4.1 Нормальный вектор плоскости

Нормальный вектор плоскости – вектор, перпендикулярный к плоскости.

Обозначение: $\vec{n}_\alpha$ – нормальный вектор плоскости α.

Поиск нормального вектора

1. Требуются векторы: $\vec{a}, \vec{b} \parallel \alpha; \vec{a} \nparallel \vec{b}$.

2. Составляется таблица: $\begin{pmatrix} 0 & -b_z & b_y \\ b_z & 0 & -b_x \\ -b_y & b_x & 0 \end{pmatrix}$.

3. Выписываются векторы: $\vec{b}_1\{0; -b_z; b_y\}$, $\vec{b}_2\{b_z; 0; -b_x\}$, $\vec{b}_3\{-b_y; b_x; 0\}$.

4. $\vec{n}_\alpha\{\vec{a} \cdot \vec{b}_1; \vec{a} \cdot \vec{b}_2; \vec{a} \cdot \vec{b}_3\}$

Проверка нормального вектора

1. Требуются векторы: $\vec{a}, \vec{b} \parallel \alpha; \vec{a} \nparallel \vec{b}$.

2. Проверяется $\begin{cases} \vec{n}_\alpha \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{n}_\alpha \cdot \vec{b} = 0 \end{cases}$.

Задача 1

Векторы $\vec{a}\{9; 4; 6\}$ и $\vec{b}\{8; -5; 9\}$ между собой не параллельны, но параллельны к плоскости α. Найти $\vec{n}$ – нормальный вектор к α.

Задача 1

Решение:

Составим таблицу из вектора $\vec{b}$: $\begin{pmatrix} 0 & -9 & -5 \\ 9 & 0 & -8 \\ 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

Выпишем векторы:

$\vec{b}_1\{0; -9 - 5\}$; $\vec{b}_2\{9; 0; -8\}$; $\vec{b}_3\{5; 8; 0\}$.

Задача 1

Решение:

Вычислим скалярные произведения вектора $\vec{a}\{9; 4; 6\}$ с каждым из: $\vec{b}_1\{0; -9 - 5\}$, $\vec{b}_2\{9; 0; -8\}$, $\vec{b}_3\{5; 8; 0\}$.

$\vec{a} \cdot \vec{b}_1 = 9 \cdot 0 + 4 \cdot (-9) + 6 \cdot (-5) = -66$

$\vec{a} \cdot \vec{b}_2 = 9 \cdot 9 + 4 \cdot 0 + 6 \cdot (-8) = 33$

$\vec{a} \cdot \vec{b}_3 = 9 \cdot 5 + 4 \cdot 8 + 6 \cdot 0 = 77.$

Нормальный вектор $\vec{n}_0\{-66; 33; 77\}$.

Задача 1

Решение:

Нормальный вектор $\vec{n}_0\{-66; 33; 77\}$.

Можно взять вектор $\vec{n} = \frac{1}{11}\vec{n}_0$.

Получаем нормальный вектор $\vec{n}\{-6; 3; 7\}$.

Задача 1

Проверка:

$$\vec{n}\{-6; 3; 7\}, \qquad \vec{a}\{9; 4; 6\},\ \vec{b}\{8; -5; 9\}$$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{a} = -6 \cdot 9 + 3 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{b} = -6 \cdot 8 + 3 \cdot (-5) + 7 \cdot 9 = 0 \end{cases}$$

Задача 2

Даны точки: $A(1; -1; 4)$, $B(2; 0; 3)$, $C(-1; -3; 2)$.

Найти $\vec{n}_{(ABC)}$.

Решение:

Найдём $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \parallel (ABC)$, причём $\overrightarrow{CA} \nparallel \overrightarrow{CB}$.

Задача 2

Даны точки: $A(1; -1; 4)$, $B(2; 0; 3)$, $C(-1; -3; 2)$.

Найти $\vec{n}_{(ABC)}$.

Решение:

$\overrightarrow{CA}\{2; 2; 2\}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\{1; 1; 1\}$, $\overrightarrow{CB}\{3; 3; 1\}$.

Задача 2

Решение:

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\{1;1;1\},\qquad \overrightarrow{CB}\{3;3;1\}$$

Составим таблицу из вектора $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\vec{b}_1\{0;-1;1\}, \vec{b}_2\{1;0;-1\}, \vec{b}_3\{-1;1;0\}$.

$\vec{n}_0\{-2;2;0\}$, следовательно $\vec{n}_{(ABC)}\{-1;1;0\}$.

Задача 2

Проверка:

$$\vec{n}_{(ABC)}\{-1; 1; 0\}, \qquad \overrightarrow{CA}\{2; 2; 2\}, \overrightarrow{CB}\{3; 3; 1\}$$

$$\begin{cases} \vec{n}_{(ABC)} \cdot \overrightarrow{CA} = -1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 = 0 \\ \vec{n}_{(ABC)} \cdot \overrightarrow{CB} = -1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 0 \end{cases}$$