МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Департамент математического и компьютерного моделирования

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №3
по дисциплине «Методы оптимизации»

Выполнил студент
гр. Б8119-02.03.01сцт
Деревягин А.А. ____________
(ФИО) *(подпись)*

«21» июня 2022 г.

г. Владивосток
2022

Содержание

Постановка задачи

С помощью симплекс-метода найти решения прямой и двойственной задач линейного программирования

$$\begin{cases} c^T x \to max \\ Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} b^T y \to min \\ A^T y \ge c \\ y \ge 0 \end{cases}.$$

Алгоритм решения

Прямая задача сводится к канонической:

$$\begin{cases} (c^T, \dots, 0)x \to max \\ (A\ I)x = b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Выполняются переобозначения:

$$\begin{cases} c^T x \to max \\ Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Строится симплекс-таблица:

<table>
<tr><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$1\ 2\ \dots\ n$</td></tr>
<tr><td>$-$</td><td>0</td><td>$-c^T$</td></tr>
<tr><td>$n-m$
$n-m+1$
$\dots$
n</td><td>b</td><td>A</td></tr>
</table>

После всех итераций оптимальное решение будет находиться в ячейке b, а в ячейке левее будут номера компонент вектора x. Значение функционала будет в ячейке 0. Решение двойственной задачи будет находиться во второй строке таблицы в ячейке $-c^T$, номера компонент вектора y от $n-m+1$ до n.

Итерация симплекс-метода

1. Выполняется проверка на оптимальность решения. Если в ячейке $-c^T$ нет отрицательных чисел, то метод завершён.

2. Выполняется поиск ведущего столбца. Это столбец, в котором находится минимальное отрицательное значение в ячейке $-c^T$.

3. Выполняется проверка существования решения. Если в ведущем столбце в ячейке A нет положительных элементов, то решения задачи нет, функционал неограничен.

4. Выполняется поиск ведущей строки. Это строка, в которой элемент ведущего столбца ячейки A положительный, и отношение к нему числа ячейки b минимальное. Сам элемент в ведущей строке и ведущем столбце называется ведущим.

5. Методом Гаусса ведущий элемент преобразовывается в 1, а числа над и под ним в 0. Затрагиваются только ячейки $0,\ -c^T,\ b,\ A$.

6. В нижней левой ячейке число в ведущей строке заменяется на число из правой верхней ячейке в ведущем столбце.

Тесты

$$\text{ЗЛП: }\begin{cases}\begin{pmatrix}7 & 3 & 10 & 3 & 4 & 6\end{pmatrix}\cdot x \to max\\ \begin{pmatrix}9 & 3 & 7 & 4 & 3 & 4\\ 5 & 10 & 4 & 10 & 4 & 2\\ 10 & 7 & 4 & 3 & 8 & 7\\ 8 & 5 & 5 & 5 & 7 & 6\\ 2 & 3 & 4 & 4 & 7 & 4\\ 8 & 5 & 7 & 4 & 6 & 9\\ 2 & 5 & 3 & 10 & 3 & 4\\ 7 & 5 & 8 & 3 & 3 & 9\end{pmatrix}\cdot x \leq \begin{pmatrix}10\\ 1\\ 7\\ 9\\ 3\\ 7\\ 7\\ 3\end{pmatrix}\\ x \geq 0\end{cases}\text{; Каноническая форма: }\begin{cases}\begin{pmatrix}7 & 3 & 10 & 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot x \to max\\ \begin{pmatrix}9 & 3 & 7 & 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 10 & 4 & 10 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 10 & 7 & 4 & 3 & 8 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 8 & 5 & 5 & 5 & 7 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 4 & 4 & 7 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 8 & 5 & 7 & 4 & 6 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 5 & 3 & 10 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 7 & 5 & 8 & 3 & 3 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot x = \begin{pmatrix}10\\ 1\\ 7\\ 9\\ 3\\ 7\\ 7\\ 3\end{pmatrix}\\ x \geq 0\end{cases}$$

$$\text{Решение: } c^T x^* = 2.7, \quad x^* = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0.15\\ 0\\ 0\\ 0.2\end{pmatrix}$$

$$\text{Двойственная задача: }\begin{cases}\begin{pmatrix}10 & 1 & 7 & 9 & 3 & 7 & 7 & 3\end{pmatrix}\cdot y \to min\\ \begin{pmatrix}9 & 5 & 10 & 8 & 2 & 8 & 2 & 7\\ 3 & 10 & 7 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5\\ 7 & 4 & 4 & 5 & 4 & 7 & 3 & 8\\ 4 & 10 & 3 & 5 & 4 & 4 & 10 & 3\\ 3 & 4 & 8 & 7 & 7 & 6 & 3 & 3\\ 4 & 2 & 7 & 6 & 4 & 9 & 4 & 9\end{pmatrix}\cdot y \geq \begin{pmatrix}7\\ 3\\ 10\\ 3\\ 4\\ 6\end{pmatrix}\\ y \geq 0\end{cases}$$

$$\text{Решение двойственной задачи: } b^T y^* = 2.7, \quad y^* = \begin{pmatrix}0\\ 2.1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0.2\end{pmatrix}$$

Проверка решения:

$c^T x^* = 2.7, \quad b^T y^* = 2.7$

Рис. 1: тест 1

ЗЛП: $\begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 6 & 10 \end{pmatrix} \cdot x \to max \\ \begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 & 8 & 8 & 9 \\ 3 & 10 & 5 & 8 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & 8 & 7 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 10 & 8 & 10 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 9 & 10 \\ 4 & 1 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 8 & 5 & 2 & 5 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 4 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot x \leq \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 5 \\ 10 \\ 8 \\ 10 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \end{cases}$; Каноническая форма: $\begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 6 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x \to max \\ \begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 & 8 & 8 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 5 & 8 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 8 & 7 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 10 & 8 & 10 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 9 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 7 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 2 & 5 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 4 & 4 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 5 \\ 10 \\ 8 \\ 10 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \end{cases}$

Решение: $c^T x^* = 3.6666666666666665, \quad x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0.167 \end{pmatrix}$

Двойственная задача: $\begin{cases} \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 & 10 & 8 & 10 & 2 & 10 \end{pmatrix} \cdot y \to min \\ \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 3 & 10 & 8 & 3 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ 9 & 5 & 8 & 10 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 8 & 8 & 7 & 8 & 6 & 7 & 5 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 10 & 9 & 9 & 5 & 6 \\ 9 & 4 & 6 & 3 & 10 & 1 & 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot y \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \\ y \geq 0 \end{cases}$

Решение двойственной задачи: $b^T y^* = 3.6666666666666665, \quad y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.111 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.556 \\ 0 \end{pmatrix}$

Проверка решения:

$c^T x^* = 3.6666666666666665, \quad b^T y^* = 3.6666666666666665$

Рис. 2: тест 2

ЗЛП: $\begin{cases} \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 & 8 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot x \to max \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 & 2 & 2 & 1 \\ 10 & 3 & 5 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 7 & 7 & 4 & 2 & 9 \\ 2 & 7 & 3 & 4 & 10 & 4 \\ 3 & 9 & 8 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 2 & 9 & 8 & 9 & 6 \\ 6 & 1 & 7 & 6 & 2 & 9 \\ 6 & 3 & 6 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot x \leq \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 2 \\ 6 \\ 6 \\ 7 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \end{cases}$; Каноническая форма: $\begin{cases} \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 & 8 & 6 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x \to max \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 3 & 5 & 3 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 7 & 4 & 2 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 4 & 10 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 8 & 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 9 & 8 & 9 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 7 & 6 & 2 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 6 & 8 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 2 \\ 6 \\ 6 \\ 7 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \end{cases}$

Решение: $c^T x^* = 6.601503759398496, \quad x^* = \begin{pmatrix} 0.391 \\ 0 \\ 0 \\ 0.188 \\ 0.263 \\ 0 \end{pmatrix}$

Двойственная задача: $\begin{cases} \begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 & 6 & 6 & 7 & 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot y \to min \\ \begin{pmatrix} 3 & 10 & 1 & 2 & 3 & 8 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 7 & 7 & 9 & 2 & 1 & 3 \\ 9 & 5 & 7 & 3 & 8 & 9 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 8 & 6 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 10 & 5 & 9 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 9 & 4 & 6 & 6 & 9 & 3 \end{pmatrix} \cdot y \geq \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 2 \\ 8 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \\ y \geq 0 \end{cases}$

Решение двойственной задачи: $b^T y^* = 6.601503759398496, \quad y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.143 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.504 \\ 0.59 \\ 0 \end{pmatrix}$

Проверка решения:

$c^T x^* = 6.601503759398497, \quad b^T y^* = 6.601503759398496$

Рис. 3: тест 3

Реализация

Реализация на языке JavaScript с использованием библиотеки MatrixJS для работы с матрицами.

Конструктор ЗЛП

```
constructor(A,b,c,canon,x='x') {
        this._A = A;
        this._b = b;
        this._c = c;
        this._x = x;
        var size = A.size;
        this._m = size.m;
        this._n = size.n;
        this._canon = canon;
    }
```

Преобразование к канонической форме

```
to_canon() {
        if(this._canon) {
            return this;
        }
        var new_c = new Matrix('0',this._m+this._n,1);
        for(var i = 1; i<=this._n; i++) {
            new_c.set(i,this._c.get(i));
        }
        var new_A = new Matrix('0',this._m,this._m+this._n);
        var I = new Matrix('1',this._m);
        for(var i = 1; i<=this._m; i++) {
            for(var j = 1; j<=this._n; j++) {
                new_A.set(i,j,this._A.get(i,j));
            }
        }
        for(var i = 1; i<=this._m; i++) {
            for(var j = 1; j<=this._m; j++) {
                new_A.set(i,j+this._n,I.get(i,j));
            }
```

```
        }
        return new TLP(new_A, this._b.copy(),new_c,true);
}
```

Отображение задачи

```
tex(digits = 3) {
        return `\\begin{cases}
                    `+this._c.T().tex(digits)+`
                    \\cdot `+this._x+` \\rightarrow max\\\\
                    `+this._A.tex(digits)+`
                    \\cdot `+this._x+(this._canon?` = `:`
                    \\leq `)+this._b.tex(digits)+`\\\\
                    `+this._x+` \\geq 0
                \\end{cases}`;
}
```

Проверки существования и оптимальности решения

```
_checkOpt(table) {
        for(var i = 3; i<=table.size.n; i++) {
            if(table.get(2,i)<0) {
                return false;
            }
        }
        return true;
}
_checkUnlim(table,row) {
        for(var i = 2; i<=table.size.m; i++) {
            if(table.get(i,row)>0) {
                return false;
            }
        }
```

```
        return true;
}
```

Построение симплекс-таблицы

```
simplex() {
        if(!this._canon) {
            return this.to_canon().simplex();
        }
        var table_width = this._n+2;
        var table_height = this._m+2;
        var table = new Matrix('0',table_height,table_width);
        for(var i = 3; i<=table_width; i++) {
            table.set(1,i,i-2);
        }
        for(var i = 3; i<=table_height; i++) {
            for(var j = 3; j<=table_width; j++) {
                table.set(i,j,this._A.get(i-2,j-2));
            }
        }
        for(var i = 3; i<=table_height; i++) {
            table.set(i,2,this._b.get(i-2));
        }
        table.set(2,2,0);
        for(var i = 3; i<=table_height; i++) {
            table.set(i,1,this._n-this._m+i-2);
        }
        for(var i = 3; i<=table_width; i++) {
            table.set(2,i,-this._c.get(i-2));
        }
        var solution = {
            direct: undefined,
            dual: undefined,
            f: Infinity
```

```
    };
```

Итерация симплекс-метода

```
while(!this._checkOpt(table)) {
    var leadRow;
    var minElem = 0;
    for(var i = 3; i<=table_width; i++) {
        if(table.get(2,i)<minElem) {
            minElem = table.get(2,i);
            leadRow = i;
        }
    }
    if(this._checkUnlim(table,leadRow)) {
        console.log('No solution');
        return solution;
    }
    var frac = Infinity;
    var leadStr;
    var leadElem;
    for(var i = 3; i<=table_height; i++) {
        var aij = table.get(i,leadRow);
        if((aij>0)&&(table.get(i,2)/aij<frac)) {
            frac = table.get(i,2)/aij;
            leadStr = i;
            leadElem = aij;
        }
    }
    for(var i = 2; i<=table_width; i++) {
        table.set(leadStr,i,table.get(leadStr,i)/leadElem);
    }
    for(var i = 2; i<=table_height; i++) {
        if(i==leadStr) continue;
        var koef = -table.get(i,leadRow);
```

```
        for(var j = 2; j<=table_width; j++) {
            table.set(i,j,table.get(i,j)+koef*table.
            get(leadStr,j));
        }
    }
    table.set(leadStr,1,table.get(1,leadRow));
}
```

Получение результатов

```
        solution.direct = new Matrix('0',this._n-this._m,1);
        solution.dual = new Matrix('0',this._m,1);
        solution.f = table.get(2,2);
        for(var i = 3; i<=table_height; i++) {
            if(table.get(i,1)<=solution.direct.size.m) {
                solution.direct.set(table.get(i,1),table.
                get(i,2));
            }
        }
        for(var i = 1; i<=this._m; i++) {
            solution.dual.set(i,table.
            get(2,i+this._n-this._m+2));
        }
        return solution;
}
```

Генерация данных, вывод результатов

```
var A = Matrix.random(8,6,1,10,0);
var b = Matrix.random(8,1,1,10,0);
var c = Matrix.random(6,1,1,10,0);
var not_canon = new TLP(A,b,c,false);
var canon = not_canon.to_canon();
```

```
var dual = new TLP(A.T(),c,b,false,'y');
var sol = canon.simplex();
var html = '<br><br>TLP:   '
+'\\('+not_canon.tex()+'\\);  '
+'Canon form: '
+'\\('+canon.tex()+'\\)<br><br>'
+'Solution: \\(c^Tx^* = '+sol.f+',~~~x^* =
'+sol.direct.tex()+'\\)<br><br>'
+'Dual task:   '
+'\\('+dual.tex().replace('\\leq','\\geq').
replace('max','min')+'\\)<br><br>'
+'Dual solution:   '
+'\\(b^Ty^* = '+sol.f+',~~~y^* = '+
sol.dual.tex()+'\\)<br><br>'
+'Check solution:<br><br>'
+'\\(c^Tx^* = '+c.mult(sol.direct)+',~~~b^Ty^* = '+b.
mult(sol.dual)+'\\)'
;
document.body.innerHTML = html;
```