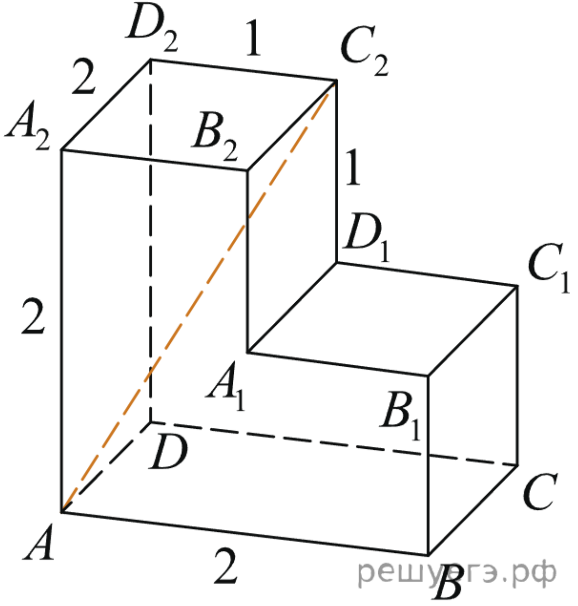
1 Углы и расстояния

- Найти $\angle ABC$ означает найти $\angle\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$.
- Найти длину отрезка AB означает найти $\rho(A, B)$.

Задача 1

На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы многогранника прямые. Найдите расстояние между вершинами A и C_2.



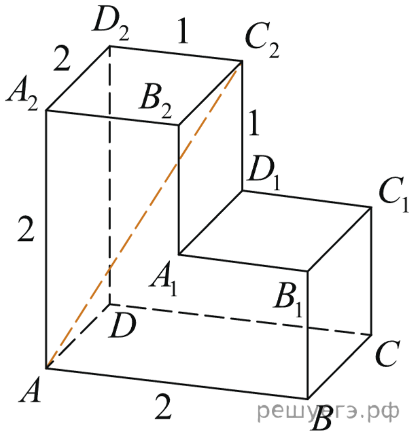
Задача 1

Решение:

Система координат и координаты необходимых точек:

$O = A;\ Ox \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB};\ Oy \uparrow\uparrow \overrightarrow{AA_1};\ \ Oz \uparrow\uparrow \overrightarrow{AA_2}.$

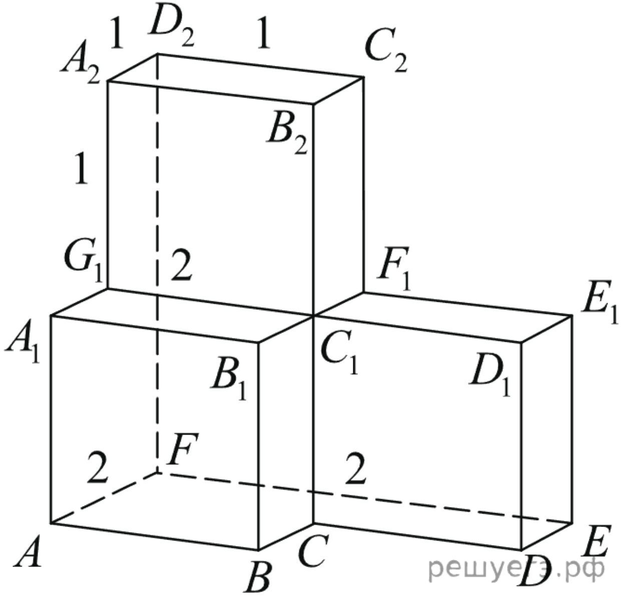
$A(0; 0; 0); C_2(1; 2; 2).$



$\overrightarrow{AC_2}\{1; 2; 2\};\ AC_2 = |\overrightarrow{AC_2}| = \sqrt{1+4+4} = 3.$

Задача 2

Найдите $\angle EAD_2$ многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



Задача 2

Решение:

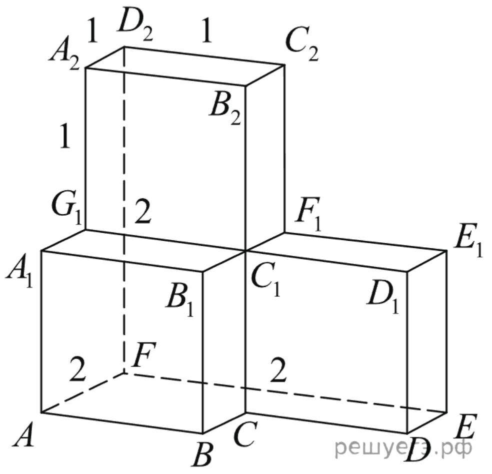
Система координат и координаты необходимых точек:

$O = A;\ Ox \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB};\ Oy \uparrow\uparrow \overrightarrow{AF};\ \ Oz \uparrow\uparrow \overrightarrow{AA_1}.$

$A(0;0;0), E(2;2;0), D_2(0;2;2).$

$\overrightarrow{AE}\{2;2;0\}, \overrightarrow{AD_2}\{0;2;2\}.$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\{1;1;0\},\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AD_2}\{0;1;1\}.$



Задача 2

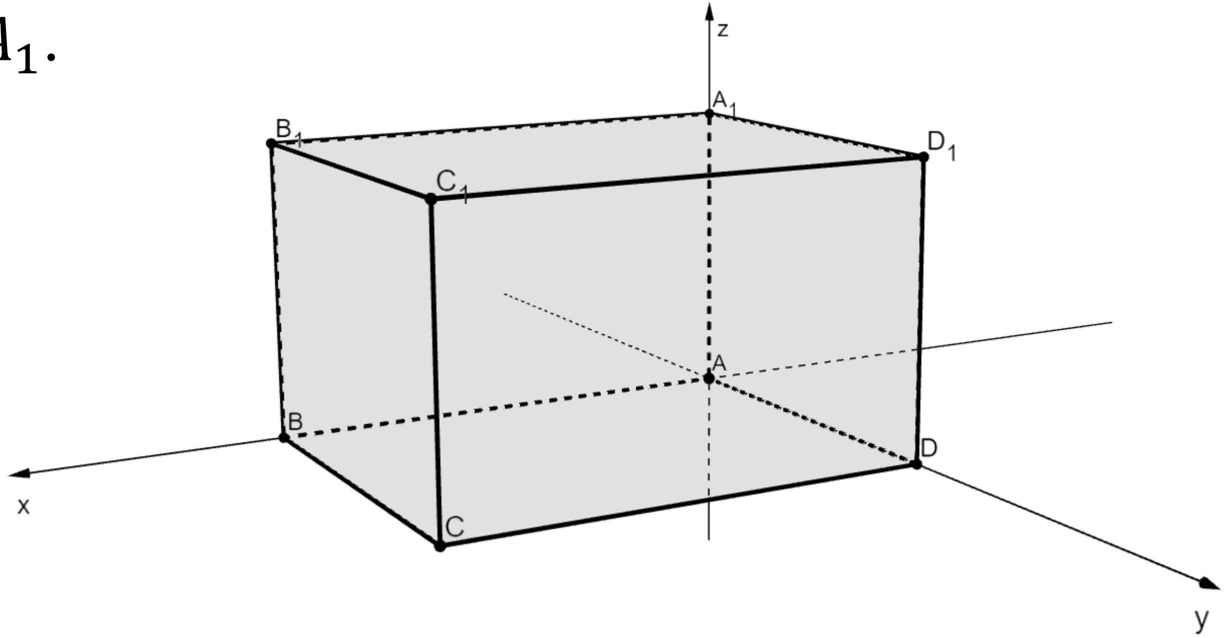
Решение:

$$\cos EAD_2 = \cos\angle\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD_2}\right) = \frac{\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AD_2}}{\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right|\cdot\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AD_2}\right|} = \frac{1}{2}.$$

$$\angle EAD_2 = 60°.$$

Задача 3

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AC_1 = 2BC$. Найдите угол между диагоналями BD_1 и CA_1.



Задача 3

Решение:

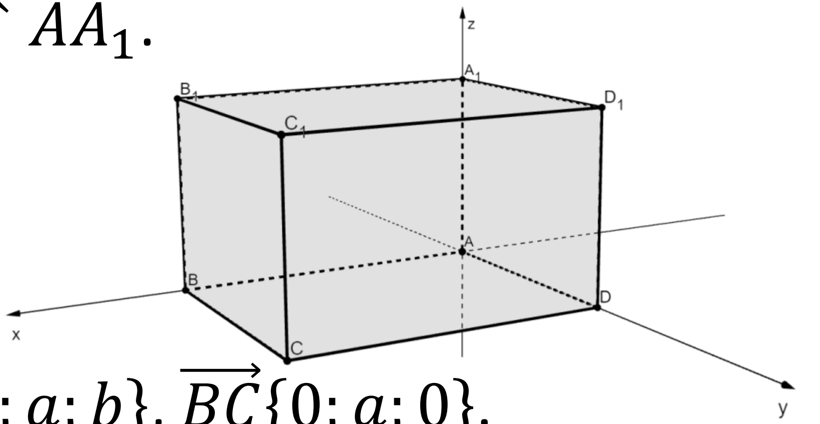
Система координат и координаты необходимых точек:

$O = A;\ Ox \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB};\ Oy \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD};\ \ Oz \uparrow\uparrow \overrightarrow{AA_1}.$

$AB = AD = a, AA_1 = b.$

$B(a;0;0),\ C(a;a;0),\ A_1(0;0;b)$

$\mathrm{D}_1(0;a;b),\ C_1(a;a;b),\ A(0;0;0).$



$\overrightarrow{BD_1}\{-a;a;b\}, \overrightarrow{A_1C}\{a;a;-b\}, \overrightarrow{AC_1}\{a;a;b\}, \overrightarrow{BC}\{0;a;0\}.$

Задача 3

Решение:

$\overrightarrow{BD_1}\{-a; a; b\}, \overrightarrow{A_1C}\{a; a; -b\}, \overrightarrow{AC_1}\{a; a; b\}, \overrightarrow{BC}\{0; a; 0\}.$

$AC_1 = 2BC \Leftrightarrow \ |AC_1|^2 = 4|BC|^2 \ \Leftrightarrow \ a^2 + a^2 + b^2 = 4a^2;$

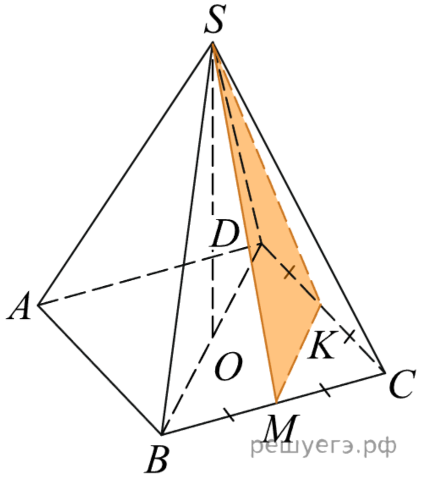
$b^2 = 2a^2.$

$$\cos\angle(BD_1, CA_1) = \left|\cos\angle\left(\overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{A_1C}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{A_1C}\right|}{\left|\overrightarrow{BD_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1C}\right|} =$$

$$= \frac{\left|a^2-a^2-b^2\right|}{a^2+a^2+b^2} = \frac{b^2}{2b^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle(BD_1, CA_1) = 60°.$$

Задача 4

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ высота SO равна 13, диагональ основания BD равна 8. Точки K и M — середины ребер CD и BC соответственно. Найдите тангенс угла между плоскостью SMK и плоскостью основания ABC.



Задача 4

Решение:

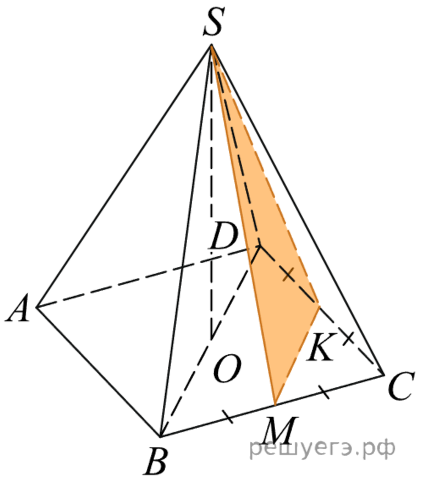
Система координат и координаты необходимых точек:

$O = O;\ Ox \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC};\ Oy \uparrow\uparrow \overrightarrow{DB};\ \ Oz \uparrow\uparrow \overrightarrow{OS}.$

$D(0; -4; 0), C(4; 0; 0), B(0; 4; 0), S(0; 0; 13).$

$\varphi = \angle\big((SMK), (ABC)\big).$

$\frac{1}{OS}\overrightarrow{OS}\{0; 0; 1\}$ – нормаль к (ABC).



Задача 4

Решение:

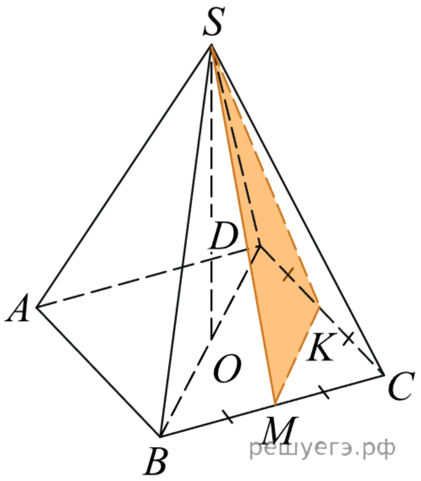
$D(0;-4;0), C(4;0;0), B(0;4;0), S(0;0;13).$

$M(2;2;0), K(2;-2;0).$

Поиск $\vec{n}_{(SMK)}$:

$\overrightarrow{SM}, \frac{1}{4}\overrightarrow{KM} \parallel (SMK), \overrightarrow{SM} \nparallel \frac{1}{4}\overrightarrow{KM};$

$\overrightarrow{SM}\{2;2;-13\}, \frac{1}{4}\overrightarrow{KM}\{0;1;0\};$



Задача 4

Решение:

$\overrightarrow{SM}\{2; 2; -13\}, \frac{1}{4}\overrightarrow{KM}\{0; 1; 0\};$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

$\vec{n}_{(SMK)}\{13; 0; 2\}.$

$\cos\varphi = \left|\cos\angle\left(\vec{n}_{(SMK)}, \vec{n}_{(ABC)}\right)\right| = \frac{2}{\sqrt{173}};$

$\sin\varphi = \frac{13}{\sqrt{173}}; \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{13}{2} = 6{,}5.$

Задача 5

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 2.

Точка M – середина ребра AA_1.

а) Докажите, что прямые MB и B_1C перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми MB и B_1C.

Задача 5

Решение:

Система координат и координаты необходимых точек:

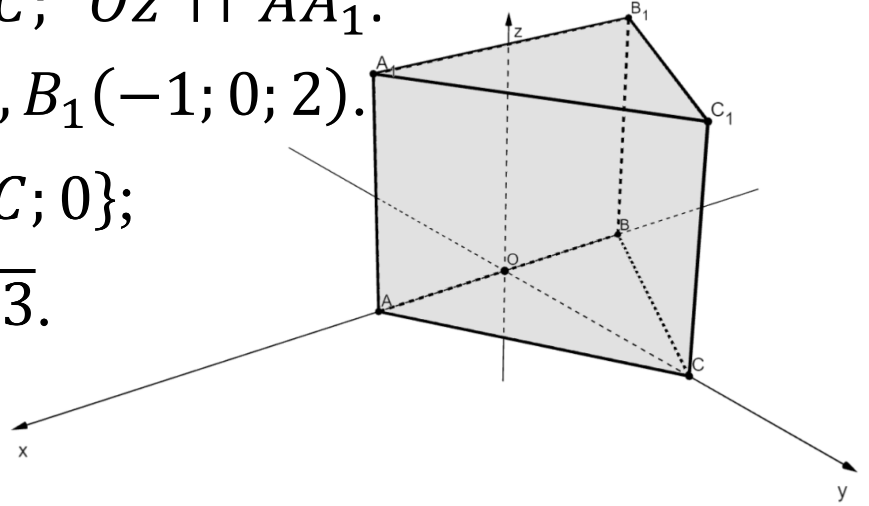
$O -$ сер. AB; $Ox \uparrow\uparrow \overrightarrow{BA}$; $Oy \uparrow\uparrow \overrightarrow{OC}$; $Oz \uparrow\uparrow \overrightarrow{AA_1}$.

$A(1; 0; 0), A_1(1; 0; 2), B(-1; 0; 0), B_1(-1; 0; 2)$.

$M(1; 0; 1), C(0; OC; 0), \overrightarrow{AC}\{-1; OC; 0\}$;

$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{1 + OC^2} = 2 \Rightarrow OC = \sqrt{3}$.

$\overrightarrow{BM}\{2; 0; 1\}, \overrightarrow{B_1C}\left\{1; \sqrt{3}; -2\right\}$.



Задача 5

Решение:

$\overrightarrow{BM}\{2;0;1\}, \overrightarrow{B_1C}\{1;\sqrt{3};-2\}$.

а) $\varphi = \angle(MB, B_1C)$;

$\cos\varphi = \left|\cos\angle\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{B_1C}\right)\right| = 0 \;\Rightarrow\; \varphi = 90°$.

Задача 5

Решение:

б) $\varphi = 90° \;\Rightarrow\;\; MB \nparallel B_1C.$

α – такая плоскость, что $MB \subset \alpha, B_1C \parallel \alpha.$

$\rho(MB, B_1C) = \rho(B_1C, \alpha) = \rho(B_1, \alpha).$

Поиск уравнения α:

$\overrightarrow{BM} \nparallel \overrightarrow{B_1C};\; \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{B_1C} \parallel \alpha;\;\; \overrightarrow{BM}\{2; 0; 1\}, \overrightarrow{B_1C}\left\{1; \sqrt{3}; -2\right\};$

$B(-1; 0; 0) \in \alpha.$

Задача 5

Решение:

$$\overrightarrow{BM}\{2; 0; 1\}, \overrightarrow{B_1C}\{1; \sqrt{3}; -2\}; \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$\vec{n}_\alpha\{-\sqrt{3}; 5; 2\sqrt{3}\}$; уравнение: $-\sqrt{3}(x+1) + 5y + 2\sqrt{3}z = 0.$

$$B_1(-1; 0; 2); \quad \rho(MB, B_1C) = \rho(B_1, \alpha) = \frac{|4\sqrt{3}|}{\sqrt{3+25+12}} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$