Лабораторна робота 10. Наближення функцій поліномом Тейлора

Наближення поліномом Тейлора здійснюється при справдженні припущення, що функція, яка наближається, має неперервні похідні в точці a до $n+1$ порядку. Нехай маємо поліном n-ного степеню:

$$f(x) \approx b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots + b_{n-1}(x-a)^{n-1} + b_n(x-a)^n \quad (1)$$

Спробуємо знайти b_0, при цьому приймемо, що $x = a$.

$b_0 = f(a)$. Візьмемо від обох частин рівняння (1) похідну по x:

$$f'(x) = b_1 + 2 \cdot b_2(x-a) + \cdots + b_{n-1}(x-a)^{n-2} \cdot (n-1) + b_n(x-a)^{n-1} \cdot n$$

Тепер другу похідну:

$$f''(x) = b_2 + (1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot b_3(x-a) + \cdots + ((n-1)(n-2)) \cdot b_{n-1}(x-a)^{n-3} + ((n-1)n) \cdot b_n(x-a)^{n-2}$$

Повторивши дії n раз, отримаємо для $n-1$ та n:

$$f^{(n-1)}(x) = (1 \cdot 2 \cdot (n-2)(n-1)) \cdot b_{n-1} + (1 \cdot 2 \cdot (n-2)(n-1))b_n(x-a),$$

$$f^{(n)}(x) = (1 \cdot 2 \cdots (n-1)n) \cdot b_n.$$

В результаті маємо просте співвідношення при умові, що $x = a$:

$$b_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \qquad (2)$$

Тоді вираз (1), якщо врахувати співвідношення (2) ,перепишеться так:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(i)}(a)(x-a)^i}{i!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

(3) називається формулою Тейлора.

Знаючи всі похідні в одній точці функції, ми маємо можливість описати її на всьому проміжку визначення. Як приклад, покажемо перетворення функції синусу в многочлен Тейлора.

Нехай маємо функцію $sin\,x$,яку потрібно представити у вигляді многочлену. Проведемо перетворення за формулою Тейлора (3) прийнявши $a = 0$.

Тут маємо: $sin'(x) = cos(x)$, $sin''(x) = cos'(x) = -sin(x)$,

$\sin'''(x) = -sin'(x) = -\cos(x)$, …, але при $x = 0$: $sin(0) = 0, sin'(0) = 1$
$sin''(0) = 0,\ \ sin'''(0) = -1, \dots,\ \ sin^{(2i)}(0) = (-1)^{i+1}$, та
$sin^{(2i+1)}(0) = 0.$
Таким чином остаточно з (3) маємо наступний вираз:

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{(2i)} \frac{x^{2i+1}}{(2^{i+1})!} + \dots$$

При цьому i - це ціле число, яке від нуля прямує до нескінченності. Для впевненості зазначимо, що в отриманий многочлен входять одночлени лише непарного степеня, що в сумі дає непарну функцію, якою і є функція синусу. Також, знаючи що факторіал зростає значно швидше ніж показникова функція легко показати, що доданки цього многочлену поступово прямують до нуля, а сума збігається при будь-якому обмеженому x.

Оцінку похибки наближення формулою Тейлора проведемо припустивши, що функція $f(x)$ має $n + 1$ неперервних похідних.

Запишемо рівність:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + R_n(x) \qquad (4)$$

де $R_n(x)$вважатимемо залишковим членом. Для його знаходження запишемо таке співвідношення:

$$\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$$

яке можна записати й так:

$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt.$

Тепер скористаємось формулою інтегрування за частинами:

$u = f'(t);\ \ du = f''^{(t)}dt;\ \ \ dv = dt;\ \ v = t - x.$

$$f(x) = f(a) + f'(t)(t - x)|_0^a + \int_a^x f''(t)(t - x)\,dt$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(t-x)\,dt$$

Повторимо інтегрування за частинами ще раз:

$u = f''(t);\quad du = f'''^{(t)}dt;\quad dv = (t-x)\,dt; v = \frac{(t-x)^2}{2}$.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(a-x) + f''(t)(t-x)^2/2|_0^a + \int_a^x f'''(t)(t-x)^2/2\,dt$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(a-x) + f''(a)(x-a)^2/2 + \int_a^x f'''(t)(t-x)^2/2\,dt$$

Продовжуючи такі перетворення n раз остаточно отримаємо:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(a-x) - \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \cdots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(a-x)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(t-x)^n\,dt$$

З останньої рівності, ми отримали формулу Тейлора плюс залишок-поправка, яка називається остаточним членом формули Тейлора:

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(t-x)^n\,dt$$

Для оцінки похибки наближення замість похідної в остаточному члені підставимо число M, таке щоб $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \le M$ (тут $t \in [a;x]]$). Тоді

$$|R_n| \le \frac{M}{n!}\left|\int_a^x (t-x)^n\,dt\right|. \qquad (4)$$

Приклад:

Для функції $f(x) = xcos(x)$ побудувати наближені поліноми за формулою Тейлора другого та четвертого степенів, a взяти рівним 0. Оцінити похибку для поліному четвертого степеня, якщо модуль x не перевищує 1. Побудувати графіки наближень та оригінальної функції.

Розв'язання:

Спочатку знайдемо похідні до п'ятого порядку та їх значення при $x = a$:

$f'(x) = -x \cdot sin(x) + cos(x)$,

$f''(x) = -x\,cos(x) - 2\,sin(x)$,

$f'''(x) = x \cdot sin(x) - 3\,cos\,x$,

$f^{(4)}(x) = x \cdot cos(x) + 4\,sin(x)$,

$f^{(5)}(x) = -x \cdot sin(x) + 5\,cos(x)$.

$$f(0) = O, \qquad f'(0) = 1;\ \ f''(0) = 0, \qquad f'''(0) = -3,\ \ f^{(4)}(0) = 0$$

За виразом (3) маємо:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x-0) + f''(0)\frac{(x-0)^2}{2}$$

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x-0) + f''(0)\frac{(x-0)^2}{2} + f'''(0)\frac{(x-0)^3}{6} + f^{(4)}(0)\frac{(x-0)^4}{24}.$$

Підставляючи конкретні значення:

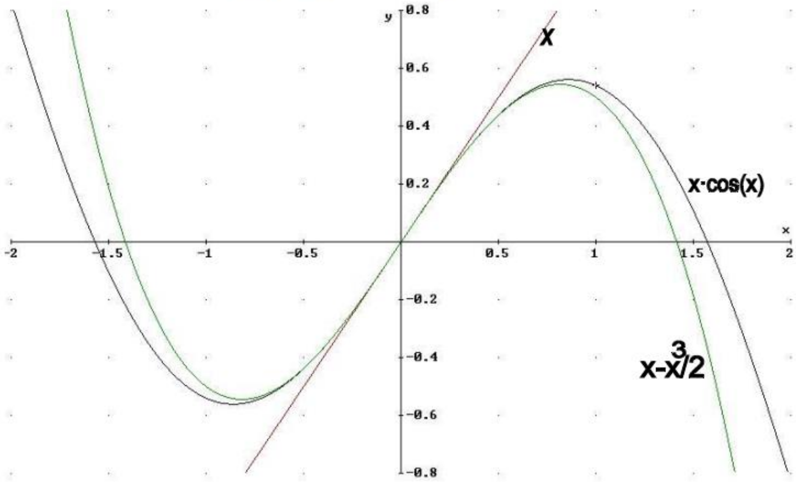
$f(x) \approx 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot \frac{x^2}{2} = x$,

$f(x) \approx 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot \frac{x^2}{2} - 3 \cdot \frac{x^3}{6} + 0 \cdot \frac{x^y}{24} = \frac{x-x^3}{2}$.

Для оцінки похибки оцінимо п'яту похідну. П'ята похідна при $x \in [-1; 1]$ не перевищуватиме 6, тому при оцінці похибки M візьмемо рівним 6, і за виразом (4) маємо:

$|R_4| \leq \frac{6}{24}\left|\int_0^1 (t-1)^4\,dt\right| = \frac{1}{4}\left|\frac{(t-1)^5}{5}\,\Big|_0^1\right| = \frac{1}{20}$.

Графік $f(x)=x\cdot\cos(x)$ та її наближення



Завдання

Знайти перші три похідні функції та розрахуйте значення за многочленом Тейлора.

Побудуйте на одному малюнку графік функції та наближення.

Номер вар-ту	$f(x)$
1	$f(x) = cos(4x) - x + 1$
2	$f(x) = cos(3x - 1) + x$
3	$f(x) = ln(x + 1) - sin(x)$
4	$f(x) = sin(cos(x))$
5	$f(x) = e^{sin(5x)}$
6	$f(x) = e^{-x} + x^2$
7	$f(x) = \sin(4x)$
8	$f(x) = x \cdot sin(x)$
9	$f(x) = 2\,sin(5x)$
10	$f(x) = e^{cos(x)}$
11	$f(x) = x^2 \cdot sin(2x)$
12	$f(x) = cos(\sin(2x))$
13	$f(x) = 5\,cos(x)$

14	$f(x) = sin(2x + 1) + 2x$
15	$f(x) = \cos(2x) + 2x$
16	$f(x) = x \cdot sin(x)$
17	$f(x) = e^{-2x} + x^2$
18	$f(x) = sin(2x) + x$
19	$f(x) = \sin(2x) - 2x$
20	$f(x) = cos(3x) - 3x + 3$
21	$f(x) = \cos(x) + 2x$
22	$f(x) = e^x + 2 * x$
23	$f(x) = 2\, sin(x)$
24	$f(x) = x + sin(x)$
25	$f(x) = cos(x) - 2x + 3$
26	$f(x) = sin(x) + x$
27	$f(x) = cos(x) - x + 1$
28	$f(x) = 2 * x - sin(x)$
29	$f(x) = e^x + x^2$
30	$f(x) = e^{\sin(x)} + 2 * x$

Зразок виконання завдання

Знайти перші три похідні функції та розрахувати значення за многочленом Тейлора. Побудувати на одному малюнку графік функції та наближення $f(x) = cos(3x - 1) + x$.

Код

```
import sympy as sp
from math import factorial
def taylor(x):
    y = 0
    d1 = sp.diff(f, x) # перша похідна
    d2 = sp.diff(d1, x) #друга похідна
    d3 = sp.diff(d2, x)  # третя похідна
```

print('d1=',d1,'d2=',d2,'d3=',d3)

y += f + d1*x + d2*(x-0)**2/factorial(2) + d3*(x-0)**3/factorial(3)

print ('y = ', y)

return y

x = sp.symbols('x')

f = sp.cos(3*x - 1) + x

taylor_x = taylor(x)

sp.plot(taylor_x, f, (x, -1, 1), label='Taylor')

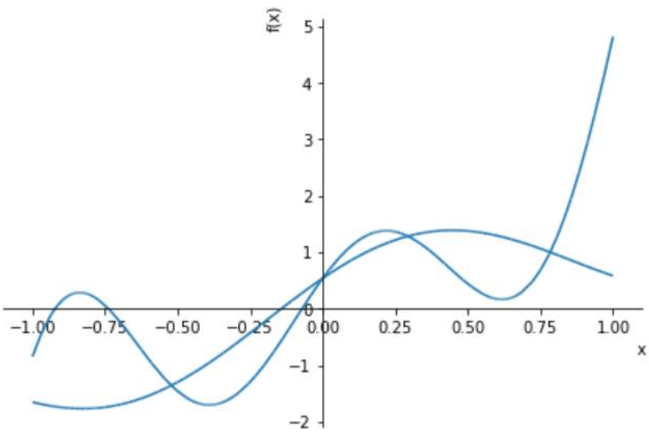
Скрін

```
import sympy as sp
from math import factorial
def taylor(x):
    y = 0
    d1 = sp.diff(f, x) # перша похідна
    d2 = sp.diff(d1, x) #друга похідна
    d3 = sp.diff(d2, x)  # третя похідна
    print('d1=',d1,'d2=',d2,'d3=',d3)
    y += f + d1*x + d2*(x-0)**2/factorial(2) + d3*(x-0)**3/factorial(3)
    print ('y = ', y)

    return y
x = sp.symbols('x')
f = sp.cos(3*x - 1) + x
taylor_x = taylor(x)

sp.plot(taylor_x, f, (x, -1, 1), label='Taylor')
```

```
d1= 1 - 3*sin(3*x - 1) d2= -9*cos(3*x - 1) d3= 27*sin(3*x - 1)
y =  9*x**3*sin(3*x - 1)/2 - 9*x**2*cos(3*x - 1)/2 + x*(1 - 3*sin(3*x - 1)) + x + cos(3*x - 1)
```



Звіт має містити:

1. ПІП, група, номер варіанта
2. Аналітичні розрахунки. Обов’язково! Оцінка похибки!
3. Код + скрін
4. Графік функії та наближення.