



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ**

**Департамент математического и компьютерного
моделирования**

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №4
по дисциплине «Методы оптимизации»

Выполнил студент
гр. Б8119-02.03.01сст
Деревягин А.А. _____
(ФИО) (подпись)

«21» июня 2022 г.

г. Владивосток
2022

Содержание

Постановка задачи	3
Алгоритм решения	3
Тесты	4
Реализация	6
Поиск максимина	6
Поиск минимакса	7
Преобразование матрицы к неотрицательной	7
Генерация исходных данных	8
Вычисление цен игры	8
Решение задач линейного программирования	8
Нормировка решений	9
Визуализация результатов	9

Постановка задачи

Дана игра 6×8 . Требуется найти нижнюю и верхнюю цену игры, а также равновесное решение в смешанных стратегиях.

Алгоритм решения

A – платёжная матрица.

Нижняя цена игры будет найдена как максимум из минимума по строкам.

Верхняя цена игры будет найдена как минимум из максимума по столбцам.

Для поиска равновесного решения решим прямую и двойственную задачи линейного программирования.

$$\begin{cases} c^T q \rightarrow \max \\ Aq \leq b \\ q \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} b^T p \rightarrow \min \\ Ap \geq c \\ p \geq 0 \end{cases}$$

Решение будет производиться симплекс-методом. Для этого нужно каждый элемент матрицы A увеличить на одно и то же значение так, чтобы все элементы матрицы были неотрицательны.

Полученные решения задач будут нормированы первой нормой для того, чтобы сумма компонент векторов была равна 1. Это и будет решение в смешанных стратегиях.

Тесты

Платёжная матрица: $A = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 0 & 10 & -9 & 9 & 7 & -7 \\ -2 & 6 & 6 & -4 & 7 & 4 & 0 & 5 \\ 10 & -2 & -10 & -1 & -4 & 2 & 5 & 2 \\ -5 & -9 & 3 & -5 & -1 & 3 & -9 & 8 \\ -3 & -5 & 7 & 10 & -2 & -5 & 8 & -1 \\ 2 & 5 & -8 & 2 & -7 & 8 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Нижняя цена игры: -4, верхняя цена игры: 6

Прямая задача: $\left\{ \begin{array}{l} (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) \cdot q \rightarrow \max \\ \begin{pmatrix} 9 & 2 & 10 & 20 & 1 & 19 & 17 & 3 \\ 8 & 16 & 16 & 6 & 17 & 14 & 10 & 15 \\ 20 & 8 & 0 & 9 & 6 & 12 & 15 & 12 \\ 5 & 1 & 13 & 5 & 9 & 13 & 1 & 18 \\ 7 & 5 & 17 & 20 & 8 & 5 & 18 & 9 \\ 12 & 15 & 2 & 12 & 3 & 18 & 10 & 15 \end{pmatrix} \cdot q \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q^* = \begin{pmatrix} 0.251 \\ 0.231 \\ 0 \\ 0.324 \\ 0.194 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ q \geq 0 \end{array} \right.$

Двойственная задача: $\left\{ \begin{array}{l} (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) \cdot p \rightarrow \min \\ \begin{pmatrix} 9 & 8 & 20 & 5 & 7 & 12 \\ 2 & 16 & 8 & 1 & 5 & 15 \\ 10 & 16 & 0 & 13 & 17 & 2 \\ 20 & 6 & 9 & 5 & 20 & 12 \\ 1 & 17 & 6 & 9 & 8 & 3 \\ 19 & 14 & 12 & 13 & 5 & 18 \\ 17 & 10 & 15 & 1 & 18 & 10 \\ 3 & 15 & 12 & 18 & 9 & 15 \end{pmatrix} \cdot p \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.41675 \\ 0.24768 \\ 0 \\ 0.27369 \\ 0.06187 \end{pmatrix} \\ p \geq 0 \end{array} \right.$

Рис. 1: тест 1

Платёжная матрица: $A = \begin{pmatrix} -7 & -6 & -6 & 10 & 5 & 6 & 6 & -10 \\ -2 & 7 & 5 & -1 & 1 & 9 & 8 & 7 \\ -8 & -6 & 1 & -6 & -3 & -9 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & -6 & -1 & -7 & -5 & -1 & 3 \\ 10 & 5 & 0 & -2 & -6 & 3 & -7 & 7 \\ -6 & 8 & -7 & -9 & 6 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$

Нижняя цена игры: -2, верхняя цена игры: 5

Прямая задача: $\begin{cases} (1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1) \cdot q \rightarrow \max \\ \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 20 & 15 & 16 & 16 & 0 \\ 8 & 17 & 15 & 9 & 11 & 19 & 18 & 17 \\ 2 & 4 & 11 & 4 & 7 & 1 & 17 & 5 \\ 17 & 5 & 4 & 9 & 3 & 5 & 9 & 13 \\ 20 & 15 & 10 & 8 & 4 & 13 & 3 & 17 \\ 4 & 18 & 3 & 1 & 16 & 13 & 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot q \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & q^* = \begin{pmatrix} 0.347 \\ 0 \\ 0.078 \\ 0.042 \\ 0.533 \\ 0 \end{pmatrix} \\ q \geq 0 \end{cases}$

Двойственная задача: $\begin{cases} (1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1) \cdot p \rightarrow \min \\ \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 & 17 & 20 & 4 \\ 4 & 17 & 4 & 5 & 15 & 18 \\ 4 & 15 & 11 & 4 & 10 & 3 \\ 20 & 9 & 4 & 9 & 8 & 1 \\ 15 & 11 & 7 & 3 & 4 & 16 \\ 16 & 19 & 1 & 5 & 13 & 13 \\ 16 & 18 & 17 & 9 & 3 & 7 \\ 0 & 17 & 5 & 13 & 17 & 4 \end{pmatrix} \cdot p \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & p^* = \begin{pmatrix} 0.20196 \\ 0.40882 \\ 0 \\ 0 \\ 0.29716 \\ 0.09205 \end{pmatrix} \\ p \geq 0 \end{cases}$

Рис. 2: тест 2

$$\text{Платёжная матрица: } A = \begin{pmatrix} -5 & -10 & 8 & 7 & 2 & -3 & 8 & -7 \\ -8 & 2 & 9 & 8 & 7 & 8 & 2 & -9 \\ -9 & -8 & -4 & 6 & 4 & 8 & 4 & -7 \\ 0 & -1 & -7 & 1 & 3 & -9 & 7 & 7 \\ 4 & -8 & 5 & 0 & 9 & -6 & -6 & 4 \\ -5 & -4 & -7 & 6 & -2 & -3 & 9 & -8 \end{pmatrix}$$

Нижняя цена игры: -8, верхняя цена игры: 2

$$\text{Прямая задача: } \begin{cases} (1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1) \cdot q \rightarrow \max \\ \begin{pmatrix} 5 & 0 & 18 & 17 & 12 & 7 & 18 & 3 \\ 2 & 12 & 19 & 18 & 17 & 18 & 12 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 16 & 14 & 18 & 14 & 3 \\ 10 & 9 & 3 & 11 & 13 & 1 & 17 & 17 \\ 14 & 2 & 15 & 10 & 19 & 4 & 4 & 14 \\ 5 & 6 & 3 & 16 & 8 & 7 & 19 & 2 \end{pmatrix} \cdot q \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & q^* = \begin{pmatrix} 0.485 \\ 0.348 \\ 0 \\ 0 \\ 0.167 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ q \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Двойственная задача: } \begin{cases} (1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1) \cdot p \rightarrow \min \\ \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 10 & 14 & 5 \\ 0 & 12 & 2 & 9 & 2 & 6 \\ 18 & 19 & 6 & 3 & 15 & 3 \\ 17 & 18 & 16 & 11 & 10 & 16 \\ 12 & 17 & 14 & 13 & 19 & 8 \\ 7 & 18 & 18 & 1 & 4 & 7 \\ 18 & 12 & 14 & 17 & 4 & 19 \\ 3 & 1 & 3 & 17 & 14 & 2 \end{pmatrix} \cdot p \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & p^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.37121 \\ 0 \\ 0.34848 \\ 0.2803 \\ 0 \end{pmatrix} \\ p \geq 0 \end{cases}$$

Рис. 3: тест 3

Реализация

Реализация на языке JavaScript с использованием библиотеки MatrixJS для работы с матрицами.

Поиск максимина

```

function max_min(A) {
    var max = -Infinity;
    for (var i = 1; i <= A.size.m; i++) {
        var min = Infinity;
        for (var j = 1; j <= A.size.n; j++) {
            min = Math.min(min, A.get(i, j));
        }
        max = Math.max(max, min);
    }
    return max;
}

```

Поиск минимакса

```

function min_max(A) {
    var min = Infinity;
    for (var i = 1; i <= A.size.n; i++) {
        var max = -Infinity;
        for (var j = 1; j <= A.size.m; j++) {
            max = Math.max(max, A.get(j, i));
        }
        min = Math.min(min, max);
    }
    return min;
}

```

Преобразование матрицы к неотрицательной

```

function make_positive(A) {
    var m = 0;
    var new_A = A.copy();
    for (var i = 1; i <= A.size.m; i++) {
        for (var j = 1; j <= A.size.n; j++) {

```

```

        m = Math.min(m,A.get(i,j));
    }
}
for(var i = 1; i<=A.size.m; i++) {
    for(var j = 1; j<=A.size.n; j++) {
        new_A.set(i,j,A.get(i,j)-m);
    }
}
return new_A;
}

```

Генерация исходных данных

```

var A = Matrix.random(6,8,-10,10,0);

var c = new Matrix('0',A.size.n,1);
var b = new Matrix('0',A.size.m,1);
for(var i=1; i<=Math.max(c.size.m,b.size.m); i++) {
    if(i<=c.size.m) c.set(i,1);
    if(i<=b.size.m) b.set(i,1);
}

```

Вычисление цен игры

```

var bottom_praise = max_min(A);
var upper_praise = min_max(A);

```

Решение задач линейного программирования

```

A = make_positive(A);

var tlp = new TLP(A,b,c,false,'q');

```



```

var dual = new TLP(A.T(), c, b, false, 'p');

var sol = tlp.simplex();
var q = sol.direct;
var p = sol.dual;

```

Нормировка решений

```

q = q.mult(1/q.vector_norm(1));
p = p.mult(1/p.vector_norm(1));

```

Визуализация результатов

```

var html = '<br><br>'
+'Prise_matrix: \\\(A_=' + original_A.tex() + '\\) <br><br>'
+'Bottom_game_prise: \'' + bottom_prise + ',
upper_game_prise: \'' + upper_prise + ' <br><br>'
+'Direct_task: \\\( \'' + tlp.tex()
+', ~~~q^*_=' + q.tex() + '\\) <br><br>'
+'Dual_task: \\\( \'' + dual.tex()
.replace('max', 'min')
.replace('\\\\leq', '\\\\geq') + ', ~~~',
+'p^*_=' + p.tex(5) + '\\) '
;
document.body.innerHTML = html;

```