2.6 Расстояние между прямыми

Существует 2 случая поиска расстояния между прямыми k и l:

1. $k \parallel l$ или $k = l$;
2. $k \div l$ или $k \cap l = A$.

В первом случае $\vec{k} \parallel \vec{l}$, во втором $\vec{k} \nparallel \vec{l}$.

2.6 Расстояние между прямыми

Для поиска расстояния между прямыми k и l в случае $\vec{k} \parallel \vec{l}$, требуется точка $A \in k$; в противном случае требуется плоскость $\alpha \parallel l,\ k \subset \alpha$.

$$\rho(k,l) = \begin{cases} \rho(A,l), \text{если} & \vec{k} \parallel \vec{l} \\ \rho(l,\alpha), \text{если} & \vec{k} \nparallel \vec{l} \end{cases}$$

Задача 1

Даны точки:
$A(-3; -1; -3), B(-4; -2; -3), C(1; 3; 4), D(3; 5; 4).$

Найти $\rho(AB, CD)$.

Решение:

Определим случай взаимного расположения прямых.

Найдём направляющие векторы: $\overrightarrow{AB}\{-1; -1; 0\}, \overrightarrow{CD}\{2; 2; 0\}$.

Имеем $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$, следовательно $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$.

Задача 1

Даны точки:

$A(-3; -1; -3), B(-4; -2; -3), C(1; 3; 4), D(3; 5; 4).$

Найти $\rho(AB, CD)$.

Решение:

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, следовательно $\rho(AB, CD) = \rho(A, CD)$.

$\vec{l} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}\{4; 4; 7\}$, $\vec{l}\{1; 1; 0\}$.

$$\rho(A, CD) = \sqrt{\overrightarrow{AC}^2 - \frac{\left(\overrightarrow{AC} \cdot \vec{l}\right)^2}{\vec{l}^2}} = \sqrt{81 - \frac{8^2}{2}} = 7.$$

Задача 2

Даны точки:
$A(1; 2; 0), B(-4; -1; 0), C(1; -4; 5), D(-4; -3; 0)$.

Найти $\rho(AB, CD)$.

Решение:

Определим случай взаимного расположения прямых.

Найдём направляющие векторы: $\overrightarrow{BA}\{5; 3; 0\}, \overrightarrow{DC}\{5; -1; 5\}$.

Имеем $\overrightarrow{DC} \neq k \cdot \overrightarrow{BA}$, следовательно $\overrightarrow{BA} \nparallel \overrightarrow{DC}$.

Задача 2

Даны точки:
$A(1;2;0), B(-4;-1;0), C(1;-4;5), D(-4;-3;0)$.

Найти $\rho(AB, CD)$.

Решение:

$\overrightarrow{BA} \nparallel \overrightarrow{DC}$, следовательно $\rho(AB, CD) = \rho(AB, \alpha) = \rho(A, \alpha)$, где $\alpha \parallel AB,\ CD \subset \alpha$.

Найдём нормаль к плоскости α по параллельным к ней векторам $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{DC}$, где $\overrightarrow{BA} \nparallel \overrightarrow{DC}$.

Задача 2

Даны точки:
$A(1;2;0), B(-4;-1;0), C(1;-4;5), D(-4;-3;0)$.

Найти $\rho(AB, CD)$.

Решение:

$\overrightarrow{BA}\{5;3;0\}, \overrightarrow{DC}\{5;-1;5\}$;

Матрица: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, строки: $\begin{matrix} \vec{n}_1\{0;0;3\} \\ \vec{n}_2\{0;0;-5\}; \\ \vec{n}_3\{-3;5;0\} \end{matrix}$

Задача 2

Решение:

$\overrightarrow{BA}\{5; 3; 0\}, \overrightarrow{DC}\{5; -1; 5\};$

Матрица: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, строки: $\begin{matrix} \vec{n}_1\{0; 0; 3\} \\ \vec{n}_2\{0; 0; -5\}; \\ \vec{n}_3\{-3; 5; 0\} \end{matrix}$

$\vec{n}_0\left\{\vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{DC}; \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{DC}; \vec{n}_3 \cdot \overrightarrow{DC}\right\} = \vec{n}_0\{15; -25; -20\};$

$\vec{n}_\alpha = \frac{1}{5}\vec{n}_0; \quad \vec{n}_\alpha\{3; -5; -4\}.$

Задача 2

Решение:

$\vec{n}_\alpha\{3; -5; -4\}; D(-4; -3; 0); A(1; 2; 0);$

Составим уравнение плоскости α по $\vec{n}_\alpha$ и точке D, так как $D \in CD \subset \alpha$.

$$3(x + 4) - 5(y + 3) - 4z = 0.$$

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|3(1 + 4) - 5(2 + 3)|}{\sqrt{9 + 25 + 16}} = \sqrt{2}.$$