Bài giảng môn học
MÔ HÌNH HÓA và MÔ PHỎNG
~
MODELING and SIMULATION

BỘ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG
MINISTRY OF INFORMATION AND COMMUNICATIONS

HỌC VIỆN
CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG
Posts and Telecommunications Institute of Technology

Thông tin giảng viên

ThS. Võ Minh Tài, Giảng viên - Email: tai.vm@ptithcm.edu.vn

- Giảng viên ngành Kỹ thuật Điều khiển và Tự động hóa (PTIT, 2024-Nay)
- Nghiên cứu sinh Tiến sĩ Cơ khí, Sản xuất và Cơ điện tử, (RMIT University, 2025-Nay)
- Thạc sĩ chuyên ngành Kỹ thuật Điều khiển và Tự động hóa (Trường Đại học Bách khoa – VNU-HCM năm 2024)
- Kỹ sư chuyên ngành Công nghệ Kỹ thuật Điều khiển và Tự động hóa (Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật TPHCM năm 2020)
- Chuyên viên Kỹ thuật cao cấp (RMIT University Vietnam, 2023-2024)
- Kỹ sư Tự động hóa (Intel Products Vietnam, 2020-2023)

Cách thức giao tiếp

- **Đưa tay phát biểu trong lớp bất kỳ lúc nào.**
- **Gửi mail** đến giảng viên (Ưu tiên)
  - Tiêu đề Email: “Học phần” + MSSV + Tiêu đề.
  - Ví dụ: MHHMP + MSSV + Hỏi về bài kiểm tra
- **Gặp mặt trực tiếp** giảng viên
  - **Thời gian tiếp sinh viên: 11:00 – 12:00 Thứ 2 Phòng 2E12**
- **Gặp mặt** giảng viên **trực tuyến**
  - Vui lòng gửi email để sắp xếp thời gian.

Thông tin chung về học phần

- Tài liệu tham khảo
- Chương 1: Tổng quan
- Chương 2: Mô hình hóa và phương pháp giải bài toán mô hình hóa
- Chương 3: Phương trình Lagrange
- Chương 4: Các phương pháp mô phỏng trong tự động
- Chương 5: Mô hình hóa và mô phỏng với Python

Thông tin bài kiểm tra của học phần

- Bài thi giữa kỳ - **20%**
- Tiểu luận(Mini-Project) – **15%**
- Bài tập về nhà – **15%**
- Thi cuối kỳ - **50%**
- **Tất cả thông tin về học phần sẽ được tìm thấy trang e-Learning.**

Làm sao để thành công trong học phần này

- Có mặt và tham gia vào bài giảng/hướng dẫn.
- Khi bạn ở trong lớp, hãy là một phần của lớp.
- Nếu bạn có một câu hỏi, sau đó đặt câu hỏi.
- Những cuộc trò chuyện cá nhân nên được thực hiện bên ngoài lớp học.
- Không có hình thức đạo văn nào sẽ được dung thứ.

Chương 3

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE

Nội dung của buổi học hôm nay

Trong chương này, phương trình chuyển động Lagrange được thảo luận. Chương này hướng dẫn sinh viên cách dẫn xuất các phương trình này bằng nguyên lý năng lượng và lực tổng quát. Con lắc ngược là một ví dụ phổ biến để phân tích Lagrange, vì vậy trong chương này, các ví dụ về con lắc ngược sẽ được dùng để mô tả cho sinh viên.

Lagrange Equations

Use kinetic and potential energy to solve for motion!

Mở đầu

- Chúng ta sử dụng các định luật Newton để mô tả chuyển động của vật thể. Chúng hoạt động tốt khi vật thể có gia tốc không đổi, nhưng có thể trở nên cực kỳ phức tạp khi gia tốc thay đổi. Đối với những bài toán như vậy, chúng ta sẽ thấy rằng việc biểu diễn lời giải bằng các khái niệm về động năng sẽ dễ dàng hơn.

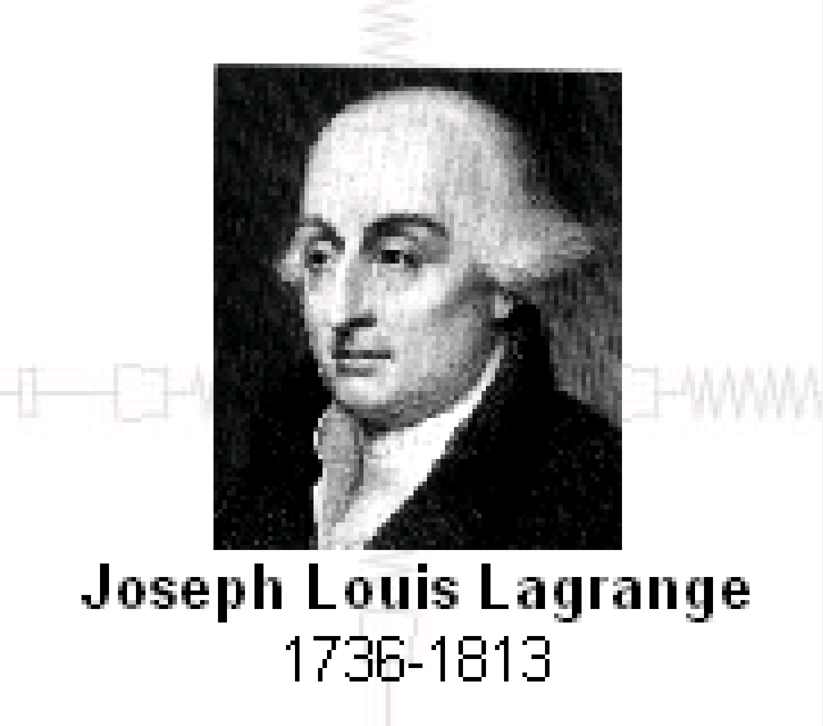
Mô hình hóa hệ thống động lực học

- Mô hình hóa hệ thống động lực học có thể được thực hiện theo nhiều cách:
  - ❑ Sử dụng phương trình chuyển động tiêu chuẩn (Định luật Newton) cho các hệ cơ học.
  - ❑ Sử dụng các định lý mạch điện (Định luật Ohm và các định luật Kirchhoff: KCL và KVL).
  - ❑ Cách tiếp cận hiện đại sử dụng ký hiệu năng lượng để mô hình hóa hệ thống động lực học (**Mô hình Lagrange**).

Mô hình hóa hệ thống động lực học

- Joseph-Louise Lagrange: 1736-1813
- Born in Italy and lived in Berlin and Paris.
- Studied to be a lawyer.
- Contemporary of Euler, Bernoulli, D'Alembert, Laplace, and Newton.
- He was interested in math.
- Contribution: Calculus of variations; Calculus of probabilities;

  Integration of differential equations; Number theory.



Phương trình chuyển động: Phương trình Lagrange

- Có nhiều phương pháp khác nhau để dẫn xuất các phương trình động lực học của một hệ thống động lực. Kết quả cuối cùng, tất cả các phương pháp này đều cung cấp các tập hợp phương trình tương đương, nhưng mô tả toán học của chúng khác nhau về tính phù hợp cho việc tính toán cũng như khả năng cung cấp cái nhìn sâu sắc về vấn đề cơ học cơ bản.
- Phương pháp Lagrange dựa trên cân bằng năng lượng. Các phương trình thu được có thể được tính dưới dạng khép kín và cho phép phân tích hệ thống phù hợp đối với hầu hết các ứng dụng hệ thống.

Phương trình chuyển động: Phương trình Lagrange

- **TẠI SAO CHÚNG TẠ LẠI SỬ DỤNG LAGRANGE?**
  - ❑ Đại lượng vô hướng, không phải vector.
  - ❑ Loại bỏ việc giải các lực ràng buộc (các lực giữ hệ thống liên kết).
  - ❑ Tránh việc tìm gia tốc.
  - ❑ Được sử dụng rộng rãi trong robot và nhiều lĩnh vực khác.
  - ❑ Định luật Newton phù hợp với các hệ thống đơn giản, nhưng đối với các hệ thống thực tế thì sao?

Mô hình toán học và động lực học hệ thống

Cơ học Newton: Chuyển động tịnh tiến

- Các phương trình chuyển động của hệ thống cơ học có thể được xác định bằng cách sử dụng định luật II Newton. ***F*** là tổng vector của tất cả các lực tác dụng lên vật. ***a*** là vectơ gia tốc của vật so với hệ quy chiếu quán tính. ***m*** là khối lượng của vật.
- Để áp dụng định luật Newton, cần phân tích sơ đồ vật tự do (free-body diagram - FBD) trong hệ tọa độ được sử dụng.

Mô hình toán học và động lực học hệ thống

Cơ học Newton: Chuyển động tịnh tiến

Newton approach requires that we find accelerations in all three directions, equate F = ma, solve for the constraint forces and then eliminate these to reduce the problem to "characteristic size".

$$\sum \mathrm{F} = ma$$

Mô hình toán học và động lực học hệ thống

Chuyển động tịnh tiến trong hệ thống điện cơ

- Việc xem xét ma sát là rất quan trọng để hiểu rõ hoạt động của các hệ thống điện cơ.
- Ma sát là một hiện tượng phi tuyến rất phức tạp và rất khó để mô hình hóa chính xác.
- Ma sát Coulomb cổ điển là một lực ma sát cản trở (đối với chuyển động tịnh tiến) hoặc một mô-men cản trở (đối với chuyển động quay), có dấu thay đổi khi hướng chuyển động đảo ngược, và biên độ của lực ma sát hoặc mô-men là không đổi.
- Ma sát nhớt là một lực hoặc mô-men cản trở có độ lớn tỷ lệ tuyến tính với vận tốc tịnh tiến hoặc vận tốc góc.

Mô hình toán học và động lực học hệ thống

Cơ học Newton: Chuyển động tịnh tiến

- Đối với các hệ thống quay một chiều, định luật II Newton được biểu diễn bằng phương trình sau:
  - ❑ ***M*** là tổng các mô-men lực tác dụng lên vật quanh khối tâm (N·m).
  - ❑ ***J*** là mô-men quán tính của vật quanh khối tâm (kg·m²).
  - ❑ $\boldsymbol{\alpha}$ là gia tốc góc của vật (rad/s²).

$$M = j\alpha$$

Mô hình toán học và động lực học hệ thống

Năng lượng trong hệ thống cơ khí và điện

- Trong phương pháp Lagrange, năng lượng là vấn đề cốt lõi. Do đó, chúng ta xem xét các dạng năng lượng khác nhau trong các hệ thống điện và cơ khí.
- Đối với các vật thể đang chuyển động, chúng ta có **động năng (Ke)**, đây luôn là một đại lượng vô hướng chứ không phải là một vector.

Mô hình toán học và động lực học hệ thống

Năng lượng trong hệ thống cơ khí và điện

- **Thế năng** của một vật có khối lượng *m* ở độ cao *h* trong một trường trọng lực với gia tốc trọng trường *g* không đổi được cho trong bảng tiếp theo. Chỉ có sự chênh lệch thế năng mới có ý nghĩa. Đối với hệ cơ học có lò xo bị nén một khoảng *x* với hằng số đàn hồi *k*, thế năng của hệ cũng được cho trong bảng tiếp theo.

Mô hình toán học và động lực học hệ thống

Tương đương điện và cơ học của "Năng lượng"

Energy	Mechanical	Electrical
Kinetic (Active) K_e	**Mass / Inertia** $0.5\ mv^2$ / $0.5\ j\omega^2$	**Inductor**
Potential V	**Gravity:** mgh **Spring:** $0.5\ kx^2$	**Capacitor** $0.5\ Cv^2 = q^2/2C$
Dissipative P	**Damper / Friction** $0.5\ Bv^2$	**Resistor**

Lagrange

- Nguyên lý của phương trình Lagrange dựa trên một đại lượng gọi là Lagrangian, được phát biểu như sau:
  - ❑ Đối với một hệ thống động lực học mà công của tất cả các lực được tính trong Lagrangian, một chuyển động hợp lệ giữa các cấu hình cụ thể của hệ tại thời điểm t_1 và t_2 là một chuyển động tự nhiên nếu và chỉ nếu năng lượng của hệ thống không đổi.
- Lagrangian là một đại lượng mô tả sự cân bằng giữa các dạng năng lượng không tiêu hao.

Lagrange

$$L = K_e - V \text{ } (K_e \text{ is the kinetic energy; } V \text{ is the potential energy})$$

$$K_e = \frac{1}{2} m v^2; \; V = mgh$$

$$\text{Lagrange's Equation}: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

P is power function (half rate at which energy is dissipated); Q_i are generalized external inputs (forces) acting on the system. If there are three generalized coordinates, there will be three equations.

Note that the above equation is a second-order differential equation

Lagrange

- **Tọa độ tổng quát:**
  - ❑ Để giới thiệu phương trình Lagrange, trước tiên cần xem xét số bậc tự do (DOF) của một hệ thống, được xác định bằng công thức: $\text{DOF} = \text{Số tọa độ} - \text{Số ràng buộc}$
  - ❑ Giả sử một hạt chuyển động trong không gian:

    Số tọa độ = 3 (x, y, z hoặc r, θ, ϕ); Số ràng buộc = 0; Bậc tự do = 3−0=33−0=3
  - ❑ Đây là số lượng đại lượng độc lập cần được xác định để trạng thái của hệ thống được xác định duy nhất. Những đại lượng này thường là biến trạng thái của hệ thống, nhưng không phải tất cả đều như vậy.

Lagrange

- **Tọa độ tổng quát:**
  - ❑ Đối với hệ cơ học: Khối lượng hoặc mô-men quán tính đóng vai trò là tọa độ tổng quát.
  - ❑ Đối với hệ điện: Điện tích cũng có thể được sử dụng làm tọa độ thích hợp.

Lagrange

- **Tọa độ tổng quát:**
  - Sử dụng phép biến đổi tọa độ để chuyển đổi giữa các tập tọa độ tổng quát, ví dụ:

$$x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\theta$$

  - Giả sử một tập gồm các biến độc lập $q_1, q_2, \ldots, q_n$ được xác định, từ đó có thể xác định vị trí của tất cả các phần tử trong hệ thống. Những biến này được gọi là tọa độ tổng quát, và đạo hàm theo thời gian của chúng được gọi là vận tốc tổng quát.

Lagrange

- **Tọa độ tổng quát:**
  - ❑ Hệ thống được cho là có n bậc tự do (DOF) vì nó được mô tả bởi n tọa độ tổng quát.
  - ❑ Việc sử dụng thuật ngữ tổng quát (generalized) giúp chúng ta không bị ràng buộc vào bất kỳ hệ tọa độ cụ thể nào, do đó có thể tự do lựa chọn các tham số thuận tiện nhất để mô tả động lực học của hệ thống.

Lagrange

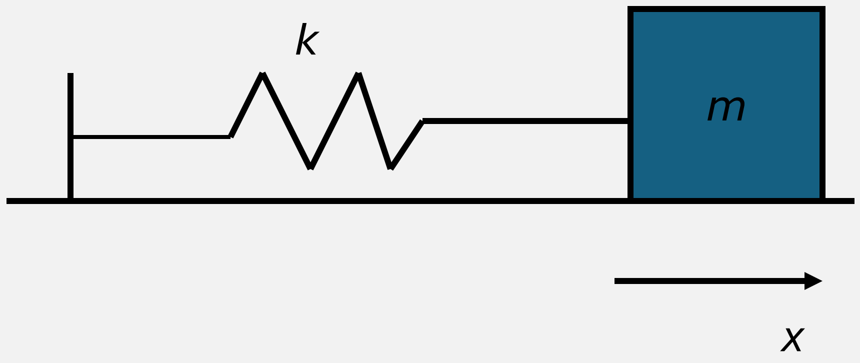
- **Đối với một lớp bài toán lớn, các phương trình Lagrange có thể được biểu diễn dưới dạng ma trận tiêu chuẩn.**

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \\ . \\ . \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial q_1} \\ . \\ . \\ \dfrac{\partial L}{\partial q_n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial \dot{q}_1} \\ . \\ . \\ \dfrac{\partial P}{\partial \dot{q}_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ . \\ . \\ f_n \end{bmatrix}$$

Lagrange

- **Ví dụ:** hệ thống lò xo khối lượng tuyến tính và bàn không ma sát:

  - ❑ Các bước thực hiện:



Lagrangian: $L = K_e - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$

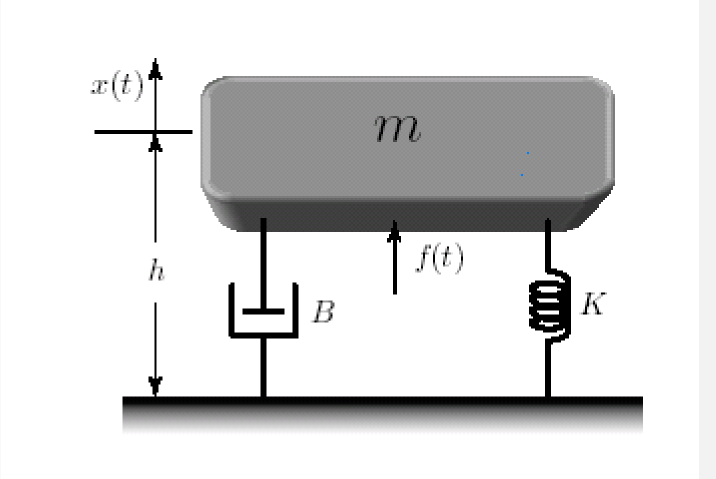
Lagrang's Equation: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

Do the derivatives: $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{x}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = m\ddot{x}; \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = -kx$

Combine all together: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = m\ddot{x} + kx = 0$

Lagrange

- **Ví dụ hệ cơ:** Hệ thống khối lượng - lò xo - bộ giảm chấn:



  - ❑ Các bước thực hiện:

We have the generalized coordinate $q = x$, and thus with the applied force $Q = f$, we write the Lagrange equation:

$$Ke = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$V = \frac{1}{2}Kx^2 + mg(h+x)$$

$$L = K_e - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}Kx^2 - mg(h+x)$$

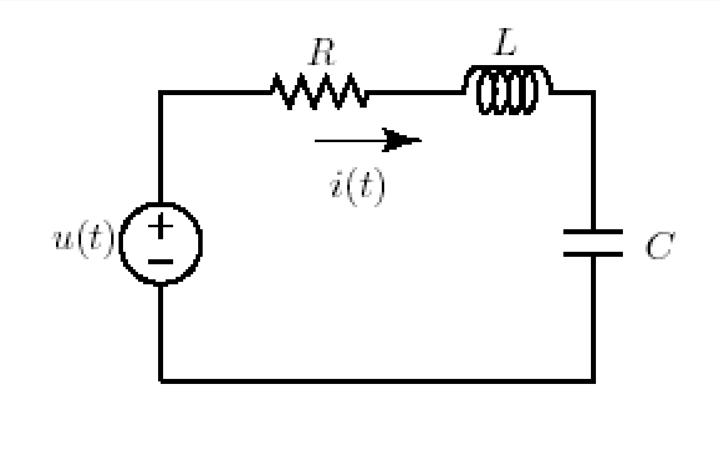
$$P = \frac{1}{2}B\dot{x}^2$$

$$\begin{aligned}
f &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial \dot{x}} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}Kx^2 - mg(h+x)\right)\right) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}Kx^2 - mg(h+x)\right) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2}B\dot{x}^2\right) \\
&= \frac{d}{dt}(m\dot{x}^2) - (-Kx - mg) + (B\dot{x}) \\
&= m\ddot{x} + Kx + mg + B\dot{x}
\end{aligned}$$

Lagrange

- **Ví dụ hệ điện:** RLC

  ❑ Các bước thực hiện:



We have the generalized coordinate q (charge), and with the applied force $Q = u$, we have

$$K_e = \frac{1}{2} L\dot{q}^2$$

$$V = \frac{1}{2C} q^2$$

$$L = K_e - V = \frac{1}{2} L\dot{q}^2 - \frac{1}{2C} q^2$$

$$P = \frac{1}{2} R\dot{q}^2$$

$$u = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial \dot{q}}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{1}{2} L\dot{q}^2 - \frac{1}{2C} q^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2} L\dot{q}^2 - \frac{1}{2C} q^2\right) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{1}{2} R\dot{q}^2\right)$$

$$= \frac{d}{dt}(L\dot{q}) + \frac{Q}{C} + R\dot{q} = L\ddot{q} + \frac{Q}{C} + R\dot{q} = L\frac{di}{dt} + v_c + Ri$$

$i = \dot{q}$ and $q = Cv_c$ for a capacitor. This is just KVL equation

Lagrange

- **Ví dụ: Cánh tay robot**

  - Các bước thực hiện:

$$q = \begin{bmatrix} \theta \\ r \end{bmatrix}$$ Generalized coordinates (θ angular position; r radial length; both vary)

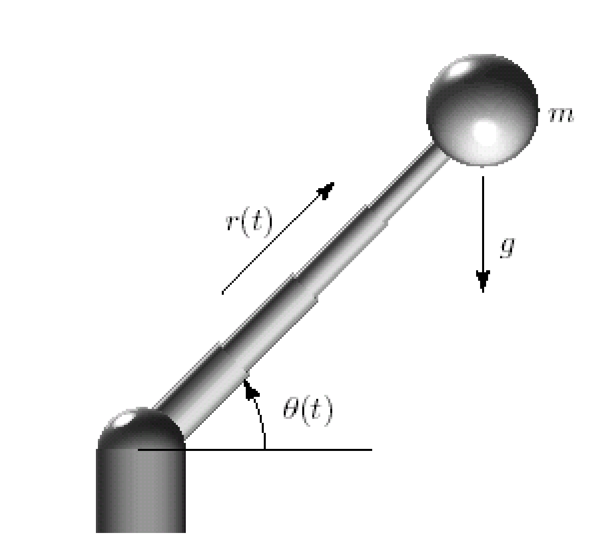
$$Q = \begin{bmatrix} \tau \\ f \end{bmatrix}$$ Applicable forces to each component; τ is the torque; f is the force

$$J = mr^2;\ K_e = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2;\ V = mgr\sin(\theta)$$

The power dissipation : $P = \frac{1}{2}B_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}B_2\dot{r}^2$

$$L = K_e - V = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - mgr\sin(\theta)$$

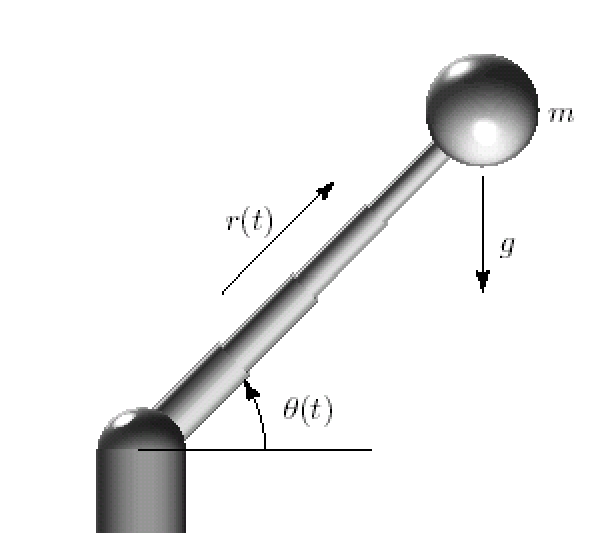
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J\dot{\theta} \\ m\dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mr^2\dot{\theta} \\ m\dot{r} \end{bmatrix};\ \frac{\partial L}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \theta} \\ \frac{\partial L}{\partial r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mgr\cos(\theta) \\ mr\dot{\theta}^2 - mg\sin(\theta) \end{bmatrix};\ \frac{\partial P}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial P}{\partial \dot{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1\dot{\theta} \\ B_2\dot{r} \end{bmatrix}$$



Lagrange

- **Ví dụ: Cánh tay robot**

  - Các bước thực hiện (tt):



$$Q = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial \dot{q}}$$

$$Q = \begin{bmatrix} mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} \\ m\ddot{r} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -mgr\cos(\theta) \\ mr\dot{\theta}^2 - mg\sin(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1\dot{\theta} \\ B_2\dot{r} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} mr^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & 2mr\dot{\theta} \\ -mr\dot{\theta} & B_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mgr\cos(\theta) \\ mg\sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ f \end{bmatrix}$$

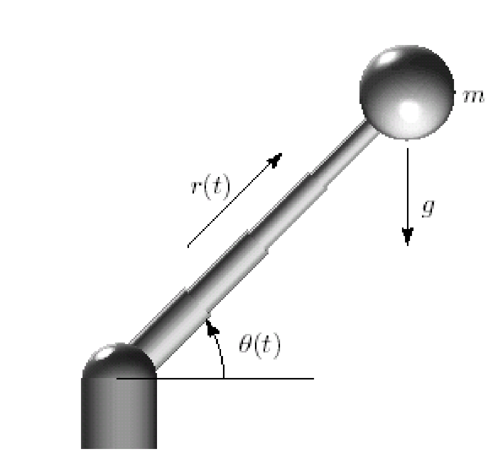
$$M(q)\ddot{q} + V(q,\dot{q}) + G(q) = Q$$

$M(q)$ is the inertia matrix; $V(q,\dot{q})$ is the Coriolis/centripetal vector

$G(q)$ is the gravity vector; Q is the input vector

Lagrange

- **Ví dụ: Cánh tay robot**



  - ❑ Các bước thực hiện (tt): $Q = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial \dot{q}}$

$$Q = \begin{bmatrix} mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} \\ m\ddot{r} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -mgr\cos(\theta) \\ mr\dot{\theta}^2 - mg\sin(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1\dot{\theta} \\ B_2\dot{r} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} mr^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & 2mr\dot{\theta} \\ -mr\dot{\theta} & B_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mgr\cos(\theta) \\ mg\sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ f \end{bmatrix}$$

$$M(q)\ddot{q} + V(q,\dot{q}) + G(q) = Q$$

$M(q)$ is the inertia matrix; $V(q,\dot{q})$ is the Coriolis/centripetal vector

$G(q)$ is the gravity vector; Q is the input vector

Hết chương 3

Bài tập về nhà.

Câu hỏi?

The only stupid question is the one that was not asked. (Câu hỏi ngu ngốc duy nhất là câu hỏi không được hỏi.)