2 Точки

- Общие точки объектов $F(x, y, z)$ и $G(x, y, z)$:
$$\begin{cases} F(x, y, z) \\ G(x, y, z) \end{cases}$$

- Если точка $C \in AB$, то $\frac{AC}{BC} = \frac{|AC_i|}{|BC_i|}$.

Задача 1

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна $2\sqrt{3}$, а высота SH пирамиды равна 3. Точки M и N – середины рёбер CD и AB, соответственно, а NT – высота пирамиды $NSCD$ с вершиной N и основанием SCD.

Докажите, что точка T является серединой SM.

Задача 1

Решение:

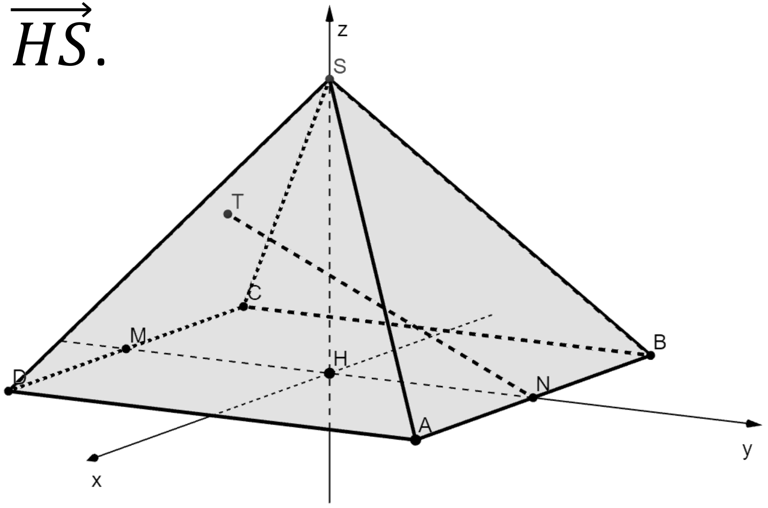
Система координат и координаты необходимых точек:

$O = H;\ Ox \uparrow\uparrow \overrightarrow{BA};\ Oy \uparrow\uparrow \overrightarrow{DA};\ \ Oz \uparrow\uparrow \overrightarrow{HS}.$

$D\left(\sqrt{3}; -\sqrt{3}; 0\right), C\left(-\sqrt{3}; -\sqrt{3}; 0\right);$

$A\left(\sqrt{3}; \sqrt{3}; 0\right), B\left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}; 0\right);$

$S(0; 0; 3), M\left(0; -\sqrt{3}; 0\right), N\left(0; \sqrt{3}; 0\right).$

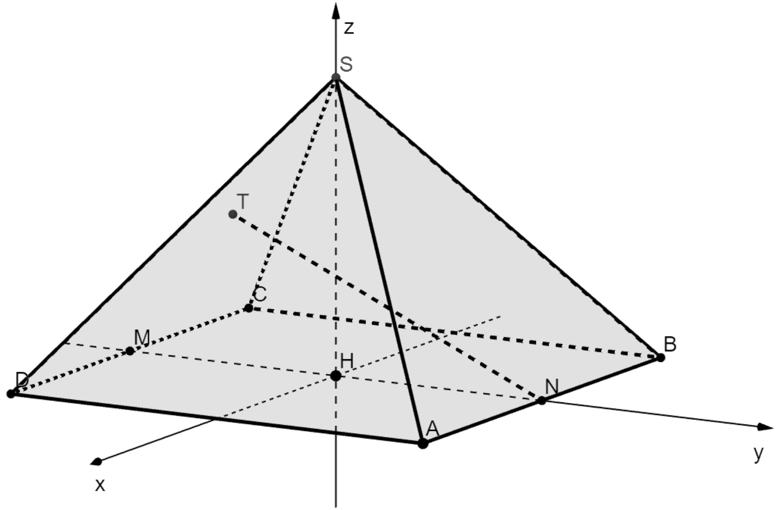


Задача 1

Решение:

2 способа:

1. Отметим T_1 – середина SM. И покажем, что $\overrightarrow{NT_1} = \vec{n}_{(SCD)}$.
2. Найдём $T = NT \cap SM$.



Задача 1

Решение (способ 1):

Отметим T_1 – сер. SM; $T_1\left(0; -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

$\frac{2}{3}\overrightarrow{NT_1}\{0; \sqrt{3}; -1\}$; $\frac{1}{2\sqrt{3}}\overrightarrow{CD}\{1; 0; 0\}$; $\overrightarrow{CS}\{\sqrt{3}; \sqrt{3}; 3\}$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{NT_1} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \\ \overrightarrow{NT_1} \cdot \overrightarrow{CS} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{NT_1} \perp \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{NT_1} \perp \overrightarrow{CS} \end{cases} \Rightarrow NT_1 \perp (SCD) \Rightarrow T_1 = T.$$

Задача 1

Решение (способ 2):

Найдём $\vec{n}_{(SCD)}$.

$$\overrightarrow{CS}\{\sqrt{3}; \sqrt{3}; 3\}; \ \frac{1}{2\sqrt{3}}\overrightarrow{CD}\{1; 0; 0\}; \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\vec{n}_{(SCD)}\{0; -3; \sqrt{3}\}$.

Задача 1

Решение (способ 2):

Уравнения прямой NT по направляющему вектору $\vec{n}_{(SCD)}\{0; -3; \sqrt{3}\}$ и точке $N(0; \sqrt{3}; 0)$: $\begin{cases} x = 0 \\ \frac{y-\sqrt{3}}{-3} = \frac{z}{\sqrt{3}} \end{cases}$.

Уравнения SM по направляющему вектору $\overrightarrow{MS}\{0; \sqrt{3}; 3\}$ и точке $S(0; 0; 3)$: $\begin{cases} x = 0 \\ \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{z-3}{3} \end{cases}$.

Задача 1

Решение (способ 2):

Поиск $T = NT \cap SM$.

$$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{y-\sqrt{3}}{-3} = \frac{z}{\sqrt{3}} \\ \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{z-3}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{3}y - 3 = -3z \\ \sqrt{3}y = z - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3 = 4z - 3 \\ \sqrt{3}y = z - 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ (x; y; z) = \left(0; -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Задача 1

Решение (способ 2):

$$T\left(0; -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right);\ \overrightarrow{TM}\left\{0; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{3}{2}\right\};\ \overrightarrow{TS}\left\{0; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right\}.$$

$$\frac{TM}{TS} = \frac{|TM_z|}{|TS_z|} = 1 \Rightarrow\ TM = TS.$$

Задача 2

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой сторона основания $AB = 8$, боковое ребро $AA_1 = 2\sqrt{2}$. Точка Q – точка пересечения диагоналей грани ABB_1A_1, точки M, N и K – середины BC, CC_1 и A_1C_1 соответственно.

Докажите, что точки Q, M, N и K лежат в одной плоскости.

Задача 2

Решение:

Система координат и координаты необходимых точек:

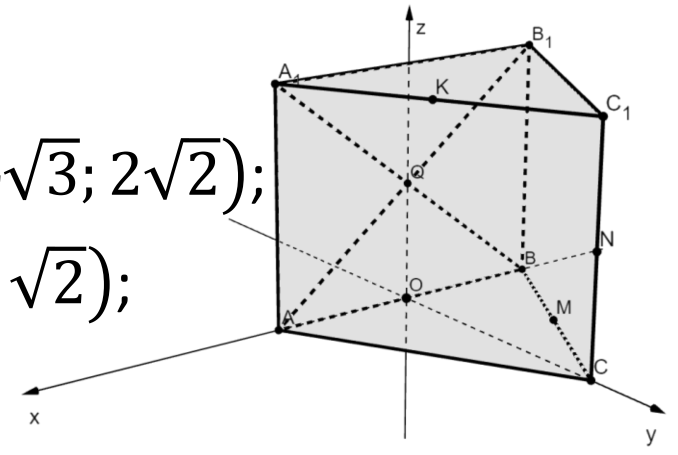
$O -$ сер. AB; $Ox \uparrow\uparrow \overrightarrow{BA}$; $Oy \uparrow\uparrow \overrightarrow{OC}$; $Oz \uparrow\uparrow \overrightarrow{AA_1}$.

$A(4; 0; 0)$; $B(-4; 0; 0)$; $C\left(0; 4\sqrt{3}; 0\right)$;

$A_1\left(4; 0; 2\sqrt{2}\right)$; $B_1\left(-4; 0; 2\sqrt{2}\right)$; $C_1\left(0; 4\sqrt{3}; 2\sqrt{2}\right)$;

$Q\left(0; 0; \sqrt{2}\right)$; $M\left(-2; 2\sqrt{3}; 0\right)$; $N\left(0; 4\sqrt{3}; \sqrt{2}\right)$;

$K\left(2; 2\sqrt{3}; 2\sqrt{2}\right)$.



Задача 2

Решение:

Найдём $\rho\big(Q,(MNK)\big)$. $Q\big(0;0;\sqrt{2}\big)$; $M\big(-2;2\sqrt{3};0\big)$;

$N\big(0;4\sqrt{3};\sqrt{2}\big)$; $K\big(2;2\sqrt{3};2\sqrt{2}\big)$.

$\vec{n}_{(MNK)}$: $\overrightarrow{NK}\{2;-2\sqrt{3};\sqrt{2}\}, \frac{1}{2}\overrightarrow{MK}\{2;0;\sqrt{2}\}$; $\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\vec{n}_{(MNK)}\{1;0;-\sqrt{2}\}$; $(MNK)\colon (x+2)-\sqrt{2}z=0.$

$\rho\big(Q,(MNK)\big)=0 \;\Rightarrow\; Q\in(MNK).$