要求给出了 $p^a \zeta_a = 0$ ，Weyl 不变性告诉我们 $p^2 = 0$ 。这是光子动量和偏振的预期行为。

5.4.3 更一般的 CFT

现在让我们考虑一个在四维闵可夫斯基空间 \mathcal{M}_4 中传播的弦，以及一些 $c = 22$ 的内部 CFT。然后，具有权重 (h, \tilde{h}) 的内部 CFT 的任何初级算符都可以被赋予动量 p^μ ，对于 $\mu = 0, 1, 2, 3$ ，通过用 $e^{ip \cdot X}$ 修饰算符。为了获得所需的权重 $(+1, +1)$ 的初级算符，我们必须

$$\frac{\alpha' p^2}{4} = 1 - h$$

我们看到闭弦态的质谱由下式给出

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'}(h - 1)$$

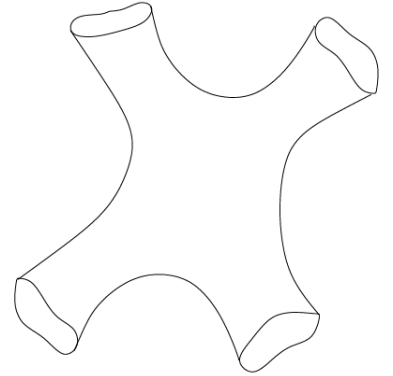
其中 h 在内部 CFT 的初级算符的谱上运行。一些注释：

- 内部 CFT 中的相关算符具有 $h < 1$ ，并在谱中产生快子。当 $h = 1$ 时，边际算符给出无质量粒子。不相关的算符会导致有质量的态。
- 请注意，要求顶点算符是 Weyl 不变量决定了态的质量公式。我们说顶点算符是“在壳”的，这与费曼图的外腿在壳上的意义相同。我们将在下一节对此有更多的介绍。

6 弦的相互作用

到目前为止，尽管付出了相当大的努力，我们只讨论了自由弦。我们现在希望考虑相互作用。如果我们以量子场论的类比为指导，那么我们可能会认为相互作用需要我们在作用中添加各种非线性项。然而，事实并非如此。任何为弦添加额外非线性项的尝试都不符合我们宝贵的规范对称性。相反，值得注意的是，所有关于相互作用的弦的信息都已经包含在 Polyakov 作用量所描述的自由理论中。（事实上，这个说法几乎是正确的）

为了证明这至少是可行的，试着画一幅两条弦相互作用的话。它看起来有点像图中所示的世界面。世界面是平滑的。在量子场论中的费曼图中，关于相互作用的信息被插入到不同线相交的顶点。这里没有这些点。在局部，图的每个部分看起来都像一个自由传播的弦。只有在全局范围内，我们才能看到该图描述了相互作用。



6.1 计算什么

如果 Polyakov 作用量中已经包含了关于弦相互作用的信息，那么让我们继续计算吧！但是我们应该计算什么呢？要尝试的一件显而易见的事情是，弦早期的特定构型演变为一段时间以后的新构型的概率。例如，我们可以尝试计算与上图相关的振幅，为弦端规定固定曲线。

没人知道怎么做。此外，可以用一些词语来形容这一失败，这表明这不是一个真正明智的计算方法。我现在试着解释这些词语。让我们从回到固定背景下熟悉的量子场论框架开始。我们可以计算的基本对象是关联函数，

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle \quad (6.1)$$

经过 Fourier 变换后，这些图描述了外腿携带任意动量的费曼图。因此，它们被称为离壳的。为了得到散射振幅，我们只需要让外腿在壳（并执行 LSZ 约化公式中给出的其他一些小技巧）。

如果我们转向引力，上述讨论需要修正。引力是规范理论，规范对称性是微分同胚。在规范理论中，只有规范不变的可观测量才有意义。但关联函数 (6.1) 不是规范不变的，因为它的值在将点 x_i 映射到另一点的微分同胚下变化。这强调了一个重要事实：在引力理论中不存在局部离壳规范不变的可观测量。

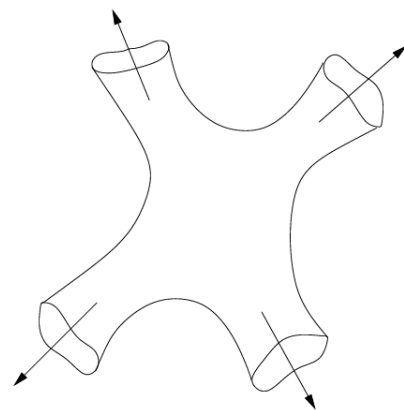
还有另一种说法。我们知道，通过因果关系，在量子场论中类空的相距遥远的算符应该是可对易的。但在引力中，算符是否类空分开的问题变成了一个动力学问题，因果结构可能会因量子效应而波动。这提供了我们无法在任何量子引力理论中定义局部规范不变可观测量的另一个原因。

现在让我们回到弦论。计算弦构型在有限时间内的演化类似于计算 QFT 中的离壳关联函数。但弦论是一种引力理论，所以这些东西可能没有意义。出于这个原因，我们不再试图计算关联函数，而是回到 S-矩阵。

S-矩阵

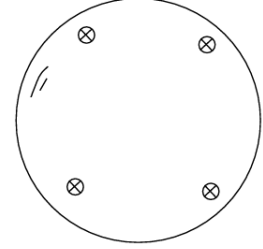
我们在弦论中可以计算的对象是 S-矩阵。这是通过将关联函数中的点趋于无穷而得到的： $x_i \rightarrow \infty$ 。这是可以接受的，因为就像在 QED 的情况下一样，系统的冗余由那些渐近消失的规范变换组成。换句话说，边界上的点在量子引力中不会波动。（这种波动将在无限大的空间上发生，并由于其无限大的作用量而被抑制）

所以我们真正要计算的是一个图中所示类型的图，其中所有的外腿都被取为无穷大。这些腿中的每一个都可以被放置在自由弦的不同态下，并被分配一些时空动量 p_i 。得到的表达式是弦的 S-矩阵。



使用态-算符映射，我们知道这些无穷远处的每一个态都等价于在世界面上插入一个适当的顶点算符。因此，为了计算这个 S-矩阵元素，我们使用共形变换把每一个无限的腿带到一个有限的距离。最终的结果是一个具有

球体拓扑的世界面，在腿曾经所在的位置点缀着顶点算符。然而，我们在上一节中已经看到，Weyl 不变性的约束意味着顶点算符必然在壳。从技术上讲，这就是我们只能在弦论中计算在壳关联函数的原因。



6.1.1 拓扑求和

Polyakov 路径积分指示我们对所有度规求和。但不同拓扑结构的世界面呢？事实上，我们也应该总结这些。正是这个和给出了弦理论的微扰展开。两个弦的分散接收来自形式世界面的贡献

$$(6.2)$$

我们唯一需要知道的是如何衡量这些不同的世界面。值得庆幸的是，弦上有一个非常自然的耦合，我们还没有考虑，这将完成任务。我们为 Polyakov 作用量增加一项

$$S_{\text{string}} = S_{\text{Poly}} + \lambda \chi \quad (6.3)$$

这里 λ 只是一个实数，而 χ 是由（欧几里得）世界面上的积分给出的

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} R \quad (6.4)$$

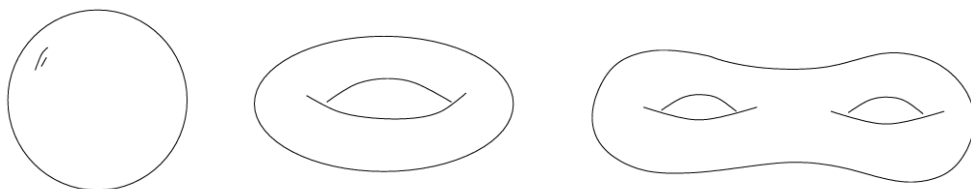
其中 R 是世界面度规的 Ricci 标量。这看起来像是世界面上引力的 Einstein-Hilbert 项。检查它在重参数化和 Weyl 变换下是不变的很简单。

在四维空间中，Einstein-Hilbert 项使引力具有动力学性质。但二维中的情况却大不相同。事实上，我们已经看到，度规的所有分量都可以测量出来，所以没有与 $g_{\alpha\beta}$ 相关的传播自由度。因此，在二维中，项 (6.4) 并没有使引力成为动力学的：事实上，从经典意义上讲，它根本没有任何作用！

这是因为 χ 是一个拓扑不变量。这意味着它实际上根本不取决于度规 $g_{\alpha\beta}$ ——它只取决于世界面的拓扑结构。（更准确地说， χ 只取决于度规的全局性质，这些性质本身取决于世界面的拓扑结构）这就是 Gauss-Bonnet 定理的内容：Ricci 标量 R 在世界面上的积分给出了一个整数 χ ，称为世界面的欧拉数。对于没有边界的世界面（即闭弦）， χ 计算世界面上柄数 (handles) h 。它为

$$\chi = 2 - 2h = 2(1 - g) \quad (6.5)$$

其中 g 被称为曲面的亏格。最简单的例子如图所示。球体的 $g = 0$ ， $\chi = 2$ ；环面的 $g = 1$ ， $\chi = 0$ 。对于更高的 $g > 1$ ，欧拉示性数 χ 是负的。



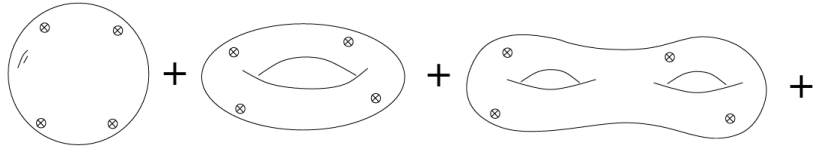
现在我们看到，数 λ ——或者更准确地说， e^λ ——扮演着弦耦合的角色。世界面上的积分通过下式加权，

$$\sum_{\substack{\text{topologies} \\ \text{metrics}}} e^{-S_{\text{string}}} \sim \sum_{\text{topologies}} e^{-2\lambda(1-g)} \int \mathcal{D}X \mathcal{D}g e^{-S_{\text{Poly}}}$$

对于 $e^\lambda \ll 1$ ，我们有一个很好的微扰展开，其中我们对所有拓扑求和（事实上，它是一个渐近展开，就像在量子场论中一样）。将弦耦合常数定义为

$$g_s = e^\lambda$$

在共形映射之后，树级散射对应于具有球体拓扑的世界面：振幅与 $1/g_s^2$ 成比例。单圈散射对应于环形世界面，通过归一化，它没有 g_s 的幂。（尽管很明显，相对于树级进程， g_s^2 会抑制这些）最终结果是 (6.2) 中对世界面的和变成了增加亏格的黎曼曲面上的和，并为初始态和最终态插入了顶点算符，



亏格 g 的黎曼曲面的加权如下

$$(g_s^2)^{g-1}$$

虽然看起来已经在理论中引入了一个新参数 g_s ，并手动添加了耦合 (6.3)，稍后会看到为什么这种耦合是理论必要组成部分，并为 g_s 提供解释。

散射振幅

我们现在已经掌握了解释如何计算弦散射振幅所需的所有信息。假设我们想要计算 m 个态的 S-矩阵：我们将它们标记为 Λ_i ，并赋予它们时空动量 p_i 。每个都有一个相应的顶点算符 $V_{\Lambda_i}(p_i)$ 。然后，通过计算二维共形场论中的关联函数，并插入顶点算符，来计算 S-矩阵元素。

$$\mathcal{A}^{(m)}(\Lambda_i, p_i) = \sum_{\text{topologies}} g_s^{-\chi} \frac{1}{\text{Vol}} \int \mathcal{D}X \mathcal{D}g e^{-S_{\text{Poly}}} \prod_{i=1}^m V_{\Lambda_i}(p_i)$$

这是一个相当奇特的方程。我们将二维理论的关联函数解释为 $D = 26$ 维理论的 S-矩阵！

为了正确地计算关联函数，我们应该介绍我们在上一章中看到的 b 和 c 鬼，并仔细对待它们。然而，如果只对树级的振幅感兴趣，那么可以天真地忽略这些鬼。原因可以从鬼的作用量 (5.5) 中看出，在鬼的作用量中，我们看到鬼只与世界面度规耦合，而不与其他世界面上的场耦合。这意味着，如果我们完全固定了世界面的度规——就像它对具有球体拓扑的世界面所做的那样——那么我们就可以忘记鬼了。（至少，一旦我们确定 Weyl 反常抵消了，我们就可以忘记它们）然而，正如我们将在 6.4 中解释的那样，对于更高的亏格世界面，规范固定并不能完全固定度规，并且度规存在剩余的动力学模，称为模态，它耦合了鬼和物质场。这类似于场论中的说法，即我们只需要在圈级问题中考虑鬼。

6.2 闭弦的树级振幅

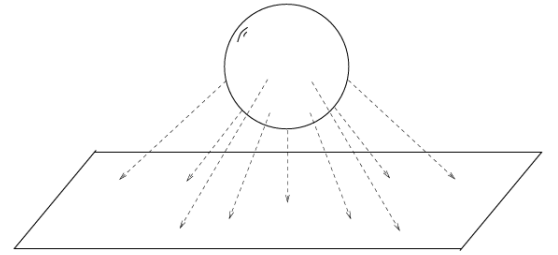
树级散射振幅由在球面上计算的二维理论的关联函数给出，

$$\mathcal{A}^{(m)} = \frac{1}{g_s^2} \frac{1}{\text{Vol}} \int \mathcal{D}X \mathcal{D}g e^{-S_{\text{Poly}}} \prod_{i=1}^m V_{\Lambda_i}(p_i)$$

其中 $V_{\Lambda_i}(p_i)$ 是与态相关联的顶点算符。

我们希望对球面上的所有度规进行积分。乍一看，这听起来相当令人生畏，但是，当然，我们有微分同胚和 Weyl 变换的规范对称性。球面上的任何度规都共形等价于平面上的平直度规。例如，半径为 R 的球面上的圆形度规可以写成

$$ds^2 = \frac{4R^2}{(1 + |z|^2)^2} dz d\bar{z}$$



它明显地共形等价于平面，由无穷远处的点补充。从球体到平面的共形映射是图中所示的立体投影。球体的南极被映射到原点；北极被映射到无穷远处的点。因此，我们可以规范固定微分同胚和 Weyl 变换，而不是对所有度规进行积分，从而留给我们一个看似更容易的任务，在平面上计算关联函数。

6.2.1 冗余规范对称性：SL(2,C)

有一个微妙之处。这是我们以前看到的一个微妙之处：存在冗余规范对称性。它是共形群，由微分同胚产生，可以通过 Weyl 变换抵消。正如我们在第 4 章中看到的，有无限多个这样的共形变换。看起来我们还有很多规范固定工作要做。

然而，全局问题实际上意味着冗余的规范对称性比你想象的要少。在第 4 章中，我们只研究了由 Virasoro 算符 $L_n, n \in \mathbf{Z}$ 生成的无穷小共形变换。没有研究这些变换在全空间上是否是定义明确和可逆的。让我们来看

看这个。回想一下，与 L_n 相关联的坐标变化是由向量场 (4.49) 产生的，

$$l_n = z^{n+1} \partial_z$$

这导致了位移 $\delta z = \epsilon z^{n+1}$ 。仅当 $n \geq -1$ 时，这在 $z = 0$ 时是非奇异的。如果我们限制为光滑映射，则可以立即消除一半的变换。但是，由于我们最终对球面感兴趣，我们现在还需要担心 $z = \infty$ 处的点，在立体投影中，它只是球面的北极。为此，使用坐标是有用的

$$u = \frac{1}{z}$$

u 坐标的坐标变换的生成元是

$$l_n = z^{n+1} \partial_z = \frac{1}{u^{n+1}} \frac{\partial u}{\partial z} \partial_u = -u^{1-n} \partial_u$$

仅当 $n \leq 1$ 时，它在 $u = 0$ 时是非奇异的。

结合这两个结果，在整个黎曼球面上非奇异的共形群的唯一生成元是 l_{-1}, l_0 和 l_1 ，它们的无限小形式为

$$l_{-1} : z \rightarrow z + \epsilon$$

$$l_0 : z \rightarrow (1 + \epsilon)z$$

$$l_1 : z \rightarrow (1 + \epsilon z)z$$

这些变换的全局版本是

$$l_{-1} : z \rightarrow z + \alpha$$

$$l_0 : z \rightarrow \lambda z$$

$$l_1 : z \rightarrow \frac{z}{1 - \beta z}$$

它们可以组合起来给出一般的变换

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \quad (6.6)$$

其中 a, b, c 和 $d \in \mathbf{C}$ 。有四个复的参数，但只有三个变换。发生了什么？一个变换是假的，因为参数的整体缩放不会改变 z 。通过这样的重缩放，我们可以始终坚持参数满足

$$ad - bc = 1$$

受此约束的变换 (6.6) 具有群结构 $SL(2; \mathbf{C})$ ，它是具有单位行列式的 2×2 复矩阵群。事实上，由于对所有参数反转符号后变换本身不变，因此全局共形变换的实际的群是 $SL(2; \mathbf{C})/\mathbf{Z}_2$ ，它有时被写成 $PSL(2; \mathbf{C})$ 。（在接下来的内容中， \mathbf{Z}_2 的微妙之处对我们来说并不重要）

球上的冗余全局变换被称为共形 Killing 向量，群 $SL(2; \mathbf{C})/\mathbf{Z}_2$ 是共形 Killing 群。这个群允许我们取平面上的任意三个点，并将它们移动到我们选择的其他三个点。我们将很快利用这个事实来规范固定，但现在我们保留 $SL(2; \mathbf{C})$ 对称性不变。

6.2.2 Virasoro-Shapiro 振幅

现在我们将计算闭弦快子的 S-矩阵。你可能会认为这是最不有趣的计算：毕竟，我们最终对没有快子的超弦感兴趣。这是真的，但事实证明，快子散射比其他任何东西都简单得多，主要是因为我们没有太多关于态的额外指标需要担心。此外，我们将从快子散射中学到的经验也适用于其他态的散射。

m 点快子散射振幅由平直空间关联函数给出

$$\mathcal{A}(p_1, \dots, p_m) = \frac{1}{g_s^2} \frac{1}{\text{Vol}(SL(2; \mathbf{C}))} \int \mathcal{D}X e^{-S_{\text{Poly}}} \prod_{i=1}^m V(p_i)$$

其中快子顶点算符由下式给出，

$$V(p_i) = g_s \int d^2z e^{ip_i \cdot X} \equiv g_s \int d^2z \hat{V}(z, p_i) \quad (6.7)$$

请注意，与 (5.8) 相反，我们为顶点算符添加了一个适当的归一化因子。从启发性的角度来看，这反映了算符与闭弦模式的添加相关联的事实。这种规范化的严格推导可以在 Polchinski 中找到。

因此，振幅可以被写为，

$$\mathcal{A}^{(m)}(p_1, \dots, p_m) = \frac{g_s^{m-2}}{\text{Vol}(SL(2; \mathbf{C}))} \int \prod_{i=1}^m d^2 z_i \langle \hat{V}(z_1, p_1) \dots \hat{V}(z_m, p_m) \rangle$$

其中期望值 $\langle \dots \rangle$ 是使用规范固定的 Polyakov 作用量计算的。但规范固定的 Polyakov 作用量只是一个自由理论，我们的关联函数是可计算的：高斯积分，

$$\langle \hat{V}(z_1, p_1) \dots \hat{V}(z_m, p_m) \rangle = \int \mathcal{D}X \exp \left(-\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2 z \partial X \cdot \bar{\partial} X \right) \exp \left(i \sum_{i=1}^m p_i \cdot X(z_i, \bar{z}_i) \right)$$

Polyakov 作用量前面的归一化系数现在是 $1/2\pi\alpha'$ 而不是 $1/4\pi\alpha'$ ，因为我们使用的是复坐标，我们需要记住 $\partial_\alpha \partial^\alpha = 4\partial\bar{\partial}$ 和 $d^2 z = 2d^2\sigma$ 。

高斯积分

我们当然知道如何计算高斯积分。让我们慢慢来。考虑以下一般积分，

$$\int \mathcal{D}X \exp \left(\int d^2 z \frac{1}{2\pi\alpha'} X \cdot \partial\bar{\partial} X + iJ \cdot X \right) \sim \exp \left(\frac{\pi\alpha'}{2} \int d^2 z d^2 z' J(z, \bar{z}) \frac{1}{\partial\bar{\partial}} J(z', \bar{z}') \right)$$

在这里， \sim 符号反映了这样一个事实，即我们已经删除了很多不相关的归一化项，包括 $\det^{-1/2}(-\partial\bar{\partial})$ 。该方程右手边的逆算符 $1/\partial\bar{\partial}$ 是传播算符 $G(z, z')$ 的简写，它求解

$$\partial\bar{\partial}G(z, \bar{z}; z', \bar{z}') = \delta(z - z', \bar{z} - \bar{z}')$$

正如我们之前多次看到的，在二维中，这个传播子由

$$G(z, \bar{z}; z', \bar{z}') = \frac{1}{2\pi} \ln |z - z'|^2$$

回到散射振幅

将我们的散射振幅与这个通用表达式进行比较，我们需要将源 J 取为

$$J(z, \bar{z}) = \sum_{i=1}^m p_i \delta(z - z_i, \bar{z} - \bar{z}_i)$$

将其插入高斯积分中，可以得到振幅的表达式

$$\mathcal{A}^{(m)} \sim \frac{g_s^{m-2}}{\text{Vol}(SL(2; \mathbf{C}))} \int \prod_{i=1}^m d^2 z_i \exp \left(\frac{\alpha'}{2} \sum_{j,l} p_j \cdot p_l \ln |z_j - z_l| \right)$$

$j = l$ 的项似乎有问题。事实上，他们应该被排除在外。这源于正确实现正则排序，并留给我们

$$\mathcal{A}^{(m)} \sim \frac{g_s^{m-2}}{\text{Vol}(SL(2; \mathbf{C}))} \int \prod_{i=1}^m d^2 z_i \prod_{j < l} |z_j - z_l|^{\alpha' p_j \cdot p_l} \quad (6.8)$$

事实上，我们漏掉了一些东西。（不是一直这样吗！）我们当然期望平直空间中的散射服从动量守恒，因此振幅中应该有一个 $\delta^{(26)}(\sum_{i=1}^m p_i)$ 。但它在哪儿？我们漏掉了它，因为我们在计算高斯积分时有点太快了。在模式展开中，算符 $\partial \bar{\partial}$ 湮灭了零模 x^μ 。这意味着它的逆， $1/\partial \bar{\partial}$ ，并没有得到很好的定义。但通过单独处理零模式很容易处理这个问题。导数 ∂^2 看不到 x^μ ，但源 J 有。在路径积分中对零模式进行积分，得到了我们的 delta-函数

$$\int dx \exp(i \sum_{i=1}^m p_i \cdot x) \sim \delta^{(26)}(\sum_{i=1}^m p_i)$$

因此，我们对振幅的最终结果是

$$\mathcal{A}^{(m)} \sim \frac{g_s^{m-2}}{\text{Vol}(SL(2; \mathbf{C}))} \delta^{(26)}(\sum_i p_i) \int \prod_{i=1}^m d^2 z_i \prod_{j < l} |z_j - z_l|^{\alpha' p_j \cdot p_l} \quad (6.9)$$

四点振幅

我们将只计算快子 2 到 2 散射的四点振幅。 $\text{Vol}(SL(2; \mathbf{C}))$ 因子提醒我们，我们仍然有一个冗余的规范对称性。现在让我们固定这个。正如我们之前提到的，它为我们提供了足够的自由，可以取平面上的任何三个点，并将它们移动到任何其他三个点。我们将利用此设置

$$z_1 = \infty, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = z, \quad z_4 = 1$$

把它代入振幅 (6.9) 中，我们发现我们只需要计算一个积分，

$$\mathcal{A}^{(4)} \sim g_s^2 \delta^{(26)}(\sum_i p_i) \int d^2 z |z|^{\alpha' p_2 \cdot p_3} |1 - z|^{\alpha' p_3 \cdot p_4} \quad (6.10)$$

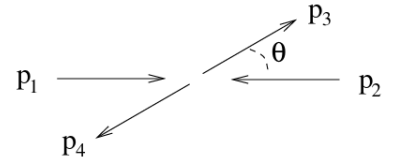
(还有一个整体因子 $|z_1|^4$ ，但它只是被吸收到一个整体归一化常数中) 我们仍需要积分。它可以用伽玛函数精确地计算。证据放在附录 6.5 中，我们有

$$\int d^2z |z|^{2a-2} |1-z|^{2b-2} = \frac{2\pi\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(1-c)} \quad (6.11)$$

其中 $a+b+c=1$ 。

四点散射振幅通常用 Mandelstam 变量表示。我们选择 p_1 和 p_2 作为入射动量，选择 p_3 和 p_4 作为出射动量，如图所示。然后我们定义

$$s = -(p_1+p_2)^2, \quad t = -(p_1+p_3)^2, \quad u = -(p_1+p_4)^2$$



它们服从

$$s + t + u = -\sum_i p_i^2 = \sum_i M_i^2 = -\frac{16}{\alpha'}$$

在最后一个等式中，我们代入了快子质量的值 (2.27)。用 Mandelstam 变量写出散射振幅 (6.10)，我们得到了最终答案

$$\mathcal{A}^{(4)} \sim g_s^2 \delta^{(26)}(\sum_i p_i) \frac{\Gamma(-1 - \alpha's/4)\Gamma(-1 - \alpha't/4)\Gamma(-1 - \alpha'u/4)}{\Gamma(2 + \alpha's/4)\Gamma(2 + \alpha't/4)\Gamma(2 + \alpha'u/4)} \quad (6.12)$$

这是在闭玻色弦中控制快子散射的 Virasoro-Shapiro 振幅。

值得注意的是，Virasoro-Shapiro 振幅几乎是弦理论的第一个方程！（这一荣誉实际上属于 Veneziano 振幅，它是开弦超子的类似表达式，将在第 6.3.1 节中导出）这些振幅早在人们知道它们与弦有任何关系之前就被写下来了：它们只是展示了一些有趣和令人惊讶的特性。经过几年的工作才意识到它们实际上描述了弦的散射。我们现在将开始梳理 Virasoro-Shapiro 振幅，看看多年前让人们着迷的一些特性。


6.2.3 经验教训

那么，散射振幅 (6.12) 背后的物理原理是什么呢？显然，它在 s ， t 和 u 中是对称的。这已经令人惊讶了，我们很快就会回到这里。但我们将从固定 t 开始，看看当我们改变 s 时振幅的性质。

首先要注意的是 $\mathcal{A}^{(4)}$ 有极点。大量极点。它们来自分子中 $\Gamma(-1-\alpha's/4)$ 的因子。当满足下列条件时，出现这些极点中的第一个

$$-1 - \frac{\alpha's}{4} = 0 \Rightarrow s = -\frac{4}{\alpha'}$$

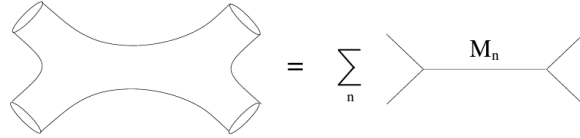
但这就是快子的质量！这意味着，对于接近 $-4/\alpha'$ 的 s ，振幅具有量子场论中常见的具有三次顶点的散射振幅的形式，



$$\sim \frac{1}{s - M^2}$$

其中 M 是交换粒子的质量，在这种情况下是快子。

振幅中的其他极点出现在 $s = 4(n-1)/\alpha'$ ，其中 $n \in \mathbf{Z}^+$ 。这正是闭弦的较高态的质量公式。据了解，弦振幅是对无限多个树级场论图的求和，



$$= \sum_n \text{diagram with } M_n$$

其中交换的粒子是自由弦的所有不同态。

事实上，在这些振幅中隐藏着更多关于态谱的信息。我们可以在 $s = 4(n-1)/\alpha'$ 时看到极点的留数，对于 $n = 0, 1, \dots$ 。这些留数是 t 的相当复杂的函数，但每个极点出现的动量的最高幂是

$$\mathcal{A}^{(4)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{s - M_n^2} \quad (6.13)$$

动量的幂告诉我们 n 级粒子态的最高自旋。要了解为什么会这样，请考虑一个对应于自旋为 J 的粒子的场。它有一大堆 Lorentz 指标， $\chi_{\mu_1 \dots \mu_J}$ 。在三次相互作用中，每一个都必须被导数吸收。因此，我们在每个顶点都有 J 个导数，为费曼图的分子贡献 $(\text{momentum})^{2J}$ 的幂。通过与弦散射振幅的比较，我们发现 n 能级的最高自旋粒子具有 $J = 2n$ 。这确实是我们第 2 节中从弦的正则量子化中看到的结果。

最后，振幅 (6.12) 的性质与场论中的振幅非常不同。在上文中，我们通过保持 t 不变并在 s 中扩展来构建我们的讨论。我们本可以做相反的事情：固定 s ，然后看 t 中的极点。现在，弦的振幅可以解释为无限多个 t -通道散射振幅，弦的每种态都有一个

$$= \sum_n \text{Diagram with four external legs and a central vertical line labeled } M_n$$

通常在场论中，我们对 s -通道和 t -通道的散射振幅进行总结。在弦理论中并非如此。在无限数量的 s -通道振幅上的和可以被重新解释为 t -通道振幅的无限和。我们不把两者都包括在内：那样算太多了。（类似的陈述适用于 u ）事实上，相同的振幅可以写为 s -通道极点上的和或 t -通道极点的和，有时被称为“对偶性”。（一个被过度使用的词）在早期，在弦理论是弦理论之前，该学科的名称继承自振幅的对偶性质：它被称为 dual resonance 模型。

高能散射

让我们用这个振幅来看看当我们在高能下碰撞弦时会发生什么。考虑不同的制度。最具启发性的是 $s, t \rightarrow \infty$, s/t 保持固定。在这个极限下，所有交换的动量都变大了。它对应于高能散射，入射粒子和出射粒子之间的角度 θ 保持不变。例如，要看到这一点，可以考虑无质量粒子（我们的振幅实际上是针对快子的，但同样的考虑也适用）。将传入和传出的动量视为

$$p_1 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 1, 0, \dots) \quad , \quad p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, -1, 0, \dots)$$

$$p_3 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, \cos\theta, \sin\theta, \dots) \quad , \quad p_4 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, -\cos\theta, -\sin\theta, \dots)$$

然后我们明确地看到 $s \rightarrow \infty$ 和 $t \rightarrow \infty$ 在比值 s/t 固定的情况下，散射角 θ 也保持不变。

我们可以通过使用 $\Gamma(x) \sim \exp(x \ln x)$ 来计算在这个极限下的散射振幅 $\mathcal{A}^{(4)}$ 。我们发送 $s \rightarrow \infty$ 避开极点。（我们可以通过发送 $s \rightarrow \infty$ 在稍微想象的方向上。最终，这是有效的，因为在相互作用理论中，所有更高的弦态实际上都是不稳定的，一旦考虑到这一点，它们的极点就会偏离实轴）检查振幅在高能量下以指数形式快速下降是简单的，

$$\mathcal{A}^{(4)} \sim g_s^2 \delta^{(26)} \left(\sum_i p_i \right) \exp \left(-\frac{\alpha'}{2} (s \ln s + t \ln t + u \ln u) \right) \quad \text{as } s \rightarrow \infty \quad (6.14)$$

在 (6.14) 中看到的指数衰减比任何场论的振幅都快得多，任何场论在最好的情况下都会在高能下随幂律衰减而衰减，更糟的情况下会发散。例如，考虑与涉及自旋为 $2n$ 的粒子交换的 s -通道过程的振幅相对应的单个项 (6.13)。我们看到，自旋为 2 的粒子的交换导致了这个极限的发散。这反映了你对引力的一些了解：无量纲耦合是 $G_N E^2$ （在四维中），其对于大能量变得较大。更高自旋粒子的交换会产生更糟糕的发散。如果我们在任何有限的 n 处截断无穷和 (6.13)，整个过程就会发散。但是无限和可以做有限和不能做的事情，振幅 (6.14) 的最终行为比任何单个项都要软得多。弦论中无限数量的粒子共同使得单个粒子物种产生的任何发散都是有限的。

从粒子的 s -通道交换的角度来看，弦论的高能行为似乎有些神奇。但还有另一种观点是显而易见的。散射振幅的幂律行为是点状荷的特征。但是，当然，弦不是一个类似点的物体。它在相当于 $\sqrt{\alpha'}$ 的长度尺度上是伸展的和模糊的。这就是振幅具有如此软的高能行为的原因。事实上，在非相对论量子力学中，你以前见过这样一种观点，即光滑的扩展物体会产生在高能下呈指数衰减的散射振幅。例如，考虑粒子从高斯势的散射。在 Born 近似中，微分截面只是由 Fourier 变换给出的，Fourier 变换也是高斯变换，现在对于大动量呈指数衰减。

人们常说，量子引力理论应该有一个“最小长度”，有时被认为是普朗克尺度。这在弦理论中大致正确，尽管不是以任何简单粗暴的方式。相反，根据被问的问题，最小长度以不同的方式显示出来。上面的讨论突出了一个例子：弦不能探测小于 $l_s = \sqrt{\alpha'}$ 的距离标度，因为它们本身在这个标度

上是模糊的。事实证明，D-膜是亚弦物理中更好的探针，并对时空的短距离结构提供了不同的看法。我们还将在第 8.3 节中看到弦论最小长度尺度的另一种表现形式。

引力散射

尽管我们已经推导出了快子的结果 (6.14)，但所有树级振幅在高能量下都有这种软衰减。最值得注意的是，这包括引力子散射。如上所述，这与广义相对论形成了鲜明对比，广义相对论的树级散射振幅在高能下发散。这是第一个发现广义相对论中的紫外问题可能在弦理论中有望得到解决的地方。

使用本节中描述的技术，可以计算引力子散射的 m 点树级振幅。如果我们将注意力局限于低能量（即远小于 $1/\sqrt{\alpha'}$ ），可以证明这些能量与 $D = 26$ 维中 Einstein-Hilbert 作用量产生的振幅一致

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{26}X \sqrt{-G} \mathcal{R}$$

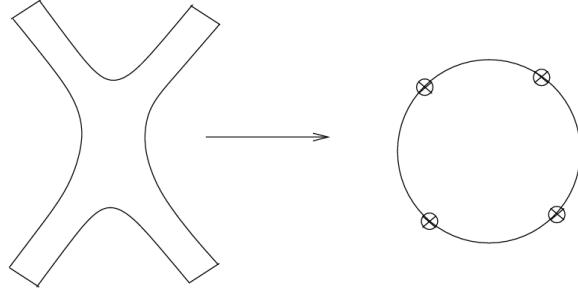
其中 \mathcal{R} 是 $D = 26$ 的 Ricci 标量（不要与我们称之为 R 的世界面 Ricci 标量混淆）。引力耦合 κ^2 与 26 维中的牛顿常数有关。它对纯粹的引力没有作用，但当我们与物质结合时，它很重要。我们很快就会看到

$$\kappa^2 \approx g_s^2 (\alpha')^{12}$$

在这门课上，我们不会明确计算引力子散射振幅，一部分原因是它们相当混乱，另一部分原因在于从 m 个粒子散射建立 Einstein-Hilbert 作用量并不是研究广义相对论的最佳方法。相反，我们将在第 7 节中以更好的方式推导 Einstein-Hilbert 作用量。

6.3 开弦的散射

到目前为止，我们的讨论完全是关于闭弦的。开弦也有类似的情况。我们再次计算 S-矩阵元素。共形对称现在将树级散射映射到圆盘，并在圆盘的边界上插入顶点算符。



对于开弦，我们添加到 Polyakov 作用量中的弦耦合常数需要添加一个边界项以使其定义良好，

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \sqrt{g} R + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} ds k \quad (6.15)$$

其中 k 是边界的测地曲率。为了定义它，我们在世界面上引入了两个单位向量： t^α 与边界相切，而 n^α 是法线，从边界向外指。测地曲率定义为

$$k = -t^\alpha n_\beta \nabla_\alpha t^\beta$$

在广义相对论中，对于具有边界的流形，也需要 (6.15) 中所示类型的边界项：在这种情况下，它们被称为 Gibbons-Hawking 项。

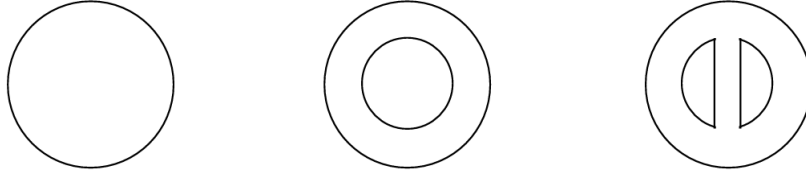
Gauss-Bonnet 定理推广到有边界的曲面。对于有 h 个柄数和 b 个边界的曲面，Euler 示性数为

$$\chi = 2 - 2h - b$$

一些示例如下图所示。开弦散射的扩展包括向世界面添加连续边界。圆盘的权重为 $1/g_s$ ；环没有 g_s 等因子。我们看到，开弦耦合与闭弦耦合的关系如下

$$g_{\text{open}}^2 = g_s \quad (6.16)$$

计算闭弦散射振幅的关键步骤之一是实现共形 Killing 群，该群被定义为在球体上具有全局作用的剩余规范对称性。对于开弦，再次存在剩余规范对



称性。如果我们从上半平面的角度来看，边界是 $\text{Im}z = 0$ 。共形 Killing 群由下列变换组成

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}$$

再次要求 $ad - bc = 1$ 。这一次还有一个条件：边界 $\text{Im}z = 0$ 必须被映射到其自身上。这需要 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ 。得到的共形 Killing 群是 $SL(2; \mathbf{R})/\mathbf{Z}_2$ 。

6.3.1 Veneziano 振幅

由于顶点算符现在位于边界上，因此它们具有固定的顺序。在计算散射振幅时，我们必须对所有阶数求和。让我们再看一下快子散射的 4 点振幅。顶点算符是

$$V(p_i) = \sqrt{g_s} \int dx e^{ip_i \cdot X}$$

其中积分 $\int dx$ 现在在边界上， $p^2 = 1/\alpha'$ 是开弦超子的在壳条件。归一化 $\sqrt{g_s}$ 适用于插入开弦模式，反映 (6.16)。

通过与闭弦相同的步骤，我们发现振幅由下式给出

$$\mathcal{A}^{(4)} \sim \frac{g_s}{\text{Vol}(SL(2; \mathbf{R}))} \delta^{(26)}(\sum_i p_i) \int \prod_{i=1}^4 dx_i \prod_{j < l} |x_j - x_l|^{2\alpha' p_j \cdot p_l} \quad (6.17)$$

请注意，指数中有一个因子 2，与闭弦表达式 (6.8) 不同。这是因为边界传播子 (4.57) 由于镜像荷而具有 2 的额外因子。

我们现在使用 $SL(2; \mathbf{R})$ 剩余规范对称性来固定边界上的三个点。我们选择一个特定的排序，并设置 $x_1 = 0, x_2 = x, x_3 = 1$ 和 $x_4 \rightarrow \infty$ 。唯一的自由插入点是 $x_2 = x$ ，但由于算符排序的限制，它必须位于区间 $x \in [0, 1]$ 中。积分的有趣部分由下式给出

$$\mathcal{A}^{(4)} \sim g_s \int_0^1 dx |x|^{2\alpha' p_1 \cdot p_2} |1-x|^{2\alpha' p_2 \cdot p_3}$$

这个积分是众所周知的：如附录 6.5 所示，它是 Euler beta 函数

$$B(a, b) = \int_0^1 dx x^{a-1} (1-x)^{b-1} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

在对顶点算符的不同顺序求和之后，开弦快子散射的振幅最终结果是，

$$\mathcal{A}^{(4)} \sim g_s [B(-\alpha' s - 1, -\alpha' t - 1) + B(-\alpha' s - 1, -\alpha' u - 1) + B(-\alpha' t - 1, -\alpha' u - 1)]$$

这是著名的 Veneziano 振幅，于 1968 年首次被假设为捕捉到了强相互作用的一些观测特征。这是在 QCD 出现之前，在意识到振幅来自弦之前。

开弦散射振幅包含与我们在闭弦中看到的相同的特征。例如，它在下处有极点

$$s = \frac{n-1}{\alpha'} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

我们将其识别为开弦的谱。

6.3.2 D-膜的张力

回想一下，我们引入 D-膜作为空间中的表面，弦可以在其上结束。当时，我承诺最终会发现这些 D-膜本身就是动力学物体。我们将在下一节中更仔细地研究这一点，但现在可以做一个简单的计算来确定 D-膜的张力。

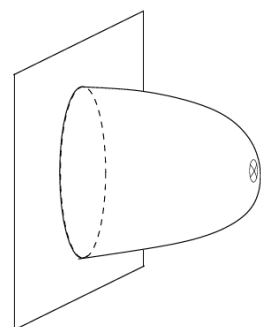
D $_p$ -膜的张力 T_p 被定义为每空间体积的能量。其量纲为 $[T_p] = p + 1$ 。张力告诉我们膜和重力之间耦合的大小。或者，在我们的新语言中，闭弦态和开弦之间的相互作用强度。图中显示了最简单的此类图，其中插入了引力子顶点操作符。虽然我们不会完全计算这个图，但我们可以通过观察它

来找出它最重要的性质：它具有圆盘的拓扑结构，因此与 $1/g_s$ 成比例。添加 α' 的幂以获得正确的量纲，Dp-膜的张力必须按比例缩放

$$T_p \sim \frac{1}{l_s^{p+1}} \frac{1}{g_s} \quad (6.18)$$

弦长度定义为 $l_s = \sqrt{\alpha'}$ 。张力 $1/g_s$ 标度是 D-膜关键特征。

应该承认，在上面的讨论中，有很多东西被掩盖了，尤其是顶点算符的正确归一化问题，以及弦标架和 Einstein 标架之间的差异（我们稍后将讨论）。尽管如此，最终结果 (6.18) 是正确的。有关更全面的讨论请参阅 Polchinski 第 8.7 节。



6.4 单圈振幅

现在我们回到闭弦来讨论单圈效应。正如我们在上面看到的，这对应于一个具有环面拓扑结构的世界面。我们需要对环面上的所有度规进行积分。

对于树级过程，使用微分同胚和 Weyl 变换将球面上的任意度规映射到平面上的平直度规。这次，使用这些变换将环面上的任意度规映射到环面上的平直度规。但微妙出现了：并不是所有环面上的平直度规都是等价的。

6.4.1 环面的模空间

让我们把我们的意思说清楚。我们可以通过识别复 z 平面中的一个区域来构建环面，如图所示。通常，这种识别依赖于单个复参数 $\tau \in \mathbf{C}$ 。

$$z \equiv z + 2\pi \quad \text{and} \quad z \equiv z + 2\pi\tau$$

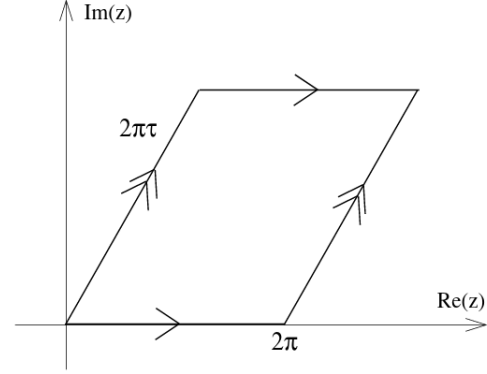
不要将 τ 与闵可夫斯基世界面时间混淆：我们早在第三节就把它抛在了后面。这里的一切都是欧几里得世界面， τ 只是一个参数，告诉我们环面有多偏斜。环面上的平直度规现在简单地

$$ds^2 = dzd\bar{z}$$

服从上面的标识。

对于 τ 的某个值，环面上的一般度规总是可以变换为平直度规。但我们感兴趣的问题是，由不同 τ 参数化的两个复曲面是否共形等价。总的来说，答案是否定的。由 τ 参数化的共形不等价环面的空间称为模空间 \mathcal{M} 。

然而， τ 的一些值确实对应于同一环面。特别是，有几种明显的方法可以在不改变环面的情况下改变 τ 。它们的名称分别为 S 和 T 变换：



- $T : \tau \rightarrow \tau + 1$: 这显然产生了相同的环面，因为现在的识别

$$z \equiv z + 2\pi \quad \text{and} \quad z \equiv z + 2\pi(\tau + 1) \equiv z + 2\pi\tau$$

- $S : \tau \rightarrow -1/\tau$: 这只是翻转圆环体的两侧。例如，如果 $\tau = i/a$ 是纯虚的，则该变换映射 $\tau \rightarrow i/a$ ，然后通过缩放来抵消。

事实证明，这两个变化 S 和 T 是唯一保持环面完整的变化。它们有时被称为模转换。一般的模变换由 S 和 T 的组合构成，

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \text{with } ad - bc = 1 \quad (6.19)$$

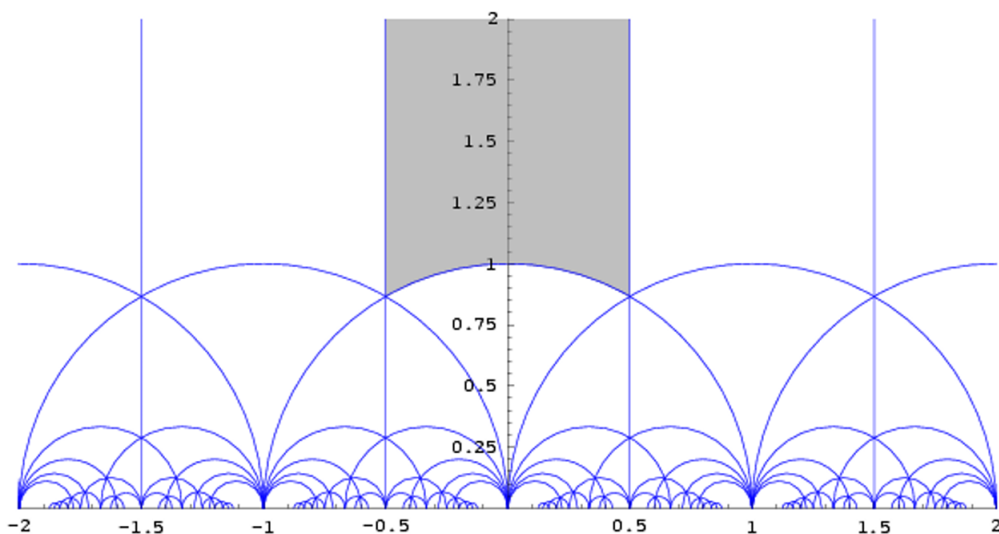
其中 a, b, c 和 $d \in \mathbf{R}$ 。这就是群 $SL(2, \mathbf{Z})$ 。（事实上，我们有我们通常的 \mathbf{Z}_2 标识，群实际上是 $PSL(2, \mathbf{Z}) = SL(2; \mathbf{Z})/\mathbf{Z}_2$ ）环面的模空间 \mathcal{M} 由下式给出

$$\mathcal{M} \cong \mathbf{C}/SL(2; \mathbf{Z})$$

这个空间是什么样子的？使用 $T : \tau \rightarrow \tau + 1$ ，我们总是可以移动 τ ，直到它位于区间内

$$\text{Re}\tau \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

其中识别间隔的边缘。同时， $S : \tau \rightarrow -1/\tau$ 使模 $|\tau|$ 反转，因此我们可以使用它将圆 $|\tau| < 1$ 内的点映射到 $|\tau| > 1$ 外的点。可以表明，通过 S 和 T 的



连续组合，可以将任何点映射到图中所示的阴影区域内，定义如下

$$|\tau| \leq 1 \quad \text{and} \quad \text{Re} \tau \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$$

这被称为 $SL(2; \mathbf{Z})$ 的基本域。

我们本可以很容易地从图中所示的其他基本域中选择一个。但阴影区域是标准区域。

模空间上的积分

在弦理论中，我们被邀请对所有度规进行求和。在规范固定微分同胚和 Weyl 不变性之后，我们仍然需要在所有不等价环上积分。换句话说，我们在基本域上进行积分。基本域上的 $SL(2; \mathbf{Z})$ 不变测度为

$$\int \frac{d^2\tau}{(\text{Im}\tau)^2}$$

要知道这是 $SL(2; \mathbf{Z})$ 不变量，请注意，在形式 (6.19) 的一般变换下，我们有

$$d^2\tau \rightarrow \frac{d^2\tau}{|c\tau + d|^4} \quad \text{and} \quad \text{Im}\tau \rightarrow \frac{\text{Im}\tau}{|c\tau + d|^2}$$

在这些相当数学化的陈述中隐藏着一些物理。在弦理论中对基本域的积分类似于量子场论中对动量的圈积分。考虑由 $\text{Re}\tau = 0$ 定义的方形复曲面。具有 $\text{Im}\tau \rightarrow \infty$ 的环又扁又胖。它们对应于费曼图中的红外区域的圈动量。具有 $\text{Im}\tau \rightarrow 0$ 的又长又细。这些对应于费曼图中的紫外极限的圈动量。然而正如我们看到的，不应该在圈的这些 UV 区域上积分，因为基本域并没有延伸那么远。或更准确地说，瘦的环被映射到胖的环。这与弦理论中任何假定的紫外发散都可以被重新解释为红外发散的事实相对应。这是弦理论紫外行为良好的第二个表现。第 6.4.2 节的示例中会更明确地看到这一点。

最后，在弦理论中计算圈振幅时，我们仍然需要担心映射到平面环面后未固定的剩余规范对称性。在球面上的树级振幅的情况下，这种剩余规范对称性是由于共形 Killing 群 $SL(2; \mathbf{C})$ 。对于环面，共形 Killing 群是由明显的生成元 ∂_z 和 $\bar{\partial}_{\bar{z}}$ 生成的。它是 $U(1) \times U(1)$ 。

较高亏格曲面

亏格 $g > 1$ 的黎曼曲面的模空间 \mathcal{M}_g 可以表示为具有维数，

$$\dim \mathcal{M}_g = 3g - 3$$

当 $g > 1$ 时，不存在共形 Killing 矢量。这些事实可以作为黎曼-罗奇定理的应用来证明。更多信息请参阅 Polchinski 的第 5.2 节，或 GSW。

6.4.2 单圈配分函数

我们不会在弦理论中计算任何一个单圈散射振幅。相反，我们将看一些简单一点的东西：单圈从真空到真空振幅。具有周期时间的欧几里得世界面具有对圆柱面上定义的理论的有限温度分配函数的解释。在 $D = 26$ 维时空中，它与玻色弦理论中的宇宙学常数有关。

首先考虑一个理论在方环面上的配分函数，其中 $\text{Re}\tau = 0$ 。将欧氏时间压缩为周期 ($\text{Im}\tau$) 相当于将理论置于温度 $T = 1/(\text{Im}\tau)$ ，

$$Z[\tau] = \text{Tr} e^{-2\pi(\text{Im}\tau)H}$$

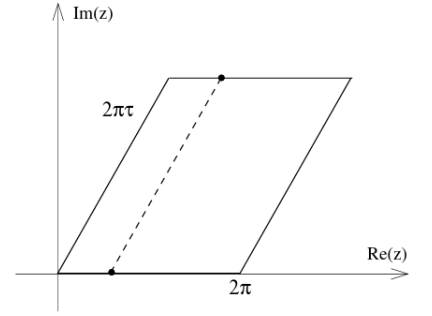
其中 Tr 在理论中的所有态上。对于定义在圆柱面上的任何 CFT，哈密顿量由

$$H = L_0 + \tilde{L}_0 - \frac{c + \tilde{c}}{24}$$

其中，最后一项是第 4.4.1 节中计算的 Casimir 能量。

那么，在 $\text{Re}\tau \neq 0$ 的环面上计算的真空振幅的解释是什么？从图中我们可以看出，这种偏斜环面的作用是通过 $\text{Re}\tau$ 平移圆柱体周围的给定点。但我们知道是哪个算符实现了这样的变换：它是 $\exp(2\pi i(\text{Re}\tau)P)$ ，其中 P 是圆柱上的动量算符。映射到平面之后，这将成为旋转算符

$$P = L_0 - \tilde{L}_0$$



因此，环面上的真空振幅可以解释理论中所有态的和，由下式加权

$$Z[\tau] = \text{Tr} e^{-2\pi(\text{Im}\tau)(L_0 + \tilde{L}_0)} e^{-2\pi i(\text{Re}\tau)(L_0 - \tilde{L}_0)} e^{2\pi(\text{Im}\tau)(c + \tilde{c})/24}$$

我们定义

$$q = e^{2\pi i\tau}, \quad \bar{q} = e^{-2\pi i\bar{\tau}}$$

配分函数可以被巧妙地记为

$$Z[\tau] = \text{Tr} q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\tilde{L}_0 - \tilde{c}/24}$$

让我们为自由弦计算一下。我们知道，每个标量场 X 分解为零模式和无穷多个简谐振动模式 α_{-n} ，它们产生能量 n 的态。我们将很快处理零模式，但现在，我们专注于振动。与算符 α_{-n} 作用 d 次，产生能量为 dn 的态。这为形式的 $\text{Tr} q^{L_0}$ 做出了贡献

$$\sum_{d=0}^{\infty} q^{nd} = \frac{1}{1 - q^n}$$

但单标量场的 Fock 空间是通过与谐振子模式 $n \in \mathbf{Z}^+$ 作用而建立的。因此，包括中心荷， $c = 1$ ，单个标量场的振荡模式的贡献为

$$\text{Tr } q^{L_0 - c/24} = \frac{1}{q^{1/24}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n}$$

对于 $\bar{q}^{\tilde{L}_0 - \tilde{c}/24}$ 部分也有类似的表达式。我们还剩下标量场的零模 p 的贡献。世界面上态对能量 H 的贡献是

$$\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma (\alpha' p)^2 = \frac{1}{2} \alpha' p^2$$

配分函数中的迹要求我们对所有态求和，这给出

$$\int \frac{dp}{2\pi} e^{-\pi\alpha'(\text{Im}\tau)p^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\alpha'\text{Im}\tau}}$$

因此，包括零模和谐振子，我们得到了单个自由标量场的配分函数，

$$Z_{\text{scalar}}[\tau] \sim \frac{1}{\sqrt{\alpha'\text{Im}\tau}} \frac{1}{(q\bar{q})^{1/24}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \bar{q}^n} \quad (6.20)$$

其中我们没有注意保留常数因子。

为了构建弦的配分函数，我们应该真正在协变量子化中工作，并包括鬼场。在这里，我们将作弊并在光锥计中工作。这是不可靠的，因为如果我们诚实地这样做，大部分物理都会被推到光锥动量的 $p^+ = 0$ 极限，在那里规范的选择会破坏。所以我们会不诚实地做这件事。

在光锥计中，我们有 24 种振荡模式。但我们有 26 个零模式。（你可能会担心我们仍然必须强制进行水平匹配……这是计算中不诚实的部分。我们很快就会看到它的部分来源）最后，还有几个额外的步骤。我们需要除以共形 Killing 群的体积。这只是 $U(1) \times U(1)$ ，通过沿圆环体循环的平移作用。体积为 $\text{Vol} = 4\pi^2 \text{Im}\tau$ 。最后，我们还需要在环面的模空间上积分。忽略所有常数因子，我们的最终结果是

$$Z_{\text{string}} = \int d^2\sigma \frac{1}{(\text{Im}\tau)} \frac{1}{(\alpha'\text{Im}\tau)^{13}} \frac{1}{q\bar{q}} \left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n} \right)^{24} \left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \bar{q}^n} \right)^{24} \quad (6.21)$$

模数不变性

出现在标量场的配分函数中的函数有一个名称：它是 Dedekind eta 函数的逆函数

$$\eta(q) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$$

19 世纪由对模变换 $T: \tau \rightarrow \tau + 1$ 和 $S: \tau \rightarrow -1/\tau$ 下函数性质感兴趣的数学家对它进行了研究。eta-函数满足恒等式

$$\eta(\tau + 1) = e^{2\pi i/24} \eta(\tau) \quad \text{and} \quad \eta(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau} \eta(\tau)$$

这两个语句保证了标量配分函数 (6.20) 是一个模不变函数。当然，这一定是真的：它来自于潜在的物理。

用 η 表示，弦配分函数 (6.21) 采用以下形式

$$Z_{\text{string}} = \int \frac{d^2\tau}{(\text{Im}\tau)^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{Im}\tau}} \frac{1}{\eta(q)} \frac{1}{\bar{\eta}(\bar{q})} \right)^{24}$$

测度和被积函数都是单独的模不变量。

6.4.3 解释弦的配分函数

弦的配分函数 (6.21) 告诉我们的内容可能并不明显。让我们花点时间试着用一些更简单的概念来理解它。

我们知道，自由弦描述了质量为 $m_n^2 = 4(n-1)/\alpha'$, $n = 0, 1, \dots$ 的无限多个粒子。弦配分函数应该只是这些粒子的真空圈上的和。我们现在将展示它几乎有这样的解释。

首先，让我们弄清楚单个粒子的贡献是什么？我们将考虑 D 维中的自由质量标量场 ϕ 。配分函数为，

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left(-\frac{1}{2} \int d^D x \phi (-\partial^2 + m^2) \phi \right) \\ &\sim \det^{-1/2} (-\partial^2 + m^2) \\ &= \exp \left(\frac{1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \ln(p^2 + m^2) \right) \end{aligned}$$

这是场论的配分函数。它包含适用于所有数量粒子的真空圈。与弦配分函数相比，我们只需要单个粒子的真空振幅。但这很容易提取。我们把场论配分函数写成，

$$Z = \exp(Z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_1^n}{n!}$$

总和中的每个项对应于在真空圈中传播的 n 个粒子，用 $n!$ 因子考虑玻色统计。因此，单个自由有质量粒子的真空振幅

$$Z_1 = \frac{1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \ln(p^2 + m^2)$$

很明显，这在积分 $p \rightarrow \infty$ 的 UV 范围内发散。有一种很好的方法可以使用 Schwinger 参数化来重写这个积分。我们利用恒等式

$$\int_0^\infty dl e^{-xl} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty dl \frac{e^{-xl}}{l} = -\ln x$$

然后我们把单粒子配分函数写成

$$Z_1 = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int_0^\infty \frac{dl}{2l} e^{-(p^2+m^2)l} \quad (6.22)$$

值得一提的是，还有另一种方法可以看出，这是单粒子配分函数，它在精神上更接近于我们在弦理论中使用的方法。我们可以从相对论粒子作用的 einbein 形式开始 (1.8)。在将规范固定为 $e = 1$ 之后，(6.22) 中的指数是粒子穿过长度为 l 的圈的能量。积分测度 dl/l 对所有可能大小的圈求和。

我们可以很高兴地执行 (6.22) 中的 $\int d^D p$ 积分。忽略数值因子，我们有

$$Z_1 = \int_0^\infty dl \frac{1}{l^{1+D/2}} e^{-m^2 l} \quad (6.23)$$

请注意，UV 发散为 $p \rightarrow \infty$ 已经蜕变成一个与 $l \rightarrow 0$ 这样的小圈相关的发散。

方程 (6.23) 给出了质量为 m 的单个粒子的答案。在弦理论中，我们期望来自质量为 m_n 的无限多个粒子种类的贡献。专门化为 $D = 26$ ，我们期望配分函数为

$$Z = \int_0^\infty dl \frac{1}{l^{14}} \sum_{n=0}^\infty e^{-m_n^2 l}$$

但我们知道自由弦的质谱：它是根据 L_0 和 \tilde{L}_0 算符由

$$m^2 = \frac{4}{\alpha'}(L_0 - 1) = \frac{4}{\alpha'}(\tilde{L}_0 - 1) = \frac{4}{\alpha'}(L_0 + \tilde{L}_0 - 2)$$

在等级匹配的约束下 $L_0 \tilde{L}_0$ 。很容易实施等级匹配：我们简单地在其积分表示中引入 Kronecker delta,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1/2}^{+1/2} ds e^{2\pi i s(L_0 - \tilde{L}_0)} = \delta_{L_0, \tilde{L}_0} \quad (6.24)$$

用经过等级匹配的态谱上的迹代替种类上的和，配分函数变为，

$$Z = \int_0^\infty dl \frac{1}{l^{14}} \int_{-1/2}^{+1/2} ds \text{Tr} e^{2\pi i s(L_0 - \tilde{L}_0)} e^{-2(L_0 + \tilde{L}_0 - 2)l/\alpha'} \quad (6.25)$$

我们再次使用定义 $q = \exp(2\pi i \tau)$ ，但这一次复参数 τ 是圈长度 l 和辅助变量的组合，我们引入辅助变量来施加等级匹配，

$$\tau = s + \frac{2li}{\alpha'}$$

弦的谱上的迹曾经给出 eta-函数，就像以前一样。剩下的是配分函数的结果，

$$Z_{\text{string}} = \int \frac{d^2\tau}{(\text{Im}\tau)^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{Im}\tau}} \frac{1}{\eta(q)} \frac{1}{\bar{\eta}(\bar{q})} \right)^{24}$$

但这和我们以前看到的完全一样。与众不同！事实上，差异隐藏在符号中：它是 $d^2\tau$ 的积分范围，可以在原始表达式 (6.23) 和 (6.24) 中找到。 $\text{Re}\tau$ 我们在弦理论中看到的相同区间 $[-1/2, +1/2]$ 上运行。从这个讨论中可以清楚地看出，正是这个积分实现了等级匹配。差异出现在 $\text{Im}\tau$ 的范围内，在这种天真的分析中， $\text{Im}\tau$ 超过 $[0, \infty)$ 。这与弦理论形成了鲜明对比，弦理论中我们只在基本域上积分。

这突出了我们之前的声明：场理论中潜在的紫外发散出现在 $\text{Im}\tau \sim l \rightarrow 0$ 区域。在上面的分析中，这对应于粒子穿过小圈。但在正确的弦论计算中，这个区域根本不存在。通过模不变性，它被映射到大圈的红外区域。

人们常说 $g_s \rightarrow 0$ 极限弦理论变成了一个关于无限多个自由粒子的理论。谱也是如此。但这一计算表明，当我们计算圈时，这并不是真的，因为模不变性意味着我们在弦论中积分的动量范围不同于在朴素场论方法中。

那么，在我们的配分函数的红外区域会发生什么呢？最容易看到它的地方是在 $l \rightarrow \infty$ 积分的极限 (6.25)。我们看到积分是由最轻的态决定的，对于玻色弦来说，它是快子。这具有 $m^2 = -4/\alpha'$ ，或 $(L_0 + \tilde{L}_0 - 2) = -2$ 。这对的配分函数作出了贡献，

$$\int^{\infty} \frac{dl}{l^{14}} e^{+4l/\alpha'}$$

这显然是发散的。单圈配分函数的这种红外发散是另一种快子问题的表现。在超弦中，没有快子，红外区表现良好。

6.4.4 那么弦论是有限的吗？

老实说，我们不知道。我们在上面看到的 UV 有限性适用于所有单圈振幅。这特别意味着，我们有一个引力与高维物质相互作用的单圈有限理论。这已经很了不起了。

还有更多好消息：可以表明，UV 有限性在两个圈中继续保持不变。而且，对于超弦，使用“纯旋量”形式的最先进技术表明，某些对象在多达五个圈的情况下仍然是有限的。此外，当所有动量交换都很大时，我们看到的指数抑制 (6.14) 继续适用于所有振幅。

然而，有限性的一般性陈述尚未得到证实。危险潜伏在亏格 3 及更高的黎曼曲面上积分的奇异点上。

6.4.5 超越微扰理论？

从本节的讨论中，应该清楚的是，弦微扰理论完全类似于场论中的费曼图展开。正如在场论中一样，可以证明 g_s 中的展开是渐近的。这意味着级数不会收敛，但我们仍然可以理解它。

然而，我们知道量子场论中有许多现象并没有被费曼图捕捉到。其中包括强耦合区的约束以及弱耦合区的瞬子和孤子。这是否意味着我们错过了弦论中类似有趣的现象？答案几乎可以肯定是肯定的！在这一节中，我将非常简短地提到几个更高级的主题，这些主题使我们能够超越弦理论中的微扰展开。我们的目标并不是教你这些东西，而是让你熟悉一些单词。

一种方法是以量子场论为指导，并试图根据路径积分建立一个非微扰的弦论定义。我们已经看到世界面上的 Polyakov 路径积分等价于费曼图。因此，我们需要更进一步。这是什么意思？回想一下，在 QFT 中，场会产生一个粒子。在弦理论中，我们现在正在寻找一个能产生弦圈的场。对于弦的每个构型，我们应该有一个不同的场。换句话说，我们的场本身应该是一个函数的函数： $\Phi(X^\mu(\sigma))$ 。不用说，这是一个相当复杂的问题。如果我们勇敢的话，我们可以考虑这个场的路径积分，

$$Z = \int \mathcal{D}\Phi e^{iS[\Phi(X(\sigma))]}$$

对于一些合适的作用量 $S[\Phi]$ 。这个想法是，这个路径积分应该再现微扰的串展开，此外，定义了理论的非微扰完成。这一思路被称为弦场论。应该清楚的是，这是发展的又一步：particles \rightarrow fields \rightarrow string fields。或者，用更历史的语言来说，如果场论是“第二量子化”，那么弦场论就是“第三量子化”。

弦场论对于开弦已经相当成功，并且以这种方式获得了一些有趣的非微扰结果。然而，对于闭弦，这种方法的用处要小得多。通常认为，闭弦场论失败的背后有深层原因，与我们在本节开头提到的问题有关：引力理论中不存在离壳的量。此外，我们在第 4 节中提到，相互作用的开弦理论必

然包括闭弦，因此不知何故，开弦场论应该已经包含引力和闭弦。人们对这是如何发生的还知之甚少。

还有其他方法可以使用低能有效作用来处理弦论的非微扰方面（我们将在下一节中描述什么是“低能有效作用”）。通常，这些技术依赖于超对称性来提供进入强耦合态的窗口，因此仅适用于超弦。这些方法是非常成功的，任何关于超弦理论的课程都会致力于解释对偶性和 M-理论的各个方面。

最后，在渐近 AdS 时空中，AdS/CFT 对应关系根据边界上的 Yang-Mills 理论或类似理论，给出了弦理论和量子引力的非扰动定义。在某种意义上，边界场论是一种“弦场论”。

6.5 附录：积分和伽玛函数的游戏

伽玛函数由积分表示定义

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t} \quad (6.26)$$

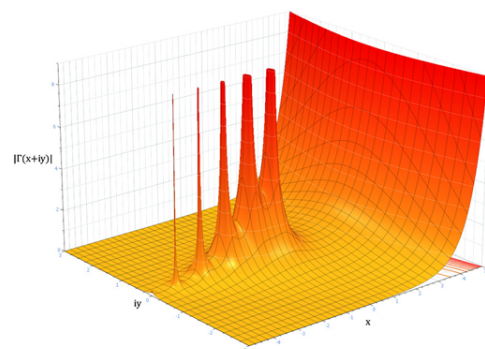
如果 $\text{Re} z > 0$ 则收敛。它对整个 z 平面有一个独特的解析表达式。伽马函数在 z 平面上的绝对值如图所示。

伽马函数有几个重要的性质。首先，它可以被认为是正整数的阶乘函数的解析延拓，意思是

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad n \in \mathbf{Z}^+$$

其次， $\Gamma(z)$ 在非正整数上具有极点。更准确地说，当 $z \approx -n$ 时， $n = 0, 1, \dots$ ，有展开

$$\Gamma(z) \approx \frac{1}{z+n} \frac{(-1)^n}{n!}$$



Euler Beta 函数

对于 $x, y \in \mathbf{C}$, Euler Beta 函数定义如下

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

它具有积分表示

$$B(x, y) = \int_0^1 dt t^{x-1} (1-t)^{y-1} \quad (6.27)$$

让我们来证明这个说法。我们从

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty du \int_0^\infty dv e^{-u} u^{x-1} e^{-v} v^{y-1}$$

我们写 $u = a^2$ 和 $v = b^2$, 所以积分变成

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= 4 \int_0^\infty da \int_0^\infty db e^{-(a^2+b^2)} a^{2x-1} b^{2y-1} \\ &= \int_{-\infty}^\infty da \int_{-\infty}^\infty db e^{-(a^2+b^2)} |a|^{2x-1} |b|^{2y-1} \end{aligned}$$

我们现在再次改变坐标, 这次是极坐标 $a = r \cos \theta$ 和 $b = r \sin \theta$ 。我们得到

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty r dr e^{-r^2} r^{2x+xy-2} \int_0^{2\pi} d\theta |\cos \theta|^{2x-1} |\sin \theta|^{2y-1} \\ &= \frac{1}{2} \Gamma(x+y) \times 4 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2x-1} (\sin \theta)^{2y-1} \\ &= \Gamma(x+y) \int_0^1 dt (1-t)^{y-1} t^{x-1} \end{aligned}$$

其中, 在最后一行中, 我们进行了替换 $t = \cos^2 \theta$ 。这就完成了证明。

Virasoro-Shapiro 振幅

在闭弦计算中, 我们遇到了积分

$$C(a, b) = \int d^2 z |z|^{2a-2} |1-z|^{2b-2}$$

我们现在将对此进行计算, 并表明它是由 (6.11) 给出的。我们从使用一个技巧开始。我们可以写

$$|z|^{2a-2} = \frac{1}{\Gamma(1-a)} \int_0^\infty dt t^{-a} e^{-|z|^2 t}$$

其遵循伽马函数的定义 (6.26)。同样，我们可以写

$$|1-z|^{2b-2} = \frac{1}{\Gamma(1-b)} \int_0^\infty du u^{-b} e^{-|1-z|^2 u}$$

我们分解复坐标 $z = x + iy$ ，使得积分的测度为 $d^2 z = 2dx dy$ 。然后我们可以把积分 $C(a, b)$ 写成

$$\begin{aligned} C(a, b) &= \int \frac{d^2 z du dt}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} t^{-a} u^{-b} e^{-|z|^2 t} e^{-|1-z|^2 u} \\ &= 2 \int \frac{d^2 z du dt}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} t^{-a} u^{-b} e^{-(t+u)(x^2+y^2)+2xu-u} \\ &= 2 \int \frac{d^2 z du dt}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} t^{-a} u^{-b} \exp \left(-(t+u) \left[\left(x - \frac{u}{t+u} \right)^2 + y^2 \right] - u + \frac{u^2}{t+u} \right) \end{aligned}$$

现在我们做的是简单的高斯积分。我们发现

$$C(a, b) = \frac{2\pi}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} \int_0^\infty du dt \frac{t^{-a} u^{-b}}{t+u} e^{-tu/(t+u)}$$

最后，我们对变量进行了更改。我们写 $t = \alpha\beta$ 和 $u = (1-\beta)\alpha$ 。为了使 t 和 u 取 $[0, \infty)$ 范围内的值，我们需要 $\alpha \in [0, \infty)$ 和 $\beta \in [0, 1]$ 。考虑到这个变换产生的雅可比，简单地说就是 α ，积分变成

$$C(a, b) = \frac{2\pi}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} \int d\alpha d\beta \frac{\alpha^{1-a-b}}{\alpha} \beta^{-a} (1-\beta)^{-b} e^{-\alpha\beta} (1-\beta)$$

但我们认识到 $d\alpha$ 上的积分：它只是

$$\int_0^\infty d\alpha \alpha^{-a-b} e^{-\beta\alpha(1-\beta)} = [\beta(1-\beta)]^{a+b-1} \Gamma(1-a-b)$$

我们写 $c = 1-a-b$ 。最后，我们只剩下

$$C(a, b) = \frac{2\pi\Gamma(c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} \int_0^1 d\beta (1-\beta)^{a-1} \beta^{b-1}$$

但最终的积分是 Euler-Beta 函数 (6.27)。这给了我们承诺的结果，

$$C(a, b) = \frac{2\pi\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(1-c)}$$

7 低能有效作用量

到目前为止，我们只讨论了在平直时空中传播的弦。这一章我们将考虑在不同背景下传播的弦。这相当于在弦的世界面上考虑不同的 CFT。

用 Polyakov 作用量来描述在弯曲时空中运动的弦有一个自然的推广，

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}(X) \quad (7.1)$$

这里 $g_{\alpha\beta}$ 是世界面度规。这个作用量描述了从弦的世界面到具有度规为 $G_{\mu\nu}(X)$ 的时空的映射。(请不要把它和 Einstein 张量混淆在一起，本课程中不需要它)。

形式 (7.1) 的作用量被称为非线性 sigma 模型 (这个奇怪的名字源于介子的历史)。在这种情况下， D 维时空有时被称为 target space。这种类型的理论在物理学的许多方面都很重要，从 QCD 到凝聚态。

虽然很明显，(7.1) 描述的是在弯曲时空中运动的弦，但把它写下来有点可疑。问题是闭弦的量子化已经给了我们一个引力子。如果我们想建立某种背景度规 $G_{\mu\nu}(X)$ ，它应该由这些引力子构建，就像电磁场由光子构成的一样。我们如何看待 (7.1) 中的度规与弦的量子化产生的引力子之间的关系呢？

答案在于顶点算符的使用。我们把度规展开成平直空间的小波动

$$G_{\mu\nu}(X) = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(X)$$

那么我们从作用量 (7.1) 中构建的配分函数与平直空间中弦的配分函数之间的关系是

$$Z = \int \mathcal{D}X \mathcal{D}g e^{-S_{\text{Poly}} - V} = \int \mathcal{D}X \mathcal{D}g e^{-S_{\text{Poly}}} (1 - V + \frac{1}{2}V^2 + \dots)$$

其中 S_{Poly} 是 (1.22) 中给出的平直空间中弦的作用量, V 的表达式为

$$V = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu h_{\mu\nu}(X) \quad (7.2)$$

但我们以前见过这个: 它是与弦的引力子态对应的顶点算符! 对于平面波, 对应于由对称无迹张量 $\zeta_{\mu\nu}$ 和动量 p^μ 给出偏振的引力子, 波动由下式给出

$$h_{\mu\nu}(X) = \zeta_{\mu\nu} e^{ip \cdot X}$$

通过这种选择, 表达式 (7.2) 与顶点算符 (5.9) 一致。但一般来说, 我们可以取任意平面波的线性叠加来建立一个总的波动 $h_{\mu\nu}(X)$ 。

我们知道在路径积分中插入一个 V 相当于引入一个引力子态。在路径积分中插入 e^V 对应于引力子的相干态, 这将度规从 $\delta_{\mu\nu}$ 变为 $\delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ 。通过这种方式, 我们看到 (7.1) 的背景弯曲度规确实是由我们在第 2 节中第一次遇到的量子化引力子构建的。

7.1 Einstein 方程

在共形规范下, 平直空间中的 Polyakov 作用量化为自由理论。这个事实非常有用, 使我们能够计算出理论的能谱。但在弯曲背景上, 情况就不同了。在共形规范中, 世界面理论由相互作用的二维场论描述,

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma G_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X^\nu \quad (7.3)$$

为了理解这些相互作用, 我们将 X^μ 围绕一个经典解 \bar{x}^μ 进行展开。

$$X^\mu(\sigma) = \bar{x}^\mu + \sqrt{\alpha'} Y^\mu(\sigma)$$

这里 Y^μ 是小波动。因子 $\sqrt{\alpha'}$ 是为了平衡量纲: 由于 $[X] = -1$, 所以 $[Y] = 0$, 当 $Y \ll 1$ 才有意义。将这一展开带入拉格朗日量给出

$$G_{\mu\nu} \partial X^\mu \partial X^\nu = \alpha' \left[G_{\mu\nu}(\bar{x}) + \sqrt{\alpha'} G_{\mu\nu,\omega}(\bar{x}) Y^\omega + \frac{\alpha'}{2} G_{\mu\nu,\omega\rho}(\bar{x}) Y^\omega Y^\rho + \dots \right] \partial Y^\mu \partial Y^\nu$$

系数 $G_{\mu\nu,\dots}$ 是波动 Y^μ 参与相互作用的耦合常数。有无数个耦合常数, 它们的来源都是 $G_{\mu\nu}(X)$, 而 $G_{\mu\nu,\dots}$ 逗号后的指标表示对应的 $G_\mu(X)$ 导数。

我们想知道这个场论在什么情况下才是弱耦合的。显然，这要求无限多个耦合常数都很小。让我们试着用一种粗略的方式来描述它。假设 target space 的特征曲率半径为 r_c ，这意味着

$$\frac{\partial G}{\partial X} \sim \frac{1}{r_c}$$

曲率半径具有长度量纲，所以 $[r_c] = -1$ 。根据度规的展开，我们看到低能有效无量纲耦合系数为

$$\frac{\sqrt{\alpha'}}{r_c} \quad (7.4)$$

这意味着如果时空度规只在远大于 $\sqrt{\alpha'}$ 的尺度上变化，我们可以使用微扰理论来研究如 (7.3) 的 CFT。 $\sqrt{\alpha'}/r_c$ 中的微扰级数通常被称为 α' 展开，以区别于我们在上一章看到的 g_s 展开。在弦理论中计算的量通常是由两方面的微扰展开给出：一个在 α' 中，一个在 g_s 中。

如果存在曲率半径与弦长度尺度 $r_c \sim \sqrt{\alpha'}$ 相当的时空区域，那么世界面 CFT 是强耦合的，我们将需要开发新的方法来解决它。注意， α' 中的强耦合是很难的问题，但这个问题至少在世界面路径积分方面是定义明确的。这与 g_s 中的强耦合问题有本质区别，正如第 6.4.5 节所讨论的，对于后者，我们确实缺乏对问题的良好定义。

7.1.1 Beta 函数

经典意义下，由 (7.3) 定义的理论是共形不变的。但这在量子理论中并不一定正确。为了处理发散，我们必须引入紫外截断，通常，在重整化之后，物理量取决于截断给定的尺度 μ 。在这种情况下，理论就不再是共形不变的了。有许多理论在经典上具有尺度不变性，但量子化后尺度不变性被打破。其中最著名的是 Yang-Mills。

我们已经讨论过几次了，在弦理论中，共形不变性是一种规范对称性，我们不能失去它。本节的目标是理解什么情况下 (7.3) 能在量子层面上保持共形不变性。

描述耦合如何依赖于尺度 μ 的对象称为 β -函数。既然我们的耦合以函数的形式出现，我们就应该讨论一个 β -泛函，大致的形式为

$$\beta_{\mu\nu}(G) \sim \mu \frac{\partial G_{\mu\nu}(X; \mu)}{\partial \mu}$$

只有满足以下条件时，才能在量子化后仍满足共性对称性

$$\beta_{\mu\nu}(G) = 0$$

现在计算单圈的非线性 sigma 模型。首先分离出理论的 UV 发散，然后找出应该添加什么样的抵消项。如果抵消项消失，beta-函数也会消失。

通过巧妙地选择坐标，可以使分析工作简化。在任意一点 \bar{x} 周围，我们总是可以选择黎曼正则坐标，利用 $X^\mu = \bar{x}^\mu + \sqrt{\alpha'} Y^\mu$ 的展开式得到

$$G_{\mu\nu}(X) = \delta_{\mu\nu} - \frac{\alpha'}{3} \mathcal{R}_{\mu\lambda\nu\kappa}(\bar{x}) Y^\lambda Y^\kappa + \mathcal{O}(Y^3)$$

展开到波动的四阶，作用量变为

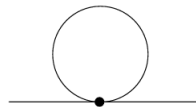
$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \partial Y^\mu \partial Y^\nu \delta_{\mu\nu} - \frac{\alpha'}{3} \mathcal{R}_{\mu\lambda\nu\kappa} Y^\lambda Y^\kappa \partial Y^\mu \partial Y^\nu$$

我们现在可以把它看作二维的相互作用量子场论。四点的相互作用给出了一个符合 Feynman 规则的顶点，

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \cdot \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \sim \mathcal{R}_{\mu\lambda\nu\kappa} (k^\mu \cdot k^\nu)$$

其中 k_α^μ 是标量场 Y^μ 的二维动量 ($\alpha = 1, 2$ 是世界面指标)。它符合 Feynman 规则因为我们讨论的是导数相互作用。

现在我们已经把问题简化为一个简单的相互作用量子场论，我们可以用任何我们喜欢的方法来计算 β -函数。理论的发散来自于如下的单圈图



实际上在位置空间中考虑这个图是最简单的。标量粒子的传播子是

$$\langle Y^\lambda(\sigma)Y^\kappa(\sigma') \rangle = -\frac{1}{2}\delta^{\lambda\kappa} \ln|\sigma - \sigma'|^2$$

对于在圈中传播的标量场，起点和终点重合。当 $\sigma \rightarrow \sigma'$ 时传播子发散，这简单地反映了我们在圈动量积分中看到的 UV 发散。

为了分离这种发散，我们选择使用维数正规化， $d = 2 + \epsilon$ 。传播子变为，

$$\begin{aligned} \langle Y^\lambda(\sigma)Y^\kappa(\sigma') \rangle &= 2\pi\delta^{\lambda\kappa} \int \frac{d^{2+\epsilon}k}{(2\pi)^{2+\epsilon}} \frac{e^{ik\cdot(\sigma-\sigma')}}{k^2} \\ &\longrightarrow \frac{\delta^{\lambda\kappa}}{\epsilon} \quad \text{as } \sigma \rightarrow \sigma' \end{aligned}$$

为确定这一发散的抵消项，我们只需将作用量中的 $Y^\lambda Y^\kappa$ 替换为 $\langle Y^\lambda Y^\kappa \rangle$ 即可。为了减去 $1/\epsilon$ 项，我们加上抵消项

$$\mathcal{R}_{\mu\lambda\nu\kappa} Y^\lambda Y^\kappa \partial Y^\mu \partial Y^\mu \rightarrow \mathcal{R}_{\mu\lambda\nu\kappa} Y^\lambda Y^\kappa \partial Y^\mu \partial Y^\mu - \frac{1}{\epsilon} \mathcal{R}_{\mu\nu} \partial Y^\mu \partial Y^\nu$$

我们可以通过波函数重整化 $Y^\mu \rightarrow Y^\mu + (\alpha'/6\epsilon)\mathcal{R}^\mu{}_\nu Y^\nu$ ，以及耦合常数（即度规 $G_{\mu\nu}$ ）的重整化来吸收抵消项。我们要求

$$G_{\mu\nu} \rightarrow G_{\mu\nu} + \frac{\alpha'}{\epsilon} \mathcal{R}_{\mu\nu} \quad (7.5)$$

由此我们了解了理论的 beta-函数和共形不变性的条件。它是

$$\beta_{\mu\nu}(G) = \alpha' \mathcal{R}_{\mu\nu} = 0 \quad (7.6)$$

这是一个神奇的结果！sigma 模型共形不变的要求是 target space 必须是 Ricci 平直的： $\mathcal{R}_{\mu\nu} = 0$ 。或者，换句话说，弦运动的背景时空必须服从真空 Einstein 方程！我们看到广义相对论方程也描述了二维 sigma 模型的重整化群流。

还有一些更神奇的东西即将到来，但值得停下来做一些不同的评论。

Beta 函数和 Weyl 不变性

上述计算有效地研究了平直世界面上 CFT (7.3) 的共形不变性的破坏。我们知道这应该和在弯曲的世界面上 Weyl 不变性的破坏是一样的。由于这是一个如此重要的结果，让我们从另一个角度看看这个重要的结果。我们可以考虑世界面度规

$$g_{\alpha\beta} = e^{2\phi}\delta_{\alpha\beta}$$

然而，在维数正规化中，该理论在 $d = 2 + \epsilon$ 维度中不是 Weyl 不变的，因为 \sqrt{g} 的贡献并不能完全抵消逆度规 $g^{\alpha\beta}$ 的贡献。体现在作用量上是

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^{2+\epsilon}\sigma e^{\phi\epsilon} \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X^\nu G_{\mu\nu}(X) \\ &\approx \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^{2+\epsilon}\sigma (1 + \phi\epsilon) \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X^\nu G_{\mu\nu}(X) \end{aligned}$$

其中，在这个表达式中， $\alpha = 1, 2$ 指标现在随着 $\delta_{\alpha\beta}$ 而升高和降低。如果我们用重整化度规 (7.5) 代替这个表达式中的 $G_{\mu\nu}$ ，我们会看到有一个含 ϕ 的项在 $\epsilon \rightarrow 0$ 时仍然存在，

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X^\nu [G_{\mu\nu}(X) + \alpha'\phi \mathcal{R}_{\mu\nu}(X)]$$

这表明 Weyl 不变性被破坏了。实际上，我们可以看看我们通常对 Weyl 不变性的判断，即 T^α_α 是否消失。在共形规范中，我们有

$$T_{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} = -2\pi \frac{\delta S}{\delta \phi} \delta_{\alpha\beta} \quad \Rightarrow \quad T^\alpha_\alpha = -\frac{1}{2} \mathcal{R}_{\mu\nu} \partial X^\mu \partial X^\nu$$

这样来看，我们定义 β -函数为 $\partial X \partial X$ 前面的系数，也就是

$$T^\alpha_\alpha = -\frac{1}{2\alpha'} \beta_{\mu\nu} \partial X^\mu \partial X^\nu$$

我们于是就又得到了

$$\beta_{\mu\nu} = \alpha' \mathcal{R}_{\mu\nu}$$

7.1.2 Ricci 流

在弦理论中我们只关心 Ricci 平直度规的共形理论 (我们稍后会讨论这个结果的推广)。然而, 在物理和数学的其他领域, RG 流本身很重要。它通常被称为 Ricci 流

$$\mu \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial \mu} = \alpha' \mathcal{R}_{\mu\nu} \quad (7.7)$$

它决定了度规随尺度 μ 的变化。

作为一个说明性和简单的例子, 考虑半径为 r 的 target space \mathbf{S}^2 。这是凝聚态物理中的一个重要模型, 它描述了一维 Heisenberg 自旋链的低能极限。它有时被称为 $O(3)$ sigma 模型。因为球体是对称空间, 所以 RG 流的唯一作用是使半径与尺度相关: $r = r(\mu)$ 。beta 函数为

$$\mu \frac{\partial r^2}{\partial \mu} = \frac{\alpha'}{2\pi}$$

因此越接近 UV 时 r 越大, 而越接近 IR 时 r 越小。由于耦合系数为 $1/r$, 这意味着 target space 为 \mathbf{S}^2 的非线性 sigma 模型是渐近自由的。在低能时理论是强耦合的, 于是微扰计算——例如这个单圈 beta 函数——不再可靠。特别是, 我们可以证明 \mathbf{S}^2 的 sigma 模型在 IR 中产生了质量间隙。

Ricci 流 (7.7) 被 Perelman 用来证明庞加莱猜想。事实上 Perelman 使用了 Ricci 流的一个广义的版本。在弦理论的语言中, 他引入了胀子场。

7.2 其他耦合

我们了解了弦是如何与背景时空度规耦合。那么弦的其他自由度呢? 在第 2 章中, 我们看到闭弦有更多的无质量态, 这些态与反对称张量 $B_{\mu\nu}$ 和胀子 Φ 有关。现在我们来看看如果引入这些场, 会有什么效应。

7.2.1 带荷弦和 B 场

让我们先看看弦是如何与反对称场 $B_{\mu\nu}$ 耦合的。我们在 5.4.1 节讨论了与此态相关的顶点算符。它在 (5.9) 中给出, 采用与引力子顶点算符相同的形

式，但 $\zeta_{\mu\nu}$ 是反对称的。与引力子的处理方法类似，将其指数化就能描述弦在 $B_{\mu\nu}$ 背景场中的传播。我们将保留弯曲度规 $G_{\mu\nu}$ 来得到一般的作用量，

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} (G_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu g^{\alpha\beta} + i B_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \epsilon^{\alpha\beta}) \quad (7.8)$$

其中 $\epsilon^{\alpha\beta}$ 是反对称 2 张量，归一化为 $\sqrt{g}\epsilon^{12} = +1$ (因子 i 的存在是因为我们在欧几里德空间中，而这个新引入的项包含时间的一阶导数)。该作用量在世界面重参数化和 Weyl 重缩放下保持不变。

那么如何解释新引入的这一项呢？现在我们将证明，我们应该把场 $B_{\mu\nu}$ 看作类似于电磁学中的规范势 A_μ 。作用量 (7.8) 告诉我们弦在与 $B_{\mu\nu}$ 耦合的情况下是“带荷的”。

规范势

我们将绕个小弯来提醒自己一些电磁学的相关事实。让我们从一个点粒子开始。我们知道，带电点粒子与背景规范势 A_μ 的耦合是通过在作用量中增加一个世界线项来实现的，

$$\int d\tau A_\mu(X) \dot{X}^\mu \quad (7.9)$$

如果这种相对论形式看起来有点陌生，我们可以通过在静态规范中使用 $X^0 \equiv t = \tau$ 来理解它，则它的含义是

$$\int dt A_0(X) + A_i(X) \dot{X}^i$$

它现在应该被认为是拉格朗日量，它产生了带电粒子的库伦和洛伦兹力定律。

那么弦的这种耦合的推广是什么呢？首先注意 (7.9) 有一个有趣的几何结构。它是时空中 1-form $A = A_\mu dX^\mu$ 在粒子的世界线上的 pull-back 的结果。这行得通，因为 A 是 1-form，而世界线是一维的。由于弦的世界面是二维的，因此类似的耦合应该是时空中的 2-form。这是一个反对称二阶张

量场，即 $B_{\mu\nu}$ 。把 $B_{\mu\nu}$ pull-back 到世界面上就给出了相互作用，

$$\int d^2\sigma B_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \epsilon^{\alpha\beta} \quad (7.10)$$

这正是我们在 (7.8) 中发现的相互作用的形式。

在背景场 $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha$ 的规范变换下，点粒子耦合 (7.9) 是不变的。这是因为拉格朗日量变换了一个全微分。对于 2-form 的 $B_{\mu\nu}$ 也有类似的说法。时空规范对称性是，

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B_{\mu\nu} + \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu \quad (7.11)$$

在这种变换下拉格朗日量 (7.10) 变化了一个全微分。

在电磁学中，可以构造规范不变的电场和磁场，它们被封装成 2-form 的场强 $F = dA$ 。同样地，对于 $B_{\mu\nu}$ ，规范不变场强 $H = dB$ 为 3-form，

$$H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}$$

这个 3-form H 有时被称为挠。它在广义相对论中扮演着与挠度相同的角色，为仿射联络提供了一个反对称分量。

7.2.2 胀子

现在来看看弦是如何与背景胀子场 $\Phi(X)$ 耦合的。这是更微妙的。简单的顶点算符构造不是初级的，必须更努力一点。顶点算符的正确推导可以在 Polchinski 中找到。在这里，我将直接给出耦合并解释一些重要特性。

弦在涉及无质量场 $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ 和 $\Phi(X)$ 的背景中运动的弦的作用量由下式给出

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} (G_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu g^{\alpha\beta} + i B_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \epsilon^{\alpha\beta} + \alpha' \Phi(X) R^{(2)}) \quad (7.12)$$

其中 $R^{(2)}$ 是世界面的二维 Ricci 标量。(到目前为止，我们一直把它简单地表示为 R 但我们将从这里引入上标来区分世界面 Ricci 标量和时空 Ricci 标量)。

由于几个原因，与胀子的耦合令人惊讶。首先，我们看到作用量中的项在 $R^{(2)} = 0$ 的平直的世界面上消失。这就是使用顶点算符确定这种耦合比较棘手的原因之一。

然而，关于与胀子的耦合最令人惊讶的事情是它不满足 Weyl 不变性！既然本课程的大部分内容都是关于理解 Weyl 不变性的含义，为什么我们现在愿意抛弃它呢？答案当然是，我们没有。尽管胀子耦合确实违反了 Weyl 不变性，但有一种方法可以恢复它。我们将很快对此进行解释。但首先，让我们讨论胀子耦合 (7.12) 的一个至关重要的含义。

胀子与弦耦合

有一个例外的说法。当胀子恒定时，就不再违反 Weyl 不变性。例如，假设

$$\Phi(X) = \lambda, \quad \text{a constant}$$

然后胀子耦合就变成了我们之前见过的样子：它是

$$S_{\text{dilaton}} = \lambda \chi$$

其中 χ 是我们在 (6.4) 中介绍的世界面的 Euler 示性数。这告诉了我们一些重要的东西：恒定的胀子的真空期望值 $\langle \Phi \rangle$ 决定了弦耦合常数。这个常数模通常被认为是胀子的渐近极限，

$$\Phi_0 = \lim_{X \rightarrow \infty} \Phi(X) \quad (7.13)$$

然后给出弦耦合系数

$$g_s = e^{\Phi_0} \quad (7.14)$$

所以弦耦合不是弦理论的一个独立参数：它是一个场的期望值。这意味着，就像时空度规 $G_{\mu\nu}$ (或者，实际上，像希格斯玻色子一样)，可以被动态确定。

我们已经知道只要 $g_s \ll 1$ ，我们围绕平直空间的微扰展开就是有效的。但现在我们有了一个更强的要求：我们只有在对任意的 X 都满足 $e^{\Phi(X)} \ll 1$ 的区域内才能使用微扰理论。如果我们讨论的弦出现在不满足 $e^{\Phi(X)}$ 极小的区域，那么我们将需要使用 6.4.5 节中描述的不依赖弦微扰理论的技术。

7.2.3 Beta 函数

现在我们回过头来理解如何在胀子耦合中避免违反 Weyl 不变性 (7.12)。关键是要注意在胀子耦合前面的 α' 。它的存在是为了补齐量纲。(其他两项都带有导数 $[\partial X] = -1$, 所以不需要 α' 的任何幂)

然而, 回想一下, α' 在非线性的 sigma 模型中也起着圈展开参数 (7.4) 的作用。这意味着在胀子耦合中 Weyl 不变性的缺失可以通过 $G_{\mu\nu}$ 和 $B_{\mu\nu}$ 的耦合产生的单圈贡献来补偿。

为了明确地看到这一点, 可以计算二维场论 (7.12) 的 beta-函数。在存在胀子耦合的情况下, 最好利用 $\langle T^\alpha_\alpha \rangle$ 观察 Weyl 不变性。能动张量有三种不同的贡献, 与三种不同的时空场有关。相应地, 我们定义了三个不同的函数,

$$\langle T^\alpha_\alpha \rangle = -\frac{1}{2\alpha'}(\beta_{\mu\nu}(G)g^{\alpha\beta} + i\beta_{\mu\nu}(B)\epsilon^{\alpha\beta})\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu - \frac{1}{2}\beta(\Phi)R^{(2)} \quad (7.15)$$

我们将不提供单圈 beta 函数计算的细节。我们只是陈述结果⁸,

$$\begin{aligned}\beta_{\mu\nu}(G) &= \alpha'\mathcal{R}_{\mu\nu} + 2\alpha'\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi - \frac{\alpha'}{4}H_{\mu\lambda\kappa}H_\nu{}^{\lambda\kappa} \\ \beta_{\mu\nu}(B) &= -\frac{\alpha'}{2}\nabla^\lambda H_{\lambda\mu\nu} + \alpha'\nabla^\lambda\Phi H_{\lambda\mu\nu} \\ \beta(\Phi) &= -\frac{\alpha'}{2}\nabla^2\Phi + \alpha'\nabla_\mu\Phi\nabla^\mu\Phi - \frac{\alpha'}{24}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda}\end{aligned}$$

弦理论的自洽背景必须保持 Weyl 不变性, 这要求 $\beta_{\mu\nu}(G) = \beta_{\mu\nu}(B) = \beta(\Phi) = 0$ 。

7.3 低能有效作用量

方程 $\beta_{\mu\nu}(G) = \beta_{\mu\nu}(B) = \beta(\Phi) = 0$ 可以看作是弦传播背景的运动方程。现在我们换个角度: 我们寻找一个 $D = 26$ 维时空的作用量, 它将这些 beta-函

⁸beta 函数和 Einstein 方程之间的关系最早是由 Friedan 在他 1980 年的博士论文中提出的。A readable account of the full beta functions can be found in the paper by Callan, Friedan, Martinec and Perry “Strings in Background Fields”, Nucl. Phys. B262 (1985) 593. 完整的计算细节可以在 Callan 和 Thorlacius 的 TASI 课堂笔记中找到。

数方程再现为运动方程。这是玻色弦的低能量有效作用量，

$$S = \frac{1}{2\kappa_0^2} \int d^{26}X \sqrt{-G} e^{-2\Phi} \left(\mathcal{R} - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} + 4\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi \right) \quad (7.16)$$

在这里，我们冒昧地用 Wick 转动回到闵可夫斯基空间来重写这个表达式。这里涉及 κ_0 的总常数不是由场方程确定的，而是可以通过将这些方程耦合到一个合适的源来确定，例如，如 7.4.2 所述。仅在量纲上，其标度 $\kappa_0^2 \sim l_s^{24}$ ，其中 $\alpha' = l_s^2$ 。

根据这三个场的变分作用量可以得到这样的函数：

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{2\kappa_0^2 \alpha'} \int d^{26}X \sqrt{-G} e^{-2\Phi} & (\delta G_{\mu\nu} \beta^{\mu\nu}(G) - \delta B_{\mu\nu} \beta^{\mu\nu}(B) \\ & - (2\delta\Phi + \frac{1}{2} G^{\mu\nu} \delta G_{\mu\nu})(\beta^\lambda{}_\lambda(G) - 4\beta(\Phi))) \end{aligned}$$

式 (7.16) 支配着时空场的低能动力学。“低能”是指我们只考虑了单圈 beta 函数。

这里发生了一些非同寻常的事情。很久以前，我们从观察一根弦如何在平直空间中运动开始。然而，仅仅基于自洽性，我们就得到了支配时空和其他场如何在 $D = 26$ 维中波动的作用量 (7.16)。它的要求是如此严格，以至于它们支配着整个宇宙的运行方式。

你们可能也注意到了我们现在有两种不同的方法来计算弦理论中引力子的散射。第一个是我们在第 6 节讨论过的散射振幅。第二种是通过观察在低能有效作用量 (7.16) 中包含的动力学。自洽性要求这两种方法一致。它们做到了。

7.3.1 弦标架和 Einstein 标架

因为 $e^{-2\Phi}$ 这个奇怪的因子在前面，作用量 (7.16) 不是我们熟悉的 Einstein-Hilbert 形式。这个因子表明这个作用量是在弦微扰理论的树级上计算出来的，正如我们在第 6 章中看到的，这样的项的尺度通常是 $1/g_s^2$ 。

同样值得指出的是，(7.16) 中 Φ 的动力学项似乎有错误的符号。然而，我们不需要担心这个，因为， $e^{-2\phi}$ 因子的存在意味着这里的动力学项不是常见的正则归一化形式。

为了把作用量表示为我们更熟悉的形式，我们可以重新定义场。首先，区分胀子的恒定部分 Φ_0 和变化部分 $\tilde{\Phi}$ 是有用的。我们在 (7.13) 中定义了常数部分；它与弦耦合常数有关。变化部分由下式给出

$$\tilde{\Phi} = \Phi - \Phi_0 \quad (7.17)$$

在 D 维中，我们定义了一个新的度规 $\tilde{G}_{\mu\nu}$ 作为旧度规和胀子的组合，

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(X) = e^{-4\tilde{\Phi}/(D-2)} G_{\mu\nu}(X) \quad (7.18)$$

请注意，这并不是坐标变换或作用量的对称性。它只是对理论中的场彼此混合再重新标记。我们可以在任何场论中进行这样的重新定义。通常，我们选择不这样做，原因是场已经有了正则动量。变换 (7.18) 的重点是使 (7.16) 中的场也具有正则动量项。

新的度规 (7.18) 与旧的度规通过共形缩放相关。我们可以检验由一般共形变换 $\tilde{G}_{\mu\nu} = e^{2\omega} G_{\mu\nu}$ 所关联的两个度规，其对应的 Ricci 标量的关系为

$$\tilde{\mathcal{R}} = e^{-2\omega} (\mathcal{R} - 2(D-1)\nabla^2\omega - (D-2)(D-1)\partial_\mu\omega\partial^\mu\omega)$$

(我们之前在考虑 $D=2$ 共形变换时使用了这个特殊版本) 在 (7.18) 中选择 $\omega = -2\tilde{\Phi}/(D-2)$ ，并限制回到 $D=26$ ，则作用量 (7.16) 变为

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{26}X \sqrt{-\tilde{G}} \left(\tilde{\mathcal{R}} - \frac{1}{12} e^{-\tilde{\Phi}/3} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} - \frac{1}{6} \partial_\mu \tilde{\Phi} \partial^\mu \tilde{\Phi} \right) \quad (7.19)$$

动力学项为 $\tilde{\Phi}$ 现在是正则的，并且有正确的符号。请注意，这里没有胀子的势能项，因此自然也不能动态地确定它在玻色弦中的期望值。然而，在超弦的背景下，胀子的势能项将会出现，从而可以利用它固定弦的耦合常数。

作用量引力部分变成了标准的 Einstein-Hilbert 形式。引力耦合系数为

$$\kappa^2 = \kappa_0^2 e^{2\Phi_0} \sim l_s^{24} g_s^2 \quad (7.20)$$

Einstein-Hilbert 项前面的系数通常与牛顿常数有如下关系

$$8\pi G_N = \kappa^2$$

但请注意，这是 $D = 26$ 维的牛顿常数：它将不同于在四维世界中测量的牛顿常数。从牛顿常数出发，我们定义了 $D = 26$ 的普朗克长度 $8\pi G_N = l_p^{24}$ 和普朗克质量 $M_p = l_p^{-1}$ 。与 (7.20) 相比，我们发现弱弦耦合， $g_s \ll 1$ ，在普朗克标度和弦标度之间提供了参数分离，

$$g_s \ll 1 \quad \Rightarrow \quad l_p \ll l_s$$

引力物理学的疑难往往在尺度 l_p 附近出现。当 $g_s \ll 1$ 时，我们对弦理论的理解最透彻。在这种情况下，许多弦的物理效应发生在 $l_s \gg l_p$ ，并且可以从引力中的强耦合效应中分离出来。

原始度规 $G_{\mu\nu}$ 通常被称为弦度规或 sigma 模型度规。它是弦看到的度规，正如作用量 (7.1) 所反映的那样。相比之下， $\tilde{G}_{\mu\nu}$ 被称为爱因斯坦度规。当然，这两个作用量 (7.16) 和 (7.19) 描述了相同的物理：我们只是选择了用不同的方式来包装场。度规的选择—— $G_{\mu\nu}$ 或 $\tilde{G}_{\mu\nu}$ ——通常被称为标架的选择：弦标架，或者 Einstein 标架。

定义两个参数的可能性之所以出现是因为我们在游戏中有一个无质量标量场 Φ 。只要存在这样的场，就没有什么能阻止我们通过尺子上包含 Φ 来用不同的方法测量距离。换句话说，无质量的标量场会产生远距离的吸引力，这种吸引力会与引力混合，违反等效原理。最终，如果我们想与自然联系，我们需要找到一种方法使 Φ 变得巨大。这种机制存在于超弦中。

7.3.2 修正 Einstein 方程

既然我们知道 Einstein 方程是如何从弦理论中产生的，我们就可以开始尝试理解新的物理学了。例如，Einstein 方程的量子修正是什么？

一般来说，我们期望当时空的曲率 r_c 与弦长尺度 $\sqrt{\alpha'}$ 相当时，这些修正就会生效。但这与上面的讨论非常吻合，我们看到非线性 sigma 模型的微扰展开参数是 α'/r_c^2 。计算 beta 函数的下一个圈修正将导致对 Einstein 方程的修正！

如果我们忽略 H 和 Φ ，可以很容易地计算出两圈 sigma 模型的 beta 函数，并对爱因斯坦方程进行 α' 修正：

$$\beta_{\mu\nu} = \alpha' \mathcal{R}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \alpha'^2 \mathcal{R}_{\mu\lambda\rho\sigma} \mathcal{R}_\nu{}^{\lambda\rho\sigma} + \dots = 0$$

这种两圈修正也出现在杂化弦中。然而，II 型弦理论不存在这种两圈修正，从 sigma 模型的角度来看，第一阶修正出现在 4-圈。

弦的圈修正

微扰弦理论具有 α' 展开和 g_s 展开。我们还得讨论后者。这里出现了一个微妙之处。sigma 模型的 beta 函数是由调节世界面的紫外发散而产生的。然而 g_s 展开只关心弦的拓扑结构。紫外发散怎么会影响到世界面的全局性质呢。或者，等价地，对 beta-函数的高圈修正怎么能得到有趣的结果呢？

解决这个难题的方法是记住，当计算更高的 g_s 修正时，我们必须对黎曼面的模空间进行积分。但是这个模空间会包含一些黎曼曲面退化的特殊点（例如，环面中的一个圆可能会在某处退化）。在这些点上，UV 发散与全局拓扑有关，这导致了对低能有效作用量的 g_s 修正。

7.3.3 Nodding Once More to the Superstring

在 2.5 节中，我们描述了四种超弦理论的无质量玻色子内容：Heterotic $SO(32)$ ，Heterotic $E_8 \times E_8$ ，Type IIA 和 Type IIB。它们中的每一个都包含玻色弦中出现的场 $G_{\mu\nu}$ ， $B_{\mu\nu}$ 和 Φ ，以及一系列进一步的无质量场。对于每一个，低能量有效作用量描述了这些场在 $D = 10$ 维时空中的动力学。它自然地分成三块，

$$S_{\text{superstring}} = S_1 + S_2 + S_{\text{fermi}}$$

在这里， S_{fermi} 描述了时空费米子的相互作用。我们不会在这里描述这些。但我们将简要描述这四种超弦理论的低能玻色作用量 $S_1 + S_2$ 。

S_1 对于所有理论来说本质上是相同的，它是由我们在弦标架 (7.16) 中发现的玻色弦的作用量给出的。我们将开始使用形式符号，并将 $H_{\mu\nu\lambda}$ 简单地表示为 H_3 ，其中下标表示形式的程度。然后作用量是这样的

$$S_1 = \frac{1}{2\kappa_0^2} \int d^{10}X \sqrt{-G} e^{-2\Phi} \left(\mathcal{R} - \frac{1}{2} |\tilde{H}_3|^2 + 4\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi \right) \quad (7.21)$$

有一个很小的区别，那就是这里出现的用于杂化弦的场 \tilde{H}_3 与原始 H_3 不完全相同；我们稍后将对此作进一步解释。

作用量的第二部分 S_2 描述了每个不同理论特有的额外场的动力学。现在我们将依次讨论这四种理论，每种情况下解释 S_2 。

- **Type IIA:** 对于这个理论，在 (7.21) 中出现的 \tilde{H}_3 是 $H_3 = dB_2$ ，正如我们在玻色弦中看到的那样。在第 2.5 节中，我们描述了 IIA 型理论的额外玻色子场：它们由 1-form 的 C_1 和 3-form 的 C_3 组成。这些场的动力学是由所谓的 Ramond-Ramond 部分控制的，用形式符号表示为：

$$S_2 = -\frac{1}{4\kappa_0^2} \int d^{10}X \left[\sqrt{-G} \left(|F_2|^2 + |\tilde{F}_4|^2 \right) + B_2 \wedge F_4 \wedge F_4 \right]$$

这里的场强由 $F_2 = dC_1$ 和 $F_4 = dC_3$ 给出，而在动力学项中出现的物体为 $\tilde{F}_4 = F_4 - C_1 \wedge H_3$ 。注意，作用量中的最后一项与度规无关：它被称为 chen-simons 项。

- **Type IIB:** 同样， $\tilde{H}_3 \equiv H_3$ 。额外的玻色子场现在是一个标量 C_0 ，一个 2-form 的 C_2 和一个 4-form 的 C_4 。它们的作用量由下式给出

$$S_2 = -\frac{1}{4\kappa_0^2} \int d^{10}X \left[\sqrt{-G} \left(|F_1|^2 + |\tilde{F}_3|^2 + \frac{1}{2} |\tilde{F}_5|^2 \right) + C_4 \wedge H_3 \wedge F_3 \right]$$

其中 $F_1 = dC_0$, $F_3 = dC_2$, $F_5 = dC_4$ 。再一次，动力学项涉及更复杂的形式组合：它们是 $\tilde{F}_3 = F_3 - C_0 \wedge H_3$ 和 $\tilde{F}_5 = F_5 - \frac{1}{2} C_2 \wedge H_3 + \frac{1}{2} B_2 \wedge F_3$ 。

然而，对于 IIB 型弦理论，这些场有一个额外的要求，不能用任何简单的方法用拉格朗日量来实现： \tilde{F}_5 必须是自对偶的

$$\tilde{F}_5 = \star \tilde{F}_5$$

严格地说，应该说 IIB 型理论的低能动力学是由我们从作用量中得到的运动方程控制的，并辅以此种自对偶性要求。

- **Heterotic:** 两种杂化理论都有一个无质量玻色子成分：非阿贝尔规范场强 F_2 ，规范群 $SO(32)$ 或 $E8 \times E8$ 。这个场的动力学就是十维的 Yang-Mills 作用量，

$$S_2 = \frac{\alpha'}{8\kappa_0^2} \int d^{10}X \sqrt{-G} \text{Tr} |F_2|^2$$

剩下的微妙之处是解释 (7.21) 中的 \tilde{H}_3 ：定义为 $\tilde{H}_3 = dB_2 - \alpha'\omega_3/4$ ，其中 ω_3 是由非阿贝尔规范场 A_1 构造的 chen-simons 3-form

$$\omega_3 = \text{Tr} \left(A_1 \wedge dA_1 + \frac{2}{3} A_1 \wedge A_1 \wedge A_1 \right)$$

从动力学角度来看，这种奇怪的组合形式的存在与杂化弦最复杂、最有趣的一个方面有关，即反常抵消。

我们写在这里的作用量可能看起来有点随意。但它们有非常重要的性质。特别地，每一个 II 型理论的全部作用量 $S_{\text{superstring}}$ 在 $\mathcal{N} = 2$ 时空超对称性下是不变的（这意味着 32 个超荷）。它们是具有此属性的唯一作用量。同样，在 $\mathcal{N} = 1$ 的超对称条件下，杂化超弦的作用量是不变的，而且至关重要的是，它不会受到反常的影响。Polchinski 的书是学习这些的好地方。

7.4 一些简单解

时空运动方程，

$$\beta_{\mu\nu}(G) = \beta_{\mu\nu}(B) = \beta(\Phi) = 0$$

有很多解。这是弦理论中真空选择的一部分。如果有的话，什么样的解可

以描述我们周围的世界呢？我们是否期望这个假定的解具有其他特殊性质，或者它只是从许多可能性中随机选择的？答案是，我们真的不知道，但目前还没有已知的原理可以唯一地从其他可能性中选择一个看起来像我们的世界的解——具有我们观察到的规范群，物质含量和基本常数的值。当然，这些问题真的应该在超弦的背景下提出，在超弦中，对各种非扰动效应（如 D-膜和通量）的更好理解会导致更多可能的解。

这里我们不讨论这些问题。相反，我们将只讨论一些众所周知的简单解。前者在试图与现实世界接触时发挥作用，而后者的价值主要在于试图更好地理解弦理论的结构。

7.4.1 紧致化

我们知道玻色弦喜欢生活在 $D = 26$ 维的时空。但我们没有。或者，更准确地说，我们只观察到三个宏观的大空间维度。我们如何调和这些描述？

由于弦理论是一种引力理论，没有什么能阻止宇宙的额外维度卷曲起来。实际上，在某些情况下，这可能是动态需要的。这里我们给出了一些具有这种性质的低能有效作用量的简单解。我们设 $H_{\mu\nu\rho} = 0$ 和 Φ 为常数。然后我们简单地搜索服从 $\mathcal{R}_{\mu\nu} = 0$ 的 Ricci 平直背景。有一些解，其中度规是空间上的度规的直接乘积

$$\mathbf{R}^{1,3} \times \mathbf{X} \quad (7.22)$$

其中 \mathbf{X} 是一个紧致的 22 维 Ricci 平直流形。

最简单的流形就是 $\mathbf{X} = \mathbf{T}^{22}$ ，这个环面被赋予了一个平直度规。但还有很多其他的可能性。紧的，复的流形承认这样的 Ricci 平直度规被称为 Calabi-Yau 流形。（严格地说，Calabi-Yau 流形是具有消失的第一陈氏类的复流形。丘定理保证了在这些空间上存在唯一的 Ricci 平直度规）

宇宙中可能存在额外紧化方向的想法早在弦理论之前就被考虑过，并被称为 Kaluza-Klein 紧致化。如果空间 \mathbf{X} 的特征长度标度 L 足够小，那么在实验中就不会观察到这些额外维度的存在。粒子物理的标准模型已经被

精确地测试到大约 TeV 的能量，这意味着如果标准模型粒子可以在 \mathbf{X} 周围漫游，那么长度标度必须是 $L \leq (\text{TeV})^{-1} \sim 10^{-16} \text{cm}$ 。

然而，人们可以编造这样的场景：标准模型卡在这些额外维度的某个地方（例如，它可能定位在 D-膜上）。在这种情况下，约束会变得弱得多，因为我们将依靠引力实验来探测额外维度。目前的边界只要求 $L \leq 10^{-5} \text{cm}$ 。

考虑低能有效作用量中的 Einstein-Hilbert 项。如果我们只对 $\mathbf{R}^{1,3}$ 上的 4d 度规的动力学感兴趣，这是由

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{26}X \sqrt{-\tilde{G}} \tilde{\mathcal{R}} = \frac{\text{Vol}(\mathbf{X})}{2\kappa^2} \int d^4X \sqrt{-G_{4d}} \mathcal{R}_{4d}$$

（这里忽略了内部流形 X 的各种模）由方程可知，有效的 4d 牛顿常数用 26d 牛顿常数表示，

$$8\pi G_N^{4d} = \frac{\kappa^2}{\text{Vol}(\mathbf{X})}$$

用 4d 普朗克标度重写这个，我们有 $l_p^{(4d)} \sim g_s l_s^{1/2} / \sqrt{\text{Vol}(\mathbf{X})}$ 。为了信任整个分析，我们要求 $g_s \ll 1$ ，并且内部空间的所有长度标度都大于 l_s 。这保证了 $l_p^{(4d)} < l_s$ 。虽然 4d 普朗克长度非常小， $l_p^{(4d)} \sim 10^{-33} \text{cm}$ ，但我们可能不需要探测到这个距离就能发现 UV 引力物理。上面的粗略计算表明，弦规模可以更大，通过额外维的体积来增强。

7.4.2 弦本身

我们已经看到，将弦的小圈量子化会产生引力子和 $B_{\mu\nu}$ 场。然而，从 sigma 模型作用量 (7.12)，我们也知道弦在 $B_{\mu\nu}$ 下带电。此外，弦有张力，这确保了它也可以作为度规 $G_{\mu\nu}$ 的来源。那么弦的反作用是什么样的呢？或者，换一种说法：描述一根弦在另一根弦的背景下运动的 sigma 模型是什么？

考虑一条无限的、静态的、沿 X^1 方向拉伸的直弦。我们可以通过将运动方程耦合到 delta-函数弦源来求解背景场。这和我们在电磁学中常用的计

算是一样的。由此产生的时空场由下式给出

$$\begin{aligned} ds^2 &= f(r)^{-1}(-dt^2 + dX_1^2) + \sum_{i=2}^{25} dX_i^2 \\ B &= (f(r)^{-1} - 1)dt \wedge dX_1, \quad e^{2\Phi} = f(r)^{-1} \end{aligned} \quad (7.23)$$

函数 $f(r)$ 只依赖于横向 $r^2 = \sum_{i=2}^{25} X_i^2$ ，由下式给出

$$f(r) = 1 + \frac{g_s^2 N l_s^{22}}{r^{22}}$$

这里 N 是一个常量，我们很快就会演示它计算作为背景源的弦的数量。解中的弦长标度为 $l_s = \sqrt{\alpha'}$ 。函数 $f(r)$ 在弦的横向空间中具有谐波的性质，这意味着它满足 $\nabla_{\mathbf{R}^{24}}^2 f(r) = 0$ ，除非在 $r = 0$ 处。

我们来计算这个解的 B -场的荷。我们做的和电磁学完全一样：我们对环绕物体的球体的总通量积分。弦沿着 X^1 方向，所以横向空间是 \mathbf{R}^{24} 。我们可以在这个横向空间的边界上考虑一个球面 \mathbf{S}^{23} 。我们应该对这个球体上的通量积分。但是通量的表达式是什么？

为了了解我们应该做什么，让我们看看在弦源存在时 $H_{\mu\nu\rho}$ 的作用量。我们将使用形式符号，因为这样更简洁，我们将 $H_{\mu\nu\rho}$ 简称为 H_3 。作用量可示意性地采用以下形式

$$\frac{1}{g_s^2} \int_{\mathbf{R}^{26}} H_3 \wedge \star H_3 + \int_{\mathbf{R}^2} B_2 = \frac{1}{g_s^2} \int_{\mathbf{R}^{26}} H_3 \wedge \star H_3 + g_s^2 B_2 \wedge \delta(\omega)$$

这里 $\delta(\omega)$ 是一个在弦的二维世界面上的 delta-函数源。运动方程是

$$d\star H_3 \sim g_s^2 \delta(\omega)$$

从这里我们知道要计算单个弦的荷我们需要积分

$$\frac{1}{g_s^2} \int_{\mathbf{S}^{23}} \star H_3 = 1$$

在这些一般性评论之后，我们现在回到我们的解 (7.23)。以上的讨论都是示意性的，没有考虑到 2 和 π 的因子。保持这种精神，解的通量 (7.23) 可以被检查为

$$\frac{1}{g_s^2} \int_{\mathbf{S}^{23}} \star H_3 = N$$

这告诉我们，解 (7.23) 描述了由 N 个一致的、平行的基本弦所产生的背景。

另一检验方法是计算解单位长度的 ADM 质量：为 $NT \sim N/\alpha'$ 。

注意，就低能有效作用量而言，没有什么坚持 $N \in \mathbf{Z}$ 的。这类似于经典麦克斯韦理论中没有任何东西需要 e 被量子化。然而，在弦理论中，就像在 QED 中一样，我们知道微观理论的潜在来源， N 确实必须取整数值。

最后，注意到当 $r \rightarrow 0$ 时，解是奇异的。在这种情况下，高阶 α' 修正变得很重要，这是不可信的。

7.4.3 磁膜

我们已经知道弦理论不仅仅是关于弦的理论；还有 D-膜，定义为弦可以在其上结束的表面。我们将在 7.5 节中详细介绍 D-膜。这里，我们将考虑存在于弦理论中的第三种物体。这又是一个膜——也就是说它在一些时空方向上延伸——但它不是 D-膜，因为开弦不能在那里结束。在这几节课中，我们称之为磁膜。

电荷和磁荷

你们可能不习惯在电磁学中讨论带磁性的物体。事实上，在本科课程中，我们通常不会进一步指出 $\nabla \cdot B = 0$ 不允许点状磁荷。然而，在量子场论的背景下，许多有趣的行为往往归结为理解磁荷的行为。弦理论也是如此。因为这可能是不熟悉的，让我们花一点时间来讨论基础知识。

在 $d = 3 + 1$ 维的电磁学中，我们通过对围绕粒子的球体 S^2 上的电场 \vec{E} 积分来测量电荷 q ，

$$q = \int_{S^2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S^2} {}^\star F_2 \quad (7.24)$$

在第二个等式中，我们引入了微分形式的符号，在前面的例子中也使用过。

假设一个粒子携带磁荷 g 。这可以通过对同一球体上的磁场 \vec{B} 积分来测量。这意味着

$$g = \int_{S^2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S^2} F_2 \quad (7.25)$$

在 $d = 3 + 1$ 维空间中，带电和带磁性的物体都是粒子。但这在任何维度中并不总是正确的！它在 $4d$ 中成立的原因是场强 F_2 和对偶场强 $*F_2$ 都是 2-form。显然，这对于四维空间来说是很特殊的。

一般来说，假设我们有一个 p -膜，它在合适的规范场下是带电的。正如我们在 7.2.1 节中所讨论的，一个 $(p+1)$ 维物体自然地耦合到一个 $(p+1)$ -form 的规范势 C_{p+1} ，

$$\mu \int_W C_{p+1}$$

其中 μ 为物体的电荷， W 为膜的世界体积。 $(p+1)$ -form 的规范势具有 $(p+2)$ -form 的场强

$$G_{p+2} = dG_{p+1}$$

为了测量 p -膜的电荷，我们需要对完全包围物体的球体上的场强进行积分。 D 维 p -膜的横向空间为 \mathbf{R}^{D-p-1} 。我们可以在无穷远处积分球面上的通量，也就是 S^{D-p-2} 。事实上，计算结果很好，因为在 D 维中，对偶场强是 $(D-p-2)$ -form， $*G_{p+2} = \tilde{G}_{D-p-2}$ ，我们可以很高兴地在球上积分，找到里面的电荷，

$$q = \int_{S^{D-p-2}} *G_{p+2}$$

这个方程是式 (7.24) 的推广版本。

现在我们来考虑磁荷。(7.25) 的推广版本建议我们通过对球面 S^{p+2} 上的 G_{p+2} 积分来计算磁荷。什么样的物体在这个球体内发射磁荷？反过来算，我们发现它应该是 $(D-p-4)$ -膜。

我们可以写出 $(D-p-4)$ -膜与场强之间的耦合。为此，我们首先需要引入由定义的磁规范势

$$*G_{p+2} = \tilde{G}_{D-p-2} = d\tilde{G}_{D-p-3} \quad (7.26)$$

然后，我们可以简单地将磁耦合添加到 $(D-p-4)$ -膜的世界体 \tilde{W} 上

$$\tilde{\mu} \int_{\tilde{W}} \tilde{G}_{D-p-3}$$

其中 $\tilde{\mu}$ 是磁荷。注意，通常不可能写出一个拉格朗日量同时包含带磁性的物体和带电荷的物体。这就需要在拉格朗日量中同时包含 C_{p+1} 和 \tilde{C}_{D-p-3} ，但它们并不是独立的场：它们由相当复杂的微分方程 (7.26) 联系起来。

玻色弦理论中的磁膜

在这些概括性之后，让我们看看它对玻色弦意味着什么。基本弦是一个 1-膜，正如我们在 7.2.1 节中看到的，在 2-form B 下携带电荷。因此在 B 下携带磁荷的合适物体是 $(D-p-4) = (26-1-4) = 21$ -膜。

强调一点：无论是基本弦还是磁 21-膜都不是 D-膜。它们不是弦可以结束的表面。我们称它们为膜只是因为它们是扩展的对象。

玻色弦的磁性 21-膜可以作为低能运动方程的解。解可以用对偶势 \tilde{B}_{22} 来表示，使得 $d\tilde{B}_{22} = \star dB_2$ 。它是

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(-dt^2 + \sum_{i=1}^{21} dX_i^2 \right) + h(r)(dX_{22}^2 + \dots + dX_{25}^2) \\ \tilde{B}_{22} &= (1 - h(r)^{-2})dt \wedge dX_1 \wedge \dots \wedge dX_{21} \\ e^{2\Phi} &= h(r) \end{aligned} \tag{7.27}$$

函数 $h(r)$ 只依赖于 \mathbf{R}^4 中与膜横向的径向方向： $r^2 = \sum_{i=22}^{25} X_i^2$ 。它是 \mathbf{R}^4 中的调和函数，由下式给出

$$h(r) = 1 + \frac{N l_s^2}{r^2}$$

这个函数在度规 (7.27) 中的作用是扭曲横向 \mathbf{R}^4 方向。当你接近膜时，距离会变大，原点 $r = 0$ 处于无限远的距离。

可以验算出解携带了 N 个单位的磁荷，并具有张力

$$T \sim \frac{N}{l_s^{22}} \frac{1}{g_s^2}$$

让我们总结一下弦理论中不同物体的张力是如何缩放的。 $\alpha' = l_s^2$ 的幂完全固定在量纲上 (回想一下, 张力是每空间体积的质量, 所以 p -膜的张力有 $[T_p] = p + 1$)。更有趣的是对弦耦合的依赖。基本弦的张力不依赖于 g_s , 而磁膜的标度为 $1/g_s^2$ 。这种 $1/g_s^2$ 的行为是场论中孤子的典型行为。D-膜位于两者之间: 它们的张力标度为 $1/g_s$ 。具有这种行为的对象在场论中比较少见 (尽管并非闻所未闻)。

在微扰极限 $g_s \rightarrow 0$ 时, D-膜和磁膜都是重的。具有张力 T 的物体与重力的耦合由 $T\kappa^2$ 控制, 其中重力耦合标度为 $\kappa \sim g_s^2$ (7.20)。这意味着在弱耦合极限下, 弦和 D-膜的引力反作用可以忽略不计。然而, 磁膜与重力的耦合总是 1 阶的。

超弦理论中的磁膜

超弦理论也有一个膜在 B 下带磁荷。它是 $(D-p-4) = (10-1-4) = 5$ -膜, 通常被称为 NS5-膜。横向 \mathbf{R}^4 的解同样是 (7.27) 式。

NS5-膜存在于 II 型弦和杂化弦中。在许多方面, 它比 D-膜更神秘, 其低能有效动力学仍然知之甚少。它与 M-理论的 5-膜密切相关。

7.4.4 远离临界维度

beta 函数方程为玻色弦的临界维数 $D = 26$ 提供了新的视角。为了了解这一点, 让我们更仔细地看看 (7.15) 中定义的胀子 beta 函数 $\beta(\Phi)$: 它的形式与我们在 4.4.2 节中讨论的 Weyl 反常相同。这意味着, 如果我们考虑在 $D \neq 26$ 中传播的弦, 那么 Weyl 反常只是作为胀子 beta 函数中的第一阶项出现。我们来放宽临界维数的要求。由 $\beta_{\mu\nu}(G)$ 和 $\beta_{\mu\nu}(B)$ 引起的运动方程不变, 而胀子 beta 函数方程变为

$$\beta(\Phi) = \frac{D-26}{6} - \frac{\alpha'}{2} \nabla^2 \Phi + \alpha' \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi - \frac{\alpha'}{24} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} = 0 \quad (7.28)$$

弦标架中的低能有效作用量得到了一个额外项看起来像 Φ 的 run-away 势,

$$S = \frac{1}{2\kappa_0^2} \int d^D X \sqrt{-G} e^{-2\Phi} \left(\mathcal{R} - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} + 4\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{2(D-26)}{3\alpha'} \right)$$

这听起来很令人兴奋。我们真的能轻易地得到 $D = 4$ 维的弦理论吗？好吧，是也不是。首先，有了这个额外的势能项，平直的 D 维闵可夫斯基空间不再能解出运动方程。这与第 2 节的分析一致，在第 2 节中，我们表明只有在 $D = 26$ 时才保留完整的 Lorentz 不变性。

另一个技术上的问题，用这种方法解决弦运动方程是我们在用树级项和单圈项进行比较。但是，如果树级和单圈的项是可比较的，那么通常所有更高圈的贡献也会如此，我们很可能无法信任我们的分析。

线性胀子 CFT

事实上，对于 (7.28) 有一个我们可以信任的简单解。它是

$$\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi = \frac{26 - D}{6\alpha'}$$

回想一下，我们在号差 $(-, +, +, \dots)$ 中工作，这意味着 Φ 在 $D < 26$ 时采用类空剖面，在 $D > 26$ 时采用类时剖面，

$$\begin{aligned} \Phi &= \sqrt{\frac{26 - D}{6\alpha'}} X^1 & D < 26 \\ \Phi &= \sqrt{\frac{D - 26}{6\alpha'}} X^0 & D > 26 \end{aligned}$$

这给出了一个在一个方向上线性的胀子。这可以与我们在 5.3.2 中看到的对非临界弦的路径积分的研究进行比较。看待同一个物理现象有两种方式。

我们可以相信这个解的原因是它有一个精确的 CFT 使我们可以分析到 α' 的所有阶。很明显，它被称为线性胀子 CFT。现在让我们更详细地看看这个。

首先，考虑与胀子耦合相关的世界面作用量。现在我们考虑一个任意胀子剖面 $\Phi(X)$ ，

$$S_{\text{dilaton}} = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} \Phi(X) R^{(2)} \quad (7.29)$$

虽然这一项在平直世界面上消失了，但它改变了能量-动量张量 $T_{\alpha\beta}$ ，因为它被定义为

$$T_{\alpha\beta} = -4\pi \left. \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} \right|_{g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}}$$

式 (7.29) 的变分很简单。事实上，这个项类似于广义相对论中的 Einstein-Hilbert 项，但在二维空间中事情更简单，因为，例如， $R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R$ 。有

$$\delta(\sqrt{g}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}) = \sqrt{g}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} = \sqrt{g}\nabla^\alpha v_\alpha$$

其中

$$v_\alpha = \nabla^\beta \delta g_{\alpha\beta} - g^{\gamma\delta} \nabla_\alpha \delta g_{\gamma\delta}$$

利用这一点，作用量中胀子项的变分由下式给出

$$\delta S_{\text{dilaton}} = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} (\nabla^\alpha \nabla^\beta - \nabla^2 \Phi g^{\alpha\beta}) \delta g_{\alpha\beta}$$

在 $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ 的限制下，最终给出了具有胀子耦合的理論的能量-动量张量

$$T_{\alpha\beta}^{\text{dilaton}} = -\partial_\alpha \partial_\beta \Phi + \partial^2 \Phi \delta_{\alpha\beta}$$

注意，这个能动张量不是无迹的。这是可以预料到的，因为正如我们上面所描述的，胀子耦合在树级不是 Weyl 不变的。在复坐标下，能动张量为

$$T^{\text{dilaton}} = -\partial^2 \Phi, \quad \bar{T}^{\text{dilaton}} = -\bar{\partial}^2 \Phi$$

线性胀子 OPE

上述能动张量适用于任何胀子剖面 $\Phi(X)$ 。现在我们把它限制在单个标量场 X 的线性胀子剖面上，

$$\Phi = QX$$

其中 Q 是常数。我们还包括 D 个标量场的标准动力学项，其中 X 是选定的，给出能动张量

$$T = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X \partial X : - Q \partial^2 X$$

使用第 4 节中描述的技术计算 TT OPE 是一件很简单的事情。我们发现，

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \dots$$

其中理论的中心荷是由下式给出

$$c = D + 6\alpha' Q^2$$

注意 Q^2 可以是正的，也可以是负的取决于我们是有一个类时的还是类空的线性胀子。这样，我们就清楚地看到线性胀子梯度是如何吸收中心荷的。

7.4.5 The Elephant in the Room: 快子

我们一直在夸夸其谈低能量有效作用量的解决方案的细节，而忽略了其中最重要，最相关的领域：快子。因为我们的真空是不稳定的，这就有点像描述我们能画出的所有美丽的画，只要那该死的画笔能在没有帮助的情况下在它的尖端保持平衡。

当然，讨论这些解的主要原因是，它们都直接适用于不存在快子的超弦。尽管如此，有趣的是如果快子被打开会发生什么。它的顶点算符很简单

$$V_{\text{tachyon}} \sim \int d^2\sigma \sqrt{g} e^{ip \cdot X}$$

其中 $p^2 = 4/\alpha'$ 。从这些 Fourier 模式中拼凑出一个一般的快子谱 $V(X)$ 并指数化，得到弦的世界面上的一个势

$$S_{\text{potential}} = \int d^2\sigma \sqrt{g} \alpha' V(X)$$

这是一个与世界面 CFT 相关的算符。每当这样一个相关算符打开时，我们应该跟随 RG 流到红外，直到我们降落在另一个 CFT 上。c 定理告诉我们 $c_{IR} < c_{UV}$ ，但在弦理论中我们总是要求 $c = 26$ 。至少在最初，赤字以上述方式被胀子吸收。玻色弦的快子 RG 流的终点尚不清楚。可能是没有终点，一旦快子开启，玻色弦就没有意义了。或许我们还没有理解玻色弦的真正基态。

7.5 重新审视 D-膜：背景规范场

理解了闭弦背景上共形不变性的约束，我们就得到了 Einstein 方程和时空中的低能有效作用量。现在我们想对开弦做同样的事情。我们想要理解一致性对 D-膜动力学的限制。

我们在第 3 章中看到，开弦的量子化产生了两种类型的无质量模态：对应于 D-膜波动的标量和 $U(1)$ 规范场。我们现在将忽略标量波动，但稍后会回到它们。我们首先关注 Dp -膜上的规范场 $A_a, a = 0, \dots, p$ 的动力学。

我们要问的第一个问题是：弦的末端如何与背景规范场相互作用？为了回答这个问题，我们需要看一下与光子相关的顶点算符。它在 (5.10) 给出

$$V_{\text{photon}} \sim \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau \zeta_a \partial^\tau X^a e^{ip \cdot X}$$

只有当 $p^2 = 0$ 和 $p^a \zeta_a = 0$ 时，它才是 Weyl 不变的和初级的。如第 7 章开头所述，对该顶点算符进行指数化，给出了开弦与一般背景规范场 $A_a(X)$ 的耦合，

$$S_{\text{end-point}} = \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau A_a(X) \frac{dX^a}{d\tau}$$

但这是一个非常熟悉的耦合——我们已经在 (7.9) 中提到过它。它告诉我们弦的末端在膜上的背景规范场 A_a 下是带荷的。

7.5.1 Beta 函数

现在我们可以对闭弦执行相同类型的 beta 函数计算了⁹。要做到这一点，首先使用共形不变性将开弦世界面映射到欧几里得上半平面是很有用的，我们已在 4.7 节中描述。描述在平直空间中传播的开弦的作用量，其末端受 D-膜上的背景规范场的影响，被分成两部分

$$S = S_{\text{Neumann}} + S_{\text{Dirichlet}}$$

其中 S_{Neumann} 描述了与 Dp-膜平行的波动，由下式给出

$$S_{\text{Neumann}} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \partial^\alpha X^a \partial_\alpha X^b \delta_{ab} + i \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau A_a(X) \dot{X}^a \quad (7.30)$$

这里 $a, b = 0, \dots, p$ 。额外的因子 i 出现是因为我们在欧几里德空间中。同时，垂直于膜的场具有 Dirichlet 边界条件，范围为 $I = p + 1, \dots, D - 1$ 。它们的动力学由下式给出

$$S_{\text{Dirichlet}} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \partial^\alpha X^I \partial_\alpha X^J \delta_{IJ}$$

⁹我们在这里会非常明确地说明，但如果你想了解更多细节，那么最好的地方是看 Abouelsaood, Callan, Nappi 和 Yost 的原始论文，“Open Strings in Background Gauge Fields”, Nucl. Phys. B280 (1987) 599.

作用量 $S_{\text{Dirichlet}}$ 描述了自由场，在计算 beta 函数中没有任何作用。有趣的是 S_{Neumann} ，对于非零 $A_a(X)$ ，它是一个有边界的相互作用量子场论。我们的任务是计算与耦合 $A_a(X)$ 耦合相关的 beta 函数。我们用的技术和之前用在闭弦上的技术是一样的。我们将 $X^a(\sigma)$ 展开为

$$X^a(\sigma) = \bar{x}^a(\sigma) + \sqrt{\alpha'} Y^a(\sigma)$$

其中要求 $\bar{x}^a(\sigma)$ 是服从经典运动方程的固定背景，

$$\partial^2 \bar{x}^a = 0$$

(在闭弦的类似计算中，我们选择了 \bar{x}^a 常数的特例。这里我们更一般) 然而，我们还需要对这个经典解施加边界条件。在规范场 A_a 不存在的情况下，我们要求在 $\sigma = 0$ 处施加 Neumann 边界条件 $\partial_\sigma X^a = 0$ 。然而，规范场的存在改变了这一点。对作用量 (7.30) 的变分表明，相关的边界条件有一个额外的修正项，

$$\partial_\sigma \bar{x}^a + 2\pi\alpha' i F^{ab} \partial_\tau \bar{x}_b = 0 \quad \text{at } \sigma = 0 \quad (7.31)$$

其中 F_{ab} 是场强

$$F_{ab}(X) = \frac{\partial A_b}{\partial X^a} - \frac{\partial A_a}{\partial X^b} \equiv \partial_a A_b - \partial_b A_a$$

场 $Y^a(\sigma)$ 是很小的波动。同样，在展开中存在 $\sqrt{\alpha'}$ 保证了 Y^a 是无量纲的。将作用量 S_{Neumann} (从现在起我们就叫它 S) 展开到二阶波动，

$$\begin{aligned} S[\bar{x} + \sqrt{\alpha'} Y] &= S[\bar{x}] + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \partial Y^a \partial Y^b \delta_{ab} \\ &\quad + i\alpha' \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau \left(\partial_a A_b Y^a \dot{Y}^b + \frac{1}{2} \partial_a \partial_b A_c Y^a Y^b \dot{\bar{x}}^c \right) + \dots \end{aligned}$$

其中所有涉及背景规范场的表达式现在都在经典解 \bar{x} 上求值。我们可以把边界项的第一项分成两半并对其中一半关于时间导数做分部积分，

$$\int d\tau (\partial_a A_b) Y^a \dot{Y}^b = \frac{1}{2} \int d\tau \partial_a A_b Y^a \dot{Y}^b - \partial_a A_b \dot{Y}^a Y^b - \partial_c \partial_a A_b Y^a Y^b \dot{\bar{x}}^c$$

把它和第二项结合起来意味着我们可以用规范不变场强 F_{ab} 来表示所有的相互作用，

$$S[\bar{x} + \sqrt{\alpha'} Y] = S[\bar{x}] + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \partial Y^a \partial Y^b \delta_{ab} + \frac{i\alpha'}{2} \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau \left(F_{ab} Y^a \dot{Y}^b + \partial_b F_{ac} Y^a Y^b \dot{\bar{x}}^c \right) + \dots \quad (7.32)$$

其中 $+\dots$ 指的是展开式中高次项，它们对 F_{ab} 有高阶导数，伴随着 α' 的幂。为了计算单圈 beta 函数，我们可以忽略它们。

传播子

这个拉格朗日量描述了我们的相互作用边界理论。我们现在可以用这个来计算 beta 函数。首先，我们应该确定可能出现发散的项。这个有问题的项是 (7.32) 中的最后一个。当波动场 Y^a 与其传播子缩并时，将导致发散

$$\langle Y^a(z, \bar{z}) Y^b(w, \bar{w}) \rangle = G^{ab}(z, \bar{z}; w, \bar{w})$$

我们现在应该已经习惯这些自由场格林函数了。传播子满足

$$\partial \bar{\partial} G^{ab}(z, \bar{z}) = -2\pi \delta^{ab} \delta(z, \bar{z}) \quad (7.33)$$

在上半平面中。但现在有一个微妙之处。 Y^a 场需要满足 $\text{Im}z = 0$ 处的边界条件，这应该反映在传播子的边界条件中。我们在第 4.7 节对 Neumann 边界条件进行了简要讨论。但我们也看到背景场强使 Neumann 边界条件变为 (7.31)。相应的，传播子 $G(z, \bar{z}; w, \bar{w})$ 必须满足

$$\partial_\sigma G^{ab}(z, \bar{z}; w, \bar{w}) + 2\pi\alpha' i F^a_c \partial_\tau G^{cb}(z, \bar{z}; w, \bar{w}) = 0 \quad \text{at } \sigma = 0 \quad (7.34)$$

在第 4.7 节中，我们展示了如何通过考虑下半平面中的镜像荷来施加 Neumann 边界条件。这里也有类似的方法。我们扩展 $G^{ab} \equiv G^{ab}(z, \bar{z}; w, \bar{w})$ 到整个复平面。受式 (7.34) 约束的式 (7.33) 的解为

$$G^{ab} = -\delta^{ab} \ln|z - w| - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - 2\alpha' F}{1 + 2\alpha' F} \right)^{ab} \ln(z - \bar{w}) - \frac{1}{2} \left(\frac{1 + 2\alpha' F}{1 - 2\alpha' F} \right)^{ab} \ln(\bar{z} - w)$$

抵消项和 Beta 函数

现在让我们回到相互作用理论 (7.32)，看看需要什么抵消项来消除发散。由于所有的相互作用都发生在边界上，我们应该在边界上计算传播子，这意味着 $z = \bar{z}$ 和 $w = \bar{w}$ 。在这种情况下，所有的对数都是一样的，并在 $z \rightarrow w$ 的极限下发散 $\ln|z - w| \rightarrow \epsilon^{-1}$ 。我们知道紫外发散的形式，

$$-\frac{1}{\epsilon} \left[\delta^{ab} + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - 2\alpha' F}{1 + 2\alpha' F} \right)^{ab} + \frac{1}{2} \left(\frac{1 + 2\alpha' F}{1 - 2\alpha' F} \right)^{ab} \right] = -\frac{2}{\epsilon} \left(\frac{1}{1 - 4\pi^2 \alpha' F^2} \right)^{ab}$$

现在很容易确定必要的抵消项。我们只需将最后一项的 $Y^a Y^b$ 替换成 $\langle Y^a Y^b \rangle$ 。这产生

$$-\frac{i2\pi\alpha'^2}{\epsilon} \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau \partial_b F_{ac} \left[\frac{1}{1 - 4\pi^2 \alpha' F^2} \right]^{ab} \dot{x}^c$$

为了使开放弦理论保持共形不变性，我们需要相关的 beta 函数消失。这就给出了场强 F_{ab} 的条件：它必须满足这个方程

$$\partial_b F_{ac} \left[\frac{1}{1 - 4\pi^2 \alpha' F^2} \right]^{ab} = 0 \quad (7.35)$$

这是控制运动方程的最终方程 F_{ab} 必须满足这个方程才能为开弦传播提供一致的背景。

7.5.2 Born-Infeld 作用量

公式 (7.35) 可能看起来不太熟悉！与闭弦类似，我们希望写出一个能得到式 (7.35) 作为运动方程的作用量。相关的作用量实际上是在几十年前作为 Maxwell 理论的非线性替代方案而构建的：它被称为 Born-Infeld 作用量：

$$S = -T_p \int d^{p+1} \xi \sqrt{-\det(\eta_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})} \quad (7.36)$$

这里 ξ 是膜对应的世界体上的坐标， T_p 是膜的张力（因为它作为作用量的因子出现，所以不影响运动方程）。规范势被认为是世界体坐标的函数： $A_a = A_a(\xi)$ 。实际上，我们需要做一些工作来证明我们从这个运动中得到的运动方程与 beta 函数的消失是一致的 (7.35)。

对于小场强, $F_{ab} \ll 1/\alpha'$, 作用量与 Maxwell 作用量一致。要看到这个, 我们只需要展开得到

$$S = -T_p \int d^{p+1}\xi \left(1 + \frac{(2\pi\alpha')^2}{4} F_{ab}F^{ab} + \dots \right)$$

领头阶项, 正是场强的二次项的 Maxwell 作用量。具有较高 F_{ab} 幂的项被 α' 的幂抑制。

所以, 对于小场强, D-膜上规范场的动力学是由 Maxwell 方程控制的。然而, 随着电场和磁场强度增加并达到 $1/\alpha'$ 时, 动力学的非线性修正开始发挥作用, 并被 Born-Infeld 作用量所描述。

Born-Infeld 作用量源于单圈 beta 函数。这是恒定场强下的准确结果。如果我们想了解具有大梯度的规范场 ∂F 的动力学, 那么我们就必须确定 beta 函数的高圈贡献。

7.6 DBI 作用量

我们已经知道膜上规范场的动力学是由 Born-Infeld 作用量描述的。但是膜本身的波动呢? 在第 3.2 节中, 我们曾简略地讨论过这一点, 并且根据一般的理由, 我们认为这一过程应当采用 Dirac 的形式 (第 3.6 节)。通过考虑膜上的标量场 ϕ^I 的 beta 函数可以很好地直接证明这一点, 因为物理上考虑这些方程就相当于考虑了膜弯曲的边界条件。确实有可能沿着 beta-函数的路线计算出一些东西, 并直接表明膜的波动是由 Dirac 作用量控制的¹⁰。

更一般地说, 可以同时考虑规范场的动力学和膜的波动。这是由 Dirac 作用量和 Born-Infeld 作用量 (常称为 DBI 作用量) 的共同作用量所控制的,

$$S_{DBI} = -T_p \int d^{p+1}\xi \sqrt{-\det(\gamma_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})}$$

如 (3.2) 节所述, γ_{ab} 是时空度规对世界体的 pull-back,

$$\gamma_{ab} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} \eta_{\mu\nu}$$

¹⁰关于这个计算的可读讨论可以在 Leigh 的原始论文中找到, Dirac-Born-Infeld Action from Dirichlet Sigma Model, Mod. Phys. Lett. A4: 2767 (1989).

这个作用量中的新动力学场是嵌入坐标 $X^\mu(\xi)$ ，其中 $\mu = 0, \dots, D-1$ 。这似乎是 D 个新的自由度，而我们期望只有 $D-p-1$ 个横向物理自由度。这个问题的解现在应该很熟悉了：DBI 作用量具有重参数化不变性，消除了膜的纵向波动。

我们可以将这种重参数化不变性应用于静态规范。对于一个无限的，平直的 Dp-膜，以下设置是有用的

$$X^a = \xi^a \quad a = 0, \dots, p$$

所以 pull-back 度规只取决于横向波动 X^I ，

$$\gamma_{ab} = \eta_{ab} + \frac{\partial X^I}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^J}{\partial \xi^b} \delta_{IJ}$$

如果我们对小场强 F_{ab} 和小导数 $\partial_a X$ 的情况感兴趣，那么我们可以将 DBI 作用量展开到领头阶。我们有

$$S = -(2\pi\alpha')^2 T_p \int d^{p+1}\xi \left(\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} + \frac{1}{2} \partial_a \phi^I \partial^a \phi^I + \dots \right)$$

其中我们在作用量中去掉了一个总常数项。我们重新调整了位置来定义标量场 $\phi^I = X^I / 2\pi\alpha'$ 。去掉 α' 的高阶项后，得到的就是自由 Maxwell 理论与自由无质量标量场 ϕ^I 的耦合。

7.6.1 耦合到闭弦场

DBI 作用量描述了平直空间中 Dp-膜的低能动力学。我们现在可以问，如果 D-膜在闭弦模式 $G_{\mu\nu}$ ， $B_{\mu\nu}$ 和 Φ 形成的背景中运动，它的运动会受到什么影响？我们不推导这个，而是简单地写下答案然后依次证明每一项。

$$S_{DBI} = -T_p \int d^{p+1}\xi e^{\tilde{\Phi}} \sqrt{-\det(\gamma_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab} + B_{ab})}$$

让我们从与背景度规 $G_{\mu\nu}$ 的耦合开始。它实际上隐藏在这个表达式的符号中：它出现在 pull-back 度规 γ_{ab} 中，现在由下式给出

$$\gamma_{ab} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} G_{\mu\nu}$$

应该清楚的是，这确实是自然的。

接下来是胀子。如式 (7.17) 所示，我们将胀子分解为一个恒定部分和一个变化部分： $\Phi = \Phi_0 + \tilde{\Phi}$ 。常数部分控制着渐近弦耦合，即 $g_s = e^{\Phi_0}$ ，它隐含在作用量整体系数中，因为 D-膜的张力按以下方式缩放

$$T_p \sim 1/g_s$$

这就解释了作用量前的 $e^{-\tilde{\Phi}}$ 因子：它只是将胀子的变化部分与恒定部分重新结合起来。物理上，它告诉我们 D-膜的张力取决于胀子场的局域定义的值，而不是它的渐近的常数值。如果胀子变化，则时空中 X 点处的有效弦耦合由 $g_s^{eff} = e^{\Phi(X)} = g_s e^{\tilde{\Phi}(x)}$ 给出。这反过来又改变了 D-膜的张力。它可以通过移动到 g_s^{eff} 更大的区域来降低张力。

最后，让我们转到 $B_{\mu\nu}$ 场。这是时空中的 2-form。在 DBI 作用量中出现的函数 B_{ab} 是向世界体的 pull-back

$$B_{ab} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} B_{\mu\nu}$$

它在 DBI 作用量中的出现实际上仅仅是基于规范不变性的要求。这可以通过考虑在时空背景 $B_{\mu\nu}(X)$ 和膜世界体背景 $A_a(X)$ 存在的情况下运动的开弦来看出。作用量中与之相关的项是

$$\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu B_{\mu\nu} + \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau A_a \dot{X}^a$$

在时空规范变换下

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B_{\mu\nu} + \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu \quad (7.37)$$

第一项变化了一个全微分。这对闭弦很好，但对开弦来说，它不能保持作用量不变，因为开弦存在边界项。快速看看得到了什么。在规范变换 (7.37) 下

$$\begin{aligned} S_B &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu B_{\mu\nu} \\ &\rightarrow S_B + \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\mathcal{M}} d\sigma d\tau \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \partial_\mu C_\nu \\ &= S_B + \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\mathcal{M}} d\sigma d\tau \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha (\partial_\beta X^\nu C_\nu) \\ &= S_B + \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau \dot{X}^\nu C_\nu = S_B + \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau \dot{X}^a C_a \end{aligned}$$

其中，在最后一行中，我们用服从 Neumann 边界条件 X^a 的求和替换了 X^ν 的求和，因为对于具有 Dirichlet 边界条件，在端点处有 $\dot{X}^I = 0$ 。

这个简短计算的结果是看到 (7.37) 中弦作用量不是不变的。为恢复这种时空规范不变性，必须在第二项中适当地移动 A_a 来抵消这种边界贡献，

$$A_a \rightarrow A_a - \frac{1}{2\pi\alpha'} C_a \quad (7.38)$$

注意，这不是我们通常在电动力学中考虑的规范变换。特别是场强 F_{ab} 不是不变的。相反，在式 (7.37) 和式 (7.38) 下，规范不变的一个组合为

$$B_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab}$$

这就是它们必须组合出现在 DBI 作用量中的原因。这也与一个重要的物理效应有关。我们已经看到，时空中的弦在 $B_{\mu\nu}$ 下带荷。但是我们也看到弦的末端在 D-膜上的规范场 A_a 下带荷。这意味着开弦在膜上储存 B 的荷，并转化为 A 的荷。规范不变场强涉及到 F_{ab} 和 B_{ab} 的组合，这一事实与荷的相互作用有关。

7.7 Yang-Mills 作用量

最后，让我们考虑 N 个重合 D-膜情况。我们在 3.3 节中讨论了这个问题，在那里我们展示了膜上的无质量场可以自然地打包成 $N \times N$ 厄米矩阵，矩阵的元素告诉我们端点处在哪个膜上。然后规范场的形式为

$$(A_a)^m_n$$

其中 $a = 0, \dots, p$ 和 $m, n = 1, \dots, N$ 。这样写，它看起来很像 $U(N)$ 规范联络。的确，这是正确的解释。但是我们怎么看这个呢？为什么规范场描述的是 $U(N)$ 规范对称，而不是 $U(1)^{N^2}$ ？

要了解重合膜产生 $U(N)$ 规范对称，最快的方法是回想一下弦的端点在 $U(1)$ 规范场的作用下带荷，该规范场位于弦的端点所在的膜上。让我们

用最简单的例子来说明这一点。假设我们有两个膜。对角线分量 $(A_a)^1_1$ 和 $(A_a)^2_2$ 来自于两端点位于同一膜的弦。他们每个都是 $U(1)$ 规范场。非对角线项 $(A_a)^1_2$ 和 $(A_a)^2_1$ 呢？它们来自两端点分别位于两个不同膜的弦。它们同样是无质量规范玻色子，但它们在两个原本的 $U(1)$ 对称性下分别携带 $(+1, -1)$ 和 $(-1, +1)$ 荷。但这正是 $U(2)$ 规范理论的结构，其中非对角项类似于 W-玻色子。事实上，只有通过非阿贝尔规范对称性才能理解无质量带荷的自旋 1 粒子。

因此， N 个重合膜的无质量激发是一个 $U(N)$ 规范场 $(A_a)^m_n$ ，以及在 $U(N)$ 规范群的伴随表示中变换的标量 $(\phi^I)^m_n$ 。我们在第 3 章中看到，对角分量 $(\phi^I)^m_m$ 可以解释第 m 个膜的横向波动。我们现在可以写下一个作用量来描述这些场的相互作用吗？

事实上，在写下 DBI 作用量的非阿贝尔推广时有几个微妙之处，而且这样的作用量是未知的（如果它确实有意义的话）。然而，我们可以通过考虑场强较小时的低能极限来取得进展。所讨论的场强现在是适当的非阿贝尔表达式，忽略矩阵指标，为

$$F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a + i[A_a, A_b]$$

描述 N 个重合 Dp-膜动力学的低能作用量为（忽略整体常数项），

$$S = -(2\pi\alpha')^2 T_p \int d^{p+1} \xi \text{Tr} \left(\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} + \frac{1}{2} \mathcal{D}_a \phi^I \mathcal{D}^a \phi^I - \frac{1}{4} \sum_{I \neq J} [\phi^I, \phi^J]^2 \right) \quad (7.39)$$

我们承认第一项为 $U(N)$ 的 Yang-Mills 作用量。Yang-Mills 作用量前的系数为耦合常数 $1/g_{YM}^2$ 。对于 Dp-膜，它可以写为 $\alpha'^2 T_p$ ，或者

$$g_{YM}^2 \sim l_s^{p-3} g_s$$

ϕ^I 的动力学项仅仅反映了这些场在规范群的伴随表示中变换的事实，

$$\mathcal{D}_a \phi^I = \partial_a \phi^I + i[A_a, \phi^I]$$

我们不会在这几节课中推导出这个作用量，但大概思路是：前两个项可以根据规范不变性单独推导出来。势能项很难直接看到：快速推导它的方法是使用 T-对偶性，或者在超弦的情况下，使用超对称。

一个平直的，无限的 Dp-膜将时空的 Lorentz 群分解为

$$S(1, D-1) \rightarrow SO(1, p) \times SO(D-p-1) \quad (7.40)$$

这个完整的群下降到 D-膜的世界体在那里它分类了 D-膜的所有低能激发。 $SO(1, p)$ 就是 D-膜世界体的 Lorentz 群。 $SO(D-p-1)$ 是 D-膜理论的全局对称性，描述标量场 ϕ^I 的旋转。

作用量 (7.39) 中的势能项特别有趣，

$$V = -\frac{1}{4} \sum_{I \neq J} \text{Tr} [\phi^I, \phi^J]^2$$

势能是半正定的。我们可以看一下无需能量，即 $V = 0$ 就能引入的场。这要求所有 ϕ^I 都是可对易的，这意味着，经过适当的规范变换后，它们呈对角形式，

$$\phi^I = \begin{pmatrix} \phi_1^I & & \\ & \ddots & \\ & & \phi_N^I \end{pmatrix} \quad (7.41)$$

对角分量 ϕ_n^I 描述了横向空间 \mathbf{R}^{D-p-1} 中第 n 个膜的位置。我们还需要把量纲弄对。标量场的量纲 $[\phi] = 1$ 。与空间位置的关系 (我们在 3.2 中提到过) 是

$$\vec{X}_n = 2\pi\alpha' \vec{\phi}_n \quad (7.42)$$

这里我们用向量符号来替换 I 指标。

特征值 ϕ_n^I 不是完全规范不变的：有一个冗余的规范对称性—— $U(N)$ 的 Weyl 群——使得 ϕ_n^I 的形式为 (7.41)，但按 N 个元素的置换群 S_N 对这些项进行排列。但这有一个很自然的解释：它只是告诉我们 D-膜是不可区分的对象。

当所有膜分离时，真空期望值 (7.41) 使规范群破坏 $U(N) \rightarrow U(1)^N$ 。W-玻色子通过希格斯机制获得了质量 M_w 。我们来计算这个质量。我们将

考虑一个 $U(2)$ 理论，我们将在 $X^D \equiv X$ 方向上分离两个 D-膜。这意味着我们引入了 $\phi^D = \phi$ 的真空期望值，我们将其写成

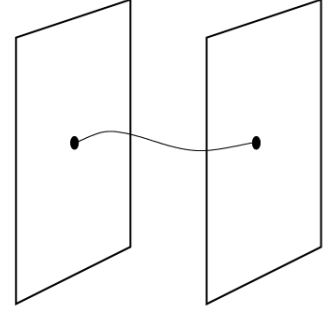
$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_2 \end{pmatrix} \quad (7.43)$$

其中 ϕ_1 和 ϕ_2 的值分别是第一个和第二个膜的位置。或更准确地说，我们需要乘以转换因子 $2\pi\alpha'$ ，如 (7.42) 所示，以获得 $m = 1^{\text{st}}, 2^{\text{nd}}$ 膜的位置 X_m 。

让我们从 Yang-Mills 作用量 (7.39) 计算 W-玻色子的质量。它来自于协变导数项 $\mathcal{D}\phi$ 。我们将规范场展开为

$$A_a = \begin{pmatrix} A_a^{11} & W_a \\ W_a^\dagger & A_a^{22} \end{pmatrix}$$

其中 A^{11} 和 A^{22} 描述两个 $U(1)$ 规范场， W 描述 W-玻色子。W-玻色子的质量来自协变导数中的 $[A_a, \phi]$ 项，使用期望值 (7.43)，我们可以得到



$$\frac{1}{2} \text{Tr}[A_a, \phi]^2 = -(\phi_2 - \phi_1)^2 |W_a|^2$$

这就给出了 W-玻色子的质量：它是

$$M_W^2 = (\phi_2 - \phi_1)^2 = T^2 |X_2 - X_1|^2$$

其中 $T = 1/2\pi\alpha'$ 是弦的张力。但这有一个很自然的解释。它恰好是在两个 D-膜之间的弦的质量，如图所示。我们看到 D-膜使用伴随标量为 Higgs 机制提供了自然的几何解释。

请注意，当膜完全地分开，并且在膜之间的弦很重时，它们的位置由 (7.41) 中给出的矩阵的对角元素描述。然而，随着膜之间的距离越来越近，这些被拉伸的弦变得很轻，这对膜的动力学很重要。现在膜的位置应该用完整的 $N \times N$ 矩阵来描述，包括非对角元素。通过这种方式，在短距离时，D-膜视角下的空间是不对易的。

通常，我们可以考虑横向空间中位于 $\vec{X}_m, m = 1, \dots, N$ 的 N 个 D-膜。在第 m 和第 n 个膜之间的弦的质量为

$$M_W = |\vec{\phi}_n - \vec{\phi}_m| = T|\vec{X}_n - \vec{X}_m|$$

这再次与用 (7.39) 计算出的 W-玻色子的质量相吻合。

7.7.1 Type II 超弦理论中的 D-膜

正如我们之前提到的，D-膜是 Type II 超弦理论的组成部分。Type IIA 有 p 为偶数的 D_p -膜，而 Type IIB 有 p 为奇数的 D_p -膜。D-膜在这些理论中有一个非常重要的性质：它们保持了一半的超对称性。

让我们花点时间解释一下。我们先回到 Lorentz 群 $SO(1, D-1)$ 当然，这里 $D = 10$ 。我们已经看到，一个无限的、平直的 D_p -膜在全 Lorentz 群下不是不变的，而只有在子群 (7.40) 下是不变的。如果我们作用于 $SO(1, p)$ 或 $SO(D-p-1)$ ，则 D-膜解保持不变。我们说解保持了这些对称性。

然而，保留的对称性的作用并不止于此。下一步是考虑 D-膜的小激发。它们必须符合保留对称群的表示 (7.40)。这确保了膜的低能动力学必须由一个在 (7.40) 下不变的理论来控制，我们确实看到拉格朗日 (7.39) 有 $SO(1, p)$ 作为 Lorentz 群和 $SO(D-p-1)$ 作为旋转标量场的全局对称群。

现在让我们回到超对称。II 型弦理论有很多超对称性：总共有 32 个超荷。无限的平直的 D-膜在其中一半的情况下是不变的；如果我们用一半的超对称生成元，D-膜解不会改变。具有此属性的对象通常称为 BPS 态。就像 Lorentz 群一样，这些不间断的对称性下降到 D-膜的世界体。这意味着 D-膜的低能动力学是由一个理论来描述的，这个理论本身在 16 个超对称下是不变的。

有一类独特的理论，具有 16 个超对称和伴随表示中的非阿贝尔规范场和物质。这类被称为极大超对称 Yang-Mills 理论，作用量的玻色子部分由 (7.39) 给出。超对称只有在加入费米子场后才能实现，费米子场也存在于膜上。这些理论描述了多个 D-膜的低能动力学。

作为一个说明性的例子，考虑 Type IIB 理论中的 D3-膜。描述 N 个 D-膜的理论是具有 16 个超荷的 $U(N)$ Yang-Mills 理论，通常被称为 $U(N)\mathcal{N} = 4$ 的 super-Yang-Mills。作用量的玻色子部分由式 (7.39) 给出，其中在规范群的伴随表示中有 $D-p-1 = 6$ 个标量场 ϕ^I 。它们被扩张了四个 Weyl 费米子，也在伴随表示中。

8 紧致化与 T-对偶

在本节中，我们将考虑玻色弦的最简单紧致化：形式如下的背景时空

$$\mathbf{R}^{1,24} \times \mathbf{S}^1 \quad (8.1)$$

取圆的半径为 R ，因此 \mathbf{S}^1 上的坐标具有周期性

$$X^{25} \equiv X^{25} + 2\pi R$$

我们最初会对长度尺度 $\gg R$ 的物理学感兴趣，其中 \mathbf{S}^1 上的运动可以忽略。我们的目标是了解对于一个生活在非紧致 $\mathbf{R}^{1,24}$ 闵可夫斯基空间中的观察者视角下的物理学。这个概念被称为 Kaluza-Klein 紧致化。我们将从两个方面来看待这种紧致化：首先从时空低能有效作用量的视角，其次从弦世界面的视角。

8.1 时空视角

让我们从低能有效作用量开始。观察长度尺度 $\gg R$ 意味着我们将使所有场独立于 X^{25} ：它们只是非紧致化的 $\mathbf{R}^{1,24}$ 上的函数。

考虑 Einstein 标架中的度规。它在 $\mathbf{R}^{1,24}$ 上分解为三个不同的场：一个度规 $\tilde{G}_{\mu\nu}$ ，一个矢量 A_μ 和一个标量 σ ，我们把它们打包成 $D = 26$ 维的度规

$$ds^2 = \tilde{G}_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu + e^{2\sigma} (dX^{25} + A_\mu dX^\mu)^2 \quad (8.2)$$

这里所有的指标都只跑遍非紧致化方向 $\mu, \nu = 0, \dots, 24$ 。

向量场 A_μ 是一个普通规范场，其规范对称性来自于 $D = 26$ 维的微分同胚。在变换 $\delta X^\mu = -\Lambda^\mu(X)$ 下，度规变换为

$$\delta \tilde{G}_{\mu\nu} = \nabla_\mu \Lambda_\nu + \nabla_\nu \Lambda_\mu$$

这意味着紧致化方向的微分同胚 $\delta X^{25} = -\Lambda(X^{25})$ 转化为 A_μ 的规范变换，

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda$$

我们想知道场 $\tilde{G}_{\mu\nu}$, A_μ 和 σ 是如何相互作用的。为了确定这一点，我们只需将式 (8.2) 带回到 $D = 26$ 的 Einstein-Hilbert 作用量。 $D = 26$ 的 Ricci 标量 $\mathcal{R}^{(26)}$ 由下式给出

$$\mathcal{R}^{(26)} = \mathcal{R} - 2e^{-\sigma}\nabla^2 e^\sigma - \frac{1}{4}e^{2\sigma}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

公式中的 \mathcal{R} 现在指的是 $D = 25$ 的 Ricci 标量。控制动力学的作用量变成

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{26}X \sqrt{-\tilde{G}^{(26)}} \mathcal{R}^{(26)} = \frac{2\pi R}{2\kappa^2} \int d^{25}X \sqrt{-\tilde{G}} e^\sigma \left(\mathcal{R} - \frac{1}{4}e^{2\sigma}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma \right)$$

D 维 Einstein 引力降维得到 $D - 1$ 维的 Einstein 引力，耦合到 $U(1)$ 规范理论和单个无质量标量。这说明了 Kaluza 和 Klein 最初的想法，即构造自然产生于高维引力的 Maxwell 理论。

上面的引力作用量并不完全是 Einstein-Hilbert 形式的。我们需要再次改变标架，以与第 7.3.1 节中吸收胀子相同的方式吸收标量 σ 。此外，就像胀子一样，不存在决定 σ 的真空期望值的势。改变 σ 的 vev 相当于改变 R ，所以这告诉我们，在引力作用量中，没有什么能确定紧致半径 R 。这是所有 Kaluza-Klein 紧致化所共有的问题¹¹：总是存在与内部空间的体积以及其他变形相对应的无质量标量场。无质量标量场，如胀子 Φ 或体积 σ ，通常被称为 moduli。

如果我们想用这种 Kaluza-Klein 紧致化来描述我们的宇宙——在那里我们看不到无质量的标量场——我们需要找到一种方法来“固定 moduli”。这意味着我们需要一种机制来产生标量场的势，使它们有质量并动态地确定它们的真空期望值。而这种机制在超弦的背景下是存在的。

现在来看看 Kaluza-Klein 对其他场在低能有效作用量下的降维。胀子很容易： D 维的标量降维为 $D - 1$ 维的标量。反对称的 2-form 有更多的结构：它降维为一个 2-form 的 $B_{\mu\nu}$ ，以及一个矢量场 $\tilde{A}_\mu = B_{\mu 25}$ 。

¹¹在更一般的流形上描述紧致化是一个涉及微分几何和拓扑学方面的美丽故事。这个故事是在 Green, Schwarz 和 Witten 的第二卷里讲的

总之，玻色弦在 $D-1$ 维的低能物理由度规 $G_{\mu\nu}$ ，两个 $U(1)$ 规范场 A_μ 和 \tilde{A}_μ 以及两个无质量标量 Φ 和 σ 组成。

8.1.1 圈上移动

在上面的讨论中，我们假设所有的场都独立于周期方向 X^{25} 。现在让我们看看如果我们放松这个约束会发生什么。如果我们看标量场 Φ ，就能很容易地看到结果，在那里我们不用担心带指标的方程会变得杂乱。一般来说，我们可以将这个场围绕紧致化圈做 Fourier 模式来展开

$$\Phi(X^\mu; X^{25}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n(X^\mu) e^{inX^{25}/R}$$

其中实性要求 $\Phi_n^* = \Phi_{-n}$ 。先忽略与引力的耦合，这个标量的动力学项是

$$\int d^{26}X \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + (\partial_{25} \Phi)^2 = 2\pi R \int d^{25}X \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\partial_\mu \Phi_n \partial^\mu \Phi_{-n} + \frac{n^2}{R^2} |\Phi_n|^2 \right)$$

这个简单的 Fourier 分解告诉了我们一些非常重要的信息： $\mathbf{R}^{1,D-1} \times \mathbf{S}^1$ 上的单个标量场分解为 $\mathbf{R}^{1,D-2}$ 上的无数个标量场，以整数 n 标记。它们有质量

$$M_n^2 = \frac{n^2}{R^2} \quad (8.3)$$

当 R 很小时，除了无质量的零模式 $n=0$ 外，所有粒子都是有质量的。有质量粒子通常被称为 Kaluza-Klein(KK) 模，如果我们探测能量 $\ll 1/R$ ，或者，等效地，探测距离尺度 $\gg R$ ，则可以忽略它们。

当 $n \neq 0$ 时，KK 模 Φ_n 还有一个有趣的性质：它们在由度规产生的规范场 A_μ 下带荷。理解这一点最简单的方法是观察相应的规范变换，从时空的角度来看，它是微分同胚 $X^{25} \rightarrow X^{25} + \Lambda(X^\mu)$ 。显然，这改变了 KK 模

$$\Phi_n \rightarrow \exp\left(\frac{in\Lambda}{R}\right) \Phi_n$$

这告诉我们第 n 级 KK 模的荷是 n/R 。实际上，人们通常将规范场缩放为 $A'_\mu = A_\mu/R$ ，在此情况下，KK 模 Φ_n 的荷简单地为 $n \in \mathbf{Z}$ 。

8.2 世界面视角

现在我们从弦的角度来考虑 Kaluza-Klein 紧致化。我们想研究在背景 $\mathbf{R}^{1,24} \times \mathbf{S}^1$ 中运动的弦。圈紧化有两种方式改变弦的动力学。

圈紧化的第一个影响是弦在圈方向上的动量 p 不能再取任意值，而是被量子化的整数单位

$$p^{25} = \frac{n}{R} \quad n \in \mathbf{Z}$$

得到这个结论最简单的方法就是要求弦的波函数（包括因子 $e^{ip \cdot X}$ ）是单值的。

第二个影响是我们可以允许 X 模式展开的更一般的边界条件。当我们在弦上移动时，我们不再需要 $X(\sigma + 2\pi) = X(\sigma)$ ，而是可以放宽为

$$X^{25}(\sigma + 2\pi) = X^{25}(\sigma) + 2\pi m R \quad m \in \mathbf{Z}$$

整数 m 告诉我们弦绕 \mathbf{S}^1 转了多少圈。它通常简称为卷绕数。

现在让我们按照我们在第 2 章中描述的熟悉的路径来研究时空 (8.1) 上的弦谱。我们首先只考虑周期场 X^{25} ，强调与前面处理的不同之处。 X^{25} 的模式展开现在为

$$X^{25}(\sigma, \tau) = x^{25} + \frac{\alpha' n}{R} \tau + m R \sigma + \text{oscillator modes}$$

它包含了动量量子数和卷绕数。在将 $X^{25}(\sigma, \tau)$ 分解为右移和左移两个部分之前，引入这些量是有用的

$$p_L = \frac{n}{R} + \frac{mR}{\alpha'} \quad , \quad p_R = \frac{n}{R} - \frac{mR}{\alpha'} \quad (8.4)$$

然后我们有 $X^{25}(\sigma, \tau) = X_L^{25}(\sigma^+) + X_R^{25}(\sigma^-)$ ，其中

$$\begin{aligned} X_L^{25}(\sigma^+) &= \frac{1}{2}x^{25} + \frac{1}{2}\alpha' p_L \sigma^+ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^{25} e^{-in\sigma^+} \\ X_R^{25}(\sigma^-) &= \frac{1}{2}x^{25} + \frac{1}{2}\alpha' p_R \sigma^- + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^{25} e^{-in\sigma^-} \end{aligned}$$

这与模式展开 (1.36) 的不同之处在于 p_L 和 p_R 项。平直空间 $\mathbf{R}^{1,24}$ 上所有其他标量场的模式展开保持不变，我们不显式地写它们。

让我们想想这个理论的谱对于在 $D = 25$ 非紧致化方向上的观察者是什么样的。每个粒子态都用动量 p^μ 来描述， $\mu = 0, \dots, 24$ 。粒子的质量是

$$M^2 = - \sum_{\mu=0}^{24} p_\mu p^\mu$$

如前所述，这些粒子的质量是由 L_0 和 \tilde{L}_0 方程根据弦的振动模式确定的。这些现在是

$$M^2 = p_L^2 + \frac{4}{\alpha'}(\tilde{N} - 1) = p_R^2 + \frac{4}{\alpha'}(N - 1)$$

其中 N 和 \tilde{N} 为等级，在光锥量子化中由 (2.24) 定义（应该在 $\mathbf{R}^{1,24}$ 内取光锥坐标，而不是沿着 \mathbf{S}^1 ）。因子 -1 是必要的正则排序系数我们在这门课中已经见过好几次了。

这些方程与 (2.25) 的不同之处在于右侧存在围绕 \mathbf{S}^1 的动量项和卷绕项。特别是，等级匹配不再告诉我们 $N = \tilde{N}$ ，而是

$$N - \tilde{N} = nm \tag{8.5}$$

展开质量公式，我们有

$$M^2 = \frac{n^2}{R^2} + \frac{m^2 R^2}{\alpha'^2} + \frac{2}{\alpha'}(N + \tilde{N} - 2) \tag{8.6}$$

这个公式中的新项有一个简单的解释。第一项告诉我们，对于弦，在圈上 $n > 0$ 的动量会对质量贡献 n/R 。这与我们研究时空理论的 KK 紧致化得到的结果 (8.3) 是一致的。第二项更容易理解：弦绕圈 $m > 0$ 次会对其质量贡献 $2\pi m R T$ ，其中 $T = 1/2\pi\alpha'$ 是弦的张力。

8.2.1 无质量态

现在我们把注意力集中在 $\mathbf{R}^{1,24}$ 的无质量态上。这可以在质量公式 (8.6) 中通过观察零动量 $n = 0$ 和零卷绕 $m = 0$ 的态来实现，遵守等级匹配条件 $N = \tilde{N} = 1$ 。有如下可能的备选

- $\alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0; p\rangle$: 在 Lorentz 群 $SO(1, 24)$ 下，这些态分解成一个度规 $G_{\mu\nu}$ ，一个反对称张量 $B_{\mu\nu}$ 和一个标量 Φ 。
- $\alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^{25} |0; p\rangle$ 和 $\alpha_{-1}^{25} \tilde{\alpha}_{-1}^\mu |0; p\rangle$: 这是两个矢量场。我们可以确定这些的和 $(\alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^{25} + \alpha_{-1}^{25} \tilde{\alpha}_{-1}^\mu) |0; p\rangle$ 认为是来自度规的矢量场 A_μ ，其差 $(\alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^{25} - \alpha_{-1}^{25} \tilde{\alpha}_{-1}^\mu) |0; p\rangle$ 认为是来自反对称的矢量场 \tilde{A}_μ 。
- $\alpha_{-1}^{25} \tilde{\alpha}_{-1}^{25} |0; p\rangle$: 这是另一个标量。可以当作与 \mathbf{S}^1 半径相关的标量 σ 。

我们看到弦无质量谱与前一节 Kaluza-Klein 降维相关的无质量谱是一致的。

8.2.2 带荷场

我们还可以检查在规范场 A_μ 下，具有 $n \neq 0$ 的 KK 模带荷为 n 。通过计算三点函数来确定一个态在 $U(1)$ 下的荷，即两条外线对应于感兴趣的态，而第三条外线类似于光子。我们有两个这样的态，其顶点算符是，

$$V_{\pm}(p) \sim \int d^2 z \zeta_\mu (\partial X^\mu \bar{\partial} \bar{X}^{25} \pm \partial X^{25} \bar{\partial} \bar{X}^\mu) e^{ip \cdot X}$$

其中 $+$ 对应于 A_μ ， $-$ 对应于 \tilde{A}_μ ，我们没有仔细考虑整体的归一化系数。同时，任何态都可以用系数 $e^{ip_L X^{25}(z) + ip_R \bar{X}^{25}(\bar{z})}$ 给算符分配动量 n 和卷绕 m 。和往常一样，最简单的方法是处理快子的动量和卷绕模式，其顶点算符为

$$V_{m,n}(p) \sim \int d^2 z e^{ip \cdot X} e^{ip_L X^{25} + ip_R \bar{X}^{25}}$$

态的荷是态对应的场与光子的三点耦合，

$$\langle V_{\pm}(p_1) V_{m,n}(p_2) V_{-m,-n}(p_3) \rangle \sim \delta^{25} \left(\sum_i p_i \right) \zeta_\mu (p_2^\mu - p_3^\mu) (p_L \pm p_R)$$

前几个因子仅是运动学因子。有趣的信息在最后一个因子中。它告诉我们，在 A_μ 下，场的荷为 $p_L + p_R \sim n/R$ 。这与之前 Kaluza-Klein 分析是一致的。然而，它也告诉我们一些新的东西：在 \tilde{A}_μ 下，场的荷为 $p_L - p_R \sim mR/\alpha'$ 。换句话说，绕紧致化圈的模在 $B_{\mu\nu}$ 紧致化产生的规范场下带荷。这并不奇怪：绕数对应于绕圈的弦，在第 7 章中，弦在 $B_{\mu\nu}$ 下是带荷的。

8.2.3 增强规范对称性

在引入了圈紧化后我们就有了其他方法构造无质量态，而不需要我们在等级 $N = \tilde{N} = 1$ 上构造。例如，我们可以设置 $N = \tilde{N} = 0$ ，并观察卷绕数为 $m \neq 0$ 的模。等级匹配条件 (8.5) 要求 $n = 0$ ，态质量为

$$M^2 = \left(\frac{mR}{\alpha'} \right)^2 - \frac{4}{\alpha'}$$

当半径取特殊值 $R^2 = 4\alpha'/m^2$ ， $m \in \mathbf{Z}$ 时，态可以是无质量的。同样地，我们可以将卷绕设为 $m = 0$ ，并考虑的快子的 KK 模的质量

$$M^2 = \frac{n^2}{R^2} - \frac{4}{\alpha'}$$

当 $R^2 = n^2\alpha'/4$ 时这变为无质量态。

然而，最丰富的无质量态谱出现在半径取一个非常特殊的值时，即

$$R = \sqrt{\alpha'}$$

这时 $M^2 = 0$ 的等级匹配条件 (8.5) 给出的解为

- $N = \tilde{N} = 1$ 且 $m = n = 0$ 。它们给出了上面描述的态：一个度规，两个 $U(1)$ 规范场和两个中性标量。
- $N = \tilde{N} = 0$ 且 $n = \pm 2$ 和 $m = 0$ 。这些是快子场的 KK 模。它们是时空中的标量，在 $U(1) \times U(1)$ 规范对称下带的荷为 $(\pm 2, 0)$ 。
- $N = \tilde{N} = 0$ 且 $n = 0$ 和 $m = \pm 2$ 。这是快子场绕数非零的模。它们是时空中的标量，在 $U(1) \times U(1)$ 规范对称下带的荷为 $(0, \pm 2)$ 。

- $N = 1$ 和 $\tilde{N} = 0$ 且 $n = m = \pm 1$ 。这是两个新的自旋为 1 的场， $\alpha_{-1}^\mu |0; p\rangle$ 。它们在 $U(1) \times U(1)$ 规范对称下携带的荷为 $(\pm 1, \pm 1)$ 。
- $N = 1$ 和 $\tilde{N} = 0$ 且 $n = -m = \pm 1$ 。这是另外两个自旋为 1 的场， $\tilde{\alpha}_{-1}^\mu |0; p\rangle$ 。它们在 $U(1) \times U(1)$ 规范对称下携带的荷为 $(\pm 1, \mp 1)$ 。

我们如何解释这些新的无质量态？我们先来看自旋为 1 的场。它们在 $U(1) \times U(1)$ 下带荷。正如我们在 7.7 节中提到的，理解带荷无质量自旋 1 场的唯一方法是根据非阿贝尔规范对称。观察荷，我们发现在临界半径 $R = \sqrt{\alpha'}$ 处，理论发展出一种增强的规范对称性

$$U(1) \times U(1) \rightarrow SU(2) \times SU(2)$$

来自 $N = \tilde{N} = 0$ 的无质量标量现在与之前的标量结合，形成这种新对称性的伴随表示。我们通过改变 σ 的真空期望值来远离临界半径就可以通过希格斯机制，将规范群分解回 Cartan 子代数。

从上面的讨论可以清楚地看出，这种产生非阿贝尔规范对称的机制依赖于快子的存在。由于这个原因，这种机制在 Type II 超弦理论中不起作用。然而，事实证明，它确实在杂化弦中起作用，即使它的能谱中没有快子。

8.3 为什么大圆圈和小圆圈是一样的

公式 (8.6) 有一个相当显著的性质：它在同时进行交换

$$R \leftrightarrow \frac{\alpha'}{R} \quad (8.7)$$

和

$$m \leftrightarrow n \quad (8.8)$$

下不变。这意味着在半径为 R 的圆上运动的弦与在半径为 α'/R 的圆上运动的弦具有相同的能谱。它通过交换卷绕与移动的含义来实现这种操作。

当圈的半径变大， $R \rightarrow \infty$ 时，卷绕数对质量的贡献 $M \sim R/\alpha'$ 会变得非常大，并与低能的动力学解耦。但这时动量量子数的贡献 $M \sim 1/R$ 变得

很轻，并且在达到极限值时形成一个连续谱。从能谱的角度来看，这种能谱连续的态是非紧致方向所要求的。

在另一个极限 $R \rightarrow 0$ 时，动量模式变重，同样会解耦：要让任何东西在 \mathbf{S}^1 上移动需要非常大的能量。相反，卷绕的贡献变轻并开始形成连续能谱。由此产生的能谱看起来好像打开了空间的另一个维度！

弦谱在半径为 R 和 α'/R 的圈上的等价性扩展到整个共形场论，从而扩展到弦的相互作用。弦无法区分非常大的圈和非常小的圈。这个引人注目的描述有一个垃圾的名字：它被称为 T-对偶。

这提供了另一种机制，使弦理论存在最小尺度：当你把一个圈缩小到越来越小的尺寸，在 $R = \sqrt{\alpha'}$ 时，这个理论的行为就好像这个圈又在变大，只是缠绕与动量交换了彼此的角色。

时空的新方向

那么我们如何描述当 $R \rightarrow 0$ 时这个奇怪的新的空间方向？在 (8.7) 和 (8.8) 的交换下，我们看到 p_L 和 p_R 变换为

$$p_L \rightarrow p_L \quad , \quad p_R \rightarrow -p_R$$

受此启发，我们定义了一个新的标量场，

$$Y^{25} = X_L^{25}(\sigma^+) - X_R^{25}(\sigma^-)$$

很容易检查在自由紧致标量场的 CFT 中， Y^{25} 的所有 OPE 与 X^{25} 的 OPE 等价。这足以确保 CFT 中定义的所有相互作用都是相同的。

我们可以直接用旧的场 X 来表示新的空间方向 Y ，而不需要先把它分成左右移动的部分。从 Y 的定义可以看出， $\partial_\tau X = \partial_\sigma Y$ 和 $\partial_\sigma X = \partial_\tau Y$ 。我们可以把它统一地写成

$$\partial_\alpha X = \epsilon_{\alpha\beta} \partial^\beta Y \tag{8.9}$$

其中 $\epsilon_{\alpha\beta}$ 为反对称矩阵， $\epsilon_{\tau\sigma} = -\epsilon_{\sigma\tau} = +1$ 。(当我们降低 ∂^β 的指标时，上述方程中的 $\epsilon_{\sigma\tau}$ 的负号被闵可夫斯基世界面度规中的另一个负号所抵消)。

胀子的变化

胀子或弦耦合，也在 T-对偶下变换。这里我们不详细推导，只是给出一个合理的解释。主要观点是，一个生活在弦世界的科学家不能做任何实验来区分半径为 R 的紧致化圈和半径为 α'/R 的紧致化圈。但你首先要看的是低能有效作用量，在 Einstein 标架中，包含这样的项

$$\frac{2\pi R}{2^{24}g_s^2} \int d^{25}X \sqrt{-\tilde{G}} e^\sigma \mathcal{R} + \dots$$

只有当伸缩子的值也产生变动从而使作用量前面的因子保持不变，我们才能分辨 R 和 $\tilde{R} = \alpha'/R$ 之间的区别：即 $R/g_s^2 = \tilde{R}\tilde{g}_s^2$ 。这意味着，在 T-对偶下，胀子必须变化，这样弦的耦合常数就变成了

$$g_s \rightarrow \tilde{g}_s = \frac{\sqrt{\alpha'} g_s}{R} \quad (8.10)$$

8.3.1 T-对偶的路径积分导数

通过路径积分可以简单的看出量子理论的 T-对偶。我们只考虑世界面上的一个周期性标量场 $X \equiv X + 2\pi R$ 。改变归一化并写入 $X = R\varphi$ 是有用的，因此场 φ 具有周期 2π 。圆的半径 R 现在作为作用量的因子出现，

$$S[\varphi] = \frac{R^2}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_\alpha \varphi \partial^\alpha \varphi \quad (8.11)$$

这个理论的欧几里德配分函数是 $Z = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi]}$ 。现在我们来处理这个配分函数并证明我们可以用描述 T-对偶的新变量来重写它。

理论 (8.11) 有一个简单的平移对称性 $\varphi \rightarrow \varphi + \lambda$ 。第一步是通过在世界面上引入规范场 A_α 使这个对称局部分化，它变换为 $A_\alpha \rightarrow A_\alpha - \partial_\alpha \lambda$ 。然后用协变导数代替普通导数

$$\partial_\alpha \varphi \rightarrow \mathcal{D}_\alpha \varphi = \partial_\alpha \varphi + A_\alpha$$

这改变了我们的理论。然而，我们可以通过添加一个新场 θ 来返回之前的理论，

$$S[\varphi, \theta, A] = \frac{R^2}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \mathcal{D}_\alpha \varphi \mathcal{D}^\alpha \varphi + \frac{i}{2\pi} \int d^2\sigma \theta \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta$$

新的场 θ 起到了拉格朗日乘子的作用。积掉 θ 有 $\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta = 0$ 。这个条件意味着如果世界面同胚于 \mathbf{R}^2 ，我们就可以选择一个规范 A_α ，使得 $A_\alpha = 0$ 。这样，由 (8.12) 描述的量子理论就等价于由 (8.11) 描述的量子理论。

当然，如果世界面同胚于 \mathbf{R}^2 ，那么我们就错过了与绕着 φ 旋转的弦相关的有趣物理。在非平凡世界面上， $\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta = 0$ 并不意味着我们可以选择 $A_\alpha = 0$ 的规范。相反，规范场绕世界面的紧致化圈有非平凡的整体贡献。如果 θ 的周期为 2π ，我们可以证明这些和乐 (完整) 是规范平凡的。在此例中，由 (8.12) 定义的配分函数为，

$$Z = \frac{1}{\text{Vol}} \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\theta \mathcal{D}A e^{-S[\varphi, \theta, A]}$$

这等价于由 (8.11) 对任意拓扑的世界面构造的配分函数。

在这个阶段，我们使用了一个聪明而普遍的技巧：我们颠倒了积分的顺序。我们从积分 φ 开始，我们可以固定规范对称使得 $\varphi = 0$ 。路径积分就变成了

$$Z = \int \mathcal{D}\theta \mathcal{D}A \exp \left(-\frac{R^2}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma A_\alpha A^\alpha + \frac{i}{2\pi} \int d^2\sigma \epsilon^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \theta) A_\beta \right)$$

我们还对最后一项进行了分部积分。再对 A_α 积分。我们得到

$$Z = \int \mathcal{D}\theta \exp \left(-\frac{\tilde{R}^2}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_\alpha \theta \partial^\alpha \theta \right)$$

其中 $\tilde{R} = \alpha'/R$ 是 T-对偶圆半径。在最后的积分中，我们去掉了路径积分中的整体因子，它与 $\sqrt{\alpha'}/R$ 成正比。更仔细的处理表明，这会引入胀子变化 (8.10)。

8.3.2 开弦的 T-对偶

在 T-对偶下开弦和 D-膜会发生什么？首先假设我们在垂直于膜的 X 方向上做圈紧化。这意味着 X 有 Dirichlet 边界条件

$$X = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \partial_\tau X^{25} = 0 \quad \text{at } \sigma = 0, \pi$$

但是在 T-对偶引入的 Y 上会发生什么呢？由定义 (8.9) 可知，新方向具有 Neumann 边界条件，

$$\partial_\sigma Y = 0 \quad \text{at } \sigma = 0, \pi$$

我们看到 T-对偶交换了 Neumann 和 Dirichlet 边界条件。如果我们把垂直于 Dp -膜的圈对偶，那么它就会变成一个 $D(p+1)$ -膜。

反之亦然。我们可以从一个包含紧致化圈方向 X 的 Dp -膜开始，这样弦就有了 Neumann 边界条件。在 T-对偶之后，(8.9) 将这改变为 Dirichlet 边界条件， Dp -膜变成了 $D(p-1)$ -膜，在圆 Y 上的某一点局域地出现。

事实上，D 膜最初就是这样被发现的：通过跟踪 T-对偶下开弦的命运。

8.3.3 超弦的 T-对偶

结果表明，十维超弦理论在 T-对偶下不是不变的。相反，它们相互映射。更准确地说，Type IIA 和 Type IIB 在 T-对偶下相互转化。这意味着半径为 R 的圆上的 Type IIA 弦理论等价于半径为 α'/R 的圆上的 Type IIB 弦理论。这与 D-膜的转换相吻合，因为 Type IIA 具有偶数 p 的 Dp -膜，而 Type IIB 具有奇数 p 的 Dp -膜。同样，两个杂化弦在 T-对偶下也相互转化。

8.3.4 Mirror Symmetry

实际上，T 对偶的本质就是弦的延展性导致它们无法区分大圈和小圈。我们可以问这种困惑是否延伸到更复杂的流形。答案是肯定的。弦可以将不同的流形视为相同的流行，这被称为 mirror symmetry。

在 Type II 超弦的背景下，mirror symmetry 是最清晰的，尽管杂化弦也有类似行为。最简单的例子是弦的世界面由一个超共形非线性 sigma 模型控制，target space 由某个 Calabi-Yau 流形 \mathbf{X} 给出。mirror symmetry 就是指，这个 CFT 与描述弦在不同的 Calabi-Yau 流形 \mathbf{Y} 上运动的弦的 CFT 是相同的。 \mathbf{X} 和 \mathbf{Y} 的拓扑结构不一样。他们的 Hodge diamonds 是彼此的 mirror；因此得名。它为弦理论对数学的影响提供了一个很好的例子。