

Chương 1. Giới hạn và liên tục

Bài 1. Tính giới hạn

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 5} - x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 5x - 1} - \sqrt{x^2 + 3x + 3})$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\cot \pi x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + 1}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \arctan(1+x) - \pi}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x^2} - \cos x}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 1}{3x^2 + 5} \right)^{2x^2 + x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4 + \cos x}}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \arctan x}{\pi} \right)^x$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{x+1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan 2x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\pi - 2 \arctan x)$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sqrt{1+2x} - e^x}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 + x^2}{x \tan x}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - (1+x)}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\sin x}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$$

Bài 2. Xét tính liên tục

- $f(x) = \begin{cases} \sin x \ln x & \text{với } x > 0 \\ a + x & \text{với } x \leq 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{e^{2x} - e^{-x}} & \text{với } x \neq 0 \\ a & \text{với } x = 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{|x|} & \text{với } x \neq 0 \\ a & \text{với } x = 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1) \sin \frac{\pi}{x-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ a & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - 1}{x} & \text{nếu } x > 0 \\ a + x^2 & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x) - x}{2x^2} & \text{nếu } x > 0 \\ a & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x} & \text{nếu } x > 0 \\ a & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{\sin x}}{x - \pi} & \text{nếu } x > \pi \\ a + x^2 & \text{nếu } x \leq \pi \end{cases}$

Chương 2. Tích phân

Bài 1. Tích phân bất định

1. $\int \frac{x + x^3}{1 + x^2 - x^4} dx$
2. $\int \frac{x^6}{x^2 + x - 2} dx$
3. $\int \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2(x - 1)} dx$
4. $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} \cdot dx$
5. $\int \frac{2x}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$
6. $\int \frac{x}{x^8 - 1} dx$
7. $\int \frac{x}{x^3 - 1} \cdot dx$
8. $\int \frac{x \cdot dx}{x^3 - 3x + 2}$
9. $\int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} \cdot dx$
10. $\int \frac{(x + 1)dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$
11. $\int \frac{(2x - 1)dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 3}}$
12. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 5}}$
13. $\int \frac{x \cdot \arctan x}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot dx$
14. $\int \frac{x \ln(1 + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot dx$
15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - x^3}}$
16. $\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2}$
17. $\int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx$
18. $\int \frac{dx}{(1 + e^x)^2}$

19. $\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1 + x^2)^{3/2}} dx$
20. $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$
21. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx$
22. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx$
23. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$
24. $\int \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$
25. $\int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x}$
26. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$
27. $\int \frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos 2x} dx$
28. $\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2 \cos^2 x)^2}$
29. $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{1 + x}}$
30. $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$
31. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x}$
32. $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^3 x}$

Bài 2. Tích phân xác định

1. $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{\sqrt{1 + e^x}} dx$
2. $\int_0^1 \sqrt{(1 - x^2)^3} dx$
3. $\int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}}$
4. $\int_0^3 \frac{dx}{(3 + x^2)^{\frac{5}{2}}}$

Bài 2. Đạo hàm của hàm ẩn

- (1) Tính $y'(x)$, $y''(x)$ biết $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định bởi phương trình

$$\ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arctan \frac{y}{x}$$

- (2) Tính z'_x, z'_y và dz biết $z = z(x, y)$ là hàm ẩn xác định bởi

(a) $\operatorname{arctg} z + z^2 = e^{xy}$

(b) $z - ye^{x/z} = 0$

(c) $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1$

(d) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

- (3) Tính $y'(x)$, $z'(x)$ biết $y = y(x)$, $z = z(x)$ xác định bởi

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^3 = 4 \end{cases}$$

- (4) Tính u'_x, u'_y biết $u = x^2 + y^2 + xyz$ và $z = z(x, y)$ xác định bởi

$$ze^z = ye^x + xe^y.$$

Bài 3. Đạo hàm và vi phân cấp cao

- (1) Cho $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Chứng minh rằng:

$$u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2} = \frac{2}{u}$$

- (2) Tính $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$ biết $u(x, y) = x + (y - 1) \arcsin \left(\sqrt{\frac{x}{y}} \right)$

- (3) Tính z''_{xy} biết hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi

$$3x + 2y + z = e^{-x-y-z}$$

- (4) Tìm $d^2 z$ biết:

(a) $z = x^2 \ln(x + y)$

(b) $z = \arctan \frac{y}{x}$

5. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{5x+1}} \cdot dx$

6. $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 1}}$

7. $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}} dx$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx$

9. $\int_{\pi}^{5\pi/4} \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \cdot dx$

10. $\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot dx$

11. $\int_1^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$

Chương 3. Hàm nhiều biến

Bài 1. Tính đạo hàm riêng

(1) $z = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$

(2) $z = \ln \tan \frac{x}{y}$

(3) $f(x, y, z) = \arctan \frac{y}{xz}$

(4) $z = \ln(u^2 + v^2)$, $u = xy$, $v = e^{x+y}$

(5) Cho $z = \ln(3x + 2y - 1)$, $x = e^t$, $y = \sin t$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{dz}{dt}$.

(6) Cho $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$, f là hàm khả vi. Chứng minh rằng:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \cos x + \frac{\partial u}{\partial x} \cos y = \cos x \cos y.$$

(7) Cho $z = f(xy + y^2)$, f là hàm khả vi. Rút gọn biểu thức

$$A = (x + 2y) \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}$$

(8) Cho $u = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{z}\right)$, f là hàm khả vi. Rút gọn biểu thức

$$B = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z}$$

(9) Tính $z'_x(0, 0)$, $z'_y(0, 0)$ với $z = \sqrt[3]{xy}$

Bài 4. Dùng vi phân tính gần đúng

1. $A = \sqrt{1,98^4 + 3,03^2}$
2. $B = \ln(\sqrt{1,03} + \sqrt[3]{0,99} - 1)$
3. $C = \arctan \frac{1 + 0,02^3}{0,99^2}$
4. $D = \sqrt{(1,04)^{1,99} + \ln(1,02)}$

Bài 5. Cực trị của hàm nhiều biến

1. Tìm cực trị các hàm sau:

- (a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$
- (b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 15xy$.
- (c) $f(x, y) = xy + 1000\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$
- (d) $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$
- (e) $f(x, y) = x + 2y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 5$
- (f) $f(x, y) = x^2 + y^2$ với điều kiện $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$
- (g) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$
- (h) $f(x, y) = xy$ với điều kiện $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$

2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

- (a) $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + x - y$, trên miền đóng D giới hạn bởi các đường $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 1$.
- (b) $f(x, y) = x^2 - y^2$ trên miền $D = \{x^2 + y^2 \leq 9\}$
- (c) $f(x, y) = xy$ trên miền $D = \left\{\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} \leq 1\right\}$
- (d) $z = 1 + xy - x - y$, trên miền đóng D giới hạn bởi $y = x^2$ và $y = 1$

Chương 4. Phương trình vi phân

A. Phương trình vi phân cấp 1

Bài 1. Giải các phương trình tách biến

- (1) $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$
- (2) $y' = x^2 + xy + \frac{y^2}{4} - 1$

- (3) $y' = (x + y + 1)^2$
- (4) $y' = \cos(x - y - 1)$

Bài 2 . Giải các phương trình đẳng cấp

- (1) $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$
- (2) $xy' - y + x \cos \frac{y}{x} = 0$
- (3) $xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}$
- (4) $y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}$
- (5) $y' = \frac{3x^2 - xy - y^2}{x^2}$
- (6) $y' = \frac{x^2 - xy + y^2}{xy}$

Bài 3. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

- (1) $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$
- (2) $y' + y = \frac{1}{e^x(1-x)}, y(2) = 1.$
- (3) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$
- (4) $(x^2 + y)dx = xdy$
- (5) $(y + \ln x)dx - xdy = 0$
- (6) $y' \cos y + \sin y = x$

Bài 4. Giải các phương trình Bernoulli

- (1) $y' - 2xy = 3x^3y^2$
- (2) $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$
- (3) $y' + 2y = y^2e^x$
- (4) $xy' + y = y^2 \ln x; y(1) = 1$
- (5) $ydx - (x^2y^2 + x)dy = 0$
- (6) $xy' - 2x\sqrt{y} \cos x = -2y$

Bài 5. Giải các phương trình vi phân toàn phần

- (1) $(x + y)dx + (x - y)dy = 0; y(0) = 0.$
- (2) $(1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$
- (3) $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$
- (4) $(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0$

B. Phương trình vi phân cấp 2

Bài 7. Giải các phương trình vi phân cấp 2 giảm cấp

(1) $(1 + x^2)y'' + 1 = 0$

(2) $y'' = \frac{y'}{x} + x^2$

(3) $(1 - x^2)y'' - xy' = 2, y(0) = 0, y'(0) = 0$

(4) $(y')^2 + 2yy'' = 0$

Bài 8. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng

(1) $y'' - 2y' + y = 2e^{2x}.$

(2) $y'' - 6y' + 9y = \cos 3x.$

(3) $2y'' + 3y' + y = xe^{-x}$

(4) $y'' + 2y' + 2y = x^2 - 4x + 3$

(5) $y'' - 4y' = 4x^2 + 3x + 2; y(0) = 0, y'(0) = 2$

(6) $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}, y(2) = y'(2) = 0$

(7) $4y'' - 4y' + y = xe^{\frac{1}{2}x}$

(8) $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x.$

(9) $y'' + 9y = \cos 3x + e^x$

(10) $y'' + y = 4xe^x$

(11) $y'' + y = 6 \sin x$

(12) $y'' - 2y' + y = xe^x$

(13) $y'' - 4y' = x^2 + 2x + 3$

(14) $y'' - 2y' = 2 \cos^2 x$

9. $y_{n+2} = 4y_{n+1} - 5y_n + 3n^2$

10. $y_{n+2} = 3y_{n+1} - 4y_n + 3n^2 + 2$

11. $y_{n+2} + y_n = n + 1$

12. $y_{n+2} + y_n = 3, y_0 = 0, y_1 = 1$

13. $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2n + 1, y_0 = 0, y_1 = 1$

14. $y_{n+2} - y_n = 0, y_0 = 0, y_1 = 1$

15. $y_{n+2} + y_n = 2^n, y_0 = 0, y_1 = 1$

16. $x_{n+2} - 8x_{n+1} + 16x_n = 6(n+1)4^{n+2}$

17. $x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = -4 + (5n+7).2^n + 4.3^{n+1}$

Bài 2. Hệ phương trình sai phân tuyến tính cấp 1

1. $\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 2y_n \end{cases}, x_0 = 2, y_0 = -1$

2. $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 8y_n \\ y_{n+1} = 2x_n - 6y_n \end{cases}, x_0 = -1, y_0 = 2$

3. $\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}, x_0 = -1, y_0 = -5$

4. $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 3y_n \\ y_{n+1} = 3x_n - 4y_n \end{cases}, x_0 = -1, y_0 = 1$

5. $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = -x_n + y_n \end{cases}, x_0 = 0, y_0 = 1$

6. $\begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 6y_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n \end{cases}$

Chương 5. Phương trình sai phân

Bài 1. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

1. $5y_{n+2} + 6y_{n+1} - 11y_n = 2n - 1$

2. $5y_{n+2} - 6y_{n+1} + 5y_n = 3^n$

3. $5y_{n+2} - 6y_{n+1} + 5y_n = n^2 + 1$

4. $y_{n+2} + y_n = 2^n$

5. $y_{n+2} + 5y_n = 5n^2 - 2n - 1$

6. $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2^{-2n}$

7. $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = n + 5$

8. $y_{n+2} = 5y_{n+1} - 6y_n + n^2$