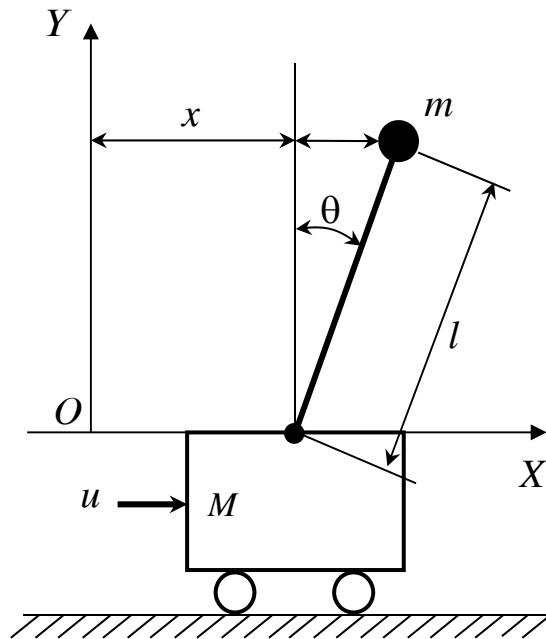


Mô hình hóa hệ con lắc ngược



Thông số của hệ thống:

M : trọng lượng xe [Kg]

m : trọng lượng con lắc [Kg]

l : chiều dài con lắc [m]

g : gia tốc trọng trường [m/s^2]

b_1 : hệ số ma sát ở trục quay

b_2 : hệ số ma sát giữa xe và đường ray

x : vị trí xe [m]

θ : góc giữa con lắc và phương thẳng đứng [rad]

u : lực tác động vào xe [N]

Vị trí xe (Cart):

$$\begin{cases} x_C = x \\ y_C = 0 \end{cases}$$

Vị trí vật nặng ở đầu con lắc (Pendulum):

$$\begin{cases} x_p = x + l \sin \theta \\ y_p = l \cos \theta \end{cases}$$

Vận tốc xe (Cart):

$$\begin{cases} \dot{x}_C = \dot{x} \\ \dot{y}_C = 0 \end{cases}$$

Vận tốc vật nặng ở đầu con lắc (Pendulum):

$$\begin{cases} \dot{x}_p = \dot{x} + l \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y}_p = -l \dot{\theta} \sin \theta \end{cases}$$

Động năng của xe:

$$T_C = \frac{1}{2} M \dot{x}_C^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}_C^2 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

Động năng của con lắc:

$$\begin{aligned} T_P &= \frac{1}{2} m \dot{x}_P^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}_P^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x} + l \dot{\theta} \cos \theta)^2 + \frac{1}{2} m (-l \dot{\theta} \sin \theta)^2 \\ &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + m l \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \\ &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m l \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta \end{aligned}$$

Tổng động năng của hệ xe-con lắc ngược:

$$T = T_C + T_P = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m l \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta$$

Thế năng trọng trường của xe:

$$U_C = M g y_C = 0$$

Thế năng trọng trường của con lắc:

$$U_P = m g y_P = m g l \cos \theta$$

Tổng thế năng của hệ xe-con lắc ngược:

$$U = U_C + U_P = m g l \cos \theta$$

Phân tử Lagrange:

$$L = T - U = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m l \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta - m g l \cos \theta$$

Năng lượng tiêu hao ở trục quay con lắc:

$$P_1 = \frac{1}{2} b_1 \dot{\theta}^2$$

Năng lượng tiêu hao giữa xe và đường ray:

$$P_2 = \frac{1}{2} b_2 \dot{x}^2$$

Tổng năng lượng tiêu hao:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{2} b_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} b_2 \dot{x}^2$$

Phương trình Euler-Lagrange:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial \dot{x}} = u \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial P}{\partial \dot{\theta}} = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial P}{\partial \dot{\theta}} = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow \frac{d}{dt} [(M+m)\dot{x} + ml\dot{\theta} \cos \theta] + b_2 \dot{x} = u \\ &\Rightarrow (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + b_2 \dot{x} = u \\ &\Rightarrow (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta = u + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta - b_2 \dot{x} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (2) &\Rightarrow \frac{d}{dt} [ml^2 \dot{\theta} + ml\dot{x} \cos \theta] - (-ml\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta + mgl \sin \theta) + b_1 \dot{\theta} = 0 \\ &\Rightarrow [ml^2 \ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta - ml\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta] + ml\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta - mgl \sin \theta + b_1 \dot{\theta} = 0 \\ &\Rightarrow ml^2 \ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta - mgl \sin \theta + b_1 \dot{\theta} = 0 \\ &\Rightarrow ml^2 \ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta = mgl \sin \theta - b_1 \dot{\theta} \end{aligned} \quad (4)$$

Đặt:

$$A_1 = M + m$$

$$B_1 = ml \cos \theta$$

$$C_1 = u + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta - b_2 \dot{x}$$

$$A_2 = ml \cos \theta$$

$$B_2 = ml^2$$

$$C_2 = mgl \sin \theta - b_1 \dot{\theta}$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{array}{l} A_1 \ddot{x} + B_1 \ddot{\theta} = C_1 \\ A_2 \ddot{x} + B_2 \ddot{\theta} = C_2 \end{array} \right. \\ \Rightarrow &\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = \frac{C_1 B_2 - C_2 B_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \\ \ddot{\theta} = \frac{C_2 A_1 - C_1 A_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \end{array} \right. \\ \Rightarrow &\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = \frac{(u + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta - b_2 \dot{x})ml^2 - (mgl \sin \theta - b_1 \dot{\theta})ml \cos \theta}{(M+m)ml^2 - m^2 l^2 \cos^2 \theta} \\ \ddot{\theta} = \frac{(mgl \sin \theta - b_1 \dot{\theta})(M+m) - (u + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta - b_2 \dot{x})ml \cos \theta}{(M+m)ml^2 - m^2 l^2 \cos^2 \theta} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \frac{(u + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta - b_2 \dot{x})l - (mgl \sin \theta - b_1 \dot{\theta}) \cos \theta}{(M + m)l - ml \cos^2 \theta} \\ \ddot{\theta} = \frac{(mgl \sin \theta - b_1 \dot{\theta})(M + m) - (u + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta - b_2 \dot{x})ml \cos \theta}{(M + m)ml^2 - m^2 l^2 \cos^2 \theta} \end{cases}$$

Đặt các biến trạng thái: $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = \theta, x_4 = \dot{\theta}$

Phương trình trạng thái mô tả hệ con lắc ngược:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{(u + mlx_4^2 \sin x_3 - b_2 x_2)l - (mgl \sin x_3 - b_1 x_4) \cos x_3}{(M + m)l - ml \cos^2 x_3} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{(mgl \sin x_3 - b_1 x_4)(M + m) - (u + mlx_4^2 \sin x_3 - b_2 x_2)ml \cos x_3}{(M + m)ml^2 - m^2 l^2 \cos^2 x_3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$$