№ 1: Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет ровно 2 корня?

$$\frac{(x^2-a^2)*\sqrt{2a-x-1}}{3x+a-3}=0 \quad (*)$$

$$\begin{cases}(x^2-a^2)\cdot\sqrt{2a-x-1}=0\\ 3x+a-3\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-a^2=0\\ \sqrt{2a-x-1}=0\end{array}\right.\\ 2a-x-1\geq 0\\ 3x+a-3\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=a\\ x=-a\\ 2a-x-1=0\end{array}\right.\\ 2a-x-1\geq 0\\ 3x+a-3\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=a\\ 2a-x-1\geq 0\\ 3x+a-3\neq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x=-a\\ 2a-x-1\geq 0\\ 3x+a-3\neq 0\end{cases}\\ \begin{cases}2a-x-1=0\\ 2a-x-1\geq 0\\ 3x+a-3\neq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=a\\ 2a-a-1\geq 0\\ 3a+a-3\neq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x=-a\\ 2a+a-1\geq 0\\ -3a+a-3\neq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x=2a-1\\ 3(2a-1)+a-3\neq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x=a\\ a\in[1;+\infty)\end{cases} & (1)\\ \begin{cases}x=-a\\ a\in[\frac{1}{3};+\infty)\end{cases} & (2)\\ \begin{cases}x=2a-1\\ a\in(-\infty;\frac{6}{7})\cup(\frac{6}{7};+\infty)\end{cases} & (3)\end{array}\right.$$

(1): 1 решение при $a\in[1;+\infty)$

0 решений при $a\notin[1;+\infty)$

(2): 1 решение при $a\in[\frac{1}{3};+\infty)$

0 решений при $a\notin[\frac{1}{3};+\infty)$

(3): 1 решение при $a\in(-\infty;\frac{6}{7})\cup(\frac{6}{7};+\infty)$

0 решений при $a \notin [\frac{1}{3}; +\infty)$

(3): 1 решение при $a \in (-\infty; \frac{6}{7}) \cup (\frac{6}{7}; +\infty)$

0 решений при $a \notin (-\infty; \frac{6}{7}) \cup (\frac{6}{7}; +\infty)$

Общие решения (1) и (2):

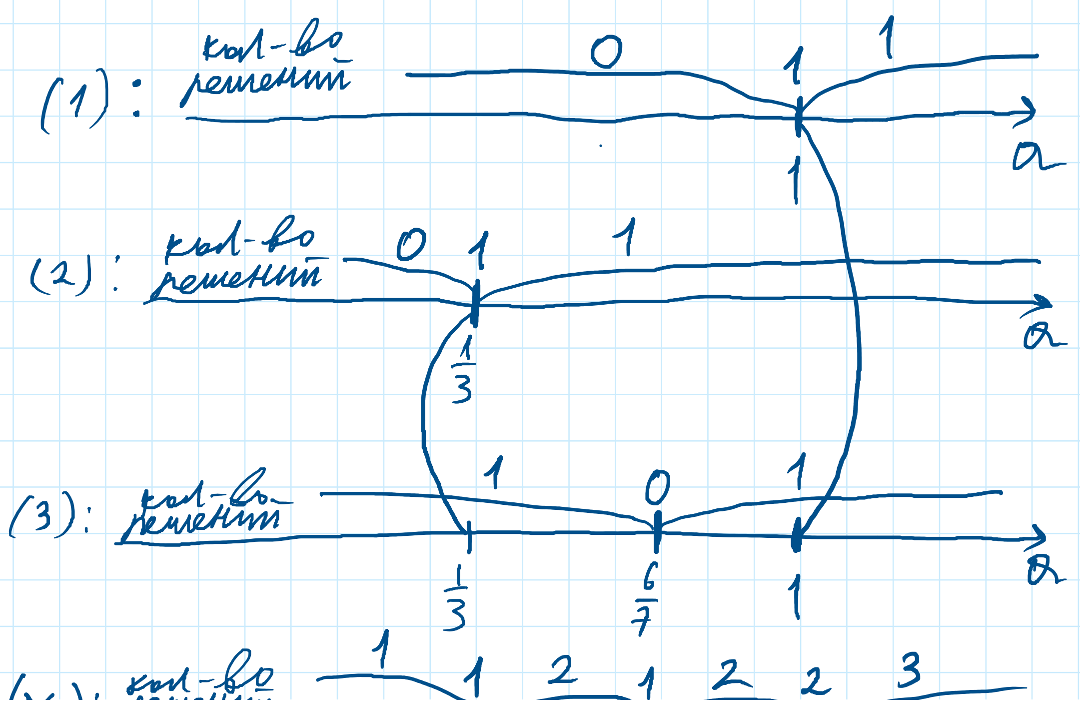
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = a \\ a \in [1; +\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} x = -a \\ a \in [\frac{1}{3}; +\infty) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ a \in [1; +\infty) \\ a = -a \\ a \in [\frac{1}{3}; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ a \in [1; +\infty) \\ a = 0 \\ a \in [\frac{1}{3}; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow (x, a) \in \varnothing$$

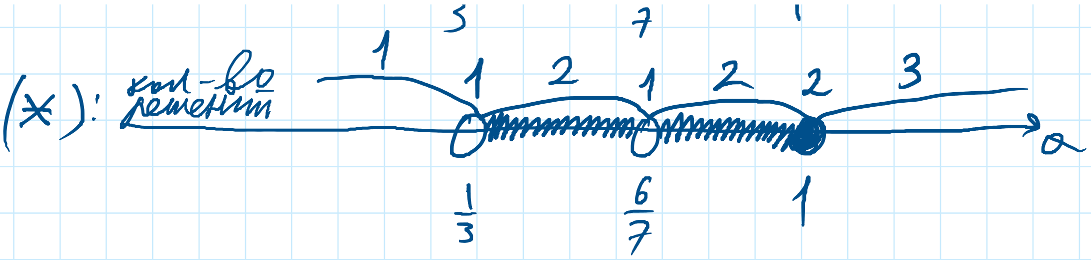
Общие решения (1) и (3):

$$\begin{cases} x = a \\ a \in [1; +\infty) \\ x = 2a - 1 \\ a \in (-\infty; \frac{6}{7}) \cup (\frac{6}{7}; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ a \geq 1 \\ a = 2a - 1 \\ a \neq \frac{6}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x, a) = (1, 1)$$

Общие решения (2) и (3):

$$\begin{cases} x = -a \\ a \geq \frac{1}{3} \\ x = 2a - 1 \\ a \neq \frac{6}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \\ a \geq \frac{1}{3} \\ -a = 2a - 1 \\ a \neq \frac{6}{7} \end{cases} \Leftrightarrow (x, a) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$





2 решения при: $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{3} < a < \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} < a \le 1 \end{array}\right.$

№ 5: Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет ровно три различных решения?

$$\sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = x^2 + x - a \quad (*)$$

$\Leftarrow\!\!\!\Rightarrow$

$$\begin{cases} x^4 - x^2 + a^2 = (x^2 + x - a)^2 \\ x^2 + x - a \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - x^2 + a^2 = x^4 + x^2 + a^2 + 2x^3 - 2ax^2 - 2ax \\ x^2 + x - a \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2x^3 - 2ax^2 - 2ax = 0 \\ x^2 + x - a \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2(1+x) - 2ax(1+x) = 0 \\ x^2 + x - a \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1+x)(x-a) = 0 \\ x^2 + x - a \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = a \end{array}\right. \\ x^2 + x - a \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + x - a \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + x - a \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = a \\ x^2 + x - a \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ a \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ a \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = a \\ a^2 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ a \in (-\infty; 0] \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x = -1 \\ a \in (-\infty; 0] \end{cases} \quad (2) \\ \begin{cases} x = a \\ a \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3) \end{array}\right.$$

(1): 1 решение при $a \in (-\infty; 0]$

(1): 1 решение при $a \in (-\infty; 0]$

(2) 0 решений при $a \notin (-\infty; 0]$

(3): 1 решение при $a \in \mathbb{R}$

Общие решения (1) и (2):

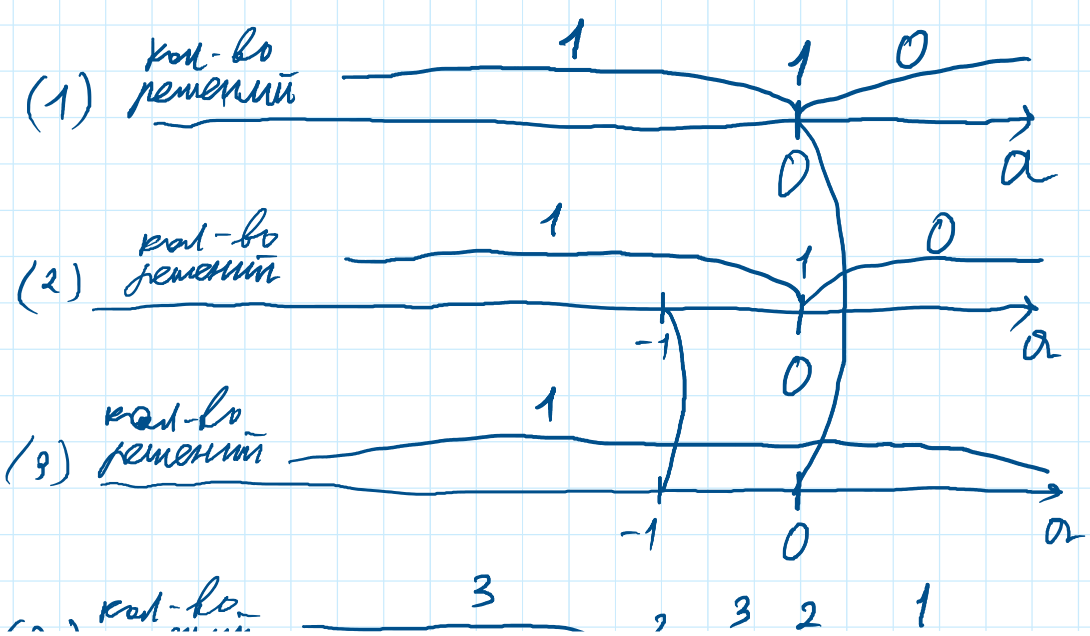
$$\begin{cases} x = 0 \\ a \in (-\infty; 0] \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow (x, a) \in \varnothing$$

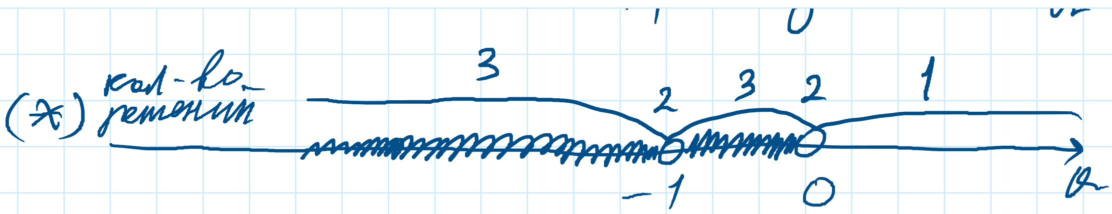
Общие решения (1) и (3):

$$\begin{cases} x = 0 \\ a \in (-\infty; 0] \\ x = a \\ a \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow (x, a) = (0, 0)$$

Общие решения (2) и (3):

$$\begin{cases} x = -1 \\ a \in (-\infty; 0] \\ x = a \\ a \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow (x, a) = (-1, -1)$$





3 решения при: $\left[\begin{array}{l} a<-1 \\ -1<a<0 \end{array}\right.$.

№ 3: Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет ровно три различных решения?

$$|x^2-a^2|+8=|x+a|+8|x-a| \quad (*)$$

$\Leftrightarrow$

$$|(x-a)(x+a)|+8=|x+a|+8|x-a| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x-a|\cdot|x+a|+8-|x+a|-8|x-a|=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x-a|\cdot\left(|x+a|-8\right)-\left(|x+a|-8\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(|x+a|-8\right)\left(|x-a|-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x+a|-8=0 \\ |x-a|-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{(x+a)^2}=8 \\ \sqrt{(x-a)^2}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+a)^2=8^2 \\ (x-a)^2=1^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+a=8 \\ x+a=-8 \\ x-a=1 \\ x-a=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8-a \\ x=-8-a \\ x=a+1 \\ x=a-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x=8-a \\ a\in\mathbb{R} \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x=-8-a \\ a\in\mathbb{R} \end{cases} & (2) \\ \begin{cases} x=a+1 \\ a\in\mathbb{R} \end{cases} & (3) \\ \begin{cases} x=a-1 \\ a\in\mathbb{R} \end{cases} & (4) \end{array}\right.$$

(1), (2), (3), (4): 1 решение при $a\in\mathbb{R}$

Общие решения (1) и (2):

$$\begin{cases} x=8-a \\ x=-8-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8-a \\ 8-a=-8-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8-a \\ a\in\varnothing \end{cases} \Leftrightarrow (x,a)\in\varnothing$$

Общие решения (1) и (3):

$$\begin{cases} x=8-a \\ x=a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8-a \\ 8-a=a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8-a \\ 7=2a \end{cases} \Leftrightarrow (x,a)=\left(\frac{9}{2},\frac{7}{2}\right)$$

Общие решения (1) и (4):

$$\begin{cases} x=8-a \\ x=a-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8-a \\ 8-a=a-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8-a \\ a=\frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (x,a)=\left(\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right)$$

Общие решения (2) и (3):

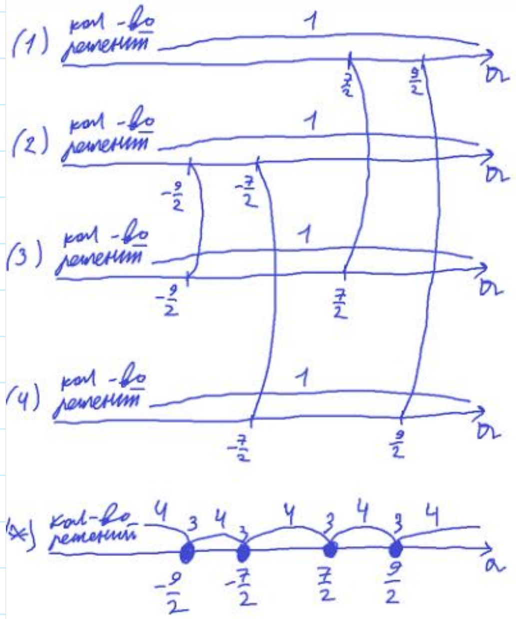
$$\begin{cases} x=-8-a \\ x=a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8-a \\ a+1=-8-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8-a \\ a=-\frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (x,a)=\left(-8-a,-\frac{9}{2}\right)$$

Общие решения (2) и (4):

$$\begin{cases} x=-8-a \\ x=a-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8-a \\ -8-a=a-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8-a \\ a=-\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (x,a)=\left(-8-a,-\frac{7}{2}\right)$$

Общие решения (3) и (4):

$$\begin{cases} x=a+1 \\ x=a-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a+1 \\ a+1=a-1 \end{cases} \Leftrightarrow (x,a)\in\varnothing$$



3 решения при:

$$\left[\begin{array}{l} a=-\frac{9}{2} \\ a=-\frac{7}{2} \\ a=\frac{7}{2} \\ a=\frac{9}{2} \end{array}\right.$$

№ 2: Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет единственный корень ?

$$\begin{cases} (2x+\ln(x+2a))^2=(2x-\ln(x+2a))^2 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x+\ln(x+2a)=2x-\ln(x+2a) \\ 2x+\ln(x+2a)=\ln(x+2a)-2x \end{array}\right. \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2\ln(x+2a)=0 \\ \begin{cases} 2x=-2x \\ x+2a>0 \end{cases} \end{array}\right. \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \ln(x+2a)=\ln 1 \\ \begin{cases} x=0 \\ x+2a>0 \end{cases} \end{array}\right. \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+2a=1 \\ \begin{cases} x=0 \\ a>0 \end{cases} \end{array}\right. \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2a=1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ a>0 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1-2a \\ 0 \le 1-2a \le 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ a>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x=1-2a \\ a\in[0;\frac{1}{2}] \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x=0 \\ a\in(0;+\infty) \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

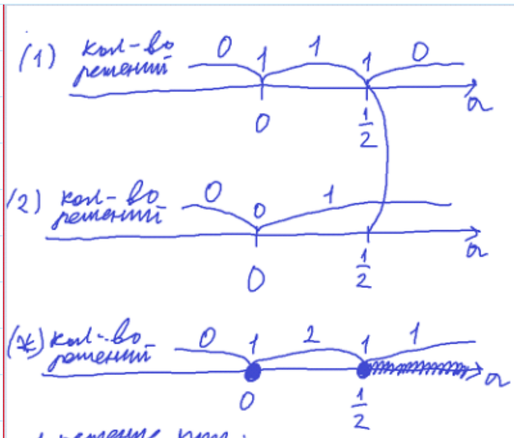
$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x=1-2a \\ a\in[0;\frac{1}{2}] \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x=0 \\ a\in(0;+\infty) \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

(1): 1 решение при $a\in[0;\frac{1}{2}]$
0 решений при $a\notin[0;\frac{1}{2}]$

(2): 1 решение при $a\in(0;+\infty)$
0 решений при $a\notin(0;+\infty)$

Общие решения (1) и (2):

$$\begin{cases} x=1-2a \\ a\in[0;\frac{1}{2}] \\ x=0 \\ a\in(0;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow (x,a)=(0,\frac{1}{2})$$



1 решение при:

$$\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a \geqslant \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

№ 8: Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет ровно два различных корня

$$a^2 - 9x^2 + 18|x| - 9 = 0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ a^2 - 9x^2 + 18x - 9 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 0 \\ a^2 - 9x^2 - 18x - 9 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ 9x^2 - 18x + (9 - a^2) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ 9x^2 + 18x + 9 - a^2 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{3+a}{3} \\ x = \frac{3-a}{3} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{-3+a}{3} \\ x = \frac{-3-a}{3} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{3+a}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{3-a}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ x = \frac{-3+a}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ x = \frac{-3-a}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{3+a}{3} \\ \frac{3+a}{3} \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{1}{3}(3-a) \\ \frac{1}{3}(3-a) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{1}{3}(-3+a) \\ \frac{1}{3}(-3+a) \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{1}{3}(-3-a) \\ \frac{1}{3}(-3-a) \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{3+a}{3} \\ \frac{3+a}{3} \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{1}{3}(3-a) \\ \frac{1}{3}(3-a) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{1}{3}(-3+a) \\ \frac{1}{3}(-3+a) \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{1}{3}(-3-a) \\ \frac{1}{3}(-3-a) \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x = \frac{1}{3}(3+a) \\ a \in [-3; +\infty) \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x = \frac{1}{3}(3-a) \\ a \in (-\infty; 3] \end{cases} & (2) \\ \begin{cases} x = \frac{1}{3}(-3+a) \\ a \in (-\infty; 3] \end{cases} & (3) \\ \begin{cases} x = \frac{1}{3}(-3-a) \\ a \in [-3; +\infty) \end{cases} & (4) \end{array}\right.$$

(1), (4): 1 решение при $a \in [-3; +\infty)$, 0 решений при $a \notin [-3; +\infty)$

(2), (3): 1 решение при $a \in (-\infty; 3]$, 0 реш. при $a \notin (-\infty; 3]$.

Общие решения (1) и (2):

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(3+a) \\ a \in [-3; +\infty) \\ x = \frac{1}{3}(3-a) \\ a \in (-\infty; 3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(3+a) \\ a \in [-3; +\infty) \\ \frac{1}{3}(3+a) = \frac{1}{3}(3-a) \\ a \in (-\infty; 3] \end{cases} \Leftrightarrow (x, a) = (1, 0)$$

Общие решения (1) и (3):

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(3+a) \\ a \in [-3; +\infty) \\ x = \frac{1}{3}(-3+a) \\ a \in (-\infty; 3] \end{cases} \Leftrightarrow (x, a) \in \varnothing$$

Общие реш. (1) и (4):

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(3+a) \\ a \in [-3; +\infty) \\ x = \frac{1}{3}(-3-a) \end{cases} \Leftrightarrow (x, a) = (0, -3)$$

Общие реш. (2) и (3):

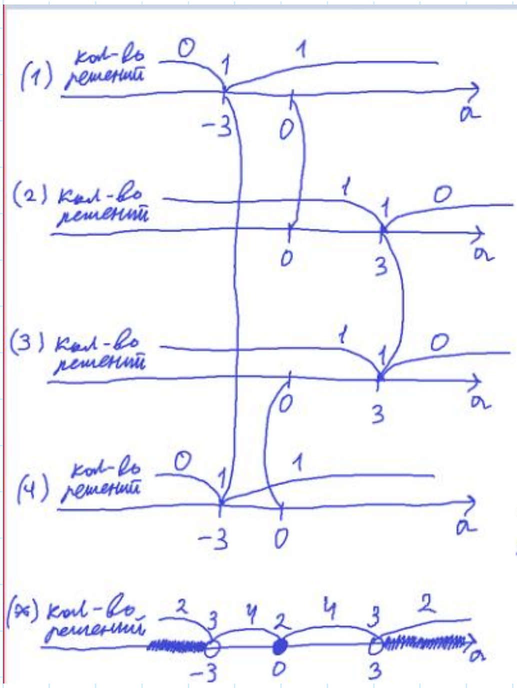
$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(3-a) \\ a \in (-\infty; 3] \\ x = \frac{1}{3}(-3+a) \end{cases} \Leftrightarrow (x, a) = (0, 3)$$

Общие реш. (2) и (4):

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(3-a) \\ a \in (-\infty; 3] \\ x = \frac{1}{3}(-3-a) \\ a \in [-3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow (x, a) \in \varnothing$$

Общие решения (3) и (4):

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(-3+a) \\ a \in (-\infty; 3] \\ x = \frac{1}{3}(-3-a) \\ a \in [-3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow (x, a) = (-1, 0)$$



2 решения при:

$$\left[\begin{array}{l} a < -3 \\ a = 0 \\ a > 3. \end{array}\right.$$