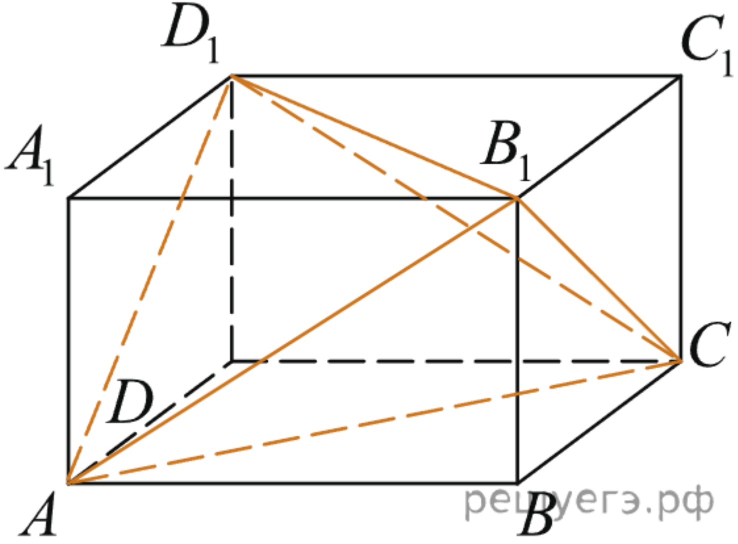
4 Объём пирамиды

$$V_{PABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot \rho\big(P, (ABC)\big)$$

Задача 1

Объем прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 4,5. Найдите объем треугольной пирамиды AD_1CB_1.



Задача 1

Решение:

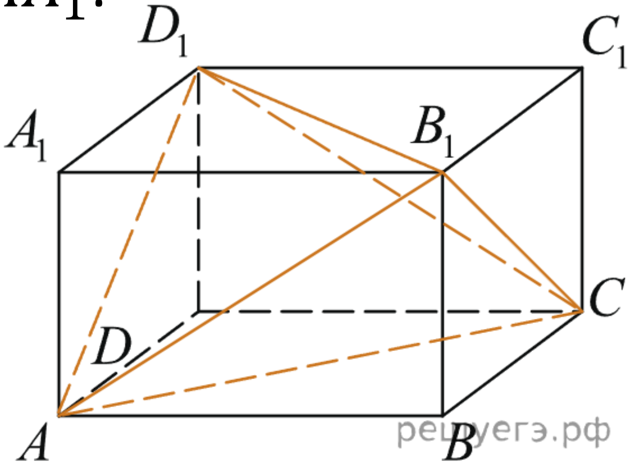
Система координат и координаты необходимых точек:

$O = A;\ Ox \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB};\ Oy \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD};\ \ Oz \uparrow\uparrow \overrightarrow{AA_1}.$

$AB = a, AD = b, AA_1 = c,\ abc = 4{,}5;$

$A(0;0;0); B_1(a;0;c); D_1(0;b;c);$

$C(a;b;0).$



Задача 1

Решение:

$A(0;0;0)$; $B_1(a;0;c)$; $D_1(0;b;c)$; $C(a;b;0)$.

$V_{CAB_1D_1} = \frac{1}{3} \cdot S_{AB_1D_1} \cdot \rho\big(C,(AB_1D_1)\big)$.

$S_{AB_1D_1} = \frac{1}{2} \cdot AB_1 \cdot AD_1 \cdot \sin\varphi$, $\varphi = \angle(AB_1, AD_1)$.

$\overrightarrow{AB_1}\{a;0;c\}$, $\overrightarrow{AD_1}\{0;b;c\}$.

Задача 1

Решение:

$\overrightarrow{AB_1}\{a; 0; c\}, \overrightarrow{AD_1}\{0; b; c\}$.

$\cos\varphi = \frac{c^2}{\sqrt{a^2+c^2}\cdot\sqrt{b^2+c^2}}$; $\cos^2\varphi = \frac{c^4}{a^2b^2+c^2b^2+a^2c^2+c^4}$;

$\sin^2\varphi = \frac{a^2b^2+c^2b^2+a^2c^2}{a^2b^2+c^2b^2+a^2c^2+c^4}$; $\sin\varphi = \frac{\sqrt{a^2b^2+c^2b^2+a^2c^2}}{AB_1\cdot AD_1}$.

$S_{AB_1D_1} = \frac{1}{2}\cdot AB_1\cdot AD_1\cdot\frac{\sqrt{a^2b^2+c^2b^2+a^2c^2}}{AB_1\cdot AD_1} = \frac{\sqrt{a^2b^2+c^2b^2+a^2c^2}}{2}$.

Задача 1

Решение:

$$\overrightarrow{AB_1}\{a;0;c\}, \overrightarrow{AD_1}\{0;b;c\}; \quad \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C(a;b;0).$$

$$\vec{n}_{(AB_1D_1)}\{bc, ac, -ab\}; (AB_1D_1): \ bcx + acy - abz = 0;$$

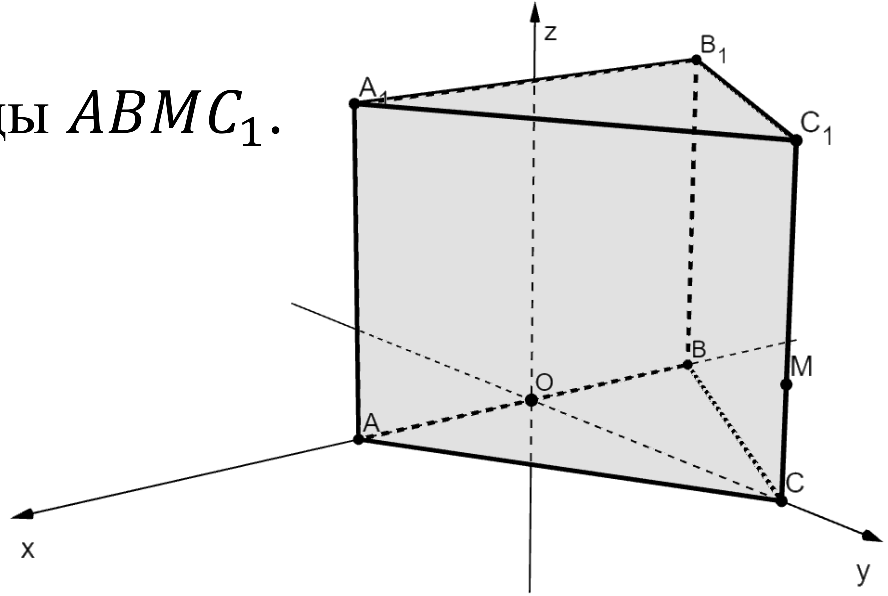
$$\rho\big(C,(AB_1D_1)\big) = \frac{2abc}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}; S_{AB_1D_1} = \frac{\sqrt{a^2b^2+c^2b^2+a^2c^2}}{2};$$

$$V_{CAB_1D_1} = \frac{1}{3} \cdot S_{AB_1D_1} \cdot \rho\big(C,(AB_1D_1)\big) = \frac{abc}{3} = 1{,}5.$$

Задача 2

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ в которой $AB = 6$ и $AA_1 = 3$. На ребре CC_1 отмечена точка M такая что $CM = 1$.

Найдите объем пирамиды $ABMC_1$.



Задача 2

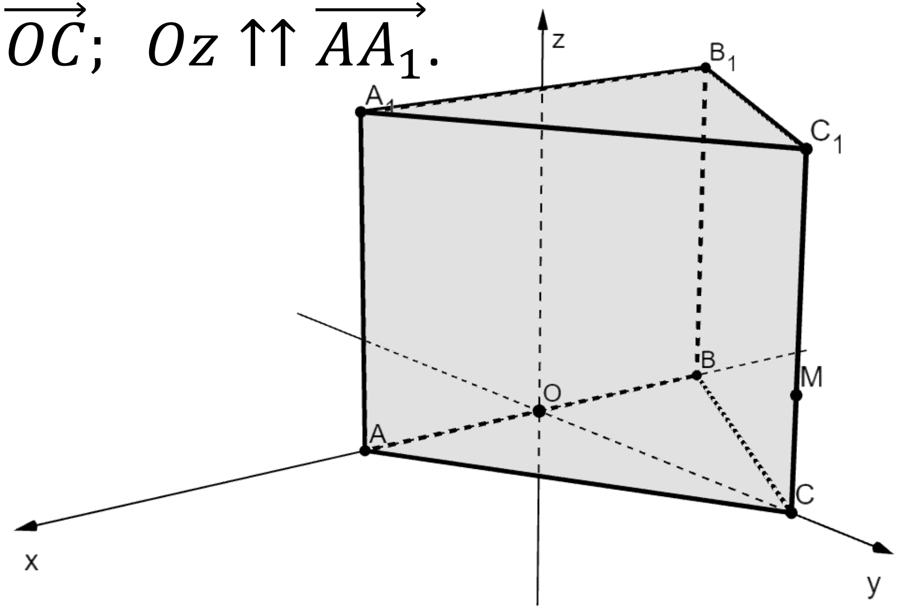
Решение:

Система координат и координаты необходимых точек:

O − сер. AB; $Ox \uparrow\uparrow \overrightarrow{BA}$; $Oy \uparrow\uparrow \overrightarrow{OC}$; $Oz \uparrow\uparrow \overrightarrow{AA_1}$.

$A(3; 0; 0), B(-3; 0; 0)$;

$C_1\left(0; 3\sqrt{3}; 3\right), M\left(0; 3\sqrt{3}; 1\right)$.



Задача 2

Решение:

$A(3;0;0), B(-3;0;0), C_1\left(0;3\sqrt{3};3\right), M\left(0;3\sqrt{3};1\right).$

$V_{BAC_1M} = \frac{1}{3}\cdot S_{AC_1M}\cdot \rho\left(B,(AC_1M)\right).$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}\left\{-1;\sqrt{3};0\right\}, \frac{1}{2}\overrightarrow{MC_1}\{0;0;1\};\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

$\vec{n}_{AC_1M}\left\{\sqrt{3};1;0\right\};\ \ (AC_1M):\ \ \sqrt{3}(x-3)+y=0.$

Задача 2

Решение:

$A(3;0;0), B(-3;0;0), C_1\left(0;3\sqrt{3};0\right), M\left(0;3\sqrt{3};1\right).$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}\left\{-1;\sqrt{3};0\right\}, \frac{1}{2}\overrightarrow{MC_1}\{0;0;1\}.$

(AC_1M): $\sqrt{3}(x-3)+y=0.$

$\rho\left(B,(AC_1M)\right)=3\sqrt{3}.$

$\cos\angle(AC_1, C_1M)=0 \Rightarrow \sin\angle(AC_1, C_1M)=1.$

Задача 2

Решение:

$\rho\big(B, (AC_1M)\big) = 3\sqrt{3};$

$S_{AC_1M} = \frac{1}{2} \cdot AC_1 \cdot C_1M = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6.$

$V_{BAC_1M} = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$