

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Кафедра теоретической механики

**ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ И
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
ЧАСТЬ I**

Учебно-методическое пособие

по курсу *Аналитическая механика*

Составитель
А.В. Фомичев

МОСКВА
МФТИ
2019

УДК 517.93

ББК 22.161.1, 22.161.6.

Рецензент

Профессор, доктор физико-математических наук, *А. П. Иванов*

Элементы теории бифуркаций и динамических систем. Часть 1: учебно-методическое пособие по курсу *Аналитическая механика* / сост. А.В. Фомичев. – М.: МФТИ, 2019. – 42 с.

Пособие посвящено элементарному изложению основ теории бифуркаций и некоторых смежных вопросов теории динамических систем. В первую часть пособия включены темы из программы курса аналитической механики, читаемого студентам второго курса МФТИ на большинстве факультетов и дополнительный материал о предельных циклах.

© Фомичев А.В., 2019

© Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский
университет)», 2019

Содержание

Введение	4
1. Простейшая ситуация: бифуркации положений равновесия в одномерной системе	6
2. Бифуркации в механических системах с одной степенью свободы	15
3. Понятие о предельном цикле и аттракторе	21
4. Бифуркация рождения предельного цикла	25
5. О предельных циклах на плоскости	32
6. Заключение	37
Литература	38

Введение

Понятие о динамической системе. Динамическая система — объект или процесс, состояние которого в текущий момент времени определяется некоторым набором величин, а состояние в последующие моменты времени задается законом их изменения, называемым *законом эволюции*. Понятие динамической системы весьма общо и включает в себя разнородные объекты математики, механики, физики, информатики, экономики и многих других наук. Закон эволюции может задаваться системами дифференциальных уравнений, дискретными отображениями, алгоритмами или иными способами. Далее мы ограничимся рассмотрением систем, описываемых дифференциальными уравнениями, либо дискретными отображениями.

Здесь и далее новые понятия, впервые появляющиеся в тексте, выделяются *курсивом*, либо вводятся отдельными определениями.

Понятие о бифуркации. Дифференциальные уравнения динамических систем часто зависят не только от фазовых переменных, но и от некоторых параметров. В этом случае уравнения имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

где \mathbf{x} — фазовый вектор, $\boldsymbol{\alpha}$ — набор параметров. Здесь и далее будем считать, что система автономна, т.е. $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$ не зависит явно от времени.

Иногда изменение параметров приводит к качественным перестройкам структуры фазовых траекторий системы — изменениям количества положений равновесия, характера их устойчивости, кардинальным трансформациям траекторий и т. п. В окрестности определенных значений параметров перестройки происходят при сколь угодно малом изменении параметров и называются *бифуркациями*, а соответствующие значения параметров называются *бифуркационными*. Термин "бифуркация" буквально переводится как "раздвоение" или "разветвление".

Фундамент теории бифуркаций был заложен в начале XX века в работах А. Пуанкаре, А.М. Ляпунова и А.А. Андропова. Сейчас это обширная область теории динамических систем, связанная со многими разделами фундаментальной и прикладной

математики, в первую очередь — с теорией дифференциальных уравнений, математическим анализом и геометрией. Ряд сравнительно современных результатов был получен благодаря постоянно растущим возможностям численных методов анализа динамических систем и вычислительной техники. Теория бифуркаций продолжает развиваться и находит применение в многочисленных естественных и точных науках, поскольку возникающие в них динамические системы нередко имеют бифуркационные особенности.

Естественно, что компактное изложение теории бифуркаций, претендующее на полноту и строгость, едва ли возможно, и данное пособие лишь вариант знакомства с основами этой теории. Поэтому отдельные утверждения приводятся без доказательств, в примерах сделан акцент на качественных результатах, а не на вычислениях. Однако все "нестрогости" сопровождаются ссылками на литературу, содержащую соответствующий материал в полном объеме.

В пособии рассмотрены такие бифуркации положений равновесия дифференциальных уравнений, как смена устойчивости, складка, вилка и рождение предельного цикла. В разделе "О предельных циклах на плоскости" доказано несколько теорем, позволяющих судить о наличии или отсутствии цикла в некоторой области фазовой плоскости.

Для профессионального изучения теории бифуркаций можно рекомендовать, например, книги [1]–[6] из списка литературы, приведенного в заключительной части пособия.

Автор выражает благодарность А.П. Иванову, Д.А. Притыкину и А.В. Сахарову за обсуждение пособия и конструктивную критику, существенно повлиявшую на конечный результат.

1. Простейшая ситуация: бифуркации положений равновесия в одномерной системе

Наиболее простая и наглядная ситуация реализуется в одномерном случае, когда x , α , $f(x, \alpha)$ — скаляры. Однако и этот простейший случай позволяет получить многие важные результаты. Положения равновесия находятся из уравнения

$$f(x, \alpha) = 0,$$

задающего на плоскости параметров (x, α) кривую в неявном виде, называемую *кривой равновесий*. Кривая равновесий может состоять из нескольких ветвей. Например, для системы $\dot{x} = x^2 - \alpha^2$ она состоит из двух ветвей $x = \pm\alpha$.

Рассмотрим кривую равновесий, изображенную на рис. 1 (сплошные и пунктирные обозначения ее ветвей раскрыты ниже).

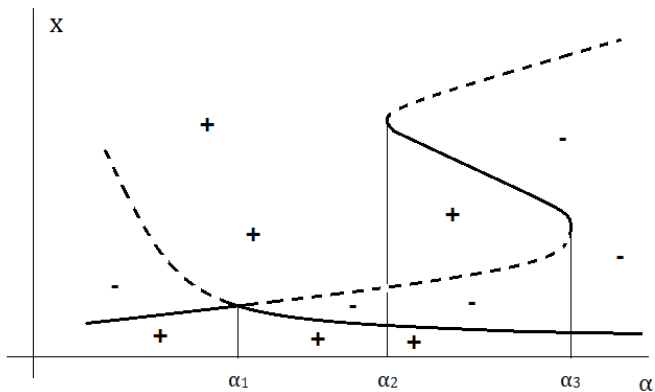


Рис. 1. Кривая равновесий

Кривая $f(x, \alpha) = 0$ делит плоскость (x, α) на области, в которых функция f сохраняет знак. В простейшей (и наиболее типичной) ситуации в областях, граничащих по кривой равновесий, знаки функции f различны. Знаками "+" и "-" на рис. 1

отмечены области знакопостоянства f в предположении, что в "нижней" области $f > 0$.

Линеаризация функции f по x в окрестности произвольной точки x^* на кривой равновесий дает следующую систему линейного приближения:

$$\dot{\varepsilon} = f_x \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon = x - x^*, \quad f_x = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^*}.$$

Здесь и далее для обозначения частных производных используются компактные обозначения в виде нижних индексов, например:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \Pi_{q_i q_j} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}.$$

Характер устойчивости положения равновесия в соответствии с теоремой Ляпунова об устойчивости по линейному приближению [7],[8] определяется знаком производной f_x , вычисленной для точки x^* , если $f_x \neq 0$.

Пусть при увеличении x точка на плоскости (x, α) переходит через кривую равновесия и знак функции f меняется с "+" на "-". Тогда в типичной ситуации (см. замечание ниже) $f_x < 0$ и положение равновесия x^* асимптотически устойчиво по теореме Ляпунова. Наоборот, при переходе от "-" к "+" производная $f_x > 0$ и положение равновесия x^* неустойчиво по той же теореме.

Таким образом, ветви кривой равновесий состоят из устойчивых или неустойчивых положений равновесия и называются *устойчивыми* или *неустойчивыми ветвями* соответственно. Устойчивые ветви на рис. 1 обозначены сплошными линиями, неустойчивые – пунктирными. Естественно, что характер устойчивости ветвей можно отмечать и другими способами. Например, распространено обозначение устойчивых ветвей последовательностью знаков "+" и неустойчивых – последовательностью "минусов" – см. рис. 2.

Замечание. Легко привести примеры, когда знаки функции f в соседних областях, разделенных кривой равновесий, совпадают или когда $f_x = 0$ на кривой равновесий. Например, оба условия выполнены для $f = (x - \alpha)^4$. Можно представить и более сложные случаи, когда $f(x, \alpha)$ определена не на всей плоскости

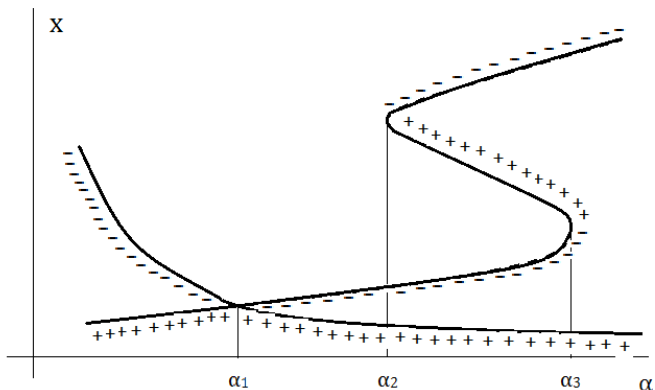


Рис. 2. Вариант обозначений устойчивости ветвей

(x, α) или когда $f_x \rightarrow \infty$ вблизи положения равновесия. Анализ устойчивости в этих ситуациях для одномерной системы обычно несложен, но далее они не рассматриваются по следующей причине.

Кривая равновесий состоит из общих точек поверхности $z = f(x, \alpha)$ и плоскости $z = 0$. Мысленно представляя себе пересечение некоторой произвольной поверхности с плоскостью $z = 0$ несложно представить, что в наиболее типичной ситуации (так называемой ситуации общего положения) эти поверхности пересекаются так, что f меняет знак на линии пересечения и $f_x \neq 0$ на ней. Случай равенства $f_x = 0$ для некоторой ветви кривой равновесий соответствует касанию поверхности $z = f(x, \alpha)$ и плоскости $z = 0$ вдоль ветви. Естественно, что такая картина в ситуации общего положения не реализуется и может классифицироваться как особая.

Точки бифуркаций. В соответствии с теоремой о неявной функции [9] уравнение

$$f(x, \alpha) = 0$$

при $f_x \neq 0$ имеет единственное решение $x(\alpha)$. В точках, где это условие не выполнено, единственность решения нарушается, и

эти точки плоскости (x, α) являются *точками бифуркаций*. Таким образом, точки бифуркаций находятся из системы уравнений

$$f(x, \alpha) = 0, \quad f_x(x, \alpha) = 0.$$

Для кривой равновесий, изображенной на рис. 1, единственность решения уравнения $f(x, \alpha) = 0$ относительно x нарушается в точке пересечения ветвей кривой равновесий $\alpha = \alpha_1$) и в точках $\alpha = \alpha_{2,3}$ с вертикальной касательной. Соответственно, значения параметра $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ и будут бифуркационными.

Опишем, что происходит с системой в окрестности этих точек. При переходе параметра α через значение $\alpha = \alpha_1$ устойчивая ветвь теряет устойчивость, а неустойчивая — обретает. Эта бифуркация называется *сменой устойчивости*.

При $\alpha = \alpha_{2,3}$ появляется изолированное положение равновесия, а изменение параметра вблизи $\alpha = \alpha_{2,3}$ приводит к исчезновению или к разветвлению этого положения равновесия на два новых, одно из которых устойчиво, а второе — неустойчиво. Такая бифуркация называется *складкой*.

При определенном устройстве функций f (подробности см. ниже) встречается третий тип бифуркации, называемой *вилкой*. В точке бифуркации происходит смена характера устойчивости ветви кривой равновесий и ответвление от нее двух новых ветвей с противоположным характером устойчивости.

Пример. Пусть $f = x(\alpha - x^2)$. Соответствующая кривая равновесий представлена на рис. 3. При переходе через бифуркационное значение параметра $\alpha = 0$ в рассматриваемой системе появляются две устойчивые ветви кривой равновесия $x = \pm\sqrt{\alpha}$, при этом ветвь $x = 0$ остается, но теряет устойчивость.

Определение. Графическое изображение кривой равновесий или фрагмента кривой равновесий с отметкой характера устойчивости ветвей при наличии бифуркаций называют *бифуркационной диаграммой*.

Если функция $f(x, \alpha)$ достаточно проста, то обычно бифуркационная диаграмма легко строится и типы бифуркаций ясны из ее вида. Однако существуют и аналитические методы исследования типов бифуркаций по производным $f(x, \alpha)$ в точках бифуркаций. Обоснования этих методов представляют отдельный интерес, поскольку позволяют понять, что вышеперечисленные

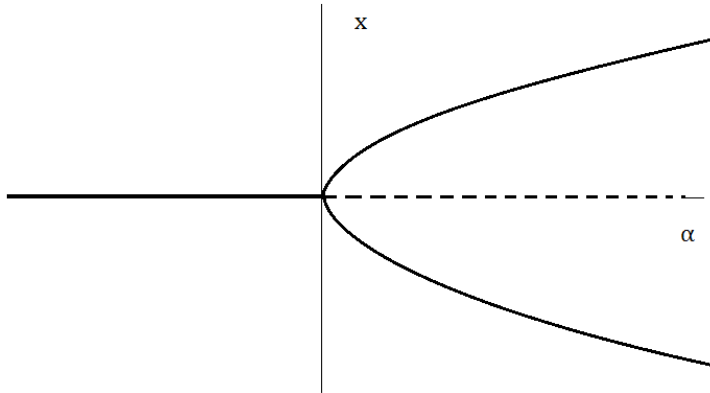


Рис. 3. Бифуркация типа вилка

типы бифуркаций для одномерной системы достаточно универсальны.

Идея аналитических методов основана на разложении $f(x, \alpha)$ в ряд Тейлора в окрестности точки бифуркации и выделении главных членов разложения. Далее для удобства будем считать, что исследуемая точка (x^*, α^*) расположена в начале координат, т.е. $(x^*, \alpha^*) = (0, 0)$, чего всегда можно добиться заменой переменных $x' = x - x^*$, $\alpha' = \alpha - \alpha^*$, и что функция $f(x, \alpha)$ дифференцируемая необходимое число раз.

Начнем с простейшего случая неособой точки кривой равновесий. Для нее $f_x \neq 0$, $f_\alpha \neq 0$ и справедливо разложение

$$f(x, \alpha) = f_x x + f_\alpha \alpha + o(|x| + |\alpha|).$$

Отсюда следует, что в малой ε - окрестности точки $(x^*, \alpha^*) = (0, 0)$ кривая равновесий $f(x, \alpha) = 0$ в главном приближении (в данном случае — в первом) аппроксимируется прямой

$$f_x x + f_\alpha \alpha = 0. \quad (2)$$

Если точка плоскости (x, α) не лежит на прямой (2), то $f_x x + f_\alpha \alpha = O(\varepsilon)$ и этот член разложения не может быть скомпенсирован высшими членами разложения, имеющими порядок

$o(\varepsilon)$. Таким образом, при $f_x \neq 0, f_\alpha \neq 0$ в малой ε - окрестности неособой точки кривая равновесий описывается линейным уравнением (2). Далее аналогичные соображения используются для исследования кривой равновесий по членам разложения высшего порядка.

В точке бифуркации $f_x = 0$ и для построения кривой равновесий в окрестности этой точки требуются нелинейные члены разложения $f(x, \alpha)$. Допустим, что в точке бифуркации $f_\alpha \neq 0, f_{xx} \neq 0 \Leftrightarrow f_\alpha \cdot f_{xx} \neq 0$ и рассмотрим следующее разложение функции, задающей кривую равновесия:

$$f_\alpha \alpha + \frac{1}{2}(f_{xx}x^2 + 2f_{x\alpha}x\alpha + f_{\alpha\alpha}\alpha^2) + O((|x| + |\alpha|)^3) = 0. \quad (3)$$

Линейные функции типа $\alpha = \lambda x$ уравнению (3) не удовлетворяют. Будем искать решение уравнения (3) в ε - окрестности точки $(0, 0)$ в виде $\alpha = \lambda x^2$. Подстановка $\alpha = \lambda x^2$ в (3) показывает, что при

$$\lambda = -\frac{f_{xx}}{2f_\alpha}$$

первые два члена (3) взаимно уничтожаются, а оставшиеся члены будут иметь порядок $O(\varepsilon^3)$. Таким образом, при $f_x = 0, f_\alpha \cdot f_{xx} \neq 0$ кривая равновесий аппроксимируется параболой и реализуется бифуркация типа складки.

Замечание. Задача поиска приближенного решения $\alpha(x)$ уравнения $f(x, \alpha) = 0$ в виде ряда по рациональным степеням x рассматривалась Ньютоном. Им был разработан метод решения задачи, получивший название *метода диаграммы Ньютона* [10].

Теперь рассмотрим бифуркацию, для которой разложение начинается с квадратичных членов, т.е. когда $f_x = f_\alpha = 0, f_{xx} \cdot f_{x\alpha} \cdot f_{\alpha\alpha} \neq 0$. Разложение уравнения кривой равновесий имеет вид

$$f_{xx}x^2 + 2f_{x\alpha}x\alpha + f_{\alpha\alpha}\alpha^2 + o((|x| + |\alpha|)^3) = 0.$$

Приравнявая нулю квадратичную часть, получим решение

$$\alpha_{1,2} = -\frac{f_{\alpha x} \pm \sqrt{f_{\alpha x}^2 - f_{\alpha\alpha}f_{xx}}}{f_{\alpha\alpha}}x,$$

из которого следует, что поведение кривой равновесий определяется знаком величины $D = f_{\alpha x}^2 - f_{\alpha\alpha}f_{xx}$.

При $D > 0$ имеется два решения, в главном приближении — две пересекающиеся прямые. В этом случае реализуется бифуркация типа смены устойчивости. Если $f_{\alpha\alpha} = 0$, то также имеются две ветви $x = 0$ и $\alpha = -xf_{xx}/(2f_{\alpha x})$ и тоже реализуется смена устойчивости. Если $f_{xx} = 0$, то одним из решений в квадратичном приближении будет $\alpha = 0$, однако далее показано, что в этом случае необходим более точный анализ.

При $D = 0$ решение — прямая $\alpha = -xf_{\alpha x}/f_{\alpha\alpha}$ — в рассматриваемом приближении единственно (в [11] показано, что в этом случае через точку бифуркации проходят две кривые, имеющие общую касательную в точке бифуркации).

При $D < 0$ в точке $(x, \alpha) = (0, 0)$ находится изолированное положение равновесия.

Исследуем подробнее случай $f_x = f_\alpha = f_{xx} = 0$ с помощью разложения кривой равновесия до членов третьего порядка:

$$\begin{aligned} f(x, \alpha) = & f_{\alpha x}x\alpha + \frac{1}{2}f_{\alpha\alpha}\alpha^2 + \frac{1}{6}(f_{xxx}x^3 + 3f_{xx\alpha}x^2\alpha + \\ & + 3f_{x\alpha\alpha}x\alpha^2 + f_{\alpha\alpha\alpha}\alpha^3) + o((|x| + |\alpha|)^3) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Из квадратичной части разложения (4) следуют решения $\alpha = -2xf_{\alpha x}/f_{\alpha\alpha}$ (или $x = 0$ при $f_{\alpha\alpha} = 0$) и $\alpha = 0$. Уточним вид последнего решения с привлечением членов высшего порядка разложения: выясним какими должны быть производные в точке бифуркации чтобы было справедливо приближение следующего порядка $\alpha = \lambda x^2$. Подставляя его в (4), можно получить

$$(\lambda f_{x\alpha} + \frac{1}{6}f_{xxx})x^3 + o((|x| + |\alpha|)^3) = 0.$$

Таким образом, для существования решения вида $\alpha = \lambda x^2$ необходимо потребовать чтобы $f_{xxx} \cdot f_{x\alpha} \neq 0$ и тогда $\lambda = -f_{xxx}/6f_{x\alpha}$. В этом случае через точку бифуркации проходит ветвь, в первом приближении аппроксимируемая прямой, и вместе с этим происходит бифуркация типа складки, что в совокупности образует бифуркацию типа вилки.

Для удобства восприятия полученных результатов соберем их вместе в виде отдельных утверждений.

Утверждение 1. Если в некоторой точке кривой равновесий выполнены условия $f_x = 0$, $f_\alpha \cdot f_{xx} \neq 0$, то в этой точке реализуется бифуркация типа *складки*.

Утверждение 2. Если в некоторой точке кривой равновесий выполнены условия $f_x = 0$, $f_\alpha = 0$, $f_{xx} \neq 0$, $f_{x\alpha}^2 - f_{\alpha\alpha}f_{xx} > 0$, то в этой точке реализуется бифуркация типа *смены устойчивости*.

Утверждение 3. Если в некоторой точке кривой равновесий выполнены условия $f_x = 0$, $f_\alpha = 0$, $f_{xx} = 0$, $f_{x\alpha} \cdot f_{xxx} \neq 0$, то в этой точке реализуется бифуркация типа *вилка*.

Явление гистерезиса. Рассматриваемая простейшая одномерная система при наличии нескольких бифуркаций типа складка может обладать *гистерезисом* — явлением, при котором состояние системы при изменении параметров зависит не только от мгновенных значений параметров, но и от "предыстории" их изменения.

Пусть кривая равновесий имеет вид, представленный на рисунке 4. Асимптотически устойчивые ветви отмечены сплошны-

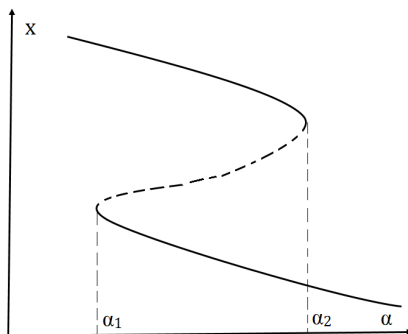


Рис. 4. Кривая равновесий

ми линиями, неустойчивые — пунктиром. Для любых начальных условий, не принадлежащих кривой равновесий, решение дифференциального уравнения системы стремится к асимптотически устойчивому положению равновесия на одной из ветвей кривой равновесий. Поэтому можно считать, что предельное состояние системы (т.е. при фиксированном α и при $t \rightarrow \infty$) практически всегда (т.е. за исключением положений равновесий, находящихся в точности на неустойчивых ветвях кривой равновесий)

будет находиться на асимптотически устойчивых ветвях кривой равновесий.

Допустим, что система достигла предельного состояния и находится на верхней ветви кривой равновесий. Если теперь бесконечно медленно увеличивать параметр α , то положение равновесия на верхней ветви кривой равновесий будет смещаться вправо и при переходе бифуркационного значения α_2 исчезнет. После этого система в пределе перейдет на нижнюю асимптотически устойчивую ветвь и будет оставаться на ней при дальнейшем увеличении параметра. Если после этого изменять α в обратном направлении, то при переходе значения α_1 система покинет положение равновесия на нижней ветви кривой равновесий и займет положение равновесия на верхней ветви. Объединяя на одном рисунке "прямой" и "обратный" пути изменения параметра, получаем характерную петлю гистерезиса, представленную на рисунке 5.

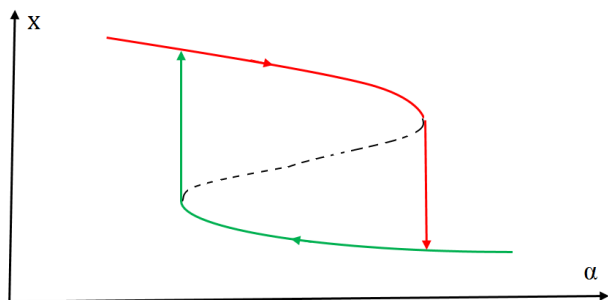


Рис. 5. Петля гистерезиса

2. Бифуркации в механических системах с одной степенью свободы

Кривые равновесия и бифуркационные диаграммы могут быть построены и для механических систем с одной степенью свободы, описываемых дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, \alpha), \quad (5)$$

где q — обобщенная координата, α — некоторый параметр задачи, который будет считаться скаляром.

Заметим, что для механических систем, описываемых уравнениями Лагранжа, уравнения движения всегда приводятся к виду (5) по теореме о разрешимости уравнений Лагранжа относительно старших производных [7],[8].

Между положениями равновесия и точками фазового пространства вида $(q, \dot{q}) = (q^*, 0)$ имеется взаимно-однозначное соответствие. Поэтому положения равновесия находятся из уравнения

$$f(q, 0, \alpha) = 0,$$

также задающего кривую равновесий на плоскости параметров (q, α) . Ее ветвление соответствует различным типам бифуркаций, в том числе — всем рассмотренным выше типам. Однако в отличие от уравнения первого порядка устойчивость ветвей может быть неасимптотической (например, для консервативных систем). При определенной структуре кривой равновесий механической системы в ней может наблюдаться явление гистерезиса, как и для уравнения первого порядка.

При исследовании устойчивости ветвей кривой равновесий системы (5) нужно учитывать, что система описывается дифференциальным уравнением второго порядка и использовать адекватные методы анализа устойчивости положений равновесий таких систем (например, теоремы об устойчивости консервативных систем, если изучаемая система консервативна и т.п.) — см. [7], [8]. Характерный пример исследования одномерной механической системы и подходы к анализу устойчивости таких систем в общем случае описаны ниже.

Пример. Гладкая окружность радиуса r вращается относительно вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью

ω . По окружности может двигаться колечко массы m . Найти положения относительного равновесия колечка, пренебрегая его размерами, исследовать их на устойчивость и построить бифуркационную диаграмму, соответствующую изменению параметра ω .

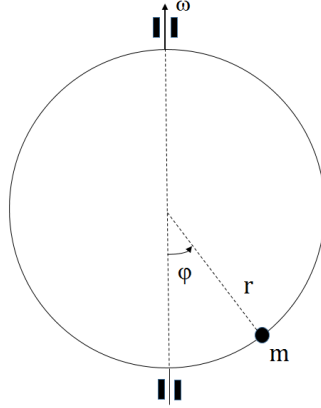


Рис. 6. Механическая система

В системе отсчета, связанной с окружностью, кинетическая и потенциальная энергии системы равны

$$T = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2, \quad \Pi = mgr(1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2}m\omega^2r^2 \sin^2 \varphi$$

и уравнения движения приводятся к виду (5). Для нахождения положений равновесия и исследования их устойчивости воспользуемся известными теоремами о равновесии, устойчивости и неустойчивости консервативных систем [7],[8]. При этом положительный постоянный множитель mr в выражении потенциальной энергии можно опустить, заменив $\Pi \rightarrow \Pi = g(1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2}\omega^2r \sin^2 \varphi$. Положения равновесия находятся из уравнения

$$\Pi_{\varphi} = 0,$$

имеющего решения $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$, $\varphi_{3,4} = \pm \arccos(g/\omega^2r)$, причем решения $\varphi_{3,4}$ существуют, если $\omega \geq \sqrt{g/r}$ и $\varphi_{3,4} \rightarrow \varphi_1 = 0$

при $\omega \rightarrow \sqrt{g/r}$, откуда следует, что в рассматриваемой динамической системе имеется бифуркация типа вилка.

Вторая производная потенциальной энергии по φ равна

$$\Pi_{\varphi\varphi} = g \cos \varphi - \omega^2 r \cos 2\varphi.$$

Подставляя значения $\varphi_{1,2}$ или $\cos \varphi_{3,4}$ в последнее выражение, получим

$$\Pi_{\varphi\varphi}(0) = g - \omega^2 r, \quad \Pi_{\varphi\varphi}(\pi) = -g - \omega^2 r, \quad \Pi_{\varphi\varphi}(\varphi_{3,4}) = \omega^2 r \left(1 - \frac{g^2}{\omega^4 r^2} \right).$$

Следовательно:

$\Pi_{\varphi\varphi}(0) > 0$ при $\omega < \sqrt{g/r}$ и положение равновесия $\varphi_1 = 0$ устойчиво по теореме Лагранжа–Дирихле;

$\Pi_{\varphi\varphi}(0) < 0$ при $\omega > \sqrt{g/r}$ и положение равновесия $\varphi_1 = 0$ неустойчиво по теореме Ляпунова о неустойчивости по разложению потенциальной энергии до членов второго порядка;

$\Pi_{\varphi\varphi}(\pi) < 0$ при $\forall \omega$ и положение равновесия $\varphi_2 = \pi$ всегда неустойчиво по той же теореме Ляпунова;

$\Pi_{\varphi\varphi}(\varphi_{3,4}) > 0$ при $\omega > \sqrt{g/r}$ и положения равновесия $\varphi_{3,4} = 0$ устойчивы по теореме Лагранжа–Дирихле.

При $\omega = \sqrt{g/r}$ положения равновесия $\varphi_{3,4}$ сливаются с положением равновесия $\varphi_1 = 0$ и при этом $\Pi_{\varphi\varphi}(0) = 0$. Исследование устойчивости при вырождении квадратичной части разложения потенциальной энергии требует разложения до членов более высокого порядка. Нетрудно убедиться, что при $\omega = \sqrt{g/r}$ первым существенным членом разложения окажется

$$\Pi(\varphi) \approx \frac{1}{8} g \varphi^4,$$

откуда следует, что потенциальная энергия имеет минимум в точке $\varphi_1 = 0$ и это положение равновесия устойчиво по теореме Лагранжа–Дирихле.

Проведенное исследование приводит к бифуркационной диаграмме, представленной на рис. 7. Очевидно, что положение равновесия $\varphi_2 = \pi$ совпадает с положением равновесия $-\varphi_2 = -\pi$, однако для симметрии бифуркационной диаграммы целесообразно формально изобразить две ветви кривой $\varphi_2 = \pi$ и $-\varphi_2 = -\pi$.

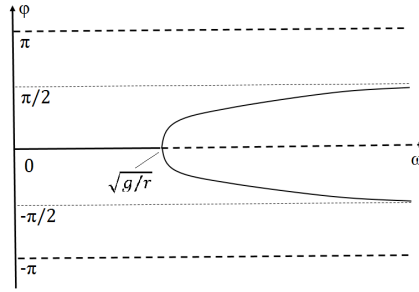


Рис. 7. Бифуркационная диаграмма

Замечание. По описанному алгоритму исследуется класс уравнений

$$\ddot{q} = f(q, \alpha),$$

поскольку любое такое уравнение можно трактовать как уравнение движения материальной точки единичной массы в потенциале $\Pi(q, \alpha) = -\int f(q, \alpha) dq$. По теоремам Лагранжа–Дирихле и Ляпунова устойчивость точки q^* на кривой равновесий определяется из условий $\Pi_{qq} = -f_q > 0$ (устойчивость) $\Pi_{qq} = -f_q < 0$ (неустойчивость), а при $\Pi_{qq} = -f_q = 0$ устойчивость исследуется по младшим членам разложения потенциальной энергии порядка выше второго (соответственно, разложения f порядка выше первого). Все указанные здесь производные вычисляются в точке q^* .

Положения равновесия автономной системы общего вида

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, \alpha)$$

могут быть исследованы на устойчивость следующим образом.

а) При помощи теоремы Ляпунова об устойчивости по линейному приближению. Замена переменной $\dot{q} = u$ сводит уравнение движения второго порядка к системе уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{q} &= u, \\ \dot{u} &= f(q, u, \alpha). \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть $(q, u)^T = (q^*, 0)^T$ – некоторое положение равновесия. Линеаризация (6) в окрестности положения равновесия приводит к

системе

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{q} \\ \delta \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f_q & f_u \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta q \\ \delta u \end{bmatrix}, \quad (7)$$

в которой $\delta q, \delta u$ — отклонения от положения равновесия, а производные f_q, f_u вычисляются в точке $(q^*, 0)^T$. Характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет вид

$$\lambda^2 - f_u \lambda - f_q = 0.$$

Обозначим его корни через $\lambda_{1,2}$.

Из вида характеристического уравнения следует, что:

Для асимптотической устойчивости линеаризованной системы необходимо и достаточно чтобы выполнялись неравенства $f_q < 0, f_u < 0$ (их легко получить из критерия Рауса–Гурвица [7],[8]). В этом случае $\text{Re} \lambda_{1,2} < 0$ и положение равновесия асимптотически устойчиво как в линеаризованной, так и в исходной нелинейной системе в соответствии с теоремой Ляпунова об устойчивости по линейному приближению.

Если f_q, f_u имеют любые другие знаки (но не равны нулю!), то положение равновесия неустойчиво как в линеаризованной, так и в исходной системе по той же теореме Ляпунова. Это видно из явных выражений для корней характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(f_u \pm \sqrt{f_u^2 + 4f_q}),$$

из которого следует, что $\exists i : \text{Re} \lambda_i > 0$. Критический случай чисто мнимых или нулевых корней реализуется при $f_u = 0, f_q \leq 0$ (при $f_u = 0, f_q > 0$ положение равновесия неустойчиво, т.к. $\text{Re} \lambda_1 > 0$) и об устойчивости по линейному приближению судить уже нельзя, что приводит к необходимости использовать другие подходы.

б) Если правая часть допускает представление $f(q, \dot{q}, \alpha) = g(q, \alpha) + Q(q, \dot{q}, \alpha)$, то для $g(q, \alpha)$ можно ввести потенциал $\Pi(q, \alpha) = - \int g(q, \alpha) dq$ и если положение равновесия $q = q^*$ в системе

$$\ddot{q} = g(q, \alpha)$$

оказывается устойчивым по теореме Лагранжа–Дирихле, совпадает с положением равновесия исходной системы, а функ-

ция $N = Q(q, \dot{q}, \alpha)\dot{q}$ — положительно определена, то выражение $Q(q, \dot{q}, \alpha)$ допускает трактовку диссипативной силы с полной диссипацией и по теореме Кельвина–Четаева положение равновесия $q = q^*$ будет асимптотически устойчивым. Эта теорема доказывается в курсах теоретической механики, например, в [7], [8], иногда под другими названиями вроде обобщения теоремы Лагранжа–Дирихле.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{q} + \lambda q^2 \dot{q} + \mu \dot{q}^3 + \nu q^3 = 0,$$

в котором параметры λ, μ, ν положительны. Уравнение имеет положение равновесия $q^* = 0$ и допускает разбиение на консервативную систему

$$\ddot{q} + \nu q^3 = 0,$$

обладающую тем же устойчивым положением равновесия $q^* = 0$, что и исходная система, и диссипативную силу

$$Q = -(\lambda q^2 + \mu \dot{q}^2)\dot{q}$$

с полной диссипацией.

в) В менее очевидных ситуациях для исследования устойчивости можно применять теоремы второго метода Ляпунова [8].

3. Понятие о предельном цикле и аттракторе

В динамических системах (1) при $\dim \mathbf{x} \geq 2$ появляется тип траекторий, называемых *предельными циклами*.

Определение. Предельным циклом называется замкнутая периодическая траектория системы дифференциальных уравнений, такая, что:

- 1) в некоторой окрестности предельного цикла нет других периодических траекторий;
- 2) все траектории, начинающиеся в этой окрестности, стремятся к циклу при $t \rightarrow \infty$ или при $t \rightarrow -\infty$.

Для траекторий в окрестности предельного цикла возможны следующие асимптотические свойства.

1) Все траектории в окрестности предельного цикла стремятся к нему при $t \rightarrow \infty$. В этом случае цикл называется *устойчивым*.

2) Все траектории в окрестности предельного цикла стремятся к нему при $t \rightarrow -\infty$ и, соответственно, покидают его окрестность при изменении времени в положительном направлении. В этом случае цикл называется *неустойчивым*.

3) Часть траекторий стремится к циклу при $t \rightarrow \infty$, а часть траекторий — при $t \rightarrow -\infty$. В этом случае цикл называют *полуустойчивым*.

Описанные ситуации для системы на плоскости ($\dim \mathbf{x} = 2$) изображены на рис. 8.

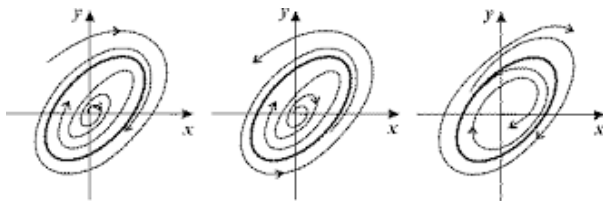


Рис. 8. Предельные циклы на плоскости. Слева — устойчивый, в середине — полуустойчивый, справа — неустойчивый

Замечание 1. Предельные циклы встречаются на фазовых портретах исключительно нелинейных систем. Замкнутые траек-

тории в окрестности положения равновесия типа "центр", встречающиеся и в линейных системах, нельзя считать предельными циклами, поскольку они не изолированы (в сколь угодно малой окрестности любой замкнутой траектории будут другие замкнутые траектории).

Замечание 2. Уравнения движения одномерной механической системы — частный случай динамической системы второго порядка, описываемых уравнениями (1) с двумерным фазовым вектором:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$$

и при определенных типах нелинейностей в одномерных механических системах могут существовать предельные циклы на фазовой плоскости (q, \dot{q}) .

Определение. Компактные подмножества в фазовом пространстве, к которым стремятся при $t \rightarrow \infty$ все траектории динамической систем, начинающиеся в некоторой области (или в объединении областей) фазового пространства, называются *аттракторами* или притягивающими множествами. Сама область (или объединение областей) называется *бассейном аттрактора*.

Определение. Аналогичные объекты, получающиеся при $t \rightarrow -\infty$, называются *репеллерами* или отталкивающими множествами.

Поскольку обычно бывает интересным предельное поведение системы при увеличении времени, сосредоточим внимание на аттракторах. Аттракторами одномерной системы являются асимптотически устойчивые положения равновесия. Аттракторы на фазовой плоскости ($\dim \mathbf{x} = 2$) — положения равновесия, устойчивые предельные циклы, либо замкнутые кривые, образованные сепаратрисами (см. ниже) и положениями равновесия системы.

В силу теоремы Коши о существовании и единственности решения задачи Коши [12] фазовые кривые не могут пересекаться. В двумерном случае это существенно упрощает топологию (см. ниже) фазовых траекторий и любые фазовые траектории на плоскости, отличные от положений равновесия, могут стремиться к перечисленным аттракторам, либо быть замкнутыми (например, для консервативных механических систем), либо уходят на бесконечность.

Определение. *Топологическими* называются свойства геометрических объектов, сохраняющиеся при непрерывных преобразованиях (т.е. преобразованиях без разрывов и склеек).

Определение. Сепаратрисой называется траектория двумерной динамической системы, стремящаяся к седловому [12] положению равновесия.

Классическим примером системы, обладающей сепаратрисами на фазовой плоскости, является математический маятник, описываемый уравнением

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Используя систему линейного приближения, можно показать, что неустойчивое положение равновесия маятника $\varphi = \pi, \dot{\varphi} = 0$ имеет тип *седло*. Сепаратрисы представляют собой траектории, по которым маятник достигает положения равновесия $\varphi = \pi, \dot{\varphi} = 0$ при $t \rightarrow \infty$. Картина фазовых траекторий маятника изображена на рис. 9.

Замечание. Фазовое пространство данной системы можно считать цилиндром $\mathbb{R} \times S^1$, т.е. множеством пар точек, первая из которых лежит на прямой, а вторая – на окружности. Операция "×" называется декартовым произведением. Окружность S^1 возникает естественным образом при отождествлении концевых точек интервала $[-\pi, \pi] \ni \varphi$, одинаковых с точки зрения геометрии задачи. Подобные представления фазового пространства используются и в системах произвольной размерности с периодическими правыми частями по всем или отдельным переменным.

Положения равновесия, сепаратрисы, предельных циклы и другие периодические решения практически полностью определяет фазовый портрет двумерной системы, а изменение "расстановки" этих объектов на фазовой плоскости при бифуркации приводит к качественной перестройке всего фазового портрета.

Аттракторами при $\dim \mathbf{x} \geq 3$ также могут быть положениями равновесия, предельные циклы, поверхности, либо сложно устроенные (фрактальные) множества, которые нельзя отнести к кривым либо поверхностям.

Существенное усложнение свойств динамических систем при $\dim \mathbf{x} \geq 3$ связано с тем, что теорема Коши при увеличении раз-

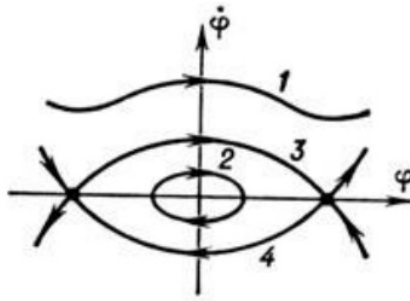


Рис. 9. Траектории математического маятника на фазовой плоскости: 2 — замкнутая кривая, соответствующая колебаниям маятника, 3, 4 — сепаратрисы, 1 — кривая, соответствующая вращению маятника. Сепаратриса разделяет фазовую плоскость на области с качественно разным движением

мерности фазового пространства накладывает меньше ограничений на траектории системы, чем в одномерном и плоском случаях. Начальные представления о некоторых особенностях многомерных динамических систем приведены во второй части настоящего пособия, однако эти представления далеко не полны и для формирования целостной картины, безусловно, требуется дополнительная литература, например, [1],[2] или другие книги по нелинейной динамике.

4. Бифуркация рождения предельного цикла

В динамических системах с размерностью фазового вектора больше единицы встречается новый тип бифуркации, называемой *рождением предельного цикла*. Для иллюстрации рассмотрим двумерную систему ($\dim \mathbf{x} = 2$) со скалярным параметром α . Изменение параметра α в окрестности бифуркационного значения приводит к тому, что асимптотически устойчивое положение равновесия становится неустойчивым, в его окрестности рождается предельный цикл, а характерный размер цикла увеличивается при дальнейшем изменении параметра α . Соответствующая бифуркационная картина представлена на рисунке 10.

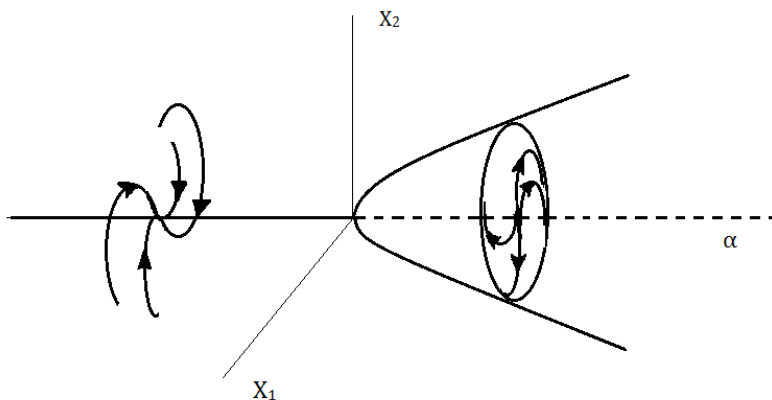


Рис. 10. Бифуркация рождение цикла

Одной из простейших систем, имеющих бифуркацию типа рождение предельного цикла, и легко исследуемой аналитически, является

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{aligned} \quad (8)$$

При любом значении α в ней имеется положение равновесия $x = 0$. Исследуем его устойчивость по линейному приближению.

Матрица линеаризованной системы и корни характеристического уравнения $\det(\lambda E - A) = 0$ следующие:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm i.$$

Таким образом, по теореме Ляпунова об устойчивости по линейному приближению получаем, что при $\alpha < 0$ положение равновесия асимптотически устойчиво, а при $\alpha > 0$ — неустойчиво. Для исследования системы при потере устойчивости перейдем к полярным координатам

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \phi, \\ x_2 &= r \sin \phi. \end{aligned}$$

Делая формальную замену переменных (или умножая первое уравнение (8) на x_1 , второе — на x_2 и складывая для получения уравнения для переменной r), нетрудно получить систему для r, ϕ :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\alpha - r^2), \\ \dot{\phi} &= 1. \end{aligned}$$

Уравнение для r отделяется и при $\alpha > 0$ имеет два положения равновесия — $\{r = 0, r = \sqrt{\alpha}\}$. Нулевое положение равновесия неустойчиво по линейному приближению. Напротив, второе положение равновесия оказывается асимптотически устойчивым, поскольку линеаризация в его окрестности дает отрицательный коэффициент при линейном члене разложения правой части: $\frac{d}{dr}r(\alpha - r^2)|_{r=\sqrt{\alpha}} = -2\alpha < 0$. Это означает, что в окрестности положения равновесия появляется асимптотически устойчивый цикл в форме окружности радиуса $r = \sqrt{\alpha}$, к которому притягиваются все фазовые кривые.

Исследования динамических систем, относящиеся к началу XX в., показали, что рождение цикла с характерным размером, пропорциональным $\sqrt{|\alpha|}$, где α — отклонение параметра от бифуркационного значения, представляет собой явление достаточно общего характера, происходящее при переходе пары комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения линеаризованной системы из левой полуплоскости в правую (как это и было в рассмотренном примере).

Для формулировки приводимой далее теоремы запишем уравнения динамической системы в окрестности положения равновесия в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \alpha) = A(\alpha)\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha), \quad A(\alpha) = \left[\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right]_{\mathbf{x}=0}.$$

Здесь $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и без ограничения общности считается, что положение равновесия находится в точке $\mathbf{x} = 0$.

Теорема Пуанкаре-Андронов-Хопфа. Пусть матрица $A(\alpha)$ имеет пару простых комплексных собственных значений $\lambda_{1,2} : \bar{\lambda}_1 = \lambda_2$, при $\alpha < 0$ $\operatorname{Re} \lambda_{1,2}(\alpha) < 0$, при $\alpha = 0$ $\lambda_{1,2}(0) = \pm i\omega$, $\omega > 0$ и при $\alpha > 0$ $\operatorname{Re} \lambda_{1,2}(\alpha) > 0$.

Тогда если выполнено неравенство

$$\frac{d\operatorname{Re} \lambda_{1,2}(\alpha)}{d\alpha} > 0$$

то положение равновесия при $\alpha > 0$ становится неустойчивым. Одновременно возникает устойчивое (рождение цикла) или исчезает неустойчивое (жесткая потеря устойчивости — см. ниже) периодическое решение амплитуды порядка $\sqrt{|\alpha|}$. Асимптотически устойчивый цикл рождается, если $\mathbf{x} = 0$ — асимптотически устойчивое положение равновесия при $\alpha = 0$.

Доказательство теоремы приводится, например, в [13].

Бифуркацию рождения цикла также называют *бифуркацией Пуанкаре-Андронов-Хопфа*.

Замечание. Для большинства нелинейных систем циклы имеют более сложную форму, чем окружность, что значительно усложняет возможности аналитического исследования. Покажем это на примере уравнения Ван дер Поля — одной из классических динамических систем, имеющих предельный цикл на фазовой плоскости.

$$\ddot{x} - \alpha(1 - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

Численное интегрирование уравнения позволяет построить фазовые портреты, изображенные на рис. 11 и демонстрирующие наличие циклов достаточно сложной формы. Уравнение Ван дер Поля подробно исследуется в большинстве книг по теории

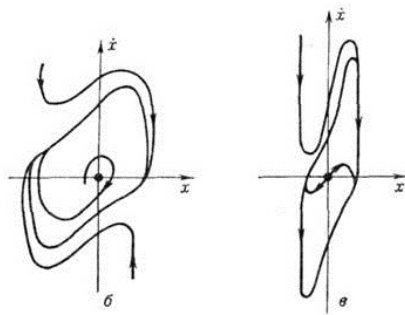


Рис. 11. Предельные циклы в уравнении Ван дер Поля при $\alpha = 1$ и $\alpha \gg 1$

колебаний и приближенно описывает *автоколебания* в ламповом генераторе на триоде.

Определение. Автоколебаниями называются периодические решения в диссипативных системах с непериодическим источником энергии.

В качестве механических примеров автоколебательных систем можно привести стенные маятниковые часы, в которых автоколебания поддерживаются постоянной силой тяжести гири, либо систему, изображенную на рис. 12, в которой автоколебательный режим поддерживается кулоновской силой сухого трения и движением ленты транспортера с постоянной скоростью. Механизм, аналогичный колебаниям груза на транспортере, имеют колебания куска мела при письме по жесткой доске, сопровождаемые характерным неприятным звуком.

Автоколебательный режим груза на транспортере исследован, например, в [14], а уравнение Ван дер Поля подробно рассмотрено в [1].

Замечание. Путем замены масштаба фазовой переменной $x = y/\sqrt{\alpha}$ можно устранить параметр перед нелинейностью, привести уравнение Ван дер Поля к виду

$$\ddot{y} - (\alpha - y^2)\dot{y} + y = 0$$

и показать, что в этих переменных при малых значениях параметра уравнение имеет цикл характерного размера $\sqrt{\alpha}$, близкий

к окружности. Это доказательство будет полезно выполнить в качестве упражнения.

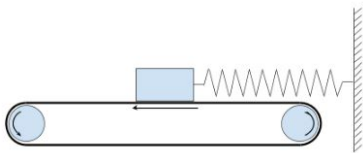


Рис. 12. Груз на пружине и транспортере с сухим трением

Определение. Потеря устойчивости, происходящая при рождении цикла, называется *мягкой*.

Однако данный термин несколько обманчив. Дело в том, что характерный размер цикла растет при отклонении параметра от бифуркационного значения в соответствии с теоремой Пуанкаре–Андронova–Хопфа и если этот процесс происходит в некотором устройстве, то возникшие колебания могут вывести его из строя или даже разрушить.

Классический пример из практики дает явление *флаттера* [5] — возбуждения колебаний крыльев или хвостового оперения летательного аппарата при превышении скоростью набегающего потока некоторого критического (бифуркационного) значения. Дальнейшее увеличение скорости приводит к росту амплитуды колебаний и обычно разрушает конструкцию. Анализ соответствующих уравнений показывает, что флаттер обусловлен рождением предельного цикла.

Проблема флаттера наиболее остро проявилась в 30-е годы XX века, когда прогресс в авиастроении позволил достичь критических скоростей. В те годы флаттер становится причиной многих авиакатастроф и одним из ключевых препятствий на пути повышения скоростей самолетов. основополагающий вклад в объяснение и успешное решение проблемы флаттера был внесен академиками М. В. Келдышем и М. А. Лавреньевым.

Определение. *Жесткой потере устойчивости*, называемой в практических задачах *дивергенцией*, соответствует исчезновение положения равновесия при бифуркации типа складки.

Рассмотрим соответствующий механический пример. Допустим, что к математическому маятнику, подвешенному на неведе-

сомый стержень длины l приложена постоянная сила F , ортогональная подвесу. Тогда маятник имеет 2 положения равновесия $\varphi_1 = \arcsin \frac{F}{mg}$, $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$, где φ — угол между подвесом и вертикалью.

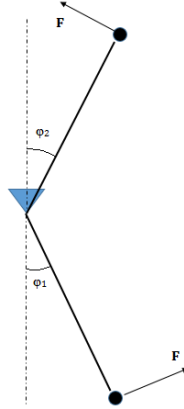


Рис. 13. Математический маятник под воздействием постоянной ортогональной силы

Линеаризация уравнений движения в окрестности положения равновесия φ^* (φ^* может принимать значения φ_1 или φ_2) приводит к результату:

$$\delta\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cos \varphi^* \delta\varphi = 0, \quad (9)$$

из которого следует, что при $F < mg$ положение равновесия φ_1 устойчиво по теореме Лагранжа–Дирихле, а φ_2 неустойчиво по первой теореме Ляпунова. При $F = mg$ уравнение (9) переходит в уравнение

$$\delta\ddot{\varphi} = 0,$$

имеющее кратный корень $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ характеристического уравнения, два положения равновесия сливаются в положение $\varphi^* = \pi/2$, исчезающее при $F > mg$. Соответствующая бифуркационная диаграмма приведена на рис. 14

В отличие от мягкой потери устойчивости при дивергенции решение покидает окрестность положения равновесия, потеряв-

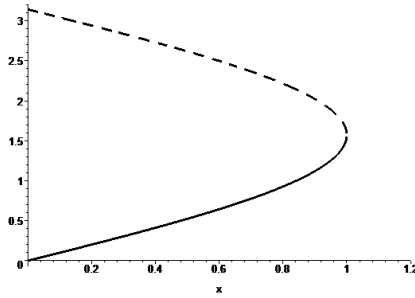


Рис. 14. Зависимость положений равновесия от параметра F/mg

шего устойчивости, что объясняет применение терминов "жесткая потеря устойчивости" и "дивергенция" ("дивергенция" в буквальном переводе означает "расхождение"). Жесткая потеря устойчивости происходит при прохождении корней характеристического уравнения линеаризованной системы через ноль, как это и было в рассмотренном примере.

Об определении бифуркаций положений равновесия в общем случае. Бифуркациям положений равновесия соответствует неоднозначность выражения $\mathbf{x}(\alpha)$ из уравнения $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha) = \mathbf{0}$. Это позволяет легко алгоритмизировать поиск бифуркационных значений при произвольной размерности \mathbf{x} и α . По теореме о неявной функции решение $\mathbf{x}(\alpha)$ уравнения $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha) = \mathbf{0}$ существует, единственно и непрерывно зависит от параметра α , если $\det[\partial f_i / \partial x_j] \neq 0$. Таким образом, бифуркации соответствуют тем точкам \mathbf{x}_0, α_0 , для которых выполнены условия

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha) = \mathbf{0}, \quad \det \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] = 0.$$

Данные соотношения определяют точки бифуркаций положений равновесий при произвольной размерности фазового вектора системы (1).

5. О предельных циклах на плоскости

Траектории и, в частности, предельные циклы нелинейных динамических систем в подавляющем большинстве случаев достаточно сложны, что затрудняет их прямые аналитические исследования. Однако теорема Коши о существовании и единственности решения задачи Коши и ограниченность фазового потока двумерной плоскостью позволяют использовать наглядные геометрические соображения для построения косвенных методов исследования, не требующих аналитического интегрирования уравнений и дополняющих обширные возможности численных методов интегрирования.

В разделе рассмотрено несколько теорем, позволяющих установить наличие или отсутствие предельного цикла в некоторой области фазового пространства двумерной динамической системы. Все функции считаются дифференцируемыми необходимое количество раз.

Для дальнейших рассуждений зависимость правой части динамической системы (1) от параметров подчеркивать не принципиально и поэтому для сокращения записи вместо $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \alpha)$ далее везде пишется $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$. Для обозначений градиента и дивергенции будут использоваться символы $\nabla = \text{grad}$ и $\nabla \cdot = \text{div}$.

Теорема 1. *Если существует скалярная функция $V(x)$ такая, что в системе*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \nabla V(x) \quad (10)$$

то в системе отсутствуют предельные циклы.

Доказательство. Пусть замкнутый контур γ — предельный цикл системы (10). Выберем положительное направление обхода контура совпадающим с направлением траектории движения динамической системы по циклу. Тогда для вектора дифференциала дуги $d\mathbf{x}$ вдоль γ будет выполнено неравенство $\mathbf{X} \cdot d\mathbf{x} > 0$ (здесь и далее обозначение " \cdot " используется для скалярного произведения) и, следовательно,

$$\oint_{\gamma} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{x} > 0.$$

С другой стороны,

$$\oint_{\gamma} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{x} = \oint_{\gamma} \nabla V \cdot d\mathbf{x} = \oint_{\gamma} dV = 0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 2. *Если в системе (10) существует глобальное асимптотически устойчивое положение равновесия x^* , к которому стремятся все траектории системы, то предельные циклы в (10) отсутствуют.*

Доказательство. Допустим, что кривая γ — замкнутая периодическая траектория системы (10). Тогда положение равновесия x^* лежит либо внутри области, ограниченной кривой γ , либо вне нее. В любом случае траектории, начинающиеся вне множества, которому принадлежит x^* , не могут стремиться к x^* , поскольку для этого требуется пересечь кривую γ , что противоречит теореме Коши.

Теорема 3. Критерий Дюлака. *Если в односвязной области (т.е. области без "дырок") $G \subset \mathbb{R}^2$ фазового пространства системы (10) существует непрерывно дифференцируемая скалярная функция $B(\mathbf{x})$ для которой величина*

$$\nabla \cdot (B\mathbf{X})$$

знакопостоянна в G , то в G отсутствуют замкнутые траектории системы (10).

Доказательство. Пусть $\gamma \subset G$ — периодическая замкнутая траектория (10). Докажем вспомогательное утверждение о том, что γ также будет являться траекторией системы

$$\dot{\mathbf{x}} = B(\mathbf{x})\mathbf{X}(\mathbf{x}). \quad (11)$$

Пусть уравнение кривой γ в параметрическом виде имеет вид $g(\mathbf{x}) = 0$. Поскольку кривая γ переходит в себя при преобразовании, задаваемом фазовым потоком системы (10), производная $g(\mathbf{x})$, вычисленная для любой точки на кривой γ в силу системы (10), равна нулю, т.е.

$$\dot{g} = \nabla g \cdot \mathbf{X} = 0.$$

Дифференцирование $g(\mathbf{x})$ в силу (11) для любой точки на кривой γ с учетом последнего соотношения приводят к формуле

$$\dot{g}_{B\mathbf{X}} = B\nabla g \cdot \mathbf{X} = 0,$$

доказывающей инвариантность кривой γ по отношению к фазовому потоку (11), из чего следует, что γ — траектория (11).

Для доказательства теоремы вычислим поток векторного поля $B\mathbf{X}$ через кривую γ , выбрав положительное направление обхода контура против часовой стрелки. Поскольку векторное поле $B\mathbf{X}$ всюду касается кривой γ (см. рис. 15), данный поток равен

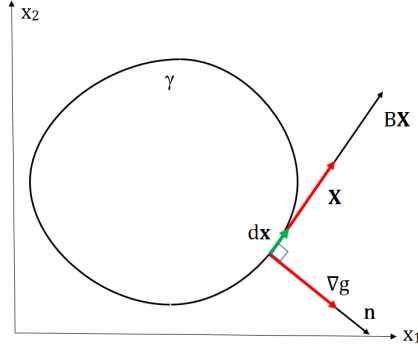


Рис. 15. Иллюстрация к доказательству критерия Дюлака

нулю и выражается по формуле

$$\Phi = \oint_{\gamma} B\mathbf{X} \cdot d\mathbf{n} = \oint_{\gamma} B\mathbf{X} \cdot \mathbf{n} dx = 0,$$

где $d\mathbf{n} = \mathbf{n} dx$, \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к кривой γ , $dx = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}$ — элемент дуги кривой γ . Глядя на рисунок 15, нетрудно понять, что если дифференциал радиус-вектора вдоль кривой γ имеет компоненты

$$d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix},$$

то вектор внешней нормали \mathbf{n} равен

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}} \begin{bmatrix} dx_2 \\ -dx_1 \end{bmatrix}.$$

Подставляя выражения для dx и \mathbf{n} в формулу для потока, получим

$$\Phi = \oint_{\gamma} -BX_2 dx_1 + BX_1 dx_2 = 0.$$

Последнее выражение допускает преобразование по формуле Грина:

$$\oint_{\gamma} Pdx + Qdy = \iint_{\Omega} (Q_x - P_y) dxdy,$$

где Ω — область, охватываемая контуром γ . Применяя формулу Грина к выражению для потока, получим

$$\Phi = \iint_{\Omega} ((BX_1)_{x_1} + (BX_2)_{x_2}) dxdx_2 = \iint_{\Omega} \nabla \cdot (B\mathbf{X}) dxdx_2,$$

но по условию теоремы $\nabla \cdot (B\mathbf{X})$ — знакопостоянна в области G , а значит, и в области $\Omega \subset G$, ограниченной кривой γ , что противоречит равенству нулю потока Φ и доказывает теорему.

Следствие. Полагая $B = 1$ получаем следующее утверждение.

Теорема 4. Критерий Бендиксона. *Если в связанной области (без "дырок") $G \subset \mathbb{R}^2$ фазового пространства системы (10) $\nabla \cdot \mathbf{X}$ знакопостоянна, то в области G не существует замкнутых траекторий системы (10).*

Для доказательства существования циклов можно пытаться локализовать цикл, строя некоторое кольцо, не содержащее положений равновесия системы (10)? в которое траектории системы входят как с внутренней, так и с наружной сторон, как это изображено на рис. 16. В этом случае в кольце будет находиться цикл, изображенный пунктиром. Чтобы показать, что тра-

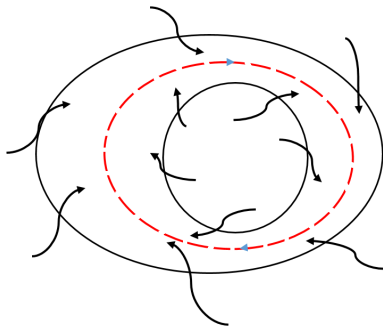


Рис. 16. Локализация цикла

ектории устроены именно так, можно использовать соображения, применяемые в прямом методе Ляпунова. Если $V(\mathbf{x}) = c$

– уравнение внутренней или внешней границы кольца, то при $\dot{V}_{\mathbf{X}} = \nabla V \cdot \mathbf{X} > 0$ траектории проходят изнутри кольца наружу, а при противоположном (строгом!) знаке неравенства – снаружи внутрь.

Точные условия существования цикла в кольце дает теорема Пуанкаре–Бендиксона [15], формулировка и доказательство которой, как и многие другие аспекты теории динамических систем, не вошедшие в пособие, оставляются заинтересованному читателю для самостоятельного освоения.

6. Заключение

Пособие посвящено основам теории бифуркаций положений равновесия в системах дифференциальных уравнений с одномерным или двумерным фазовым вектором. Для одномерной системы строится кривая равновесий и описываются типичные бифуркации – складка, смена устойчивости и вилка. Показано, что данные типы бифуркаций имеют достаточно универсальный характер. Иллюстрируется бифуркационный механизм возникновения гистерезиса. Приводятся некоторые методы исследования бифуркаций положений равновесия в механических системах с одной степенью свободы и способ нахождения точки бифуркации положения равновесия для динамической системы общего вида. Для систем дифференциальных уравнений с двумерным фазовым вектором, к которым, в частности, приводятся уравнения механических систем с одной степенью свободы, описана бифуркация рождения цикла и приведена теорема Пуанкаре–Андропова–Хопфа, дающая условия возникновения бифуркации этого типа. В заключительном разделе доказывается несколько теорем, позволяющих устанавливать наличие или отсутствие цикла в некоторой области фазового пространства системы.

Пособие снабжено достаточно подробным списком литературы и ссылками, по которым можно найти формулировки и доказательства теорем, не вошедших в пособие, и приступить к профессиональному изучению предмета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва-Ижевск: ИКИ, 2002. 561 с.
2. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. Москва: URSS, 2001. 320 с.
3. Арнольд В.И. Теория катастроф. Москва: URSS, 2016, 134 с.
4. Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильашенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций. Москва: ВИНТИ АН СССР. Т.5. "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления". 1985. 218 с.
5. Томпсон Дж.М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. Москва: Мир, 1985. 256 с.
6. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е. Лекции по нелинейной динамике. Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". 2011. 516 с.
7. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. Москва: Физматлит. 2008. 304 с.
8. Маркеев А.П. Теоретическая механика. Москва: ЧеРо. 1999. 572 с.
9. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 2. Москва: Дрофа, 2004, 720 с.
10. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления нелинейных уравнений. Москва: Наука. 1969. 529 с.
11. Йосс Ж. Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. Москва: Мир. 1983. 301 с.
12. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: Наука. 1974. 331 с.
13. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. Москва: Мир. 1980. 368 с.
14. Журавлев В.Ф. Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. Москва: Наука. 1988. 328 с.
15. Ф. Хартман. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: Мир, 1970.
16. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. Москва: URSS. 2003. 416 с.
17. Мандельброт Б.Б. Фракталы и хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса. Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". 2009. 392 с.

18. Мандельброт Б.Б. Фрактальная геометрия природы = The Fractal Geometry of Nature. — Москва: Институт компьютерных исследований, 2002. — 656 с.
19. Michael F. Barnsley, Hawley Rising. Fractals Everywhere. — Morgan Kaufmann, 1993-01-01. — 568 с. — ISBN 9780120790692
20. Ландау Л. Д. К проблеме турбулентности // Докл. АН СССР, 1944, Т. 44, № 8. С. 339–342.
21. Hopf E. A mathematical example displaying features of turbulence // Comm. Pure Appl. Math., 1948, vol. 1, 303–322.
22. Рюэль Д., Такенс Ф. О природе турбулентности. // Странные аттракторы: Сб. ст. / Я. Г. Синай, Л. П. Шильников. Москва: Мир, 1981. С. 117–151.
23. Мозер Ю. Динамические системы – прошлое и настоящее. Пленарная лекция на международном конгрессе математиков. Берлин. 1998 // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 1. С. 13–32.
24. Лоскутов А.Ю. Динамический хаос. Системы классической механики. // Успехи физических наук. 2007. № 177. С. 989–1015.

Учебно-методическое пособие

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ И
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
ЧАСТЬ I

Учебно-методическое пособие

по курсу *Аналитическая механика*

Составитель **Фомичев** Александр Владимирович

Редактор *Н.Е. Кобзева.*

Компьютерная верстка *Н.Е. Кобзева*

Подписано в печать ???.2019. Формат 60×84 $\frac{1}{16}$.

Усл. печ. л. 3,25. Уч.-изд.л. 3,0. Тираж 120 экз. Заказ № 17.

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Московский
физико-технический институт (национальный исследовательский
университет)»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: rio@mail.mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: polygraph@mipt.ru

Для заметок

Для заметок