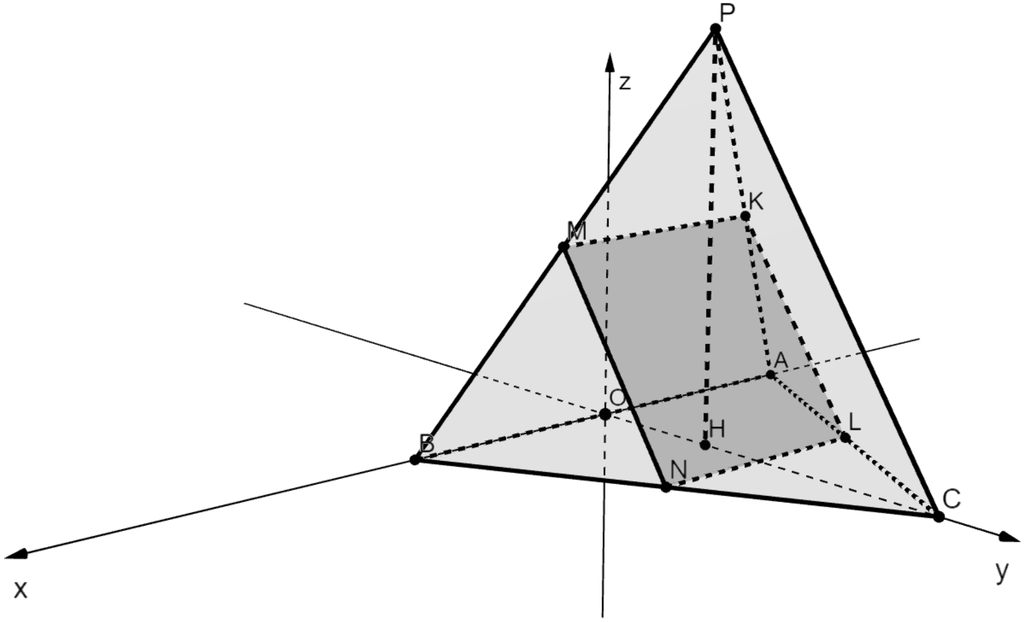
3 Площадь сечения

- $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\angle(AB, AC).$
- $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CD \cdot \sin\angle(AC, CD).$

Задача 1

Ребра тетраэдра равны 1. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырех его ребер.



Задача 1

Решение:

Система координат и координаты необходимых точек:

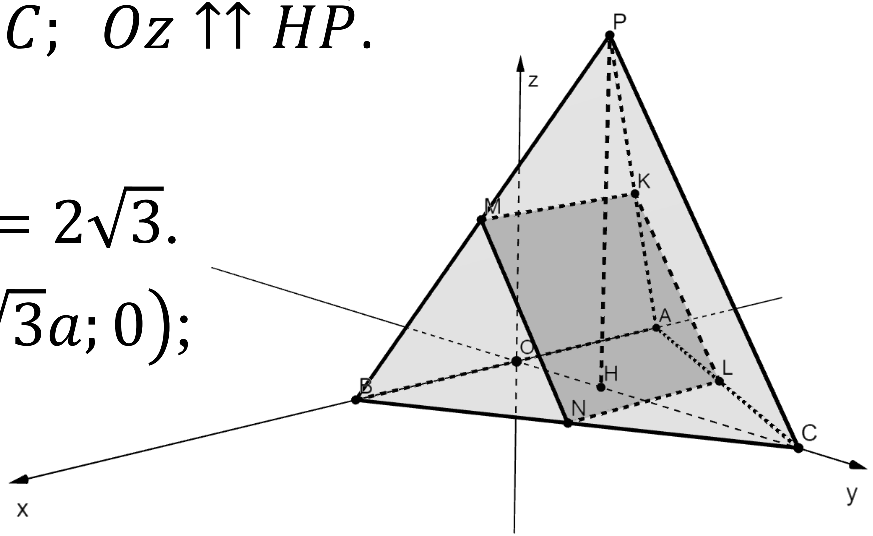
$O -$ сер. AB; $Ox \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$; $Oy \uparrow\uparrow \overrightarrow{OC}$; $Oz \uparrow\uparrow \overrightarrow{HP}$.

N, L, K, M $-$ сер. BC, AC, AP, BP.

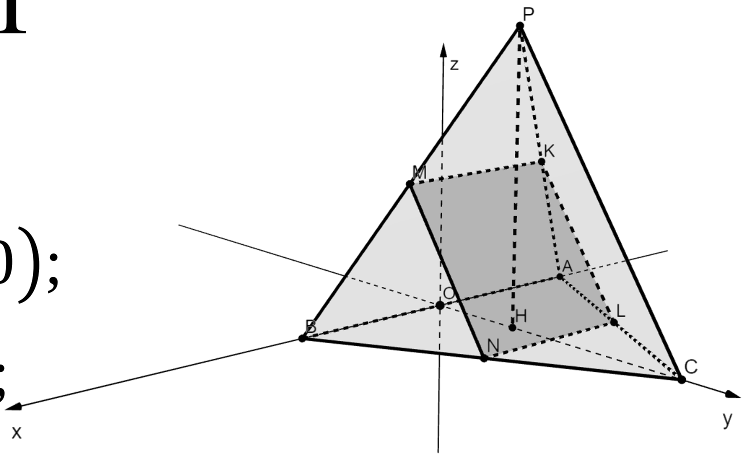
$AB = 12a = 1, OC = 6\sqrt{3}a, OH = 2\sqrt{3}$.

$A(-6a; 0; 0), B(6a; 0; 0), C\left(0; 6\sqrt{3}a; 0\right)$;

$P\left(0; 2\sqrt{3}a; PH\right)$.



Задача 1



Решение:

$A(-6a;0;0), B(6a;0;0), C(0;6\sqrt{3}a;0);$

$P(0;2\sqrt{3}a;PH)$. $\overrightarrow{AP}\{6a;-2\sqrt{3}a;PH\};$

$144a^2=\left|\overrightarrow{AP}\right|^2=36a^2+12a^2+PH^2 \Rightarrow \; PH=4\sqrt{6}a.$

$N(3a;3\sqrt{3}a;0), L(-3a;3\sqrt{3}a;0);$

$M(3a;\sqrt{3}a;2\sqrt{6}a), K(-3a;\sqrt{3}a;2\sqrt{6}a).$

Задача 1

$S_{MKLN} = \frac{1}{2} \cdot ML \cdot KN \cdot \sin\angle(ML, KN).$

$\overrightarrow{LM}\{6a; -2\sqrt{3}a; 2\sqrt{6}a\}, \overrightarrow{KN}\{6a; 2\sqrt{3}a; -2\sqrt{6}a\};$

$\frac{1}{2\sqrt{3}a}\overrightarrow{LM}\{\sqrt{3}; -1; \sqrt{2}\},\ \frac{1}{2\sqrt{3}a}\overrightarrow{KN}\{\sqrt{3}; 1; -\sqrt{2}\};$

$\cos\angle(ML, KN) = \left|\cos\angle\left(\overrightarrow{LM}, \overrightarrow{KN}\right)\right| = 0 \Rightarrow \sin\angle(ML, KN) = 1.$

$\left|\overrightarrow{LM}\right| = \left|\overrightarrow{KN}\right| = 6\sqrt{2}a;$

$S_{MKLN} = \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot 1 = \frac{1}{4} \cdot (12a)^2 = 0{,}25.$

Задача 2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 24, AD = 10, AA_1 = 22.$

Найдите площадь сечения, проходящего через вершины A, A_1 и $C.$

Задача 2

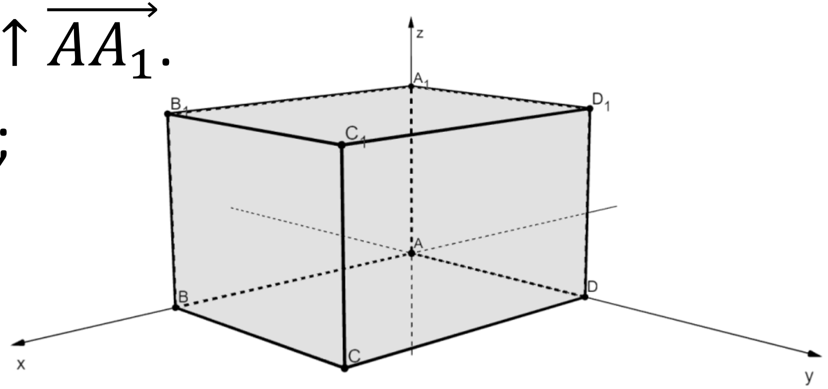
Решение:

Система координат и координаты необходимых точек:

$O = A$; $Ox \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$; $Oy \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}$; $Oz \uparrow\uparrow \overrightarrow{AA_1}$.

$A(0;0;0), A_1(0;0;22), C(24;10;0)$;

$C_1(24;10;22), D_1(0;10;22)$.



Задача 2

Решение:

Найдём точку пересечения прямой C_1D_1 и секущей плоскости (AA_1C).

Найдём уравнение плоскости (AA_1C) по векторам:

$\frac{1}{22}\overrightarrow{AA_1}\{0; 0; 1\}$ и $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\{12; 5; 0\}$, и точке A. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$\vec{n}_{(AA_1C)}\{-5; 12; 0\}$; (AA_1C): $-5x + 12y = 0$.

Задача 2

Решение:

Найдём уравнения прямой C_1D_1: $\begin{cases} y = 10 \\ z = 22 \end{cases}$.

Найдём общие точки C_1D_1 и (AA_1C):

$$\begin{cases} y = 10 \\ z = 22 \\ -5x + 12y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z) = (24; 10; 22),$$ т.е. точка C_1.

Задача 2

Решение:

Сечение AA_1C_1C, $\quad S_{AA_1C_1C} = \frac{1}{2} \cdot AC_1 \cdot A_1C \cdot \sin\angle(AC_1, A_1C)$.

$\overrightarrow{AC_1}\{24; 10; 22\}, \overrightarrow{A_1C}\{24; 10; -22\}$, $\left|\overrightarrow{AC_1}\right| = \left|\overrightarrow{A_1C}\right| = 2\sqrt{290}$.

$\cos\angle(AC_1, A_1C) = \frac{4(144+25-121)}{4\cdot 290} = \frac{48}{290} = \frac{24}{145}$;

$\sin\angle(AC_1, A_1C) = \frac{143}{145}$, $S_{AA_1C_1C} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 290 \cdot \frac{143}{145} = 572$.

Задача 3

Радиус основания конуса с вершиной P равен 6, а длина его образующей равна 9. На окружности основания конуса выбраны точки A и B, делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1:3.

Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP.

Задача 3

Решение:

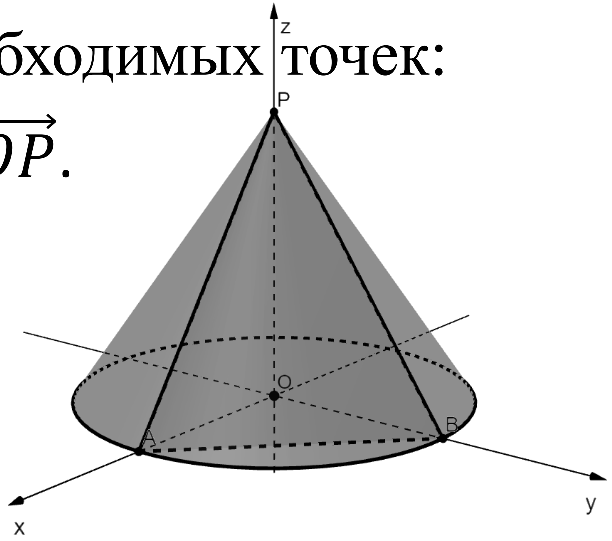
O – центр окружности основания. $\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{4} \cdot 360° = 90°$.

Система координат и координаты необходимых точек:

$O = O;\ Ox \uparrow\uparrow \overrightarrow{OA};\ Oy \uparrow\uparrow \overrightarrow{OB};\ \ Oz \uparrow\uparrow \overrightarrow{OP}$.

$A(6; 0; 0), B(0; 6; 0), P(0; 0; OP)$.

$AP = 9 = \sqrt{36 + OP^2} \Rightarrow OP = 3\sqrt{5}$.



Задача 3

$A(6;0;0), B(0;6;0), P\left(0;0;3\sqrt{5}\right), \angle(AB, AP) = \varphi.$

$S_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AP \cdot \sin\varphi = \frac{9}{2} \cdot AB \cdot \sin\varphi.$

$\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\{-1;1;0\}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AP}\left\{-2;0;\sqrt{5}\right\}, \left|\overrightarrow{AB}\right| = 6\sqrt{2}.$

$\cos\varphi = \left|\cos\angle\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AP}\right)\right| = \frac{2}{\sqrt{2}\cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{\sqrt{7}}{3}.$

$S_{ABP} = \frac{9}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} = 9\sqrt{14}.$