GIẢI TÍCH I
CHƯƠNG I GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC
BÀI 1 GIỚI HẠN HÀM SỐ

1. Ôn tập

1. Tìm $I = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}.\left(\frac{1}{x-4} + \frac{1}{x+4}\right)$.

G: Ta có
$$I = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}.\frac{x+4+x-4}{(x-4)(x+4)} = lim_{x\to 0}\frac{2}{x^2-16} = \frac{2}{-16} = -\frac{1}{8}.$$

2. Tìm $I = lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$.

G: Nhân cả tử và mẫu với liên hợp của tử, ta được
$$I = lim_{x\to 0}\frac{2+x-(2-x)}{x.(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})} = lim_{x\to 0}\frac{2x}{x.(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})} = lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3. Tìm $I = lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$.

G: Nhân và chia với liên hợp, ta có
$$I = lim_{x\to +\infty}\frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

4. Tìm $I = \lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x+5} + 2x\right)$.

G: Nhân và chia với liên hợp, ta có
$$I = \lim_{x\to -\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+2x+5}+2x\right).\left(\sqrt{4x^2+2x+5}-2x\right)}{\sqrt{4x^2+2x+5}-2x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+2x+5}-2x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{2+\frac{5}{x}}{-\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}-2}$$
$$= \frac{2}{-2-2} = -\frac{1}{2}.$$

5. C3. Tìm $I = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

G: Đặt $t = \sqrt[6]{\cos x} \to \begin{cases} \sqrt{\cos x} = t^3 \\ \sqrt[3]{\cos x} = t^2 \\ \cos x = t^6 \to \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^{12}. \end{cases}$

Và khi $x \to 0$ thì $t = \sqrt[6]{\cos x} \to 1$. Nên
$$I = \lim_{t\to 1}\frac{t^3-t^2}{1-t^{12}} = \lim_{t\to 1}\frac{t^2(t-1)}{(1-t^6).(1+t^6)} = \lim_{t\to 1}\frac{t^2(t-1)}{(1-t)(1+t+t^2)(1+t^3)(1+t^6)}$$
$$= \lim_{t\to 1}\frac{-t^2}{(1+t+t^2)(1+t^3)(1+t^6)} = -\frac{1}{12}.$$

- Bài tập

6. C1. Tìm $I = \lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+5} - x\right)$.

G: Nhân và chia với liên hợp, ta có
$$I = \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+5}-x\right).\left(\sqrt{x^2+2x+5}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x+5}+x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{2x+5}{\sqrt{x^2+2x+5}+x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{2+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1} = \frac{2}{1+1}$$
$$= 1.$$

7. C2. Tìm $I = \lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2-5x-1} - \sqrt{x^2+3x+3}\right)$.

G: Nhân và chia với liên hợp, ta có

$$I=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-5x-1-(x^2+3x+3)}{\sqrt{x^2-5x-1}+\sqrt{x^2+3x+3}}=lim_{x\to-\infty}\frac{-8x-4}{\sqrt{x^2-5x-1}+\sqrt{x^2+3x+3}}$$
$$=lim_{x\to-\infty}\frac{-8-\frac{4}{x}}{-\sqrt{1-\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\frac{-8}{-1-1}=4.$$

8. C3. Tìm $I=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

G: Đặt $t=\sqrt[6]{\cos x}\to\begin{cases}\sqrt{\cos x}=t^3\\ \sqrt[3]{\cos x}=t^2\\ \cos x=t^6\to\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-t^{12}.\end{cases}$

Và khi $x\to0$ thì $t=\sqrt[6]{\cos x}\to1$. Nên

$$I=\lim_{t\to1}\frac{t^3-t^2}{1-t^{12}}=\lim_{t\to1}\frac{t^2(t-1)}{(1-t^6).(1+t^6)}=\lim_{t\to1}\frac{t^2(t-1)}{(1-t)(1+t+t^2)(1+t^3)(1+t^6)}$$
$$=\lim_{t\to1}\frac{-t^2}{(1+t+t^2)(1+t^3)(1+t^6)}=-\frac{1}{12}.$$

9. C4. Tìm $I=\lim_{x\to1}\left(\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$.

G: Đặt $t=\sqrt[6]{x}\to x=t^6\to\begin{cases}\sqrt{x}=t^3\\ \sqrt[3]{x}=t^2\end{cases}$ và $t\to1$ khi $x\to1$. Nên

$$I=\lim_{t\to1}\left(\frac{3}{1-t^3}-\frac{2}{1-t^2}\right)=lim_{t\to1}\left(\frac{3}{(1-t)(1+t+t^2)}-\frac{2}{(1-t)(1+t)}\right)=\lim_{t\to1}\frac{3(1+t)-2(1+t+t^2)}{(1-t)(1+t+t^2)(1+t)}$$
$$=lim_{t\to1}\frac{-2t^2+t+1}{(1-t)(1+t+t^2)(1+t)}=lim_{t\to1}\frac{2t^2-t-1}{(t-1)(1+t+t^2)(1+t)}$$
$$=lim_{t\to1}\frac{2t+1}{(1+t+t^2)(1+t)}=\frac{3}{3.2}=\frac{1}{2}.$$

10. C5. Tìm $I=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}.\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)$.

G: Ta có

$$I=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}.\frac{x+1+x-1}{(x-1)(x+1)}=lim_{x\to0}\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{-1}=-2.$$

11. C6. Tìm $I=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

G: Có $I=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+x^{\frac{1}{2}}}}}{\sqrt{x+1}}$. Ngắt bỏ VCL bậc thấp hơn được

$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+x^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1.$$

2. Giới hạn lượng giác

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1;\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1;\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

*** $y=\arcsin x\to x=\sin y$; $y=\arctan x\to x=\tan y$; $\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1=\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}$.**

12. Tìm $I=lim_{x\to0}\frac{\cos 5x-\cos x}{x^2}$.

G: Vì $\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\ \sin\frac{a-b}{2}$ nên

$$I=lim_{x\to0}\frac{-2\sin 3x.\sin 2x}{x^2}=lim_{x\to0}-\frac{\sin 3x}{3x}.\frac{\sin 2x}{2x}.12=-1.1.12=-12.\quad\left(\text{vì } lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\right)$$

13. Tìm $I=lim_{x\to0}\left(\frac{\cos 4\sqrt{x}-1}{x}+\frac{\cos 6x-1}{x^2}\right)$.

G: Vì $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ nên

$I = lim_{x\to 0}\left(-\frac{1-cos\,4\sqrt{x}}{x} - \frac{1-cos\,6x}{x^2}\right) = lim_{x\to 0}\left(-\frac{1-cos\,4\sqrt{x}}{\left(4\sqrt{x}\right)^2}.16 - \frac{1-cos\,6x}{(6x)^2}.36\right) = -\frac{1}{2}.16 - \frac{1}{2}.36 = -27.$

14. Tìm $I = \lim_{x\to\infty} x^2.\left(1-\cos\frac{2}{x}\right).$

G: Đặt $t = \frac{1}{x} \to 0$ **khi** $x \to \infty$ **và** $x = \frac{1}{t}$. **Nên**

$$I = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}.(1-\cos 2t) = \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos 2t}{t^2}.$$

Vì $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ **nên** $I = \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(2t)}{(2t)^2}.4 = \frac{1}{2}.4 = 2.$

15. Tìm $I = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+5x^2}-\cos x}{x^2}.$

G: Ta có

$$I = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+5x^2}-1+1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+5x^2}-1}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = lim_{x\to 0}\frac{1+5x^2-1}{x^2(\sqrt{1+5x^2}+1)}+\frac{1}{2}$$

$$= lim_{x\to 0}\frac{5}{\sqrt{1+5x^2}+1}+\frac{1}{2} = \frac{5}{1+1}+\frac{1}{2} = 3. \quad \left(vì\ lim_{x\to 0}\ \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\right)$$

16. Tính $I = lim_{x\to 1}\frac{cos\left(\frac{\pi}{2}.x\right)}{1-x}.$

G: Đặt $t = 1-x \to 0$ **khi** $x \to 1$. **Và** $x = 1-t$ **nên**

$$I = lim_{t\to 0}\frac{cos\left(\frac{\pi}{2}.(1-t)\right)}{t} = lim_{t\to 0}\frac{cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)}{t} = lim_{t\to 0}\frac{sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{t} = lim_{t\to 0}\frac{sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{\frac{\pi}{2}t}.\frac{\pi}{2} = 1.\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2}. \quad \left(vì\ lim_{x\to 0}\ \frac{sin\,x}{x} = 1\right)$$

17. C12. Tìm $I = \lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}.$

G: Đặt $t = 1-x \to 0$ **khi** $x \to 1$ **và** $x = 1-t$. **Nên**

$$I = \lim_{t\to 0}\ t.\tan\frac{\pi(1-t)}{2} = \lim_{t\to 0}\ t.\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{2}\right) = \lim_{t\to 0} t.\cot\frac{\pi t}{2} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan\frac{\pi t}{2}}.$$

Vì $lim_{x\to 0}\frac{tan\,x}{x} = 1$ **nên** $I = lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi t}{2}}{tan\frac{\pi t}{2}}.\frac{2}{\pi} = \frac{1}{1}.\frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$

- Bài tập

18. C7. Tìm $I = \lim_{x\to\infty} x^2\left(\cos\frac{1}{x}-1\right).$

G: Đặt $t = \frac{1}{x} \to 0$ **khi** $x \to \infty$. **Nên**

$$I = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}.(\cos t-1) = \lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t^2} = lim_{t\to 0} -\frac{1-cos\,t}{t^2} = -\frac{1}{2}. \qquad \left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\right)$$

*** Chú ý:** $lim_{x\to+\infty}\ arctan\ x = arctan\ (+\infty) = \frac{\pi}{2}; arctan\ (-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$

3. Nguyên lý kẹp

- ĐL: Nếu $f(x) \le g(x) \le h(x)\ \forall x \in (a,b)\backslash\{x_o\}$ **và** $lim_{x\to x_o} f(x) = lim_{x\to x_o} h(x) = L$ **thì**

$$lim_{x\to x_o} g(x) = L.$$

ĐL này gọi là nguyên lý kẹp.

HQ: Nếu

$$\begin{cases} 0 \le |f(x)| \le g(x)\ \forall x \in (a,b)\backslash\{x_o\} \\ lim_{x\to x_o}\ g(x) = 0 \end{cases} \to lim_{x\to x_o} f(x) = 0.$$

19. Tìm $I = \lim_{x\to 2}(x-2)^3\sin\frac{1}{x-2}.$

G: Ta có, vì $\left|\sin\frac{1}{x-2}\right| \le 1$ **nên**

$$0 \le \left|(x-2)^3 \sin\frac{1}{x-2}\right| \le \left|(x-2)^3\right| \to 0$$

khi $x \to 2$. Nên theo Nguyên lý kẹp, $I = \lim_{x\to 2}(x-2)^3 \sin\frac{1}{x-2} = 0$.

20. Tìm $I = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+\sin x}{x^2}$.

G: Ta có

$$I = \lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{\sin x}{x^2}\right) = 2 + \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2}.$$

- Đặt $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$. Ta có $0 \le \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \left|\frac{1}{x^2}\right| \to 0$

khi $x \to \infty$. Nên theo Nguyên lý kẹp, có $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2} = 0 \to I = 2+0 = 2$.

4. Số e

*** $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2,7 = \lim_{t=\frac{1}{x}\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$.**

$$lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x};\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = ln\, a.$$

21. Tìm $I = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^3}$.

G: Ta có, vì $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ nên $I = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}.\frac{1}{x}\right) = 1.\infty = \infty$.

22. Tìm $I = lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{e^x-e}$.

G: Đặt $t = x-1 \to 0$ khi $x \to 1$ và $x = t+1$ nên

$$I = lim_{t\to 0}\frac{(t+1)^2-1}{e^{t+1}-e} = lim_{t\to 0}\frac{t^2+2t}{e^t.e-e} = lim_{t\to 0}\frac{t(t+2)}{e(e^t-1)} = lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1}.\frac{t+2}{e} = \frac{1}{1}.\frac{2}{e}$$
$$= \frac{2}{e}. \quad \left(v\text{ì } lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1\right)$$

23. Tìm $I = lim_{x\to 3}\frac{2^x-8}{x^2-9}$.

G: Đặt $t = x-3 \to 0$ khi $x \to 3$ và $x = t+3$. Nên

$$I = lim_{t\to 0}\frac{2^{t+3}-8}{(t+3)^2-9} = lim_{t\to 0}\frac{2^t.8-8}{t^2+6t} = lim_{t\to 0}\frac{8.(2^t-1)}{t(t+6)} = lim_{t\to 0}\frac{2^t-1}{t}.\frac{8}{t+6} = ln\,2.\frac{8}{6}$$
$$= \frac{4ln\,2}{3} \quad \left(v\text{ì } \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = ln\, a\right)$$

24. Tìm $I = lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{3^x-3}$.

G: Đặt $t = x-1 \to 0$ khi $x \to 1$ và $x = t+1$ nên

$$I = lim_{t\to 0}\frac{(t+1)^3-1}{3^{t+1}-3} = lim_{t\to 0}\frac{t^3+3t^2+3t}{3^t.3-3} = lim_{t\to 0}\frac{t\left(t^2+3t+3\right)}{3(3^t-1)} = lim_{t\to 0}\frac{t}{3^t-1}.\frac{t^2+3t+3}{3}$$
$$= lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{3^t-1}{t}}.\frac{t^2+3t+3}{3} = \frac{1}{ln\,3}.\frac{3}{3} = \frac{1}{ln\,3}. \quad \left(v\text{ì } lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = ln\, a\right)$$

5. Dạng 1^∞

- Nếu $\begin{cases} lim_{x\to x_o} u(x) = 1 \\ lim_{x\to x_o} v(x) = \infty \end{cases}$ thì

$$lim_{x\to x_o}u^v = 1^\infty = e^{lim_{x\to x_o}[v.(u-1)]}.$$

25. C13. Tìm $I = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+2}\right)^{4x}$.

G: Ta có, với $\begin{cases} u = \frac{3x+1}{3x+2} \to 1 \\ v = 4x \to \infty \end{cases}$ khi $x \to \infty$ thì

$$I = lim_{x\to x_o}u^v = 1^\infty = e^{lim_{x\to x_o}[v.(u-1)]} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} 4x.\left(\frac{3x+1}{3x+2}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} 4x.\frac{-1}{3x+2}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x}{3x+2}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4}{3+\frac{2}{x}}} = e^{-\frac{4}{3}}.$$

Bài 2 VÔ CÙNG BÉ

1. ĐN

- ĐN: Cho HS $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a,b)\backslash\{x_o\}$. HS $f(x)$ gọi là 1 VCB (vô cùng bé) khi $x\to x_o$ nếu

$$\lim_{x\to x_o} f(x)=0.$$

VD. Hàm $\sin(x-2)$ là 1 VCB khi $x\to 2$.

- Khi $x\to 0$, ta có các VCB là: $\sin x$; $\tan x$; $\arcsin x$; e^x-1; a^x-1; $\ln(1+x)$; $(1+x)^a-1$.

2. So sánh VCB

- ĐN: Cho 2 VCB $f(x)$ và $g(x)$ khi $x\to x_o$ (tức $lim_{x\to x_o} f(x)=0$). Xét $\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

*** Nếu $\lim_{x\to x_o}\frac{f}{g}=L=0$ thì f gọi là VCB bậc cao hơn g, ký hiệu là $f=o(g)$ khi $x\to x_o$.**

*** Nếu $\lim_{x\to x_o}\frac{f}{g}=L=\infty$ thì f gọi là VCB bậc thấp hơn g khi $x\to x_o$.**

*** Nếu $\lim_{x\to x_o}\frac{f}{g}=L=1$ thì f và g gọi là 2 VCB tương đương, ký hiệu $f\sim g$ khi $x\to x_o$.**

*** Nếu $\lim_{x\to x_o}\frac{f}{g}=L\neq 0,1,\infty$ thì ta nói f và g là 2 VCB cùng bậc khi $x\to x_o$.**

VD. Khi $x\to 0$, ta có $lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1=lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$ nên $\sin x\sim x\sim \tan x$ khi $x\to 0$.

26. So sánh các VCB $a=\sqrt[3]{1-2x}-1$; $b=\sin x$ khi $x\to 0$.

G: Có a, b là các VCB khi $x\to 0$. Xét

$$lim_{x\to 0}\frac{a}{b}=lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-2x}-1}{\sin x}=lim_{x\to 0}\frac{1-2x-1}{\sin x.\left(\sqrt[3]{(1-2x)^2}+\sqrt[3]{1-2x}+1\right)}$$
$$=lim_{x\to 0}\frac{-2x}{\sin x.\left(\sqrt[3]{(1-2x)^2}+\sqrt[3]{1-2x}+1\right)}=lim_{x\to 0}\frac{-2}{\sqrt[3]{(1-2x)^2}+\sqrt[3]{1-2x}+1}.\frac{x}{\sin x}$$
$$=-\frac{2}{3}.1=-\frac{2}{3}.$$

Vậy a, b là các VCB cùng bậc khi $x\to 0$.

27. Ca. So sánh các VCB $f=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$; $g=x^2$ khi $x\to 0$.

G: Có f, g là các VCB khi $x\to 0$. Xét

$lim_{x\to 0}\frac{f}{g}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{x^2\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^2\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\frac{2}{0.(1+1)}=\infty$.

Nên f là VCB bậc thấp hơn g khi $x\to 0$.

28. Cb. So sánh các VCB $f=x-1$; $g=\cot\frac{\pi x}{2}$ khi $x\to 1$.

G: Có f, g là các VCB khi $x\to 1$. Xét $lim_{x\to 1}\frac{f}{g}=\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\cot\frac{\pi x}{2}}$.

- Đặt $t=x-1\to 0$ khi $x\to 1$. Và $lim_{x\to 1}\frac{f}{g}=lim_{t\to 0}\frac{t}{\cot\frac{\pi(t+1)}{2}}=lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi(t+1)}{2}\right)}=\cdots$

3. Quy tắc ngắt bỏ VCB bậc cao hơn trong tổng hiệu

- ĐL: Nếu $g=o(f)$ (tức g là VCB bậc cao hơn f) khi $x\to x_o$ thì

$$lim_{x\to x_o}(f\pm g)=lim_{x\to x_o} f.$$

29. Tìm $I=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+\sin^3 x-x^6}{5x^2-\tan^4 x}$.

G: Ta có khi $x\to 0$, vì $\sin x\sim x\to(\sin x)^3\sim x^3=o\left(x^2\right)$; $x^6=o(x^2)$; $(\tan x)^4\sim x^4=o(x^2)$ khi $x\to 0$. Theo Quy tắc ngắt bỏ VCB bậc cao hơn trong tổng hiệu, có $I=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{5x^2}=\frac{3}{5}$.

- ĐL2: Quy tắc thay thế tương đương trong tích thương: Nếu khi $x\to x_o$, ta có $f\sim f_1$; $g\sim g_1$ $\left(tức\ lim_{x\to x_o}\frac{f}{f_1}=1\right)$ thì

$$\begin{cases} lim_{x\to x_o}(f.g)=lim_{x\to x_o}(f_1.g_1); \\ lim_{x\to x_o}\dfrac{f}{g}=lim_{x\to x_o}\dfrac{f_1}{g_1}. \end{cases}$$

- (Một số VCB tương đương) Khi $x \to 0$, ta có

$$\sin x \sim x; \tan x \sim x \sim \arcsin x;$$
$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2; 1-\cos ax \sim \frac{1}{2}.(ax)^2 = \frac{a^2x^2}{2};$$
$$e^x - 1 \sim x; a^x - 1 \sim x\ln a; \ln(1+x) \sim x;$$
$$(1+x)^a - 1 \sim a.x; \sqrt{1+x} - 1 = (1+x)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2}.x; \sqrt[3]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{3}.x$$

30. Tìm $I = lim_{x\to 0} \frac{\cos 7x - \cos 3x}{x.\tan 4x}$.

G: Vì $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$ nên $I = lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x \sin 2x}{x.\tan 4x}$.

Vì khi $x \to 0$, có $\sin x \sim x \sim \tan x$ nên $\sin 5x \sim 5x; \sin 2x \sim 2x; \tan 4x \sim 4x$. Theo Quy tắc thay thế tương đương, được $I = lim_{x\to 0}\frac{-2.5x.2x}{x.4x} = -5$.

31. C7. Tìm $I = \lim_{x\to\infty} x^2\left(\cos\frac{1}{x} - 1\right)$.

G: Đặt $t = \frac{1}{x} \to \frac{1}{\infty} = 0$ khi $x \to \infty$ và $x = \frac{1}{t}$. Nên

$$I = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}.(\cos t - 1) = \lim_{t\to 0}\frac{\cos t - 1}{t^2} = -\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}.$$

Vì khi $t \to 0$ thì $1 - \cos t \sim \frac{1}{2}t^2$. Nên thay thế VCB tương đương, được

$$I = -\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}t^2}{t^2} = -\frac{1}{2}.$$

32. Tính $I = lim_{x\to 1}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}.x\right)}{1-x}$.

G: Đặt $t = 1 - x \to 0$ khi $x \to 1$. Và $x = 1 - t$ nên $I = lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}.(1-t)\right)}{t} = lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}t\right)}{t} = lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{t}$.

- Vì khi $x \to 0$, thì $\sin x \sim x \to \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \sim \frac{\pi}{2}t$ nên $I = lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}t}{t} = \frac{\pi}{2}$.

33. Tính $I = lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{e^x - e}$.

G: Đặt $t = x - 1 \to 0$ khi $x \to 1$ và $x = t + 1$ nên $I = lim_{t\to 0}\frac{(t+1)^3 - 1}{e^{t+1} - e} = lim_{t\to 0}\frac{t^3+3t^2+3t}{e^t.e - e} = lim_{t\to 0}\frac{t(t^2+3t+3)}{e(e^t - 1)}$.

- Vì $t \to 0$, nên $e^t - 1 \sim t$. Thay thế tương đương được $I = lim_{t\to 0}\frac{t(t^2+3t+3)}{e.t} = lim_{t\to 0}\frac{t^2+3t+3}{e} = \frac{3}{e}$.

34. Tính $I = lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{3^x - 3}$.

G: Đặt $t = x - 1 \to 0$ khi $x \to 1$ và $x = t + 1$ nên $I = lim_{t\to 0}\frac{(t+1)^2-1}{3^{t+1}-3} = lim_{t\to 0}\frac{t^2+2t}{3^t.3-3} = lim_{t\to 0}\frac{t(t+2)}{3(3^t-1)}$.

- Vì khi $x \to 0$, thì $a^x - 1 \sim x\ln a$ nên $3^t - 1 \sim t.\ln 3$. Vậy $I = lim_{t\to 0}\frac{t(t+2)}{3.t.\ln 3} = lim_{t\to 0}\frac{t+2}{3.\ln 3} = \frac{2}{3\ln 3}$.

35. So sánh các VCB $a = \sqrt[3]{1-2x} - 1; b = \sin x$ khi $x \to 0$.

G: Có a, b là các VCB khi $x \to 0$. Xét $lim_{x\to 0}\frac{a}{b} = lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-2x}-1}{\sin x}$.

- Vì khi $x \to 0$, thì $(1+x)^a - 1 \sim a.x$ nên $\sqrt{1+x} - 1 = (1+x)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2}x$. Hay $\sqrt[3]{1-2x} - 1 = \left(1 + (-2x)\right)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{1}{3}.(-2x)$; $\sin x \sim x$ nên thay thế tương đương, ta có $L = lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}.(-2x)}{x} = -\frac{2}{3} \neq 0; 1; \infty$.

Vậy a, b là các VCB cùng bậc khi $x \to 0$.

36. So sánh các VCB $a = 1 - \cos 3x; b = \sin 4x$ khi $x \to 0$.

G: Có a, b là các VCB khi $x \to 0$. Xét $lim_{x\to 0}\frac{a}{b} = lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\sin 4x}$.

- Vì khi $x \to 0$, thì $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ nên $1 - \cos 3x \sim \frac{1}{2}.(3x)^2 = \frac{9x^2}{2}$; $\sin 4x \sim 4x$. Áp dụng Thay thế tương đương, được $L = lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{9x^2}{2}\right)}{4x} = lim_{x\to 0}\frac{9x}{8} = 0$.

- Vậy a là VCB bậc cao hơn b khi $x \to 0$.

37. Ce. So sánh các VCB $f = \cos\frac{2}{x} - \cos\frac{1}{x}; g = \frac{1}{x}; x \to \infty$.

G: Có f, g là các VCB khi $x \to \infty$. Đặt $t = \frac{1}{x} \to 0$ khi $x \to \infty$. Suy ra $L = lim_{t\to 0}\frac{f}{g} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos 2t - \cos t}{t}$.

- Vì $cos\ a - cos\ b = -2\ sin\frac{a+b}{2}\ sin\frac{a-b}{2}$ nên

$$L = \lim_{t\to 0}\frac{-2\ sin\dfrac{3t}{2}\ sin\dfrac{t}{2}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{-2.\dfrac{3t}{2}.\dfrac{t}{2}}{t} = lim_{t\to 0}\left(-\frac{3}{2}t\right) = 0. \quad \left(vì\ sin\frac{3t}{2}\sim\frac{3t}{2};\ sin\frac{t}{2}\sim\frac{t}{2}\ khi\ t\to 0\right)$$

- Nên f là VCB bậc cao hơn g khi $x \to \infty$.

- Bài tập:

38. C8. Tìm $I = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x^2}-\cos x}{x^2}$. $\left(\frac{0}{0}\right)$

G: Tách

$$I = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+2x^2}-1)+(1-\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x^2}-1}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

- Vì khi $x \to 0$, có $\begin{cases}\sqrt{1+2x^2}-1\sim\frac{1}{2}.2x^2 = x^2\\ 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\end{cases}$ nên thay thế VCB tương đương, được

$$I = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2}x^2}{x^2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

39. C9. Tìm $I = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5}-\sqrt{4+\cos x}}{x^2}$.

G: Nhân tử và mẫu với liên hợp của tử, ta có

$$I = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{4+\cos x}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{4+\cos x}\right)}{x^2\left(\sqrt{5}+\sqrt{4+\cos x}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\left(\sqrt{5}+\sqrt{4+\cos x}\right)}.$$

- Vì khi $x \to 0$, có $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$. Nên thay thế VCB tương đương được

$$I = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2}x^2}{x^2\left(\sqrt{5}+\sqrt{4+\cos x}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{4+\cos x}\right)} = \frac{\sqrt{5}}{20}.$$

40. C10. Tìm $I = \lim_{x\to 2}\frac{2^x - x^2}{x-2}$.

G: Đặt $t = x-2 \to 0$ khi $x \to 2$. Và $x = t+2$ nên

$$I = \lim_{t\to 0}\frac{2^{t+2}-(t+2)^2}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{2^t.4-t^2-4t-4}{t} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{4.(2^t-1)-t^2-4t}{t}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{4(2^t-1)}{t}-t-4\right).$$

- Vì khi $t \to 0$ có $a^x - 1\sim x\ ln\ a$, nên $2^t - 1\sim t\ ln\ 2$. Nên thay thế VCB tương đương, được

$$I = \lim_{t\to 0}\left(\frac{4.t\ ln\ 2}{t}-t-4\right) = \lim_{t\to 0}(\ 4\ ln\ 2 - t - 4) = 4\ln 2 - 4.$$

41. C11. Tìm $I = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1+x^2}{x.\ \tan x}$.

G: Ta có, vì khi $x \to 0$ có $tan\ x\sim sin\ x\sim x$ nên thay thế VCB tương đương, được

$$I = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1+x^2}{x.x} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^3}-1)+x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^3}-1}{x^2}+1\right).$$

- Vì khi $x \to 0$, thì $e^x - 1\sim x$ suy ra $e^{x^3}-1\sim x^3$. Nên thay thế VCB tương đương, được

$$I = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3}{x^2}+1\right) = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1.$$

42. C12. Tìm $I = \lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$.

G: Đặt $t = 1-x \to 0$ khi $x \to 1$ và $x = 1-t$. Nên

$$I = \lim_{t\to 0}\ t.\tan\frac{\pi(1-t)}{2} = \lim_{t\to 0}\ t.\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{2}\right) = \lim_{t\to 0}t.\cot\frac{\pi t}{2} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan\dfrac{\pi t}{2}}.$$

- Vì khi $t \to 0$, có $\tan\frac{\pi t}{2}\sim\frac{\pi t}{2}$. Nên thay thế VCB tương đương được

$$I=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\pi t}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

4. VCL

a) ĐN. HS $f(x)$ gọi là 1 VCL (vô cùng lớn) khi $x\to x_o$ nếu

$$\lim_{x\to x_o} f(x)=\infty.$$

VD. Khi $x\to 0$, hàm $\frac{1}{x^3}$ là 1 VCL.

- Khi $x\to\infty$, hàm x^2 là 1 VCL.

b) So sánh VCL

- ĐN: Cho 2 VCL $f(x)$ và $g(x)$ khi $x\to x_o$. Xét $\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

*** Nếu $L=0$ thì f gọi là VCL bậc thấp hơn g khi $x\to x_o$.**

*** Nếu $L=\infty$ thì f gọi là VCL bậc cao hơn g khi $x\to x_o$.**

*** Nếu $L=1$ thì f và g gọi là 2 VCL tương đương khi $x\to x_o$.**

*** Nếu $L\neq 0,1,\infty$ thì ta nói f và g là 2 VCL cùng bậc khi $x\to x_o$.**

43. So sánh các VCL $f=x+\frac{1}{x}; g=x-\frac{1}{x}; x\to 0$.

G: Có f, g là các VCL khi $x\to 0$. Xét $lim_{x\to 0}\frac{f}{g}=lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}=lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=-1\neq 0,1,\infty$.

Nên f và g là các VCL cùng bậc khi $x\to 0$.

44. C1. Tìm $I=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+5}-x\right)$.

G: Nhân và chia với liên hợp, ta có

$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+5}-x\right).\left(\sqrt{x^2+2x+5}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x+5}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{\sqrt{x^2+2x+5}+x}.$$

- Ngắt bỏ VCL bậc thấp hơn, được

$$I=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x>0)}}\frac{2x}{\sqrt{x^2}+x}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x>0)}}\frac{2x}{x+x}=1.$$

45. C2. Tìm $I=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-5x-1}-\sqrt{x^2+3x+3}\right)$.

G: Nhân và chia với liên hợp, ta có

$$I=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-5x-1-\left(x^2+3x+3\right)}{\sqrt{x^2-5x-1}+\sqrt{x^2+3x+3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-8x-4}{\sqrt{x^2-5x-1}+\sqrt{x^2+3x+3}}.$$

- Ngắt bỏ VCL bậc thấp hơn, được

$$I=\lim_{x\to-\infty}\frac{-8x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}=\lim_{\substack{x\to-\infty\\(x<0)}}\frac{-8x}{|x|+|x|}=\lim_{\substack{x\to-\infty\\(x<0)}}\frac{-8x}{-x-x}=4.$$

46. Cb. So sánh các VCL $f=e^x+e^{-x}; g=e^x-e^{-x}$ khi $x\to-\infty$.

G: Có f, g là các VCL khi $x\to-\infty$. Xét $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=lim_{t=-x\to+\infty}\frac{e^{-t}+e^t}{e^{-t}-e^t}=lim_{t=\to+\infty}\frac{\frac{1}{e^t}+e^t}{\frac{1}{e^t}-e^t}=\cdots=-1$.

Nên …

- Dạng 1^∞

- Nếu $\begin{cases} lim_{x\to x_o} u(x)=1\\ lim_{x\to x_o} v(x)=\infty\end{cases}$ thì

$$lim_{x\to x_o}u^v=1^\infty=e^{lim_{x\to x_o}[v.(u-1)]}.$$

47. C13. Tìm $I=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+2}\right)^{4x}$.

G: Ta có, với $\begin{cases} u=\frac{3x+1}{3x+2}\to 1\\ v=4x\to\infty\end{cases}$ khi $x\to\infty$ thì

$$I=lim_{x\to x_o}u^v=1^\infty=e^{lim_{x\to x_o}[v.(u-1)]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}4x.\left(\frac{3x+1}{3x+2}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}4x.\frac{-1}{3x+2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x}{3x+2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4}{3+\frac{2}{x}}}=e^{-\frac{4}{3}}.$$

48. C14. Tìm $I=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{3x^2+5}\right)^{2x^2+x}$.

G: Ta có, đặt $\begin{cases} u=\frac{3x^2+1}{3x^2+5}\sim\frac{3x^2}{3x^2}\to 1 \\ v=2x^2+x\to\infty \end{cases}$ **khi** $x\to\infty$ **nên**

$$I=\lim_{x\to\infty}u^v=1^\infty=e^{lim_{x\to\infty}[v.(u-1)]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2+x).\left(\frac{3x^2+1}{3x^2+5}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2+x).\frac{-4}{3x^2+5}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-8x^2-8x}{3x^2+5}}=e^{lim_{x\to\infty}\frac{-8x^2}{3x^2}}$$
$$=e^{-\frac{8}{3}}.$$

49. C19. Tìm $I=\lim_{x\to0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

G: Ta có $I=lim_{x\to0^+}\left(cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$. **Đặt** $\begin{cases} u=cos\sqrt{x}\to cos\,0=1 \\ v=\frac{1}{x}\to\frac{1}{0}=\infty \end{cases}$ **khi** $x\to0$. **Nên**

$$I=lim_{x\to0^+}u^v=1^\infty=e^{lim_{x\to0^+}[v.(u-1)]}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}.(\cos\sqrt{x}-1)}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}-\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}}.$$

Vì khi $x\to0$, **thì** $1-cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right)^2=\frac{x}{2}$. **Nên thay thế VCB tương đương, được**

$$I=e^{\lim\limits_{x\to0^+}-\frac{\frac{x}{2}}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

- Bài tập:

50. C6. Tìm $I=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

G: Có $I=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+x^{\frac{1}{2}}}}}{\sqrt{x+1}}$. **Ngắt bỏ VCL bậc thấp hơn được**

$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+x^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1.$$

51. C14. Tìm $I=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{3x^2+5}\right)^{2x^2+x}$.

G: Ta có, đặt $\begin{cases} u=\frac{3x^2+1}{3x^2+5}\sim\frac{3x^2}{3x^2}\to 1 \\ v=2x^2+x\to\infty \end{cases}$ **khi** $x\to\infty$ **nên**

$$I=\lim_{x\to\infty}u^v=1^\infty=e^{lim_{x\to\infty}[v.(u-1)]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2+x).\left(\frac{3x^2+1}{3x^2+5}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2+x).\frac{-4}{3x^2+5}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-8x^2-8x}{3x^2+5}}=e^{lim_{x\to\infty}\frac{-8x^2}{3x^2}}$$
$$=e^{-\frac{8}{3}}.$$

52. C15. Tìm $I=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+1}{2x^2-5}\right)^{x^2}$.

G: Ta có, đặt $\begin{cases} u=\frac{2x^2+1}{2x^2-5}\sim\frac{2x^2}{2x^2}\to 1 \\ v=x^2\to\infty \end{cases}$ **khi** $x\to\infty$ **nên**

$$I=lim_{x\to\infty}u^v=1^\infty=e^{lim_{x\to\infty}[v.(u-1)]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x^2.\left(\frac{2x^2+1}{2x^2-5}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x^2.\frac{6}{2x^2-5}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2}{2x^2-5}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2}{2x^2}}=e^3.$$

53. C16. Tìm $I=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{3x}$.

G: Ta có, đặt $\begin{cases} u=\frac{x+2}{x+1}\sim\frac{x}{x}\to 1 \\ v=3x\to\infty \end{cases}$ **khi** $x\to\infty$ **nên**

$$I=lim_{x\to\infty}u^v=1^\infty=e^{lim_{x\to\infty}[v.(u-1)]}=e^{lim_{x\to\infty}3x\left(\frac{x+2}{x+1}-1\right)}=e^{lim_{x\to\infty}3x.\frac{1}{x+1}}=e^{lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x+1}}=e^{lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x}}=e^3.$$

54. C17. Tìm $I=\lim_{x\to1}(1+\sin\pi x)^{\cot\pi x}$.

G: Ta có, đặt $\begin{cases} u=1+sin\,\pi x\to 1+sin\,\pi=1 \\ v=cot\,\pi x\to cot\,\pi=\frac{cos\,\pi}{sin\,\pi}=\frac{-1}{0}=\infty \end{cases}$ **khi** $x\to1$ **nên**

$$I=lim_{x\to1}u^v=1^\infty=e^{lim_{x\to1}[v.(u-1)]}=e^{\lim\limits_{x\to1}(\cot\pi x.\sin\pi x)}=e^{\lim\limits_{x\to1}(\cos\pi x)}=e^{cos\,\pi}=e^{-1}.$$

55. C18. Tìm $I=\lim_{x\to 0}\left(1-2x^2\right)^{\cot^2 x}$.

G: Ta có, đặt $\begin{cases} u=1-2x^2\to 1-0=0 \\ v=cot^2x\to cot^2 0=\frac{cos^2 0}{sin^2 0}=\frac{1}{0}=\infty \end{cases}$ khi $x\to 0$. Nên

$$I=lim_{x\to 0}\, u^v=1^\infty=e^{lim_{x\to 0}[v.(u-1)]}=e^{lim_{x\to 0}\,cot^2x.(-2x^2)}=e^{lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{tan^2x}}.$$

Vì khi $x\to 0$, có $tan\,x\sim x\to tan^2x\sim x^2$. Nên thay thế VCB tương đương, được

$$I=e^{lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{x^2}}=e^{-2}.$$

56. C19. Tìm $I=\lim_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

G: Ta có $I=lim_{x\to 0^+}\left(cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$. Đặt $\begin{cases} u=cos\sqrt{x}\to cos\,0=1 \\ v=\frac{1}{x}\to\frac{1}{0}=\infty \end{cases}$ khi $x\to 0$. Nên

$$I=lim_{x\to 0^+}u^v=1^\infty=e^{lim_{x\to 0^+}[v.(u-1)]}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}.(\cos\sqrt{x}-1)}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}-\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}}.$$

Vì khi $x\to 0$, thì $1-cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right)^2=\frac{x}{2}$. Nên thay thế VCB tương đương, được

$$I=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}-\frac{\frac{x}{2}}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

Bài 2. VCB, VCL

C1. So sánh các VCB:

57. Ca. So sánh các VCB $f=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x};\ g=x^2$ khi $x\to 0$.

G: Có f, g là các VCB khi $x\to 0$. Xét

$$\lim_{x\to 0}\frac{f}{g}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)+\left(1-\sqrt{1-x}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)-\left(\sqrt{1-x}-1\right)}{x^2}.$$

Vì khi $x\to 0$, có $\begin{cases} \sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x \\ \sqrt{1-x}-1=\sqrt{1+(-x)}-1\sim\frac{1}{2}(-x)=-\frac{1}{2}x \end{cases}$ nên thay thế VCB tương đương được

$$\lim_{x\to 0}\frac{f}{g}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty.$$

Nên g là VCB bậc cao hơn f khi $x\to 0$.

58. Cb. So sánh các VCB $f=x-1;\ g=\cot\frac{\pi x}{2}$ khi $x\to 1$.

G: Có f, g là các VCB khi $x\to 1$.

Xét $lim_{x\to 1}\frac{f}{g}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\cot\frac{\pi x}{2}}$. Đặt $t=x-1\to 0$ khi $x\to 1$. Và $x=t+1$. Vì $cot\,x=tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ nên

$$lim_{x\to 1}\frac{f}{g}=lim_{t\to 0}\frac{t}{cot\frac{\pi(t+1)}{2}}=lim_{t\to 0}\frac{t}{cot\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}=lim_{t\to 0}\frac{t}{tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}=lim_{t\to 0}\frac{t}{tan\left(-\frac{\pi t}{2}\right)}$$
$$=lim_{t\to 0}\frac{-t}{tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)}.$$

Vì $t\to 0$, thì $tan\,t\sim t\to tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)\sim\frac{\pi t}{2}$. Thay thế tương đương, được $L=lim_{t\to 0}\frac{-t}{\frac{\pi t}{2}}=-\frac{2}{\pi}\neq 0,1,\infty$.

Vậy f,g là các VCB cùng bậc khi $x\to 1$.

59. Cc. So sánh các VCB $f=1-\cos^2 x\,;\ g=\ln(1+x)$ khi $x\to 0$.

G: Có f, g là các VCB khi $x\to 0$. Xét

$$lim_{x\to 0}\frac{f}{g}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\ln(1+x)}.$$

Vì khi $x\to 0$, có $sin\,x\sim x\to sin^2x\sim x^2;\ ln\,(1+x)\sim x$ nên thay thế tương đương, được

$$lim_{x\to 0}\frac{f}{g}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0.$$

Nên f là VCB bậc cao hơn g khi $x\to 0$.

60. Cd. $f = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}; g = \ln(1+x)\,; x \to 0$.

G: Có f, g là các VCB khi $x \to 0$**. Xét**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\ln(1+x)} = lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-(1-x)}{ln\,(1+x).\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = lim_{x\to 0} \frac{2x}{ln\,(1+x).\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = L.$$

Vì khi $x \to 0$**, có** $ln\,(1+x) \sim x$**, nên thay thế tương đương được**

$$L = lim_{x\to 0} \frac{2x}{x.\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{2}{1+1} = 1.$$

Vậy f, g **là các VCB tương đương khi** $x \to 0$**.**

61. Ce. So sánh các VCB $f = \cos\frac{2}{x} - \cos\frac{1}{x}; g = \frac{1}{x}; x \to \infty$.

G: Có f, g **là các VCB khi** $x \to \infty$**. Đặt** $t = \frac{1}{x} \to 0$ **khi** $x \to \infty$**. Suy ra** $L = lim_{t\to 0}\frac{f}{g} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos 2t - \cos t}{t}$.

Vì $cos\,a - cos\,b = -2\,sin\frac{a+b}{2}\,sin\frac{a-b}{2}$ **nên**

$$L = \lim_{t\to 0}\frac{-2\,sin\frac{3t}{2}\,sin\frac{t}{2}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{-2.\frac{3t}{2}.\frac{t}{2}}{t} = lim_{t\to 0}\left(-\frac{3}{2}t\right) = 0. \quad \left(\text{vì } sin\frac{3t}{2} \sim \frac{3t}{2}; sin\frac{t}{2} \sim \frac{t}{2}\ khi\ t \to 0\right)$$

Nên f là VCB bậc cao hơn g khi $x \to \infty$**.**

5. Tìm phần chính có dạng $C.x^a \quad (C \neq 0)$

- ĐN: Cho HS $y = f(x)$ **xác định trên khoảng** $(a,b)\backslash\{x_o\}$**. Nếu tồn tại số** $C \neq 0$ **và** $a \in R$ **sao cho khi** $x \to x_o$**, có**

$$f(x) \sim C.x^a \to lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{C.x^a} = 1,$$

thì phần $C.x^a$ **gọi là phần chính của f(x) khi** $x \to x_o$**.**

- Tìm phần chính có dạng $C.x^a \quad (C \neq 0)$ **khi** $x \to 0$ **của:**

62. $f = \sqrt{1+3x^2} - 1 + x^2$.

G: Vì khi $x \to 0$**, thì** $(1+x)^a - 1 \sim ax \to \sqrt{1+3x^2} - 1 = \left(1+3x^2\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2}.3x^2 = \frac{3}{2}.x^2$

- Nên $f = \sqrt{1+3x^2} - 1 + x^2 \sim \frac{3}{2}x^2 + x^2 = \frac{5}{2}x^2 = C.x^a$

- Vậy phần chính của f là $\frac{5}{2}.x^2$ **khi** $x \to 0$**.**

63. b) $f = tan\,x - sin\,x$.

G: Vì $x \to 0$ **nên** $f = tan\,x - sin\,x = \frac{sin\,x}{cos\,x} - sin\,x = sin\,x\left(\frac{1}{cos\,x} - 1\right) = sin\,x.\frac{1-cos\,x}{cos\,x} \sim x.\frac{\frac{1}{2}x^2}{cos\,0} = \frac{1}{2}.x^3$

khi $x \to 0$**.** $\left(do\ sin\,x \sim x; 1 - cos\,x \sim \frac{1}{2}x^2\ khi\ x \to 0\right)$

- Vậy phần chính là $\frac{1}{2}.x^3$ **khi** $x \to 0$**.**

64. c) $f = e^{x^2} - cos\,x$.

G: Vì $x \to 0$ **nên** $e^0 = 1 = cos\,0$**, suy ra** $f = e^{x^2} - cos\,x = \left(e^{x^2} - 1\right) + (1 - cos\,x) \sim x^2 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{2}.x^2$

khi $x \to 0$**.** $\left(do\ \ e^x - 1 \sim x \to e^{x^2} - 1 \sim x^2; 1 - cos\,x \sim \frac{1}{2}x^2\right)$

- Vậy phần chính là $\frac{3}{2}x^2$ **khi** $x \to 0$**.**

Bài tập:

- Tìm phần chính có dạng $C.x^a \quad (C \neq 0)$ **khi** $x \to 0$ **của:**

65. a) $f = \sqrt{1-2x} - 1 + x$.

G: Vì $x \to 0$ **nên**

$$f = \sqrt{1-2x} - 1 + x = \frac{\left(\sqrt{1-2x}-1+x\right)\left(\sqrt{1-2x}+1-x\right)}{\sqrt{1-2x}+1-x} = \frac{1-2x-(1-x)^2}{\sqrt{1-2x}+1-x} = \frac{1-2x-1+2x-x^2}{\sqrt{1-2x}+1-x}$$

$$= \frac{-x^2}{\sqrt{1-2x}+1-x} \sim \frac{-x^2}{1+1} = -\frac{1}{2}.x^2 = C.x^a$$

khi $x \to 0$**. Vậy** $-\frac{1}{2}x^2$ **là phần chính của f khi** $x \to 0$**.**

66. b) $f = tan\,x - sin\,x$.
G: Vì $x \to 0$ nên

$$f = tan\,x - sin\,x = \frac{sin\,x}{cos\,x} - sin\,x = sin\,x\left(\frac{1}{cos\,x} - 1\right) = sin\,x.\frac{1 - cos\,x}{cos\,x} \sim x.\ \frac{\frac{1}{2}x^2}{cos\,0} = \frac{1}{2}.x^3$$

khi $x \to 0$. $\left(do\ sin\,x \sim x; 1 - cos\,x \sim \frac{1}{2}x^2\ khi\ x \to 0\right)$
Vậy phần chính là $\frac{1}{2}.x^3$ khi $x \to 0$.
67. c) $f = e^{x^2} - cos\,x$.
G: Vì $x \to 0$ nên $e^0 = 1 = cos\,0$, suy ra

$$f = e^{x^2} - cos\,x = \left(e^{x^2} - 1\right) + (1 - cos\,x) \sim x^2 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{2}.x^2$$

khi $x \to 0$. $\left(do\ \ e^x - 1 \sim x \to e^{x^2} - 1 \sim x^2; 1 - cos\,x \sim \frac{1}{2}x^2\right)$
Vậy phần chính là $\frac{3}{2}x^2$ khi $x \to 0$.
68. d) $f = \sqrt{3} - \sqrt{2 + cos\,x}$.
G: Vì $x \to 0$ nên

$$f = \sqrt{3} - \sqrt{2 + cos\,x} = \frac{3 - 2 - cos\,x}{\sqrt{3} + \sqrt{2 + cos\,x}} = \frac{1 - cos\,x}{\sqrt{3} + \sqrt{2 + cos\,x}} \sim \frac{\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{3} + \sqrt{2 + cos\,0}} = \frac{\sqrt{3}}{12}.x^2$$

khi $x \to 0$.

BÀI 3 LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

1. Liên tục tại 1 điểm
- ĐN: Cho HS $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a, b) \ni x_o$. HS $f(x)$ gọi là liên tục tại điểm x_o nếu

$$lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o).$$

- Nếu hàm f ko liên tục tại x_o thì f gọi là gián đoạn tại x_o.
69. Xét tính liên tục của $f = \begin{cases} 2 & : \quad x = 0 \\ \frac{tan^5 x}{x^3} & : \quad x \neq 0; \end{cases}$ $x_o = 0$.
G: Dùng thay thế tương đương $tan\,x \sim x \to tan^5 x \sim x^5$ khi $x \to 0$, ta có

$$lim_{x \to 0}\, f(x) = lim_{x \to 0} \frac{tan^5 x}{x^3} = lim_{x \to 0} \frac{x^5}{x^3} = lim_{x \to 0}\left(x^2\right) = 0.$$

Mà $f(0) = 2 \to lim_{x \to 0}\, f(x) \neq f(0) \to$ HS gián đoạn tại $x = 0$.
70. Xét tính liên tục của $f = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x^3 + 1} & : x \neq -1 \\ a & : \quad x = -1 \end{cases}$; $x_o = -1$.
G: Có

$$lim_{x \to -1} f(x) = lim_{x \to -1} \frac{x^2 + x}{x^3 + 1} = lim_{x \to -1} \frac{x(x+1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = lim_{x \to -1} \frac{x}{x^2 - x + 1} = \frac{-1}{3}.$$

Và $f(-1) = a$.
- Nên nếu $a = \frac{-1}{3} \to lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) \to$ HS LT tại $x = -1$.
Nếu $a \neq \frac{-1}{3} \to$ HS gián đoạn tại $x = -1$.

b) Liên tục trên khoảng
- ĐN: HS $y = f(x)$ gọi là LT trên khoảng (a, b) nếu nó LT tại mọi điểm $x_o \in (a, b)$.
- Hàm cơ bản: là các hàm lũy thừa, lượng giác, mũ và loga.
- Hàm sơ cấp: là tổng, hiệu, tích thương của các hàm cơ bản.
- ĐL: Các hàm sơ cấp thì liên tục trên TXĐ của nó.
71. Xét tính liên tục của $f = \begin{cases} \frac{x}{e^x - e^{-x}} & : \quad x \neq 0 \\ a & : \quad x = 0. \end{cases}$
G: - Xét $x \neq 0 \to f = \frac{x}{e^x - e^{-x}}$ là hàm sơ cấp có TXĐ $D = R\backslash\{0\}$ nên nó LT tại mọi điểm $x \neq 0$.

- Xét $x_o = 0$. Có

$\boldsymbol{lim}_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x - \frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{e^{2x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{2x} = \boldsymbol{lim}_{x\to 0}\ \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$. ($v$ì $khi\ x \to 0, th$ì $e^x - 1 \sim x \to e^{2x} - 1 \sim 2x$)

Mà $f(0) = a$.

Nên nếu $a = \frac{1}{2} \to lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \to$ HS LT tại $x_o = 0$.

- Nếu $a \neq \frac{1}{2} \to$ HS gián đoạn tại $x_o = 0$.

72. Xét tính liên tục của $f = \begin{cases} 3x + a & : \quad x \le 1 \\ 5x - x^3 & : \quad x > 1. \end{cases}$

G: Xét $x > 1 \to f = 5x - x^3$ là hàm sơ cấp có TXĐ $D = R \to$ Nó LT tại mọi điểm $x > 1$.

Xét $x < 1 \to f = 3x + a$ là …

- Xét $x_o = 1$. Có $lim_{x\to 1^+} f(x) = lim_{x\to 1^+}\left(5x - x^3\right) = 4$.

Và $lim_{x\to 1^-} f(x) = lim_{x\to 1^-}(3x + a) = 3 + a$.

Và $f(1) = 3 + a$.

- Vậy nếu $3 + a = 4 \to a = 1$ thì $lim_{x\to 1^+} f(x) = lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \to$ HS LT tại $x = 1$.

- Nếu $a \neq 1 \to$ HS gián đoạn tại $x = 1$.

73. Xét tính liên tục của $f = \begin{cases} 2 & : \quad x = 0 \\ \frac{sin^5 x}{x^3} & : \quad x \neq 0. \end{cases}$

G: Xét $x \neq 0 \to f = \frac{sin^5 x}{x^3}$ là hàm sơ cấp có TXĐ $D = R\backslash\{0\}$ nên nó LT tại mọi điểm $x \neq 0$.

- Xét $x_o = 0$. Dùng thay thế tương đương $sin\ x \sim x$ khi $x \to 0$, ta có $lim_{x\to 0} f(x) = lim_{x\to 0}\frac{sin^5 x}{x^3} = lim_{x\to 0}\frac{x^5}{x^3} = lim_{x\to 0}\left(x^2\right) = 0$.

Mà $f(0) = 2 \to lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0) \to$ HS gián đoạn tại $x = 0$.

74. Xét tính liên tục của $f = \begin{cases} 0 & : \quad x \ge 0 \\ \frac{1-\sqrt{1-3x}}{x} & : \quad x < 0. \end{cases}$

G: Xét $x > 0 \to f = 0$ là hàm sơ cấp có TXĐ $D = R$ nên nó LT tại điểm $x > 0$.

- Xét $x < 0 \to f = \frac{1-\sqrt{1-3x}}{x}$ là hàm sơ cấp có TXĐ $D = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right]\backslash\{0\}$ nên nó LT tại mọi điểm $x < 0$.

- Xét $x_o = 0$. Ta có $lim_{x\to 0^+} f(x) = lim_{x\to 0^+}\ 0 = 0$.

Và $lim_{x\to 0^-} f(x) = lim_{x\to 0^-}\ \frac{1-\sqrt{1-3x}}{x} = lim_{x\to 0^-} - \frac{\sqrt{1-3x}-1}{x} = lim_{x\to 0^-} - \frac{\left(1+(-3x)\right)^{\frac{1}{2}}-1}{x}$.

Vì khi $x \to 0$, có $(1 + x)^a - 1 \sim ax$. Nên $\sqrt{1 - 3x} - 1 = \left(1 + (-3x)\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2}.(-3x)$ nên Thay thế tương đương,

$lim_{x\to 0^-} f(x) = lim_{x\to 0^-} - \frac{\frac{1}{2}(-3x)}{x} = \frac{3}{2}$.

Và $f(0) = 0$.

- Vậy $lim_{x\to 0^+} f(x) \neq lim_{x\to 0^-} f(x) \to$ HS gián đoạn tại $x = 0$.

Chú ý: $(1 + x)^a - 1 \sim a.x \to \sqrt{1 + x} - 1 = (1 + x)^{\frac{1}{2}} - x \sim \frac{1}{2}x \to \sqrt[3]{1 + x} - 1 \sim \frac{1}{3}.x$

75. Xét tính liên tục của $f = \begin{cases} 0 & : \quad x \ge 0 \\ \frac{1-\sqrt[3]{1+x}}{x} & : \quad x < 0. \end{cases}$

G: Xét $x > 0 \to f = 0$ là hàm sơ cấp có TXĐ $D = R$ nên nó LT tại $x > 0$.

Xét $x < 0 \to f = \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ là hàm sơ cấp có TXĐ $D = (-\infty, 1]\backslash\{0\}$

Xét $x_o = 0$. Ta có $lim_{x\to 0^+} f(x) = lim_{x\to 0^+}\ 0 = 0$.

Và $lim_{x\to 0^-} f(x) = lim_{x\to 0^-}\ \frac{1-\sqrt[3]{1+x}}{x} = lim_{x\to 0^-} - \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = lim_{x\to 0^-} - \frac{(1+x)^{\frac{1}{3}}-1}{x} = lim_{x\to 0^-} - \frac{\frac{1}{3}x}{x} = -\frac{1}{3}$.

Và $f(0) = 0$.

Vậy $lim_{x\to 0^+} f(x) \neq lim_{x\to 0^-} f(x) \to$ HS gián đoạn tại $x = 0$.

*** Nguyên lý kẹp: Nếu**

$$\begin{cases} |f(x)| \le g(x)\ \forall x \in (a,b)\backslash\{x_o\} \\ lim_{x\to x_o} g(x) = 0 \end{cases} \to lim_{x\to x_o} f(x) = 0.$$

76. C4. Xét tính liên tục của $f = \begin{cases} (x^2-1)\sin\frac{\pi}{x-1} & : \quad x \neq 1 \\ a & : \quad x = 1. \end{cases}$

G: Xét $x_o \neq 1 \to f = (x^2-1)\sin\frac{\pi}{x-1}$ **là …**

- Xét $x_o = 1$. **Áp dụng Nguyên lý kẹp, vì** $0 \le \left|(x^2-1)\ \sin\frac{\pi}{x-1}\right| \le |x^2-1| \to 0$ **khi** $x \to 0$, **nên theo Nguyên lý kẹp, có** $\lim_{x\to 1}(x^2-1)\sin\frac{\pi}{x-1} = 0$.

- Khi $x \to +\infty$, **thì** $0 < ln\,(x+1) < x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} < x^2 < e^x$.

77. Tính $I = lim_{x\to+\infty}\frac{ln\,(x+1)}{x^2}$.

G: Vì khi $x \to +\infty$, **thì** $0 < ln\,(x+1) < x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ **nên** $0 < \frac{ln\,(x+1)}{x^2} < \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{+\infty} \to 0$ **khi** $x \to +\infty$. **Nên theo Nguyên lý kẹp, ta có** $I = lim_{x\to+\infty}\frac{ln\,(x+1)}{x^2} = 0$.

- Khi $x \to +\infty$, **thì** $\begin{cases} ln\,(1+e^x) < x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \\ e^x > x^2. \end{cases}$

78. Tính $I = lim_{x\to+\infty}\frac{ln\,(1+e^x)}{e^x}$.

G: Vì khi $x \to +\infty$, **thì** $\begin{cases} ln\,(1+e^x) < x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \\ e^x > x^2 \end{cases}$ **nên**

…

Bài tập:

79. C1. Xét tính liên tục của $f = \begin{cases} \frac{2x}{e^{2x}-e^{-x}} & : \quad x \neq 0 \\ a & : \quad x = 0 \end{cases}$; $x_o = 0$.

G: Có

$$lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^{2x}-e^{-x}} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^{2x}-\frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to 0}\frac{2xe^x}{e^{3x}-1}.$$

Vì $khi\ x \to 0\ th$**ì** $e^x - 1 \sim x \to e^{3x} - 1 \sim 3x$ **nên Thay thế tương đương,**

$$lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{2xe^x}{3x} = lim_{x\to 0}\frac{2e^x}{3} = \frac{2}{3}.$$

Và $f(0) = a$.

- Nếu $a = \frac{2}{3} \to \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \to$ **HS liên tục tại** $x_o = 0$.

- Nếu $a \neq \frac{2}{3} \to$ **HS gián đoạn tại** $x_o = 0$.

b) Liên tục trên khoảng

- ĐN: HS $y = f(x)$ **gọi là LT trên khoảng (a, b) nếu nó LT tại mọi điểm** $x_o \in (a,b)$.

- Hàm cơ bản: là các hàm lũy thừa, lượng giác, mũ và loga.

- Hàm sơ cấp: là tổng, hiệu, tích thương của các hàm cơ bản.

- ĐL: Các hàm sơ cấp thì liên tục trên TXĐ của nó.

80. C2. Xét tính liên tục của $f = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^3-1} & : x \neq 1 \\ a & : \quad x = 1. \end{cases}$

G: Xét $x_o \neq 1 \to f = \frac{x^2-1}{x^3-1}$ **là hàm sơ cấp có TXĐ** $D = R\backslash\{1\}$ **nên nó LT tại mọi** $x_o \neq 1$.

- Xét $x_o = 1$. **Có**

$$lim_{x\to 1} f(x) = lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1} = lim_{x\to 1}\ \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{2}{3}.$$

Và $f(1) = a$.

Nên nếu $a = \frac{2}{3} \to lim_{x\to 1} f(x) = f(1) \to$ **HS LT tại** $x_o = 1$.

- Nếu $a \neq \frac{2}{3} \to$ **HS gián đoạn tại** $x_o = 1$.

*** Chú ý:** $arctan\,(+\infty) = \frac{\pi}{2}; arctan\,(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$.

81. C3. Xét tính liên tục của $f = \begin{cases} \arctan\frac{1}{|x|} & : \quad x \neq 0 \\ a & : \quad x = 0. \end{cases}$

G: Xét $x_o \neq 0 \to f = \arctan\frac{1}{|x|}$ **là hàm sơ cấp có TXĐ** $D = R\backslash\{0\}$ **nên nó LT tại mọi điểm** $x_o \neq 0$.

- Xét $x_o = 0$. **Có**

$$lim_{x\to 0}\, f(x) = \lim_{x\to 0} \arctan\frac{1}{|x|} = \arctan\left(\frac{1}{0^+}\right) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Và $f(0) = a$.

- Nếu $a = \frac{\pi}{2} \to \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \to$ **HS LT tại** $x_o = 0$.

- Nếu $a \neq \frac{\pi}{2} \to$ **HS gián đoạn tại** $x_o = 0$.

- Nguyên lý kẹp:

- ĐL: Nếu

$$\begin{cases} 0 \leq |f(x)| \leq g(x)\ \forall x \in (a,b)\backslash\{x_o\} \\ lim_{x\to x_o}\, g(x) = 0 \end{cases} \to lim_{x\to x_o} f(x) = 0.$$

82. Tìm $I = \lim_{x\to 2}(x-2)^3 \sin\frac{1}{x-2}$.

G: Ta có, vì $\left|\sin\frac{1}{x-2}\right| \leq 1$ **nên**

$$0 \leq \left|(x-2)^3 \sin\frac{1}{x-2}\right| \leq \left|(x-2)^3\right| \to 0$$

khi $x \to 2$. **Nên theo Nguyên lý kẹp,** $I = \lim_{x\to 2}(x-2)^3 \sin\frac{1}{x-2} = 0$.

83. C4. Xét tính liên tục của $f = \begin{cases} \left(x^2-1\right)\sin\frac{\pi}{x-1} & : \quad x \neq 1 \\ a & : \quad x = 1. \end{cases}$

G: Xét $x_o \neq 1 \to f(x) = \left(x^2-1\right)\sin\frac{\pi}{x-1}$ **là …**

- Xét $x_o = 1$. **Áp dụng Nguyên lý kẹp, vì**

$$0 \leq \left|\left(x^2-1\right)\ \sin\frac{\pi}{x-1}\right| \leq \left|x^2-1\right| \to 0$$

khi $x \to 1$, **nên theo Nguyên lý kẹp, có**

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(x^2-1\right)\sin\frac{\pi}{x-1} = 0.$$

84. C5. Xét tính liên tục của $f = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x} & : \quad x > 0 \\ a + x^2 & : \quad x \leq 0. \end{cases}$

G: Xét $x_o > 0 \to f = \frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}$ **là hàm sơ cấp có TXĐ** $D = R\backslash\{0\}$ **nên nó LT tại mọi điểm** $x_o > 0$.

- Xét $x_o < 0 \to f = a + x^2$ **là hàm sơ cấp có TXĐ** $D = R$ **nên nó LT tại mọi điểm** $x_o < 0$.

- Xét $x_o = 0$. **Có khi** $x \to 0$, **thì** $(1+x)^a - 1 \sim a.x \to \sqrt[3]{1+2x} - 1 = (1+2x)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{1}{3}.2x$ **nên**

$$lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{3}.2x}{x} = \frac{2}{3}.$$

Và $lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(a + x^2\right) = a$.

Và $f(0) = a + 0^2 = a$.

- Nếu $a = \frac{2}{3} \to \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \to$ **HS LT tại** $x_o = 0$. **Nếu** $a \neq \frac{2}{3} \to$ **HS gián đoạn tại** $x_o = 0$.

85. C7. $f = \begin{cases} \frac{1-\cos\sqrt{x}}{x} & : \quad x > 0 \\ a + 2x & : \quad x \leq 0. \end{cases}$

G: Xét $x_o > 0 \to f = \frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}$ **là hàm sơ cấp có TXĐ** $D = R_+$ **nên nó LT tại mọi điểm** $x > 0$.

- Xét $x_o < 0 \to f = a + 2x$ **là hàm sơ cấp có TXĐ** $D = R$ **nên …**

- Xét $x_o = 0$. **Vì khi** $x \to 0$, **thì** $1 - cos\,x \sim \frac{1}{2}.x^2 \to 1 - \cos\sqrt{x} \sim \frac{1}{2}.\left(\sqrt{x}\right)^2$ **nên Thay thế tương đương**

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}=lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}.\left(\sqrt{x}\right)^2}{x}=\frac{1}{2}.$$

Và $lim_{x\to 0^-}f(x)=lim_{x\to 0^-}(a+2x)=a.$

Và $f(0)=a+2.0=a.$

Nên nếu $a=\frac{1}{2}\to \lim_{x\to 0}f(x)=f(0)\to$ **HS LT tại** $x_o=0$**. Nếu** $a\neq\frac{1}{2}\to\cdots$

- Quy tắc Lopital: Nếu $\begin{cases} lim_{x\to a}\frac{f}{g}=\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty}\\ lim_{x\to a}\frac{f'}{g'}=L\end{cases}\to lim_{x\to a}\frac{f}{g}=lim_{x\to a}\frac{f'}{g'}=L.$

86. C1. Tính $I=lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{e^x-e}.$

G: Áp dụng quy tắc Lop ta có

$$I=lim_{x\to 0}\frac{5x^4}{e^x}=5.$$

87. C1. Tìm $lim_{x\to 1}\frac{cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x}.$

G: Áp dụng quy tắc Lop ta có

$$I=lim_{x\to 1}\frac{-sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).\frac{\pi}{2}}{-1}=\frac{\pi}{2}.$$

88. C6. Xét tính liên tục của $f=\begin{cases}x\ln x & : & x>0\\ a & : & x\leq 0.\end{cases}$

G: Xét $x_o>0\to f=x\ln x$ **là hàm sơ cấp có TXĐ** $D=R_+$ **nên nó LT tại mọi điểm** $x_o>0$.

Xét $x_o<0\to f=a\ldots$

Xét $x_o=0$**. Có**

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}x\ln x=lim_{x\to 0^+}\frac{ln\,x}{\frac{1}{x}}.$$

Áp dụng Lop ta có

$$f(0^+)=lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=lim_{x\to 0^+}(-x)=0.$$

Mà

$$f(0^-)=a.$$

- Nếu $a=0\to \lim_{x\to 0}f(x)=f(0)\to$ **HS LT tại** $x_o=0$.

- Nếu $a\neq 0\to\ldots$

89. C8. $f=\begin{cases}\frac{1-e^{\sin x}}{x-\pi} & : & x>\pi\\ a+x^2 & : & x\leq\pi.\end{cases}$

G: Xét $x_o>\pi\to f=\frac{1-e^{\sin x}}{x-\pi}$ **là hàm sơ cấp có TXĐ** $D=R\backslash\{\pi\}$ **nên nó LT tại mọi điểm** $x_o>\pi$.

- Xét $x_o<\pi\to f=a+x^2$ **là hàm sơ cấp có TXĐ** $D=R$ **nên nó LT tại mọi điểm** $x_o<\pi$.

- Xét $x_o=\pi$**. Áp dụng quy tắc Lop, có**

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{1-e^{\sin x}}{x-\pi}=lim_{x\to\pi^+}\frac{-e^{sin\,x}.cos\,x}{1}=-e^0.(-1)=1.$$

Và

$$lim_{x\to\pi^-}f(x)=lim_{x\to\pi^-}\left(a+x^2\right)=a+\pi^2.$$

Và $f(\pi)=a+x^2=a+\pi^2.$

Vậy nếu $a+\pi^2=1\to a=1-\pi^2\to lim_{x\to\pi}f(x)=f(\pi)\to$ **HS LT tại** $x_o=\pi$.

Nếu $a\neq 1-\pi^2\to$ **HS gián đoạn tại** $x_o=\pi$.

CHƯƠNG II ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN
BÀI 1 ĐẠO HÀM CẤP 1

1. ĐN

- Cho HS $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a,b)\ni x_o$. Thì

$$f'(x_o)=lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}.$$

90. Tính $y'(0)$, biết $y=x(x+1)(x+2)\dots(x+9)$.

G: Ta có $f(0)=0$ nên

$y'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+1)(x+2)\dots(x+9)-0}{x}=\lim_{x\to0}\ (x+1)(x+2)\dots(x+9)=1.2.3\dots9=9!$

91. Tính $y'(1)$, biết $y=(x-1)(x-2)\dots(x-9)$.

G: Ta có $f(1)=0$ nên

$y'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)\dots(x-9)-0}{x-1}=lim_{x\to1}\ (x-2)(x-3)\dots(x-9)=$
$(-1)(-2)(-3)\dots(-8)=(-1)^8.8!=8!$.

92. Tính f', biết $f=\begin{cases}0 & : \quad x=0\\ \frac{sin^5x}{x^2} & : \quad x\neq0.\end{cases}$

G: Xét $x\neq0\to f=\frac{sin^5x}{x^2}\to f'=\frac{5\ sin^4x.cos\,x.x^2-sin^5x.2x}{x^4}$.

- Xét $x=0\to f(0)=0$. Nên

$f'(0)=lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=lim_{x\to0}\frac{\frac{sin^5x}{x^2}-0}{x}=lim_{x\to0}\frac{sin^5x}{x^3}$.

Thay thế tương đương, $sin\,x\sim x\to sin^5x\sim x^5$ khi $x\to0$, được $f'(0)=lim_{x\to0}\ \frac{x^5}{x^3}=lim_{x\to0}\ (x^2)=0$.

Vậy $f'(0)=0$.

2. Đạo hàm 1 phía

- ĐN: Cho HS $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a,b)\ni x_o$. Thì

$$f'_+(x_o)=lim_{x\to x_o^+}\ \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}.$$

Và $f'_-(x_o)=lim_{x\to x_o^-}\ \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$.

93. Tính f' biết $f=\begin{cases}\frac{x^3-x}{x-1} & : \quad x\neq1\\ 2 & : \quad x=1.\end{cases}$

G: Xét $x\neq1\to f=\frac{x^3-x}{x-1}=x^2+x\to f'=2x+1$.

- Xét $x=1\to$ Có

$$f'(1)=lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=lim_{x\to1}\frac{\frac{x^3-x}{x-1}-2}{x-1}=lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=lim_{x\to1}\,x+2=3.$$

94. Tính đạo hàm của $y=|\pi-x|.\,sin^2x$

G: Ta có $y=\begin{cases}(\pi-x).\,sin^2x & : \quad x\le\pi\\ (x-\pi).\ sin^2x & : \quad x>\pi.\end{cases}$

- Nếu $x<\pi\to y=(\pi-x).\,sin^2x\to y'=-sin^2x+(\pi-x).\,2sinx\,cosx$

- Nếu $x>\pi\to y=(x-\pi).\ sin^2x\to y'=sin^2x+(x-\pi).\,2sinx\,cosx$

- Xét $x_o=\pi$. Ta có $y(\pi)=0$ và

$$y'_+(\pi)=lim_{x\to\pi^+}\frac{y(x)-y(\pi)}{x-\pi}=lim_{x\to\pi^+}\frac{(x-\pi).\ sin^2x-0}{x-\pi}=lim_{x\to\pi^+}(sin^2x)=sin^2\pi=0.$$

Và $y'_-(\pi)=lim_{x\to\pi^-}\frac{y(x)-y(\pi)}{x-\pi}=lim_{x\to\pi^-}\frac{(\pi-x).\ sin^2x-0}{x-\pi}=lim_{x\to\pi^-}\left(-sin^2x\right)=-0=0=y'_+(\pi)$.

Nên $y'(\pi)=0$.

95. Tính đạo hàm của $f=\begin{cases}x^2-3x+2 & : \quad x\ge3\\ 3x-x^2+2 & : \quad x<3.\end{cases}$

G: Nếu $x>3\to f=x^2-3x+2\to f'=2x-3$.

Nếu $x<3\to f=3x-x^2+2\to f'=3-2x$.

- Nếu $x_o = 3 \to f(3) = 2$. Nên

$f'_+(2) = lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-3x}{x-3} = lim_{x\to 2^+}(x) = 2$.

Và $f'_-(2) = lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = lim_{x\to 2^-}\frac{3x-x^2}{x-3} = lim_{x\to 2^-}(-x) = -2 \neq f'_-(2)$.

Nên $\nexists f'(3)$.

96. Tính đạo hàm của $f = \begin{cases} 2x-6 & : \quad x \geq 4 \\ x^2-3x-2 & : \quad x < 4. \end{cases}$

G: Nếu $x > 4 \to f = 2x-6 \to f' = 2$.

- Nếu $x < 4 \to f = x^2-3x-2 \to f' = 2x-3$.

- Xét $x_o = 4 \to f(4) = 2.4-6 = 2$. Nên

$f'_+(4) = lim_{x\to 4^+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = lim_{x\to 4^+}\frac{2x-6-2}{x-4} = 2$.

Và $f'_-(4) = lim_{x\to 4^-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = lim_{x\to 4^-}\frac{x^2-3x-2-2}{x-4} = lim_{x\to 4^-}\frac{x^2-3x-4}{x-4} = lim_{x\to 4^-}\frac{(x+1)(x-4)}{x-4} = lim_{x\to 4^-}(x+1) = 5 \neq f'_+(4) = 2$.

Nên ko tồn tại $f'(4)$.

97. Tính đạo hàm của $f = \begin{cases} 2x-18 & : \quad x \geq 3 \\ x^2-4x-4 & : \quad x < 3. \end{cases}$

G: Nếu $x > 3 \to f = 2x-18 \to f' = 2$.

- Nếu $x < 3 \to$

- Xét $x_o = 3 \to f(4) = 2.3-18 = -12$. Nên $f'_+(3) = lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = lim_{x\to 3^+}\frac{2x-6}{x-3} = \cdots$

98. Tính đạo hàm của $f = \begin{cases} (x-1).\sin\pi x & : \quad x \geq 1 \\ (1-x).\sin\pi x & : \quad x < 1. \end{cases}$

G: Nếu $x > 1 \to$

Nếu $x < 1 \to$

- Nếu $x_o = 1 \to f(1) = 0$. Nên

$f'_+(1) = lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1).\sin\pi x}{x-1} = lim_{x\to 1^+}\sin\pi x = 0$.

Và $f'_-(1) = lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x).\sin\pi x}{x-1} = lim_{x\to 1^+}(-\sin\pi x) = 0 = f'_+(1)$.

Nên $f'(1) = 0$.

* $y = \arcsin x \to x = \sin y$

* Bảng đạo hàm: $(a^x)' = a^x.\ln a$; $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\to (e^u)' = e^u.u'; (a^u)' = a^u \ln a.u'; (\ln u)' = \frac{u'}{u};$$

$$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.u'; (\arctan u)' = \frac{1}{1+u^2}.u'$$

99. Cc. Tính đạo hàm của $y = f = \begin{cases} \arctan x & : \quad x \geq 0 \\ x^2+x & : \quad x < 0. \end{cases}$

G: Nếu $x > 0 \to f = \arctan x \to f' = \frac{1}{1+x^2}$.

- Nếu $x < 0 \to f = x^2+x \to f' = 2x+1$.

- Nếu $x = 0 \to f(0) = \arctan 0 = 0$. Nên

$f'_+(0) = lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan x-0}{x} = lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan x}{x} = lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$. $\quad$ (vì $khi\ x \to 0$, thì $\arctan x \sim x$)

Và $f'_-(0) = lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x-0}{x} = lim_{x\to 0^-}(x+1) = 1 \to f'_+(0) = f'_-(0) = 1$.

Nên $f'(0) = 1$.

Bài tập:

100. Ca. Tính đạo hàm của $y = |(x-1)^2.(x+1)|$.

G: Có $y=(x-1)^2.|x+1|=\begin{cases}(x-1)^2.(x+1)=x^3-x^2-x+1 & : \quad x\ge -1\\ -(x-1)^2(x+1)=-x^3+x^2+x-1 & : \quad x<-1.\end{cases}$

- Nếu $x>-1\to y=x^3-x^2-x+1\to y'=3x^2-2x-1.$
- Nếu $x<-1\to y=-x^3+x^2+x-1\to y'=-3x^2+2x+1$
- Nếu $x=-1\to y(-1)=0$. Nên

$$y'_+(-1)=lim_{x\to(-1)^+}\frac{y(x)-y(-1)}{x-(-1)}=lim_{x\to(-1)^+}\frac{(x-1)^2(x+1)-0}{x+1}=lim_{x\to(-1)^+}(x-1)^2=4.$$

Và $y'_-(-1)=lim_{x\to(-1)^-}\frac{y(x)-y(-1)}{x-(-1)}=lim_{x\to(-1)^-}\frac{-(x-1)^2(x+1)-0}{x+1}=lim_{x\to(-1)^-}-(x-1)^2=-4\ne y'_+(-1)=4.$

Nên $\nexists\ y'(-1)$.

101. Cb. $y=\left|(x+1)^2(x+2)^3\right|$.

G: Có $y=\begin{cases}(x+1)^2(x+2)^3 & : \quad x\ge -2\\ -(x+1)^2(x+2)^3 & : \quad x<-2.\end{cases}$

- Nếu $x>-2\to y=(x+1)^2.(x+2)^3\to y'=\cdots$
- Nếu $x<-2\to y=-(x+1)^2.(x+2)^3\to y'=\cdots$
- Nếu $x=-2\to$

$$y'_+(-2)=lim_{x\to(-2)^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=lim_{x\to(-2)^+}\frac{(x+1)^2(x+2)^3-0}{x+2}=lim_{x\to(-2)^+}(x+1)^2(x+2)^2=0.$$

Và $y'_-(-2)=lim_{x\to(-2)^-}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=lim_{x\to(-2)^-}\frac{-(x+1)^2(x+2)^3-0}{x+2}=lim_{x\to(-2)^-}-(x+1)^2(x+2)^2=\cdots=0=$ $y'_+(-2)$.

Vậy $y'(-2)=0$.

102. Cc. Tính đạo hàm của $y=\left|\pi^2-x^2\right|.sin^2x$

G: Có $f=\begin{cases}\left(x^2-\pi^2\right)sin^2x & : \quad x\ge\pi\\ \left(\pi^2-x^2\right)sin^2x & : \quad -\pi<x<\pi\\ \left(x^2-\pi^2\right)sin^2x & : \quad x\le-\pi.\end{cases}$

- TH1. Nếu $x>\pi\to f=\left(x^2-\pi^2\right)sin^2x\to f'=\cdots$
- TH2. Nếu $-\pi<x<\pi\to f=\left(\pi^2-x^2\right)sin^2x\to f'=\cdots$
- TH3. Nếu $x<\pi\to\cdots$
- TH4. Xét $x=\pi$. Có

$$f'_+(\pi)=lim_{x\to\pi^+}\frac{y(x)-y(\pi)}{x-\pi}=lim_{x\to\pi^+}\frac{(x-\pi).\ sin^2x-0}{x-\pi}=lim_{x\to\pi^+}(sin^2x)=sin^2\pi=0.$$

Và $y'_-(\pi)=lim_{x\to\pi^-}\frac{y(x)-y(\pi)}{x-\pi}=lim_{x\to\pi^-}\frac{(\pi-x).\ sin^2x-0}{x-\pi}=lim_{x\to\pi^-}\left(-sin^2x\right)=-0=0=y'_+(\pi).$

Nên $y'(\pi)=0$.

- TH5. Xét $x=-\pi\to$

$$y'_+(\pi)=lim_{x\to\pi^+}\frac{y(x)-y(\pi)}{x-\pi}=lim_{x\to\pi^+}\frac{(x-\pi).\ sin^2x-0}{x-\pi}=lim_{x\to\pi^+}(sin^2x)=sin^2\pi=0.$$

Và $y'_-(\pi)=lim_{x\to\pi^-}\frac{y(x)-y(\pi)}{x-\pi}=lim_{x\to\pi^-}\frac{(\pi-x).\ sin^2x-0}{x-\pi}=lim_{x\to\pi^-}\left(-sin^2x\right)=-0=0=y'_+(\pi).$

Nên $y'(\pi)=0$.

* $y=arcsin\,x\to x=sin\,y$
* Bảng đạo hàm: $(a^x)'=a^x.\ln a$; $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$

$$\to(e^u)'=e^u.u';\ (a^u)'=a^u\ln a.u';\ (ln\,u)'=\frac{u'}{u}\ ;$$

$$(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.u';\ (\arctan u)'=\frac{1}{1+u^2}.u'$$

103. Cc. Tính đạo hàm của $y=f=\begin{cases}\arctan x & : \quad x\ge 0\\ x^2+x & : \quad x<0.\end{cases}$

G: Nếu $x>0\to f=arctan\,x\to f'=\frac{1}{1+x^2}$.

- Nếu $x < 0 \to f = x^2 + x \to f' = 2x + 1$.
- Nếu $x = 0 \to f(0) = arctan\ 0 = 0$. **Nên**

$$f'_+(0) = lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to0^+}\frac{arctan\ x - 0}{x} = lim_{x\to0^+}\frac{arctan\ x}{x} = lim_{x\to0}\frac{x}{x} = 1. \quad (\text{vì khi } x \to 0, \text{thì } arctan\ x \sim x)$$

Và $f'_-(0) = lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to0^-}\frac{x^2+x-0}{x} = lim_{x\to0^-}(x+1) = 1 \to f'_+(0) = f'_-(0) = 1$.
Nên $f'(0) = 1$.

104. Cd. $f = \begin{cases} x^2 - 2x & : \quad x < 2 \\ 2x - 4 & : \quad x \geq 2. \end{cases}$

G: Nếu $x > 2 \to f = 2x - 4 \to f' = 2$.
- Nếu $x < 2 \to f = x^2 - 2x \to f' = 2x - 2$.
- Xét $x_o = 2 \to f(2) = 0$. **Có**

$$f'_+(2) = lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = lim_{x\to2}\frac{2x-4}{x-2} = 2.$$

Và $f'_-(2) = lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = lim_{x\to2^-}\frac{x^2-2x}{x-2} = lim_{x\to2^-}(x) = 2 = f'_+(2)$.
Vậy $f'(2) = 2$.

105. C2. Tính $y'(0)$, **biết** $y = x(x-1)(x-2)\dots(x-26)$.
G: Ta có $f(0) = 0$ **nên**

$$y'(0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to0}\frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-26)-0}{x} = lim_{x\to0}\ (x-1)(x-2)\dots(x-26)$$
$$= (-1)(-2)(-3)\dots(-26) = (-1)^{26}.26! = 26!$$

106. C3. Tính $f'_+(0), f'_-(0), f'(0)$ **của** $f = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\left(\frac{1}{x}\right)}} & : \quad x \neq 0 \\ 0 & : \quad x = 0. \end{cases}$

G: Có $f(0) = 0$. **Nên**

$$f'_+(0) = lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x} = lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{0^+}}} = \frac{1}{1+e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Và $f'_-(0) = lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to0^-}\frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x} = lim_{x\to0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{0^-}}} = \frac{1}{1+e^{-\infty}} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^{+\infty}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{+\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1 \neq f'_+(0) = 0$.
Nên $\nexists\ f'(0)$.

BÀI 4 Đạo hàm của hàm cho dạng tham số

1. ĐL

- ĐL: Nếu hàm cho dạng tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t). \end{cases}$ **Thì**

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

107. Tính $y'(x)$ **của HS cho dưới dạng tham số** $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

G: Có $(u.v)' = u'v + uv'$ **nên** $y = e^t \sin t \rightarrow$

$$y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^t.\sin t + e^t.\cos t}{e^t \cos t + e^t.(-\sin t)} = \frac{e^t(\sin t + \cos t)}{e^t(\cos t - \sin t)} = \frac{\sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)} = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right).$$

- Chú ý: Nếu $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t). \end{cases}$ **Thì** $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$

Và đạo hàm cấp hai

$$y''(x) = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'(t)}{x'(t)}.$$

108. Ca. Tính $y'(x); y''(x)$ **biết** $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

G: Có

$$y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a.3\sin^2 t.\cos t}{a.3\cos^2 t.(-\sin t)} = -\tan t.$$

Và

$$y''(x) = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{-\frac{1}{\cos^2 t}}{a.3\cos^2 t.(-\sin t)} = \frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}.$$

109. Cb. Tính $y'(x); y''(x)$ **của HS** $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

G: Có $y = a(1 - \cos t)$ **nên**

$$y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \cot\frac{t}{2}.$$

Và $y''(x) = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{-\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}.\frac{1}{2}}{a(1 - \cos t)} = -\frac{1}{2a\sin^2\frac{t}{2}(1 - \cos t)}.$

x(t)=t-sin t, y(t)=1-cos t

x(t)=1+cos t, y(t)=1+sin t

Bài tập

110. Cb. Tính $y'(x); y''(x)$ **của HS** $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

G: Có $y = a(1 - \cos t)$ **nên**

$$y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \cot\frac{t}{2}.$$

Và $y''(x) = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{-\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}.\frac{1}{2}}{a(1-\cos t)} = -\frac{1}{2a\sin^2\frac{t}{2}(1-\cos t)}$.

x(t)=t-sin t, y(t)=1-cos t
x(t)=1+cos t, y(t)=1+sin t

111. Cc. Tính $y'(x); y''(x)$ **của HS** $\begin{cases} x = 2e^t \cos t \\ y = 3e^t \sin t. \end{cases}$

G: Có $(u.v)' = u'v + uv'$ **nên** $y = 3e^t \sin t \rightarrow$

$$y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3e^t.\sin t + 3e^t.\cos t}{2e^t\cos t + 2e^t.(-\sin t)} = \frac{3e^t(\sin t + \cos t)}{2e^t(\cos t - \sin t)} = \frac{3\sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{3}{2}\tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Và $y''(x) = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{3}{2}.\frac{1}{\cos^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}.1}{2e^t(\cos t - \sin t)} = \frac{3}{4e^t\cos^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)(\cos t - \sin t)}$.

112. Cd. $\begin{cases} x = t + e^t \\ y = t^2 + 2t^3. \end{cases}$

G: Có

$$y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t + 6t^2}{1 + e^t}.$$

Và

$$y''(x) = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \cdots$$

2. Tính khả vi của hàm số

- ĐN: Nếu HS $y = f(x)$ **có đạo hàm tại điểm** x **thì ta nói HS là khả vi tại** x **và ta có công thức vi phân**

$$df = f'.dx$$

- Xét tính khả vi của HS là kiểm tra xem HS có đạo hàm hay ko?

113. C6a. Xét tính khả vi của $f = \begin{cases} x^2 & : \quad x \le 0 \\ \ln(1+x) - x & : \quad x > 0 \end{cases}$

G: Nếu $x > 0 \rightarrow f = \ln(1+x) - x \rightarrow f' = \frac{1}{1+x}.1 - 1 = \cdots$

Nếu $x < 0 \rightarrow f = x^2 \rightarrow f' = \cdots$

- Xét $x_o = 0$. **Có** $f(0) = 0^2 = 0$. **Và**

$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{x} - 1\right) = 0$. (vì *khi* $x \rightarrow 0$, có *thay thế tương đương* $\ln(1+x) \sim x$)

Và $f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-0}{x} = \lim_{x\to 0^-} x = 0 = f'_+(0)$.

Nên $f'(0) = 0$ **hay HS khả vi tại** $x = 0$.

114. C2. Xét tính khả vi của $f = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}} & : \quad x > 1 \\ \sin(x-1) & : \quad x \le 1. \end{cases}$

G: Nếu $x > 1 \to f = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}} \to f' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}.\sqrt{x-1}-(\sqrt{x}-1).\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{x-1} = \cdots$

- Xét $x < 1 \to f = sin\,(x-1) \to f' = \cdots$

- Xét $x = 1$. **Ta có** $f(1) = sin\,0 = 0$. **Nên**

$f'_+(1) = lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = lim_{x\to1^+} \frac{\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}-0}{x-1} = lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}(x-1)} = lim_{x\to1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{0} = \infty.$

Và $f'_-(1) = lim_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = lim_{x\to1^-} \frac{sin\,(x-1)-0}{x-1} = 1.$

Nên …

Bài tập:

- Xét tính khả vi của HS là kiểm tra xem HS có đạo hàm hay ko?

115. C1. Xét tính khả vi của $y = (x+2).|x-1|$

G: Có

$$y = \begin{cases} (x+2)(x-1) = x^2+x-2 & : \quad x \geq 1 \\ -(x+2)(x-1) = -x^2-x+2 & : \quad x < 1. \end{cases}$$

- Nếu $x > 1 \to y = x^2+x-2 \to y' = 2x+1 \to$ **HS khả vi tại** $x > 1$.

- Nếu $x < 1 \to y' = -2x-1 \to$ **HS khả vi tại** $x < 1$.

- Nếu $x = 1 \to y(1) = 0$. **Xét**

$$y'_+(1) = lim_{x\to1^+} \frac{y(x)-y(1)}{x-1} = lim_{x\to1^+} \frac{(x+2)(x-1)-0}{x-1} = lim_{x\to1^+}\,(x+2) = 3.$$

Và $y'_-(1) = lim_{x\to1^-} \frac{y(x)-y(1)}{x-1} = lim_{x\to1^-} \frac{-(x+2)(x-1)-0}{x-1} = lim_{x\to1^-}\; -(x+2) = -3 \neq y'_+(1) = 3.$

Nên $\nexists f'(1)$. **Vậy HS ko khả vi tại** $x = 1$.

116. C2. Xét tính khả vi của $f = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}} & : \quad x > 1 \\ sin(x-1) & : \quad x \leq 1. \end{cases}$

G: Nếu $x > 1 \to f = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}} \to f' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}.\sqrt{x-1}-(\sqrt{x}-1).\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{x-1} = \cdots$

- Xét $x < 1 \to f = sin\,(x-1) \to f' = cos\,(x-1)$.

- Xét $x = 1$. **Ta có** $f(1) = sin\,0 = 0$. **Nên**

$$f'_+(1) = lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = lim_{x\to1^+} \frac{\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}-0}{x-1} = lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}(x-1)} = lim_{x\to1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Và

$$f'_-(1) = lim_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = lim_{x\to1^-} \frac{sin\,(x-1)-0}{x-1} = 1.$$

Nên …

117. C3. $f = \begin{cases} 1-cos\,x & : \quad x \leq 0 \\ ln\,(1+x) & : \quad x > 0. \end{cases}$

G: Xét $x > 0 \to f = ln\,(1+x) \to f' = \frac{1}{1+x}$.

- Xét $x < 0 \to f = 1-cos\,x \to f' = sin\,x$.

- Xét $x = 0$. **Có**

$$f'_+(0) = lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to0^+} \frac{ln\,(1+x)-0}{x} = lim_{x\to0^+}\,\frac{x}{x} = 1.$$

Và $f'_-(0) = lim_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to0^-} \frac{1-cos\,x}{x} = lim_{x\to0^-} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x} = lim_{x\to0^+} \frac{x}{2} = 0 \neq f'_+(0) = 1.$

Nên ...

118. C4. $f = \begin{cases} \frac{x-1}{4}.(x+1)^2 & : \quad x \geq 1 \\ x-1 & : \quad x < 1. \end{cases}$

G: Xét $x > 1 \to f = \frac{x-1}{4}.(x+1)^2 \to f' = \frac{1}{4}(x+1)^2 + \frac{x-1}{4}.2(x+1).$

Xét $x < 1 \to f = x-1 \to f' = 1$.

- Xét $x = 1$. **Nên**

$$f'_+(1) = lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{x-1}{4}.(x+1)^2 - 0}{x-1} = lim_{x\to 1^+}\frac{(x+1)^2}{4} = 1.$$

Và $f'_-(1) = lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = lim_{x\to 1^-}\frac{x-1-0}{x-1} = 1 = f'_+(1)$.

Nên ...

119. C5. $f = \begin{cases} x^2e^{1-x^2} & : \quad x \le 1 \\ \frac{1}{x} & : \quad x > 1. \end{cases}$

G: Xét $x > 1 \to f = \frac{1}{x} \to f' = -\frac{1}{x^2}$.

Xét $x < 1 \to f = x^2e^{1-x^2} \to f' = 2xe^{1-x^2} + x^2e^{1-x^2}.(-2x) = \cdots$

- Xét $x = 1$. Có

$$f'_+(1) = lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = lim_{x\to 1} -\frac{1}{x} = -1.$$

Và $f'_-(1) = lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = lim_{x\to 1^-}\frac{x^2e^{1-x^2}-1}{x-1} = lim_{x\to 1}\ 2xe^{1-x^2} + x^2e^{1-x^2}.(-2x) = 2-2 = 0 \neq f'_+(1) = -1$.

Nên ...

120. C6a. Xét tính khả vi của $f = \begin{cases} x^2 & : \quad x \le 0 \\ ln\,(1+x) - x & : \quad x > 0 \end{cases}$

G: Nếu $x > 0 \to f = ln\,(1+x) - x \to f' = \frac{1}{1+x}.1 - 1 = \cdots$

Nếu $x < 0 \to f = x^2 \to f' = \cdots$

- Xét $x_o = 0$. Có $f(0) = 0^2 = 0$. Và

$f'_+(0) = lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to 0^+}\frac{ln\,(1+x)-x}{x} = lim_{x\to 0^+}\left(\frac{ln\,(1+x)}{x} - \frac{x}{x}\right) = lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{x} - 1\right) = 0$. ($v$ì $khi\ x \to 0$, có $thay\ th$ế $tương$ đươ$ng\ ln\,(1+x) \sim x$)

Và $f'_-(0) = lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-0}{x} = lim_{x\to 0^-} x = 0 = f'_+(0)$.

Nên $f'(0) = 0$ hay HS khả vi tại $x = 0$.

121. Xét $f = \begin{cases} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x} & : \quad x \neq 0 \\ 0 & : \quad x = 0. \end{cases}$

G: Xét $x \neq 0 \to f = \frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{x} \to f' = \cdots$

Xét $x = 0 \to$

$$f'(0) = lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{x} - 0}{x} = lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{x^2} = lim_{x\to 0}\frac{e^x - \frac{1}{\sqrt{1+2x}}}{2x}$$

$$= lim_{x\to 0}\frac{e^x - (1+2x)^{-\frac{1}{2}}}{2x} = lim_{x\to 0}\frac{e^x + \frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{3}{2}}.2}{2} = 1.$$

122. Xét $f = \begin{cases} x^2\ arctan\frac{1}{x} & : \quad x \neq 0 \\ 0 & : \quad x = 0. \end{cases}$

G: Xét $x \neq 0 \to f = x^2\ arctan\frac{1}{x} \to f' = \cdots$

- Xét $x = 0 \to$

$$f'(0) = lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to 0}\frac{x^2\ arctan\frac{1}{x} - 0}{x} = lim_{x\to 0}\ x\ arctan\frac{1}{x}.$$

Vì $\left|arctan\frac{1}{x}\right| \le \frac{\pi}{2} \to$

$$0 \le \left|x\ arctan\frac{1}{x}\right| \le \left|\frac{\pi}{2}x\right| \to 0$$

khi $x \to 0$ nên theo Nguyên lý kẹp được

$$lim_{x\to 0}\ x\ arctan\frac{1}{x} = 0 \to f'(0) = 0.$$

3. ĐẠO HÀM CẤP CAO

- Đạo hàm cấp hai

$$f'' = (f')' \to f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

123. Tính đạo hàm cấp n của HS $f = \frac{x+1}{x^2-4x+3}$.

G: Viết $\frac{x+1}{x^2-4x+3} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3} = \frac{x(a+b)-3a-b}{(x-1)(x-3)} \to x+1 = x(a+b) - 3a - b$.

Đồng nhất hệ số, được $\begin{cases} a+b=1 \\ -3a-b=1 \end{cases} \to \begin{cases} a=-1 \\ b=2. \end{cases}$

Nên

$$f = -\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3} = -(x-1)^{-1} + 2.(x-3)^{-1}.$$

Suy ra

$f' = -(-1)(x-1)^{-2} + 2.(-1)(x-3)^{-2}$

$\to f'' = -(-1)(-2)(x-1)^{-3} + 2.(-1)(-2)(x-3)^{-3}$

$\to f^{(3)} = -(-1)(-2)(-3)(x-1)^{-4} + 2(-1)(-2)(-3)(x-3)^{-4}$.

Nên

$f^{(n)} = -(-1)(-2)(-3)\ldots(-n).(x-1)^{-(n+1)} + 2.(-1)(-2)(-3)\ldots(-n).(x-3)^{-(n+1)} = -\frac{(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}} + 2.\frac{(-1)^n.n!}{(x-3)^{n+1}}$.

124. Ca. Tính đạo hàm cấp n của HS $f = \frac{x-1}{x^2+5x+6}$.

G: Đặt

$\frac{x-1}{x^2+5x+6} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3}$.

Suy ra

$f = \frac{a(x+3)+b(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{x(a+b)+3a+2b}{x^2+5x+6}$.

Nên $x-1 = x(a+b)+3a+2b$, đồng nhất hệ số 2 vế, được

$\begin{cases} a+b=1 \\ 3a+2b=-1 \end{cases} \to \begin{cases} a=-3 \\ b=4. \end{cases}$

Vậy

$f = -\frac{3}{x+2} + \frac{4}{x+3} = 4.(x+3)^{-1} - 3.(x+2)^{-1}$.

Nên $f' = 4.(-1)(x+3)^{-2} - 3(-1)(x+2)^{-2} \to f'' = 4.(-1)(-2)(x+3)^{-3} - 3(-1)(-2)(x+2)^{-3} \to f^{(3)} = 4(-1)(-2)(-3)(x+3)^{-4} - 3(-1)(-2)(-3)(x+2)^{-4}$

Vậy

$f^{(n)} = 4(-1)(-2)(-3)\ldots(-n)(x+3)^{-(n+1)} - 3(-1)(-2)(-3)\ldots(-n)(x+2)^{-(n+1)} = 4.\frac{(-1)^n.n!}{(x+3)^{n+1}} - 3.\frac{(-1)^n.n!}{(x+2)^{n+1}}$.

125. Cc. Tính đạo hàm cấp n của HS $f = \frac{1+x}{1-x}$.

G: Có $f = \frac{x+1}{-x+1} \to f' = \frac{2}{(-x+1)^2} = 2.(x-1)^{-2}$.

Suy ra

$$f'' = 2(-2).(x-1)^{-3} \to f^{(3)} = 2(-2)(-3).(x-1)^{-4} \to f^{(4)} = 2.(-2)(-3)(-4).(x-1)^{-5}.$$

Vậy

$f^{(n)} = 2.(-2)(-3)\ldots(-n).(x-1)^{-(n+1)} = \frac{2.(-1)^{n-1}.n!}{(x-1)^{n+1}}$.

Bài tập:

126. Ca. Tính đạo hàm cấp n của HS $f = \frac{x-1}{x^2+5x+6}$.

G: Đặt

$\frac{x-1}{x^2+5x+6} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3}$.**Suy ra**

$$f = \frac{a(x+3)+b(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{x(a+b)+3a+2b}{x^2+5x+6}.$$

Nên $x-1 = x(a+b)+3a+2b$, đồng nhất hệ số 2 vế, được

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 3a+2b=-1 \end{cases} \to \begin{cases} a=-3 \\ b=4. \end{cases}$$

Vậy

$$f=-\frac{3}{x+2}+\frac{4}{x+3}=4.(x+3)^{-1}-3.(x+2)^{-1}.$$

Nên

$$f'=4.(-1)(x+3)^{-2}-3(-1)(x+2)^{-2}$$
$$\to f''=4.(-1)(-2)(x+3)^{-3}-3(-1)(-2)(x+2)^{-3}$$
$$\to f^{(3)}=4(-1)(-2)(-3)(x+3)^{-4}-3(-1)(-2)(-3)(x+2)^{-4}$$

Vậy

$$f^{(n)}=4(-1)(-2)(-3)\dots(-n)(x+3)^{-(n+1)}-3(-1)(-2)(-3)\dots(-n)(x+2)^{-(n+1)}$$
$$=4.\frac{(-1)^n.n!}{(x+3)^{n+1}}-3.\frac{(-1)^n.n!}{(x+2)^{n+1}}.$$

127. Cb. Tính đạo hàm cấp n của HS $f=\frac{12x+7}{6x^2+7x+2}$.

G: Viết $\frac{12x+7}{6x^2+7x+2}=\frac{a}{2x+1}+\frac{b}{3x+2}$.

Suy ra $12x+7=a(3x+2)+b(2x+1)$. **Thay** $x=-\frac{1}{2}; x=-\frac{2}{3} \to \begin{cases} \frac{1}{2}a=1 \\ -\frac{1}{3}b=-1 \end{cases} \to \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$

Nên $f=\frac{12x+7}{6x^2+7x+2}=\frac{2}{2x+1}+\frac{3}{3x+2}=2.(2x+1)^{-1}+3.(3x+2)^{-1}$

Suy ra $f'=2.(-1)(2x+1)^{-2}.2+3.(-1)(3x+2)^{-2}.3=2^2.(-1)(2x+1)^{-2}+3^2.(-1)(3x+2)^{-2}$.

Nên $f''=2^3.(-1)(-2)(2x+1)^{-3}+3^3.(-1)(-2)(3x+2)^{-3} \to f^{(3)}=2^4.(-1)(-2)(-3)(2x+1)^{-4}+3^4.(-1)(-2)(-3)(3x+2)^{-4}$.

Vậy $f^{(n)}=2^{n+1}.(-1)(-2)(-3)\dots(-n)(2x+1)^{-(n+1)}+3^{n+1}.(-1)(-2)(-3)\dots(-n)(3x+2)^{-(n+1)}=\frac{2^{n+1}.(-1)^n.n!}{(2x+1)^{n+1}}+\frac{3^{n+1}.(-1)^n.n!}{(3x+2)^{n+1}}$

128. Cc. Tính đạo hàm cấp n của HS $f=\frac{1+x}{1-x}$.

G: Có

$$f=\frac{x+1}{-x+1}\to f'=\frac{2}{(-x+1)^2}=2.(x-1)^{-2}.$$

Suy ra

$$f''=2(-2).(x-1)^{-3}\to f^{(3)}=2(-2)(-3).(x-1)^{-4}\to f^{(4)}=2.(-2)(-3)(-4).(x-1)^{-5}.$$

Vậy

$$f^{(n)}=2.(-2)(-3)\dots(-n).(x-1)^{-(n+1)}=\frac{2.(-1)^{n-1}.n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

129. Cd. $f=ln\sqrt[3]{1-4x}$.

G: Có

$$f=ln\,(1-4x)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\,ln\,(1-4x).$$

Nên

$$f'=\frac{1}{3}.\frac{1}{1-4x}.(-4)=\frac{1}{3}.(-4).(1-4x)^{-1}.$$

Suy ra

$$f''=\frac{-4}{3}.(-1).(1-4x)^{-2}.(-4)=\cdots$$

BÀI 5 QUY TẮC LOPITAL

1. ĐL

- Nếu $\begin{cases} lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty} \\ lim_{x\to x_o}\frac{f'}{g'}=L \end{cases}$ **thì** $lim_{x\to x_o}\frac{f}{g}=lim_{x\to x_o}\frac{f'}{g'}=L$.

Nó gọi là quy tắc Lopital.

130. Tính $I=lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

G: Áp dụng Lop, ta có $I\triangleq lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}.1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}.(-1)}{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

131. Tính $I=\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1-4x}{x^2}$.

G: Áp dụng quy tắc Lop, ta có $I\triangleq \lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}.4-4}{2x}=\frac{0}{0}$.

- Nên Lop tiếp, được $I\triangleq \lim_{x\to 0}\frac{16e^{4x}}{2}=8$.

132. Tìm $I=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)-4x}{x^2}$. $\left(=\frac{0}{0}\right)$

G: Áp dụng quy tắc Lop, ta có

$I\triangleq \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+4x}.4-4}{2x}=lim_{x\to 0}\frac{\frac{4-4-16x}{1+4x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-16}{(1+4x).2}=-8$.

133. Tính $I=lim_{x\to 1}\frac{cos\left(\frac{\pi}{2}.x\right)}{1-x}$.

G: Áp dụng Lop, ta có $I\triangleq lim_{t\to 0}\frac{-sin\left(\frac{\pi}{2}.t\right).\frac{\pi}{2}}{-1}=\frac{\pi}{2}$.

134. Tìm $I=lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{e^{2x}-e^2}$. $\left(=\frac{0}{0}\right)$

G: Áp dụng Lop, ta có $I\triangleq lim_{x\to 1}\frac{4x^3}{e^{2x}.2}=lim_{x\to 1}\frac{2x^3}{e^{2x}}=\frac{2}{e^2}$.

*** Bảng đạo hàm:** $(a^x)'=a^x\ln a$; $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\to (e^u)'=e^u.u'; (a^u)'=a^u\ln a.u'; (ln\,u)'=\frac{u'}{u};$$

$$(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.u'; (\arctan u)'=\frac{1}{1+u^2}.u'$$

135. C3. Tìm $I=\lim_{x\to 0}\frac{4\arctan(1+2x)-\pi}{x}$.

G: Áp dụng quy tắc Lop, ta có

$I\triangleq \lim_{x\to 0}\frac{4.\frac{1}{1+(1+2x)^2}.2-0}{1}=4.\frac{1}{2}.2=4$.

136. Tìm $I=\lim_{x\to 2}\frac{2^x-x^2}{x-2}$.

G: Áp dụng quy tắc Lop, ta có $I\triangleq \lim_{x\to 2}\frac{2^x\ln 2-2x}{1}=4\ln 2-4$.

137. Tìm $I=\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x^3}$.

G: Áp dụng Lop, ta có $I=\lim_{x\to 0}\frac{3^x\ln 3}{3x^2}=\frac{\ln 3}{0}=\infty$.

138. Tìm $I=lim_{x\to 1}\frac{x^6-1}{3^x-3}$. $\left(=\frac{0}{0}\right)$

G: Áp dụng Lop, ta có $I\triangleq lim_{x\to 1}\frac{6x^5}{3^x\,ln\,3}=\frac{6}{3\,ln3}=\frac{2}{ln\,3}$.

139. Tìm $I=lim_{x\to 0}\frac{cos\,4x-cos\,x}{x^2}$. $\left(=\frac{0}{0}\right)$

G: Áp dụng Lop, ta có $I=lim_{x\to 0}\frac{-sin\,4x.4+sin\,x}{2x}=lim_{x\to 0}\frac{sin\,x-4\,sin\,4x}{2x}=\frac{0}{0}$.

Áp dụng Lop lần 2, được $I=lim_{x\to 0}\frac{cos\,x-16\,cos\,4x}{2}=-\frac{15}{2}$.

140. Tìm $I = lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^3}$.

G: Áp dụng Lop, ta có $I \triangleq lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}.2x}{3x^2} = lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}.2}{3x} = \frac{2}{0} = \infty$.

141. Tìm $I = lim_{x\to +\infty}\frac{ln\,(1+e^x)}{e^x}$. $\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)$

G: Áp dụng Lop, ta có $I \triangleq lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{1+e^x}.e^x}{e^x} = lim_{x\to +\infty}\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

142. Tìm $I = lim_{x\to +\infty}\frac{ln\,(x^3+1)}{x^2}$. $\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)$

G: Áp dụng Lop, ta có $I \triangleq lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x^3+1}.3x^2}{2x} = lim_{x\to +\infty}\frac{3x}{2(x^3+1)} = lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{3}{x^2}}{2\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{0}{2} = 0$.

143. Tính $I = lim_{x\to +\infty}\frac{ln\,(x^2+1)}{x^3}$.

G: Áp dụng Lop, ta có $I \triangleq \cdots$

*** Thay thế tương đương trong thương:**

- Nhắc lại: Ta nói $f\sim f_1$ khi $x \to x_o$ nếu $lim_{x\to x_o}\frac{f}{f_1} = 1$.

VD. Vì $lim_{x\to 0}\frac{sin\,x}{x} = 1 \to sin\,x \sim x$ khi $x \to 0$. Tương tự, ta có $tan\,x \sim x \sim arcsin\,x$ khi $x \to 0$.

- Quy tắc: Nếu khi $x \to x_o$, ta có $f\sim f_1$; $g\sim g_1$ thì

$$lim_{x\to x_o}\frac{f}{g} = lim_{x\to x_o}\frac{f_1}{g_1}.$$

144. Tìm $I = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1+x^2}{x.\tan x}$.

G: Vì khi $x \to 0$, ta có $\tan x \sim x$. Áp dụng quy tắc thay thế tương đương, ta có

$I = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1+x^2}{x.x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1+x^2}{x^2}$.

Áp dụng quy tắc Lop, ta có $I \triangleq \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}.3x^2+2x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}.3x+2}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

145. Tìm $I = lim_{x\to 0}\frac{cos\,5x - cos\,x}{x.\ tan\,3x}$.

G: Vì khi $x \to 0$, ta có $tan\,x \sim x \to \tan 3x \sim 3x$. Áp dụng quy tắc thay thế tương đương, ta có

$I = lim_{x\to 0}\frac{cos\,5x-cos\,x}{x.3x} = lim_{x\to 0}\frac{cos\,5x-cos\,x}{3x^2}$.

Áp dụng Lop, ta có $I \triangleq lim_{x\to 0}\frac{-sin\,5x.5+sin\,x}{6x} = lim_{x\to 0}\frac{sin\,x-5\,sin\,5x}{6x} = \frac{0}{0}$.

Áp dụng Lop tiếp, ta có $I \triangleq lim_{x\to 0}\frac{cos\,x-25\,cos\,5x}{6} = \frac{1-25}{6} = -4$.

146. Tìm $I = lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)-x}{x.\ tan\,2x}$.

G: Có $I = lim_{x\to 0}\frac{ln\,(1+x)-x}{2x^2}$.

Áp dụng $I = lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{4x} = lim_{x\to 0}\frac{-x}{(1+x).4x} = -\frac{1}{4}$.

147. Tìm $I = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5}-\sqrt{4+\cos x}}{x.tan\,x}$.

G: Áp dụng thay thế tương đương, được $I = lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5}-\sqrt{4+cos\,x}}{x^2}$.

Áp dụng Lop, ta có $I \triangleq lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{4+cos\,x}}.(-sin\,x)}{2x} = lim_{x\to 0}\frac{sin\,x}{4\sqrt{4+cos\,x}.x} = lim_{x\to 0}\frac{sin\,x}{x}.\frac{1}{4\sqrt{4+cos\,x}} = 1.\frac{1}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{20}$.

Chú ý: Ta có thể viết tích $f.g = \frac{g}{\frac{1}{f}}$.

148. C7. Tìm $I = \lim_{x\to +\infty} x.\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{x}{x+1}\right)$

G: Viết $I = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{x+0}{x+1}}{\frac{1}{x}}$. Áp dụng Lop, ta có $I \triangleq \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x+1)^2+x^2}.x^2 =$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x^2+2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$.

149. Tìm $I = \lim_{x\to 0^+} (x.\ln\sin x)$.

G: Ta có $I = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}}$. $\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)$. Áp dụng Lopital, ta có $I = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} \triangleq \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{\sin x}.\cos x}{-\frac{1}{x^2}} =$ $\lim_{x\to0} \frac{-x^2.\cos x}{\sin x}$.

Vì khi $x \to 0$, có $\sin x \sim x$. Áp dụng thay thế tương đương trong thương tích, được $I = \lim_{x\to0} \frac{-x^2.\cos x}{x} =$ $\lim_{x\to0} (-x.\cos x) = -0.1 = 0$.

150. Tìm $I = \lim_{x\to0^+} \sin x.\ln x$

G: Thay thế tương đương $\sin x \sim x$ khi $x \to 0$, được $I = \lim_{x\to0^+} x.\ln x = \lim_{x\to0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$

Áp dụng Lopital, ta có $I = \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to0}(-x) = 0$.

151. Tìm $I = \lim_{x\to0} \frac{7^x-1}{x^2}$.

G: Áp dụng Lop, ta có $I = \lim_{x\to0} \frac{7^x\ln 7}{2x} = \frac{\ln 7}{0} = \infty$.

3. Dạng $I = \lim u^v$

PP tính: Lấy loga 2 vế, ta có $\ln I = \lim \ln(u^v) = \lim(v.\ln u) = \lim \frac{\ln u}{\frac{1}{v}} = \dots = L \to I = e^L$.

152. Tìm $I = \lim_{x\to0^+} x^x$.

G: Lấy loga 2 vế, được $\ln I = \lim_{x\to0^+} x.\ln x = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$.

Áp dụng Lop, ta có $\ln I = \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to0}(-x) = 0$.

Vậy $\ln I = 0 \to I = e^0 = 1$.

153. C6. Tìm $I = \lim_{x\to0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

G: Lấy loga 2 vế, ta có $\ln I = \lim_{x\to0} \frac{1}{x^2}.\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to0} \frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{\ln(\sin x)-\ln x}{x^2}$.

Áp dụng Lop, được

$\ln I = \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{\sin x}.\cos x-\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to0} \frac{\cos x.x-\sin x}{\sin x.x.2x} = \lim_{x\to0} \frac{\cos x.x-\sin x}{2\sin x.x^2}$.

Thay thế khi $x \to 0$, thì $\sin x \sim x$ trong thương tích rồi Lop, được

$\ln I = \lim_{x\to0} \frac{x.\cos x-\sin x}{2x.x^2} = \lim_{x\to0} \frac{x.\ \cos x-\sin x}{2x^3} = \lim_{x\to0} \frac{\cos x+x.(-\sin x)-\cos x}{6x^2} = \lim_{x\to0} \frac{-\sin x}{6x} = \lim_{x\to0} \frac{-x}{6x} = -\frac{1}{6}$.

Vậy $\ln I = -\frac{1}{6} \to I = e^{-\frac{1}{6}}$.

154. Tìm $I = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2\arctan x}{\pi}\right)^x$.

G: Lấy loga 2 vế, ta có $\ln I = \lim_{x\to+\infty} x.\ln\left(\frac{2\arctan x}{\pi}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln 2+\ln(\arctan x)-\ln\pi}{\frac{1}{x}}$.

Áp dụng Lopital, ta có

$\ln I \triangleq \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\arctan x}.\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{\arctan x.(x^2+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\arctan x}.\frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\frac{\pi}{2}}.\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{\pi}.\frac{1}{1} = -\frac{2}{\pi}$.

Vậy $\ln I = -\frac{2}{\pi} \to I = e^{-\frac{2}{\pi}}$.

Nên $I = e^0 = 1$.

155. Tìm $I = \lim_{x\to1}(1+\sin\pi x)^{\cot\pi x}$.

G: Lấy loga 2 vế, ta có $\ln I = \lim_{x\to 1} \cot \pi x . \ln(1+\sin \pi x) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(1+\sin \pi x)}{\tan \pi x}$.

Áp dụng Lop, ta có $\ln I \triangleq \lim_{x\to 1} \frac{\frac{\cos \pi x.\pi}{1+\sin \pi x}}{\frac{1}{\cos^2 \pi x}.\pi} = \lim_{x\to 1} \frac{\cos^3 \pi x}{1+\sin \pi x} = -1 \to I = e^{-1}$.

156. Tìm $I = lim_{x\to 0} \frac{cos\, 4x - cos\, x}{x.tanx}$.

G: Vì khi $x \to 0$, ta có $tan\, x \sim x$ nên thay thế tương đương được $I = lim_{x\to 0} \frac{cos\, 4x - cos\, x}{x^2}$.

Áp dụng Lop, ta có $I \triangleq lim_{x\to 0} \frac{-sin\, 4x.4 + sin\, x}{2x}$.

Áp dụng Lop tiếp, ta được $I = lim_{x\to 0} \frac{-cos\, 4x.16 + cos\, x}{2} = -\frac{15}{2}$.

ỨNG DỤNG QUY TẮC LOPITAL (tiếp)

- ĐN: Cho HS $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a,b)\backslash\{x_o\}$. HS $f(x)$ gọi là 1 VCB (vô cùng bé) khi $x \to x_o$ nếu

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = 0.$$

* So sánh VCB

- ĐN: Cho 2 VCB $f(x)$ và $g(x)$ khi $x \to x_o$. Xét

$$\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

* Nếu $\lim_{x\to x_o} \frac{f}{g} = L = 0$ thì f gọi là VCB bậc cao hơn g, ký hiệu là $f = o(g)$ khi $x \to x_o$.

* Nếu $\lim_{x\to x_o} \frac{f}{g} = L = \infty$ thì f gọi là VCB bậc thấp hơn g khi $x \to x_o$.

* Nếu $\lim_{x\to x_o} \frac{f}{g} = L = 1$ thì f và g gọi là 2 VCB tương đương, ký hiệu $f \sim g$ khi $x \to x_o$.

* Nếu $\lim_{x\to x_o} \frac{f}{g} = L \neq 0, 1, \infty$ thì ta nói f và g là 2 VCB cùng bậc khi $x \to x_o$.

VD. Khi $x \to 0$, ta có $lim_{x\to 0} \frac{sin\, x}{x} = 1$ nên $\sin x \sim x \sim tan\, x$ khi $x \to 0$.

- ĐL: Quy tắc thay thế tương đương trong tích thương: Nếu khi $x \to x_o$, ta có $f \sim f_1$; $g \sim g_1$ $(tức\ lim_{x\to x_o} \frac{f}{f_1} = 1)$ thì

$$\begin{cases} lim_{x\to x_o} (f.g) = lim_{x\to x_o} (f_1.g_1); \\ lim_{x\to x_o} \frac{f}{g} = lim_{x\to x_o} \frac{f_1}{g_1}. \end{cases}$$

- (Một số VCB tương đương) Khi $x \to 0$, ta có

$$\sin x \sim x; \tan x \sim x \sim \arcsin x;$$
$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2; 1 - cos\, ax \sim \frac{1}{2}.(ax)^2 = \frac{a^2x^2}{2};$$
$$e^x - 1 \sim x; a^x - 1 \sim x \ln a; \ln(1+x) \sim x;$$
$$(1+x)^a - 1 \sim ax; \sqrt{1+x} - 1 = (1+x)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2}x; \sqrt[3]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{3}x.$$

157. So sánh các VCB $a = \sqrt[3]{1-2x} - 1$; $b = sin\, x$ khi $x \to 0$.

G: Có a, b là các VCB khi $x \to 0$. Xét $lim_{x\to 0} \frac{a}{b} = lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1-2x} - 1}{sin\, x} = lim_{x\to 0} \frac{(1-2x)^{\frac{1}{3}} - 1}{sin\, x}$.

Áp dụng Lop, ta có $L \triangleq lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}(1-2x)^{-\frac{2}{3}}.(-2) - 0}{cos\, x} = lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3}.(1-2x)^{-\frac{2}{3}}}{cos\, x} = \frac{-\frac{2}{3}}{1} = -\frac{2}{3} \neq 0; 1; \infty$.

Vậy a, b là các VCB cùng bậc khi $x \to 0$.

158. So sánh các VCB $a = 1 - cos\, 3x$; $b = sin\, 2x$ khi $x \to 0$.

G: Có a, b là các VCB khi $x \to 0$. Xét $lim_{x\to 0} \frac{a}{b} = lim_{x\to 0} \frac{1 - cos\, 3x}{sin\, 2x}$.

Thay thế tương đương, $sin\, 2x \sim 2x$ khi $x \to 0$ được $L = lim_{x\to 0} \frac{1 - cos\, 3x}{2x}$.

Áp dụng Lop, được $L = lim_{x\to 0} \frac{sin\, 3x.3}{2} = 0$.

Vậy a là VCB bậc cao hơn b khi $x \to 0$.

159. So sánh các VCB $f = 1 - \cos^2 x$; $g = \ln(1+x)$ khi $x \to 0$.

G: Có f, g là các VCB khi $x \to 0$. Xét $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\ln(1+x)}$.

Áp dụng Lop, ta có $I = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\frac{1}{1+x}} = 0$.

160. So sánh các VCB $f = cos\left(\frac{\pi}{2}x\right); g = 1 - x$ khi $x \to 1$.

G: Có f, g là các VCB khi $x \to 0$. Xét $lim_{x\to 1} \frac{cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x} = \cdots$

161. Xét tính liên tục của $f = \begin{cases} \frac{6x}{e^x - e^{-x}} & : \quad x \neq 0 \\ a & : \quad x = 0. \end{cases}$

G: Xét $x_o \neq 0$. Có $f = \frac{6x}{e^x - e^{-x}}$ là hàm sơ cấp có TXĐ $D = R\backslash\{0\}$ nên nó LT tại mọi $x_o \neq 0$.

- Xét $x_o = 0$. Theo quy tắc Lop, có

$$lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{6x}{e^x - e^{-x}} \triangleq \lim_{x\to 0} \frac{6}{e^x - e^{-x}.(-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{6}{e^x + e^{-x}} = 3.$$

Và $f(0) = a$.

- Nếu $a = 3 \to \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \to$ HS liên tục tại $x_o = 0$.

- Nếu $a \neq 3 \to$ HS gián đoạn tại $x_o = 0$.

162. Xét tính liên tục của $f = \begin{cases} \frac{1 - e^{\sin x}}{x - \pi} & : \quad x > \pi \\ x^2 + a & : \quad x \leq \pi. \end{cases}$

G: Xét $x > \pi \to f = \frac{1 - e^{\sin x}}{x - \pi}$ là hàm sơ cấp có TXĐ $D = R\backslash\{\pi\}$ nên nó LT tại mọi điểm $x > \pi$.

- Xét $x < \pi \to f = x^2 + a$ là hàm sơ cấp có TXĐ $D = R$ ...

-Xét $x_o = \pi$. Áp dụng Lop, ta có

$$lim_{x\to \pi^+} f = \lim_{x\to \pi^+} \frac{1 - e^{\sin x}}{x - \pi} = \lim_{x\to \pi^+} \frac{-e^{\sin x}.\cos x}{1} = -e^0.(-1) = 1.$$

Và $lim_{x\to \pi^-}(x^2 + a) = \pi^2 + a$.

Và $f(\pi) = \pi^2 + a$.

- Nên nếu $\pi^2 + a = 1 \to a = 1 - \pi^2 \to \ldots$

- Nếu $a \neq 1 - \pi^2 \to$ HS gián đoạn tại $x = \pi$.

163. Xét tính liên tục của $f = \begin{cases} x \ln x & : \quad x > 0 \\ a & : \quad x \leq 0. \end{cases}$

G: Xét $x > 0 \to f = x\, ln\, x \ldots$

Xét $x < 0 \to f = a \ldots$

- Xét $x_o = 0$. Có theo Quy tắc Lop,

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}.(-x^2) = lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

Và $lim_{x\to 0^-}(a) = a$.

Nên nếu $a = 0 \to lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \to$ HS LT tại $x = 0$.

Nếu $a \neq 0 \to$ HS gián đoạn tại $x = 0$.

164. Xét tính liên tục của HS $f = \begin{cases} \frac{1 - \cos\sqrt{x}}{x} & : \quad x > 0 \\ a & : \quad x \leq 0. \end{cases}$

G: Xét $x_o > 0 \to f =$

- Xét $x_o < 0$

- Xét $x_o = 0$. Có theo quy tắc Lop,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \cos\sqrt{x}}{x} \triangleq lim_{x\to 0^+} \frac{sin\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = lim_{x\to 0^+} \frac{sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \cdots$$

165. Tính f', biết $f = \begin{cases} x^2 + x & : \quad x \geq 0 \\ tan\, 3x & : \quad x < 0. \end{cases}$

G: Nếu $x > 0 \to f = x^2 + x \to f' = 2x + 1$.

Nếu $x < 0 \to f = tan\, x \to f' = \frac{1}{cos^2 x}.3 = \cdots$

Tại $x = 0$. Có $f(0) = 0^2 + 0 = 0$. Nên

$$f'_+(0) = lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + x}{x} = lim_{x\to 0}(x + 1) = 1.$$

Và $f'_-(0) = lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = lim_{x\to 0^-} \frac{tan\, 3x}{x}$.

Áp dụng Lop, ta có

$f'_-(0) = lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{cos^2 3x}.3}{1} = 3 \neq f'_+(0)$.
Vậy $\nexists f'(0)$.

166. **Tính đạo hàm của** $f = \begin{cases} 7^x - 4x & : \quad x \geq 1 \\ 3.cos\,(2x-2) & : \quad x < 1. \end{cases}$

G: Xét $x > 1 \to f = 7^x - 4x \to f' = 7^x.ln\,7 - 4$.

- Xét $x < 1 \to f = 3.cos\,(2x-2) \to f' = 3.\big(-sin\,(2x-2)\big).2 = -6\,sin\,(2x-2)$.

- Xét $x_o = 1 \to f(1) = 7^1 - 4.1 = 3$. **Nên**

$f'_+(1) = lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = lim_{x\to 1^+}\frac{7^x-4x-3}{x-1}$.

Áp dụng Lop, ta có $f'_+(1) = lim_{x\to 1^+}\frac{7^x.ln7-4}{1} = 7.ln\,7 - 4$.

- Và $f'_-(1) = lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = lim_{x\to 1^-}\frac{3\,cos\,(2x-2)-3}{x-1}$.

Áp dụng Lop, ta có $f'_-(1) = lim_{x\to 1^-}\frac{3.(-sin\,(2x-2)).2}{1} = lim_{x\to 1^-} - 6\,sin(2x-2) = 0 \neq f'_+(1) = 7\,ln7 - 4$.

Vậy $\nexists\, f'(1)$.

167. **Tính đạo hàm của** $f = \begin{cases} 2x-6 & : \quad x \geq 4 \\ x^2-3x-2 & : \quad x < 4. \end{cases}$

G: Nếu $x > 4 \to f = 2x - 6 \to f' = 2$.

Nếu $x < 4 \to f = x^2 - 3x - 2 \to f' = 2x - 3$.

Xét $x = 4 \to f(4) = 2$. **Nên**

$f'_+(4) = lim_{\,x\to 4^+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = lim_{x\to 4}\frac{2x-6-2}{x-4} = 2$.

Và

$f'_-(4) = lim_{x\to 4^-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = lim_{x\to 4^-}\frac{x^2-3x-2-2}{x-4} = lim_{x\to 4^-}\frac{x^2-3x-4}{x-4} = lim_{x\to 4^-}(x+1) = 5 \neq f'_+(4) = 2$.

Nên ko tồn tại $f'(4)$.

Bài tập:

- Nếu $\begin{cases} lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty} \\ lim_{x\to x_o}\frac{f'}{g'} = L \end{cases}$ **thì** $lim_{x\to x_o}\frac{f}{g} = lim_{x\to x_o}\frac{f'}{g'} = L$.

Nó gọi là quy tắc Lopital.

168. **C10. Tìm** $I = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sqrt{1+2x}-e^x}$. $\left(=\frac{0}{0}\right)$

G: Áp dụng Lop, ta có

$I \triangleq lim_{x\to 0}\frac{1-cos\,x}{\frac{1}{2\sqrt{1+2x}}.\,2-e^x} = lim_{x\to 0}\frac{1-cos\,x}{(1+2x)^{-\frac{1}{2}}-e^x} = \frac{0}{0}$.

- Áp dụng Lop tiếp, được $I = lim_{x\to 0}\frac{sin\,x}{-\frac{1}{2}.(1+2x)^{-\frac{3}{2}}.\,2-e^x} = lim_{x\to 0}\frac{sin\,x}{-(1+2x)^{-\frac{3}{2}}-e^x} = \frac{0}{-2} = 0$.

169. **C1. Tìm** $I = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)-3x}{x^2}$. $\left(=\frac{0}{0}\right)$

G: Áp dụng quy tắc Lop, ta có

$$I \triangleq \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+3x}.3-3}{2x} = lim_{x\to 0}\frac{\frac{3-3-9x}{1+3x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-9}{2(1+3x)} = -\frac{9}{2}.$$

170. **Tìm** $I = lim_{x\to 0}\frac{1-cos\,x}{\sqrt[3]{1+3x}-e^x}$.

G: …

*** Bảng đạo hàm:** $(a^x)' = a^x\ln a$; $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \to (arctan\,u)' = \frac{1}{1+u^2}.u'$$

171. **C3. Tìm** $I = \lim_{x\to 0}\frac{4\arctan(1+3x)-\pi}{x}$. $\left(=\frac{0}{0}\right)$

G: Áp dụng quy tắc Lop, ta có

$I \triangleq \lim_{x\to 0}\frac{4.\,\frac{1}{1+(1+3x)^2}.\,3-0}{1} = 4.\frac{1}{2}.3 = 6$.

172. C5. Tìm $I = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^3 x}{x}$. $\left(= \frac{\infty}{\infty}\right)$

G: Áp dụng Lop, ta có

$$I \triangleq \lim_{x\to+\infty} \frac{3\ln^2 x.\ \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3\ln^2 x}{x} = \frac{\infty}{\infty}.$$

- Áp dụng Lop tiếp, được $I = \lim_{x\to+\infty} \frac{3.\ 2\ln x.\ \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$.

- Lop lần 3, được $I = \lim_{x\to\infty} \frac{6.\ \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{x} = \frac{6}{\infty} = 0$.

173. C13. Tìm $I = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^7}{e^x}$.

G: Áp dụng Lop liên tiếp nhiều lần, ta có

$$I \triangleq \lim_{x\to+\infty} \frac{7x^6}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{7.6x^5}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{7.6.5x^4}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{7.6.5\ldots 2x^1}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{7.6\ldots 2.1}{e^x} = \frac{7!}{\infty} = 0.$$

*** Thay thế tương đương trong thương:**

- Nhắc lại: Ta nói $f \sim f_1$ **khi** $x \to x_o$ **nếu** $\lim_{x\to x_o} \frac{f}{f_1} = 1$.

VD. Vì $\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1 \to \sin x \sim x$ **khi** $x \to 0$. **Tương tự, ta có** $\tan x \sim x \sim \arcsin x$ **khi** $x \to 0$.

- Quy tắc: Nếu khi $x \to x_o$, **ta có** $f \sim f_1$; $g \sim g_1$ **thì**

$$\lim_{x\to x_o} \frac{f}{g} = \lim_{x\to x_o} \frac{f_1}{g_1}.$$

174. C4. Tìm $I = \lim_{x\to0} \frac{\arctan x - x}{x.\ \sin^2 x}$.

G: Thay thế tương đương, vì khi $x \to 0$ **thì** $\sin x \sim x \to \sin^2 x \sim x^2$ **nên** $I = \lim_{x\to0} \frac{\arctan x - x}{x.\ x^2} = \lim_{x\to0} \frac{\arctan x - x}{x^3}$.

Áp dụng Lop, ta có

$$I \triangleq \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2} = \lim_{x\to0} \frac{-x^2}{(1+x^2).\ 3x^2} = \lim_{x\to0} \frac{-1}{3(1+x^2)} = -\frac{1}{3}.$$

175. C2. Tìm $I = \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1 - x}{x.\ \sin 2x}$.

G: Vì khi $x \to 0$, **có** $\sin x \sim x \to \sin 2x \sim 2x$, **nên thay thế tương đương trước:**

$$I = \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1 - x}{x.2x} = \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1 - x}{2x^2}.$$

Áp dụng quy tắc Lop, ta có $I \triangleq \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{4x} = \frac{0}{0}$.

Nên Lop tiếp, được $I \triangleq \lim_{x\to0} \frac{e^x}{4} = \frac{1}{4}$.

176. C12. Tìm $I = \lim_{x\to0} \frac{x.\ \tan x}{\sqrt[5]{1+5x} - (1+x)}$.

G: Thay thế tương đương, vì khi $x \to 0$ **nên** $\tan x \sim x$, **ta có** $I = \lim_{x\to0} \frac{x.\ x}{\sqrt[5]{1+5x} - (1+x)} = \lim_{x\to0} \frac{x^2}{(1+5x)^{\frac{1}{5}} - (1+x)}$.

- Áp dụng Lop, ta có

$$I \triangleq \lim_{x\to0} \frac{2x}{\frac{1}{5}.(1+5x)^{-\frac{4}{5}}.\ 5 - 1} = \lim_{x\to0} \frac{2x}{(1+5x)^{-\frac{4}{5}} - 1} = \frac{0}{0}.$$

- Áp dụng Lop lần 2, được $I = \lim_{x\to0} \frac{2}{-\frac{4}{5}.(1+5x)^{-\frac{9}{5}}.\ 5} = \lim_{x\to0} \frac{2}{-4.(1+5x)^{-\frac{9}{5}}} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$.

177. C15. Tìm $I = \lim_{x\to0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$.

G: Có $I = \lim_{x\to0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2.\ \sin^2 x}$.

Vì khi $x \to 0$, **ta có** $\sin x \sim x \to \sin^2 x \sim x^2$ **nên theo quy tắc thay thế VCB tương đương trong tích thương, ta có**

$$I = \lim_{x\to0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2.\ x^2} = \lim_{x\to0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4}.$$

Áp dụng quy tắc Lop, ta có $I \triangleq \lim_{x\to0} \frac{2\sin x\cos x - 2x}{4x^3} = \lim_{x\to0} \frac{\sin 2x - 2x}{4x^3} = \frac{0}{0}$.

Áp dụng Lop tiếp, được $I = \lim_{x\to0} \frac{\cos 2x.2 - 2}{12x^2} = \lim_{x\to0} \frac{\cos 2x - 1}{6x^2} \left(= \frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to0} \frac{-\sin 2x.2}{12x} = \lim_{x\to0} \frac{-\sin 2x}{6x} = \lim_{x\to0} \frac{-2x}{6x} = -\frac{1}{3}$ $(\text{vì khi } x \to 0,\ \text{có } \sin 2x \sim 2x)$.

Chú ý: Ta có thể viết tích $f.g = \frac{g}{\frac{1}{f}}$.

178. C9. Tìm $I = lim_{x\to+\infty}\, x.(\pi - 2\,arctan\, 3x)$.

G: Áp dụng Lopital, ta có

$$I = lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\,arctan\,3x}{\frac{1}{x}} \triangleq lim_{x\to+\infty}\frac{-2.\ \frac{1}{1+9x^2}.\ 3}{-\frac{1}{x^2}} = lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2}{9x^2+1} = lim_{x\to+\infty}\frac{6}{9+\frac{1}{x^2}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

179. C11. Tìm $I = lim_{x\to0^+}\ x^2.ln\,x$

G: Áp dụng Lopital, ta có

$$I = lim_{x\to0^+}\frac{ln\,x}{\frac{1}{x^2}} = lim_{x\to0^+}\frac{ln\,x}{x^{-2}} \triangleq lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = lim_{x\to0}\left(-\frac{x^3}{2x}\right) = lim_{x\to0}\ \left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0.$$

3. Dạng: $I = \lim\ u^v$

- PP tính: Lấy loga 2 vế, ta có

$$\ln I = lim\,ln\,(u^v) = \lim(v.\ln u) = \lim\frac{\ln u}{\frac{1}{v}} = \cdots = L \to I = e^L.$$

180. C8. Tìm $I = lim_{x\to0^+}(sin\,x)^{tan\,2x}$.

G: Lấy loga 2 vế, được $ln\,I = lim_{x\to0^+}\,tan\,2x.ln\,(sin\,x)$.

- Thay thế tương đương $tan\,2x \sim 2x$ khi $x\to0$, được $ln\,I = lim_{x\to0^+}\,2x.ln\,(sin\,x) = lim_{x\to0}\frac{2.\ ln\,(sin\,x)}{\frac{1}{x}}$.

- Áp dụng Lop, được

$$I = lim_{x\to0^+}\frac{2.\ \frac{1}{sin\,x}.\ cos\,x}{-\frac{1}{x^2}} = lim_{x\to0}\frac{-2x^2.\ cos\,x}{sin\,x}.$$

- Vì khi $x\to0$, có $sin\,x\sim x$. Áp dụng thay thế tương đương trong thương tích, được $ln\,I = lim_{x\to0}\frac{-2x^2.\ cos\,x}{x} = lim_{x\to0}\,(-2x.cos\,x\,) = -0.1 = 0$. Vậy $ln\,I = 0 \to I = e^0 = 1$.

181. C6. Tìm $I = lim_{x\to0}\,\left(\frac{sin\,x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

G: Lấy loga 2 vế, ta có $ln\,I = lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}.ln\,\left(\frac{sin\,x}{x}\right) = lim_{x\to0}\frac{ln\left(\frac{sin\,x}{x}\right)}{x^2} = lim_{x\to0}\ \frac{ln\,(sin\,x)-ln\,x}{x^2}$.

Áp dụng Lop, được

$$ln\,I = lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{sin\,x}.cos\,x - \frac{1}{x}}{2x} = lim_{x\to0}\frac{\frac{cos\,x}{sin\,x}-\frac{1}{x}}{2x} = lim_{x\to0}\frac{cos\,x.x - sin\,x}{sin\,x.x.2x} = lim_{x\to0}\frac{cos\,x.x - sin\,x}{2sin\,x.x^2}.$$

Thay thế khi $x\to0$, thì $sin\,x\sim x$ trong thương tích rồi Lop, được

$$ln\,I = lim_{x\to0}\frac{x.cos\,x-sin\,x}{2x.x^2} = lim_{x\to0}\frac{x.\ cos\,x-sin\,x}{2x^3} = lim_{x\to0}\frac{cos\,x+x.(-sin\,x)-cos\,x}{6x^2} = lim_{x\to0}\frac{-sin\,x}{6x} = lim_{x\to0}\frac{-x}{6x} = -\frac{1}{6}.$$

Vậy $ln\,I = -\frac{1}{6} \to I = e^{-\frac{1}{6}}$.

182. C14. Tìm $I = lim_{x\to0}\,\left(\frac{1}{x^2}\right)^{sin\,x}$.

G: Có $I = lim_{x\to0}\,\left(x^{-2}\right)^{sin\,x} = lim_{x\to0}\,x^{(-2\,sin\,x)}$.

- Lấy loga 2 vế, được $ln\,I = lim_{x\to0}(-2sin\,x.ln\,x)$.

- Thay thế tương đương, $sin\,x\sim x$ khi $x\to0$, được

$$ln\,I = lim_{x\to0}(-2x\,ln\,x) = lim_{x\to0}\frac{-2\,ln\,x}{\frac{1}{x}}.$$

- Áp dụng Lop, được $ln\,I = lim_{x\to0}\frac{-2.\ \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = lim_{x\to0}\frac{2x^2}{x} = lim_{x\to0}(2x) = 0$.

Vậy $ln\,I = 0 \to I = e^0 = 1$.

CHƯƠNG III TÍCH PHÂN
BÀI 8 ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

DẠNG 1. Tính độ dài của đường cong

- Công thức: Cho $(C):\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t);\ t \in [a,b]. \end{cases}$ **Thì độ dài** $l = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$

f(x)=2.7^x

- Nếu $x = t \to \begin{cases} x' = 1 \\ y = y(x);\ x \in [a,b] \end{cases} \to l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx.$

183. Tính độ dài của các đường cong $l: y = e^x;\ x \in [0,4].$

G: Có $y' = e^x;\ x \in [0,4] \to$ **Độ dài** $l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx = \int_0^4 \sqrt{1 + e^{2x}}\,dx$. **Đặt** $t = \sqrt{1 + e^{2x}} \to t^2 = 1 + e^{2x} \to e^{2x} = t^2 - 1 \to e^{2x}.2dx = 2tdt \to e^{2x}dx = tdt \to dx = \frac{tdt}{e^{2x}} = \frac{tdt}{t^2-1}$. **Đổi cận nên**

$$l = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^8}} t.\frac{tdt}{t^2-1} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^8}} \frac{t^2}{t^2-1}dt = \int_1^{\sqrt{1+e^8}} \frac{(t^2-1)+1}{t^2-1}dt = \int_1^{\sqrt{1+e^8}} \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right)dt$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^8}} \left(1 + \frac{1}{(t-1).(t+1)}\right)dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^8}} \left(1 + \frac{(t+1)-(t-1)}{(t-1).(t+1)}.\frac{1}{2}\right)dt$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^8}} \left[1 + \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\right]dt = \left[t + \frac{1}{2}(ln\,|t-1| - ln\,|t+1|)\right]\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^8}} = \cdots$$

- Nếu $y = y(x);\ x \in [a,b] \to l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx.$

- Nếu $x = x(y);\ y \in [a,b] \to$ **Độ dài** $l = \int_a^b \sqrt{1 + x'^2(y)}\,dy.$

184. $l: x = \frac{y^3}{12} + \frac{1}{y};\ y \in [1,2].$

G: Có $x' = \frac{3y^2}{12} - \frac{1}{y^2} = \frac{y^2}{4} - \frac{1}{y^2};\ y \in [1,2]$. **Nên độ dài**

$l = \int_a^b \sqrt{1 + x'^2(y)}\,dy = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{y^2}{4} - \frac{1}{y^2}\right)^2}\,dy = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{y^4}{16} - 2.\frac{y^2}{4}.\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^4}}dy = \int_1^2 \sqrt{\frac{y^4}{16} + \frac{1}{2} + \frac{1}{y^4}}dy =$

$\int_1^2 \sqrt{\frac{y^4}{16} + 2.\frac{y^2}{4}.\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^4}}dy = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{y^2}{4} + \frac{1}{y^2}\right)^2}\,dy = \int_1^2 \left|\frac{y^2}{4} + \frac{1}{y^2}\right|dy = \int_1^2 \left(\frac{y^2}{4} + \frac{1}{y^2}\right)dy = \left(\frac{y^3}{12} - \frac{1}{y}\right)\Big|_1^2 = \frac{13}{12}.$

- Nếu $(C):\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t);\ t \in [a,b] \end{cases} \to l = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$

185. $l:\begin{cases} x = \frac{t^4}{4} - \ln t \\ y = t^2; t \in [2,3]. \end{cases}$

G: Có $\begin{cases} x' = t^3 - \frac{1}{t} \\ y' = 2t;\ t \in [2,3] \end{cases}$ **→ Độ dài**

$$l = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = \int_2^3 \sqrt{\left(t^3 - \frac{1}{t}\right)^2 + (2t)^2}\,dt = \int_2^3 \sqrt{t^6 - 2.t^3.\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + 4t^2}\,dt$$

$$= \int_2^3 \sqrt{t^6 + 2.t^3.\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}}\,dt = \int_2^3 \sqrt{\left(t^3 + \frac{1}{t}\right)^2}\,dt = \int_2^3 \left|t^3 + \frac{1}{t}\right| dt = \int_2^3 \left(t^3 + \frac{1}{t}\right) dt$$

$$= \left(\frac{t^4}{4} + \ln|t|\right)\Big|_2^3 = \frac{65}{4} + \ln\frac{3}{2}.$$

186. **Tính** $l:\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}; t \in [0, 2\pi].$

G: Có $\begin{cases} x' = a(1 - \cos t) \\ y' = a.(-\sin t);\ \ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$

Nên $l = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = \cdots$

187. $l: y = \ln x; x \in [1,3].$

G: Có $y' = \frac{1}{x}; x \in [1,3].$ **Độ dài**

$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx = \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}dx = \int_1^3 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx = \int_1^3 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}.xdx$

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \to t^2 = x^2 + 1 \to x^2 = t^2 - 1 \to 2xdx = 2tdt \to xdx = tdt$. **Đổi cận nên**

$$l = \cdots$$

<u>- Tọa độ cực của 1 điểm.</u> Trong mp (Oxy), cho điểm $M(x,y)$. **Ta nói M(x, y) được cho bởi tọa độ Đề các.**

- Đặt $\begin{cases} r = OM = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = (\widehat{Ox, OM}); \cos\varphi = \frac{x}{r}; \sin\varphi = \frac{y}{r}; \varphi \in [0, 2\pi] \end{cases}$ **→** $M(r,\varphi)$ **gọi là tọa độ cực của điểm M.**

- VD. Cho $M(1, \sqrt{3}) \to$

$$\begin{cases} r = OM = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+3} = 2; \\ \varphi = (\widehat{Ox, OM}); \cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}; \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \varphi \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Nên góc $\varphi = \frac{\pi}{3}$. **Vậy tọa độ cực của điểm** $M\left(2; \frac{\pi}{3}\right)$.

- Nếu $l: r = r(\varphi); \varphi \in [a,b]$ **→ độ dài**

$$l = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2}d\varphi.$$

188. **c)** $l: r = a(1 + \cos\varphi); a > 0; \varphi \in [0; 2\pi].$

r(t)=1+cos t

G: Vì $(k.f)' = k.f'$. Có $r = a(1+\cos\varphi) \to r' = a.(-\sin\varphi) = -a\sin\varphi;\ 0 \le \varphi \le 2\pi$.
- NX: Đồ thị nhận Ox là trục đối xứng nên ta chỉ cần tính độ dài phần đường cong nằm trên trục Ox rồi nhân 2.
Nên góc $\varphi \in [0;\pi] \to$ độ dài

$$l = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2}d\varphi = 2.l_1 = 2.\int_0^\pi \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\ d\varphi =$$
$$2a.\int_0^\pi \sqrt{1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\,d\varphi = 2a.\int_0^\pi \sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi = 2a.\int_0^\pi \sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi =$$
$$2a.\int_0^\pi \sqrt{2.2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\ d\varphi = 4a.\int_0^\pi \left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 4a.\int_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}d\varphi\ \left(v\text{ì } \varphi \in [0,\pi] \to \frac{\varphi}{2} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \to \cos\frac{\varphi}{2} \ge 0\right) =$$
$$4a.\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{1}{2}}|\_0\hat{}\pi = 8a.\sin\frac{\varphi}{2}|\_0\hat{}\pi = 8a.$$

189. Tính độ dài $l: y = \ln(\cos x);\ x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right]$.

G: Có $y' = \frac{1}{\cos x}.(-\sin x) = -\tan x;\ x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right]$. Nên độ dài

$$l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+\tan^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left|\frac{1}{\cos x}\right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \cdots\ \left(v\text{ì } \int\frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C \to \int\frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C\right)$$

- Tính độ dài: Nếu $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t);\, t \in [a,b] \end{cases} \to l = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$.
- Nếu $y = y(x) \to l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$.
- Nếu $x = x(y) \to l = \int_a^b \sqrt{1+x'^2(y)}\,dy$.
- Nếu $r = r(\varphi); \varphi \in [a,b] \to l = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2}d\varphi$.

Bài tập:
- Chú ý: Cho $(C): y = y(x);\ x \in [a,b] \to$ độ dài $l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$.
- Nếu $(C): x = x(y);\ y \in [a,b] \to$ độ dài $l = \int_a^b \sqrt{1+x'^2(y)}dy$.

190. C1. a) Tính độ dài $l: x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y;\ 1 \le y \le e$.

G: Có $x' = \frac{y}{2} - \frac{1}{2y};\ 1 \le y \le e \to$ Độ dài

$$l = \int_a^b \sqrt{1+x'^2(y)}dy = \int_1^e \sqrt{1+\left(\frac{y}{2}-\frac{1}{2y}\right)^2}\,dy = \int_1^e \sqrt{1+\frac{y^2}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4y^2}}\,dy = \int_1^e \sqrt{\frac{y^2}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4y^2}}\,dy =$$
$$\int_1^e \sqrt{\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{2y}\right)^2}\,dy = \int_1^e \left|\frac{y}{2}+\frac{1}{2y}\right| dy = \int_1^e \left(\frac{y}{2}+\frac{1}{2y}\right) dy = \left(\frac{y^2}{4}+\frac{1}{2}\ln y\right)|\_1\hat{}e = \left(\frac{e^2}{4}+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$

191. Tính độ dài của $l: y = \ln(\cos x);\ x \in \left[0,\frac{\pi}{3}\right]$.

G: Có $y' = \frac{1}{\cos x}.(-\sin x) = -\tan x;\ x \in \left[0,\frac{\pi}{3}\right]$. Nên độ dài

$l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+\tan^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \cdots$ $\left(\text{vì } \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C \rightarrow \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.\right)$

- Nếu (C): $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t);\ t \in [a,b] \end{cases} \rightarrow l = \int_a^b \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt.$

192. Cb) Tính độ dài l: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}};\ a > 0.$

G: Có $\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \rightarrow \frac{x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} = 1 \rightarrow \left[\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 + \left[\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = \cos t \\ \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = \sin t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t;\ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$

- NX: Vì ĐTHS nhận Ox và Oy là các trục đối xứng nên ta chỉ cần tính độ dài phần đường cong nằm trong góc xOy rồi nhân với 4. Nên $t = (\widehat{Ox, OM}) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ **và** $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \rightarrow$

$\begin{cases} x' = a.3\cos^2 t.(-\sin t) = -3a\cos^2 t \sin t \\ y' = a.3\sin^2 t.\cos t = 3a\sin^2 t \cos t. \end{cases}$ **Nên độ dài**

$l = \int_a^b \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt = 4.l_1 = 4.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt =$
$4.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|3a\cos t\sin t.\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\right| dt = 2.\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\,.2\sin t\cos t\,dt = 6a.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt = 6a.\frac{-\cos 2t}{2} =$
$(-3a\cos 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = (3a) - (-3a) = 6a.$

x(t)=(cos t)^3, y(t)=(sin t)^3

<u>* Tọa độ cực.</u> Trong mp (Oxy), cho điểm $M(x,y)$ **gọi là tọa độ Đề Các. Đặt** $\begin{cases} r = OM = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = (\widehat{Ox, OM}) \in [0, 2\pi] \end{cases} \rightarrow M(r,\varphi)$ **gọi là tọa độ cực của điểm M.**

- Nếu (C): $r = r(\varphi);\ \varphi \in [a,b] \rightarrow$ **độ dài** $l = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi.$

r(t)=1+cos t

193. c) $l: r = a(1 + \cos\varphi);\ a > 0$.

G: NX: Đồ thị có hình trái tim nhận Ox là trục đối xứng nên ta chỉ cần tính độ dài phần đường cong nằm trên trục Ox rồi nhân với 2. Nên góc $\varphi = (\widehat{Ox, OM}) \in [0, \pi];\ r = a(1 + \cos\varphi) \to r' = a.(-\sin\varphi) = -a\sin\varphi \to$ độ dài $l = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi = 2.l_1 = 2\int_0^\pi \sqrt{a^2(1 + \cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\ d\varphi =$

$2a\int_0^\pi \sqrt{1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\,d\varphi = 2a\int_0^\pi \sqrt{2 + 2\cos\varphi}\,d\varphi = 2a\int_0^\pi \sqrt{2\left(1 + \cos 2.\frac{\varphi}{2}\right)}\,d\varphi =$

$2a\int_0^\pi \sqrt{2.2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\ d\varphi = 4a\int_0^\pi \left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 4a\int_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi \quad \left(\text{vì } \varphi \in [0, \pi] \to \frac{\varphi}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left(4a.\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{1}{2}}\right) =$

$\left(8a\sin\frac{\varphi}{2}\right)$ |_0^$\pi = 8a$.

194. Cd) $l: y = \arcsin(e^{-x});\ x \in [0, 1]$.

G: Có $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to y' = \frac{1}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}.e^{-x}.(-1) = \frac{-e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$. Nên độ dài

$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\ dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}}}\,dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1-e^{-2x}}}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}} = \int_0^1 \frac{e^{-2x}dx}{e^{-2x}.\sqrt{1-e^{-2x}}}$.

- Đặt $t = \sqrt{1 - e^{-2x}} \to t^2 = 1 - e^{-2x} \to e^{-2x} = 1 - t^2 \to e^{-2x}.(-2)dx = -2tdt \to e^{-2x}dx = tdt$. Đổi cận nên

$l = \int_0^{\sqrt{1-e^{-2}}} \frac{tdt}{(1-t^2).t} = \int_0^{\sqrt{1-e^{-2}}} \frac{dt}{1-t^2} = \int_0^{\sqrt{1-e^{-2}}} \frac{dt}{(1-t).(1+t)} = \int_0^{\sqrt{1-e^{-2}}} \frac{(1-t)+(1+t)}{(1-t)(1+t)}.\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}.\int_0^{\sqrt{1-e^{-2}}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt =$

$\frac{1}{2}.\left(\frac{\ln|1-t|}{-1} + \ln|1+t|\right) = \cdots$

195. $l: y = \ln(\cos x); x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

G: Có $y' = \frac{1}{\cos x}.(-\sin x) = -\tan x; x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$. Nên độ dài

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + \tan^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\,dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\ |_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \cdots\left(\text{vì } \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C \to \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \ln\left|\tan\frac{x + \frac{\pi}{2}}{2}\right| = \cdots\right)$$

Cách 2. Xét $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x dx}{1-\sin^2 x}$.

Đặt $t = \sin x \to dt = \cos tdt$. Đổi cận nên

$I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{1-t^2} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{(1-t).(1+t)} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{(1-t)+(1+t)}{(1-t).(1+t)}.\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}.\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt = \cdots$

- Nếu $r = r(\varphi); \varphi \in [a, b] \to$ Độ dài

$$l = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi.$$

- Nếu $l: r = r(\varphi);\ \varphi \in [a, b] \to$ độ dài $l = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi$.

*** Tọa độ cực. Trong mp (Oxy), cho điểm $M(x,y)$. Đặt $\begin{cases} r = OM \\ \varphi = (\widehat{Ox, OM}) \end{cases} \to M(r,\varphi)$ gọi là tọa độ cực.**

196. Ce) $r = 2\varphi;\ \varphi \in [0, 2\pi]$.

G: Có $r' = 2 \to$ Độ dài $l = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\varphi^2 + 4} d\varphi = 2.\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1} d\varphi$.

- Xét $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{x^2+1}dx$. Dùng TPTP, được $I = \int udv = uv - \int vdu = \sqrt{x^2+1}.x - \int xd\left(\sqrt{x^2+1}\right) = x\sqrt{x^2+1} - \int x.\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = x\sqrt{x^2+1} - I + ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| \to I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|$ $\left(vì \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|\right)$

Vậy $l = 2.I = \left(x.\sqrt{x^2+1} + ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|\right)\Big|_0^{2\pi} = \cdots$

- Cách 2. Xét $l = 2.\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2+1}d\varphi$. Đặt $\varphi = 1.tan\, t = tan\, t \to d\varphi = \frac{1}{cos^2 t}dt$.

- Vì $1 + tan^2 t = \frac{1}{cos^2 t}$ nên đổi cận $l = 2.\int_0^{arctan\,(2\pi)} \frac{1}{cos\, t}.\frac{1}{cos^2 t}dt = 2.\int_0^{arctan\,(2\pi)} \frac{1}{cos^3 t}dt = 2.\int_0^{arctan\,(2\pi)} \frac{cos\, t}{cos^4 t}dt = 2.\int_0^{arctan\,(2\pi)} \frac{cos\, tdt}{(1-sin^2 t)^2}$. Đặt $u = sin\, t \to du = cos\, t\, dt$. Nên

$l = 2.\int_0^{sin\,(arctan\, 2\pi)} \frac{du}{(1-u^2)^2} = 2.\int_0^{sin\,(arctan\, 2\pi)} \left(\frac{1}{(1-u).(1+u)}\right)^2 du = 2.\int_0^{sin\,(arctan\, 2\pi)} \left(\frac{(1-u)+(1+u)}{(1-u).(1+u)}.\frac{1}{2}\right)^2 du = \frac{1}{2}.\int_0^{sin\,(arctan\, 2\pi)} \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right)^2 du = \frac{1}{2}.\int_0^{sin\,(arctan\, 2\pi)} \left(\frac{1}{(1+u)^2} + \frac{2}{(1-u).(1+u)} + \frac{1}{(1-u)^2}\right) du = \frac{1}{2}.\int_0^{sin\,(arctan\, 2\pi)} \left(\frac{1}{(1+u)^2} + \frac{(1-u)+(1+u)}{(1-u).(1+u)} + \frac{1}{(1-u)^2}\right) du = \cdots$

<u>Dạng 2. Tính diện tích hình phẳng</u>

- Tính diện tích: Nếu $y = f(x) \geq y = g(x); x \in [a,b] \to$

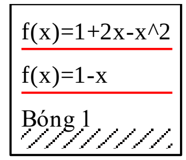
$$S\{y = f(x); y = g(x)\} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

- Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

197. $S = S\{x + y = 1; y = 1 + 2x - x^2\}$.

G: Có $x + y = 1 \to y = 1 - x$. Xét PT $1 - x = 1 + 2x - x^2 \to x^2 - 3x = 0 \to \left[\begin{array}{l} x = 0 \to y = 1 \\ x = 3 \to y = -2. \end{array}\right.$

- Hình vẽ: Giải $y = 1 + 2x - x^2 \to f' = 2 - 2x = 0 \to x = 1 \to y = 2 \to$ Đỉnh $I(1,2)$.



- Vì $1+2x-x^2 \geq 1-x\ \ \forall x \in [0,3]$ **nên diện tích**

$$S=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx=\int_0^3 \left(1+2x-x^2-(1-x)\right)dx=\int_0^3 (3x-x^2)dx=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)|_0^3=\frac{9}{2}.$$

- Nếu $x=f_1(y) \geq x=f_2(y)\ \ \forall y \in [c,d] \to$ **diện tích**

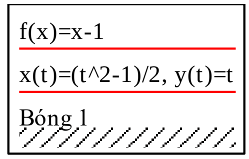
$$S\{x=f_1(y); x=f_2(y)\}=\int_c^d [f_1(y)-f_2(y)]dy.$$

198. $S=S\{x-y-1=0; y^2=2x+1\}$.

G: Từ $y^2=2x+1 \to x=\frac{y^2-1}{2}; x-y-1=0 \to x=y+1$.

- Xét PT $\frac{y^2-1}{2}=y+1 \to y^2-1=2y+2 \to y^2-2y-3=0 \to \left[\begin{array}{l} y=-1 \to x=0 \\ y=3 \to x=4. \end{array}\right.$

- Vẽ hình: Giải $f'=\frac{2y}{2}=y=0 \to$ **Đỉnh** $I\left(-\frac{1}{2},0\right)$.



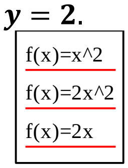
- Vì $y+1 \geq \frac{y^2-1}{2}$ $\forall y \in [-1,3]$ nên

$$S=\int_{-1}^{3}\left(y+1-\frac{y^2-1}{2}\right)dy=\int_{-1}^{3}\frac{2y+2-y^2+1}{2}dy=\frac{1}{2}.\int_{-1}^{3}(2y+3-y^2)dy=\frac{1}{2}.\left(y^2+3y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{3}=\cdots$$

- Tách miền: …

199. $S=S\{y=x^2;y=2x^2;y=2x\}$.

G: GPT $x^2=2x \rightarrow x=2 \rightarrow y=4$ và $2x^2=2x \rightarrow x=1 \rightarrow y=2$.



f(x)=x^2

f(x)=2x^2

f(x)=2x

x(t)=1, y(t)=t

- Tách $S = S_1 + S_2 =$

$$S_1\{y = 2x^2; y = x^2; x = 0; x = 1\} + S_2\{y = 2x; y = x^2; x = 1; x = 2\} = \int_0^1 (2x^2 - x^2)dx + \int_1^2 (2x - x^2)dx = \cdots.$$

- Và nếu $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t); t \in [a, b] \end{cases} \to$ **diện tích**

$$S = \int_a^b |y(t).x'(t)|dt = \frac{1}{2}.\int_a^b r^2(\varphi)d\varphi.$$

200. **a)** $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

G: Có (E):

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \to \begin{cases} \frac{x}{a} = \cos t \\ \frac{y}{b} = \sin t \end{cases} \to \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t; \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

NX: Vì ĐTHS nhận Ox và Oy là các trục đối xứng nên ta chỉ cần tính diện tích phần đồ thị nằm trong góc xOy rồi nhân 4. Nên $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to x' = a(-\sin t)$. **Vậy**

$$S = \int_a^b |y(t).x'(t)|dt = 4.\int_0^{\frac{\pi}{2}} |b\sin t.a(-\sin t)|dt = 4ab.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 4ab.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2}dt$$

$$= 2ab.\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t)dt = \frac{ab}{2}.(t - \frac{\sin 2t}{2})|\_0\text{^} = 2ab.\frac{\pi}{2} = \pi ab.$$

201. **c) Tính diện tích** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}; a > 0.$

x(t)=3 (cos t)^3, y(t)=3 (sin t)^3

G: Có $cos^2t + sin^2t = 1 \to x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \to$

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}=1\to\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2+\left[\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2=1\to\begin{cases}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}=cos\,t\\ \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}=sin\,t\end{cases}\to\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t;\ \ t\in[0;2\pi].\end{cases}$$

NX: Vì ĐTHS nhận Ox và Oy là các trục đối xứng nên ta chỉ cần tính diện tích phần đồ thị nằm trong góc xOy rồi nhân 4. Nên $t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \to x' = a.3\,cos^2t.(-sin\,t) = -3a\,cos^2t\,sin\,t$**. Vậy diện tích**

$$S = 4.S_1 = 4.\int_0^{\frac{\pi}{2}}|y(t).x'(t)|dt = 4.\int_0^{\frac{\pi}{2}}a.sin^3t.3acos^2t.sin\,tdt = 12a^2.\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^4t\,cos^2tdt$$

$$= 12a^2.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(sin^2t\right)^2.cos^2tdt = 12a^2.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-cos\,2t}{2}\right)^2.\frac{1+cos\,2t}{2}dt = 12a^2.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}.\frac{1}{2}dt$$

$$= 12a^2.\frac{1}{8}.\frac{\pi}{2} = \dots$$

BUỔI 9 ỨNG DỤNG TP (tiếp)

- Diện tích. Nếu $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ **→ diện tích**

$$S = \int_a^b |y(t).x'(t)|dt = \frac{1}{2}.\int_a^b r^2(\varphi)d\varphi.$$

202. Tính diện tích $S\{r = 2\varphi + 1; 0 \le \varphi \le \pi\}$.

G: Có diện tích

$S = \frac{1}{2}.\int_a^b r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}.\int_0^\pi (2\varphi+1)^2 d\varphi = \frac{1}{2}.\int_0^\pi \left(4\varphi^2 + 4\varphi + 1\right)d\varphi = \frac{1}{2}.\left(\frac{4\varphi^3}{3} + 2\varphi^2 + \varphi\right)\Big|_0^\pi = \cdots$

203. C2d) Tính $S: r = a(1 + cos\,\varphi);\ 0 \le \varphi \le 2\pi; a > 0$.

G: Có diện tích

r(t)=1+cos t

$S = \frac{1}{2}.\int_a^b r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}.\int_0^{2\pi} a^2.(1 + cos\,\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}.\int_0^{2\pi}\left(1 + 2\,cos\,\varphi + cos^2\varphi\right)d\varphi = \frac{a^2}{2}.\int_0^{2\pi}\left(1 + 2\,cos\,\varphi + \frac{1+cos\,2\varphi}{2}\right)d\varphi = \frac{a^2}{2}.\int_0^{2\pi}\frac{3+4\,cos\,\varphi+cos\,2\varphi}{2}d\varphi = \frac{a^2}{4}.\int_0^{2\pi}(3 + 4\,cos\,\varphi + cos\,2\varphi)d\varphi = \frac{a^2}{4}.(3\varphi + 4\,sin\,\varphi + \frac{sin\,2\varphi}{2})|\_0\text{^}2\pi = \frac{a^2.3\pi}{2}$

204. C2f) Tính diện tích $S: \left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$.

G: Chuyển sang tọa độ cực. Đặt $\begin{cases} x = r\,cos\,\varphi \\ y = r\,sin\,\varphi \end{cases}; \varphi \in [0, 2\pi] \to r^4 = a^2.r^2cos\,2\varphi \to r^2 = a^2cos\,2\varphi \ge 0 \to cos\,2\varphi \ge 0$.

r(t)=(cos 2t)^(1/2)

NX: Đồ thị nhận Ox, Oy là các trục đối xứng nên ta chỉ tính S phần nằm trong góc Oxy rồi nhân 4. Nên $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

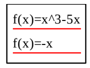
Nhưng vì $r^2 = a^2cos\,2\varphi \ge 0 \to cos\,2\varphi \ge 0 \to 2\varphi \le \frac{\pi}{2} \to 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

Nên $S = 4.S_1 = 4.\frac{1}{2}\int_a^b r^2(\varphi)d\varphi = 2.\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2cos\,2\varphi d\varphi = 2a^2.\frac{sin\,2\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.sin\,2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2$.

205. Tính $S\{y = x^3 - 5x; y = -x\}$.

G: Xét PT $x^3 - 5x = -x \to x^3 - 4x = 0 \to \left[\begin{array}{l} x = 0 \to y = -x = 0 \\ x = 2 \to y = -2 \\ x = -2 \to y = 2. \end{array}\right.$

- Vẽ hình:



Nên tách

$S = S_1 + S_2 = S_1\{y = x^3 - 5x; y = -x; x = -2; x = 0\} + S_2\{y = -x; y = x^3 - 5x; x = 0; x = 2\} = \int_{-2}^{0}(x^3 - 5x + x)dx + \int_0^2(-x - x^3 + 5x)dx = \int_{-2}^{0}(x^3 - 4x)dx + \int_0^2(4x - x^3)dx = \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\ldots + \left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\ldots = \cdots = 4 + 4 = 8$.

- Nếu $y = y(x); x \in [a, b] \to$ độ dài $l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx$.

206. Tính độ dài $l: y = \ln(\cos x);\ x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

G: Có $y' = \frac{1}{\cos x}.(-\sin x) = -\tan x;\ x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$. Nên độ dài

$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + \tan^2 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left|\frac{1}{\cos x}\right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \cdots$ $\left(\text{vì } \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C \to \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C\right)$

- Tính độ dài: Nếu $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \to l = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$.

- Nếu $y = y(x) \to l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx$.

- Nếu $r = r(\varphi) \to l = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi$.

- Tính diện tích

$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \int_c^d |f_1(y) - f_2(y)| dy$

$$= \int_a^b |y(t).x'(t)| dt = \frac{1}{2}\int_a^b r^2(\varphi)d\varphi.$$

Bài tập:

- Tính diện tích: Nếu $y = f(x) \geq y = g(x);\ x \in [a, b] \to$

$$S\{y = f(x);\ y = g(x)\} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

- Nếu $x = f_1(y) \geq x = f_2(y);\ y \in [c, d] \to$ diện tích

$$S\{x = f_1(y);\ x = f_2(y)\} = \int_c^d [f_1(y) - f_2(y)]dy.$$

- Và nếu $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t);\ t \in [a, b] \end{cases} \to$ diện tích $S = \int_a^b |y(t).\ x'(t)| dt = \frac{1}{2}.\int_a^b r^2(\varphi)d\varphi$.

207. C2. b) Tính diện tích $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases};\ 0 \leq t \leq 2\pi; Ox$.

G: Có $x'(t) = a(1 - \cos t) = y(t) \to$ diện tích

$S = \int_a^b |y(t).x'(t)|dt = \int_0^{2\pi} |a\,(1 - cos\,t).a\,(1 - cos\,t)|dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - cos\,t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} \big(1 - 2\,cos\,t + cos^2 t\big)dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\,cos\,t + \frac{1+cos\,2t}{2}\right) dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{2-4\,cos\,t+1+cos\,2t}{2}\right) dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (3 - 4\,cos\,t + cos\,2t)dt = \frac{a^2}{2}\left(3t - 4\,sin\,t + \frac{sin\,2t}{2}\right)|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$

208. **C2. a)** $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

G: Có $(E): \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \rightarrow$

$\begin{cases} \frac{x}{a} = cos\,t \\ \frac{y}{b} = sin\,t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = a\,cos\,t \\ y = b\,sin\,t; \;\; t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$

- NX: Vì ĐTHS nhận Ox và Oy là các trục đối xứng nên ta chỉ cần tính diện tích phần đồ thị nằm trong góc xOy rồi nhân với 4. Nên góc $t = (\widehat{Ox, OM}) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; x = a\,cos\,t \rightarrow x'(t) = a(-sin\,t) \rightarrow$ **diện tích**

$S = \int_a^b |y(t).x'(t)|dt = 4.S_1 = 4.\int_0^{\frac{\pi}{2}} |b\,sin\,t.a(-sin\,t)|dt = 4ab.\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 t dt = 4ab.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-cos\,2t}{2} dt = 2ab.\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - cos\,2t)dt = 2ab.\left(t - \frac{sin\,2t}{2}\right)|\_0\hat{}\pi/2 = 2ab.\frac{\pi}{2} = \pi ab.$

x(t)=3 (cos t)^3, y(t)=3 (sin t)^3

209. **c) Tính diện tích** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}};\; a > 0.$

G: Có $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t; \;\; t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$

- NX: Vì ĐTHS nhận Ox và Oy là các trục đối xứng nên ta chỉ cần tính diện tích phần đồ thị nằm trong góc xOy rồi nhân với 4. Nên $t = (\widehat{Ox, OM}) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; x = a\cos^3 t \rightarrow x' = a.3\,cos^2 t.(-sin\,t) = -3a\,cos^2 t\,sin\,t$. **Vậy diện tích**

$S = 4.S_1 = 4.\int_0^{\frac{\pi}{2}} |y(t).x'(t)|dt = 4.\int_0^{\frac{\pi}{2}} asin^3 t.3acos^2 t\,sin\,tdt = 12a^2.\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 t\,cos^2 tdt = 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin^2 t)^2.cos^2 tdt = 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-cos\,2t}{2}\right)^2.\frac{1+cos\,2t}{2} dt = \frac{3a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - cos\,2t)^2.(1 + cos2\,t)dt = \frac{3a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1 - 2\,cos2t + cos^2 2t\big).(1 + cos\,2t)dt = \frac{3a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\,cos2t + \frac{1+cos\,4t}{2}\right).(1 + cos\,2t)dt = \frac{3a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2-4\,cos\,2t+1+cost\,4t}{2}\right).(1 + cos\,2t)dt = \frac{3a^2}{4}.\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 - 4\,cos\,2t + cos\,4t).(1 - cos\,2t)dt = \frac{3a^2}{4}.\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3.1dt = \frac{9\pi a^2}{8} \left(v\text{ì } \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\,2t\,dt = \left(\frac{sin\,2t}{2}\right)|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0\right)$

- Diện tích $S = \int_a^b |y(t).x'(t)|dt = \frac{1}{2}.\int_a^b r^2(\varphi)d\varphi.$

210. C2. d) Tính S: $r = a.(1 + \cos\varphi)$; $0 \le \varphi \le 2\pi$; $a > 0$.

r(t)=1+cos t

G: Có diện tích

$S = \frac{1}{2}.\int_a^b r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}.\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}.\int_0^{2\pi}(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)d\varphi = \frac{a^2}{2}.\int_0^{2\pi}\left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi = \frac{a^2}{2}.\int_0^{2\pi}\frac{2+4\cos\varphi+1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi = \frac{a^2}{2}.\int_0^{2\pi}\frac{3+4\cos\varphi+\cos 2\varphi}{2}d\varphi = \frac{a^2}{4}.\int_0^{2\pi}(3 + 4\cos\varphi + \cos 2\varphi)d\varphi = \frac{a^2}{4}.\left(3\varphi + 4\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)|\_0\text{^}2\pi = \frac{3a^2\pi}{2}$.

face/ baitap giaitich utc

211. Tính diện tích S: $r = 2 - \sin\varphi$; $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Giải: Có diện tích

$S = \frac{1}{2}.\int_a^b r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}.\int_0^{2\pi}(2-\sin\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2}.\int_0^{2\pi}(4 - 4\sin\varphi + \sin^2\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}.\int_0^{2\pi}\left(4 - 4\sin\varphi + \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi = \frac{1}{2}.\int_0^{2\pi}\left(\frac{8-8\sin\varphi+1-\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi = \frac{1}{4}.\int_0^{2\pi}(9 - 8\sin\varphi - \cos 2\varphi)d\varphi = \frac{1}{4}.\left(9\varphi + 8\cos\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)|_0^{2\pi} = \frac{9\pi}{2}$.

- Chú ý: Diện tích $S = \int_c^d |f_1(y) - f_2(y)|dy$.

212. C2. e) S: $y = x^2$; $y = 4x^2$; $y = 4$.

f(x)=x^2
f(x)=4x^2
f(x)=4

G: Có $x^2 = 4 \to x = \pm 2$; $4x^2 = 4 \to x = \pm 1$. Có $y = x^2 \to x = \pm\sqrt{y} = f_1(y)$. Và $y = 4x^2 \to x = \pm\sqrt{\frac{y}{4}} = \frac{\sqrt{y}}{2} = f_2(y)$; $0 \le y \le 4$.

- Vì $\sqrt{y} \ge \frac{\sqrt{y}}{2}$ $\forall y \in [0,4]$ nên diện tích $S = S_1 + S_2 = 2.S_1 = 2.\int_c^d |f_1(y) - f_2(y)|dy = 2.\int_0^4\left(\sqrt{y} - \frac{\sqrt{y}}{2}\right)dy = 2.\int_0^4 \frac{\sqrt{y}}{2}dy = \int_0^4 y^{\frac{1}{2}}dy = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \left(\frac{2}{3}y\sqrt{y}\right)|_0^4 = \frac{16}{3}$.

Cách 2. Tính theo biến x

$$\to S = 2.S_1 = 2.\left(\int_0^1 (4x^2 - x^2)dx + \int_1^2 (4 - x^2)dx\right) = \cdots$$

213. f) $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$.

G: Đặt $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$; $\varphi\in[0,2\pi]\to r^4=a^2.r^2\cos 2\varphi\to r^2=a^2\cos 2\varphi\geq 0\to \cos 2\varphi\geq 0$.

r(t)=(cos 2t)^(1/2)

NX: Đồ thị nhận Ox, Oy là các trục đối xứng nên ta chỉ tính S phần nằm trong góc Oxy rồi nhân 4. Nên $\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Nhưng vì $r^2=a^2\cos 2\varphi\geq 0\to \cos 2\varphi\geq 0\to 2\varphi\leq\frac{\pi}{2}\to 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4}$.

Nên $S=4S_1=4.\frac{1}{2}\int_a^b r^2d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\varphi d\varphi=2a^2.\frac{\sin 2\varphi}{2}=4a^2.\sin 2\varphi\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=4a^2$.

214. g) $y=-\sqrt{4-x^2};x^2+3y=0$.

f(x)=-(4-x^2)^(1/2)

f(x)=-x^2/3

G: **Có**

$y=-\frac{x^2}{3}\to-\sqrt{4-x^2}=-\frac{x^2}{3}\to\sqrt{4-x^2}=\frac{x^2}{3}\to x^2=3\to x=\pm\sqrt{3}$.

- Vì $-\frac{x^2}{3}\geq-\sqrt{4-x^2}\ \ \forall x\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$ **nên**

$S=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left|\left(-\frac{x^2}{3}\right)-\left(-\sqrt{4-x^2}\right)\right|dx=\left|\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(-\frac{x^2}{3}+\sqrt{4-x^2}\right)dx\right|=\left|\left(-\frac{x^3}{9}\right)\right|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}+\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}dx$.

- Xét $J=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}dx$. **Đặt** $x=a\sin t=2\sin t\to dx=2\cos t\,dt$. **Đổi cận nên**

$J=\cdots$

215. **Tính** $S=S\{y=x^2;y=x;y=2x\}$.

G: GPT $x^2=x\to x=1$. **Và** $x^2=2x\to x=2$.

f(x)=x^2
f(x)=2x
f(x)=x
x(t)=1, y(t)=t

Tách

$S = S_1 + S_2 = S_1\{y = 2x; y = x; 0 \le x \le 1\} + S_2\{y = 2x; y = x^2; 1 \le x \le 2\} = \int_0^1 (2x - x)dx + \int_1^2 (2x - x^2)\, dx = \left(\frac{x^2}{2}\right)|_0^1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)|_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}.$

facebook bai tap giai tich utc
chieu th3 ca4 p303

216. **h)** $y = |x^2 - 1|; y = |x| + 5.$
G: …

- Tính độ dài: Nếu $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \to l = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$

- Nếu $y = y(x) \to l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx.$

- Nếu $r = r(\varphi) \to l = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi.$

- Tính diện tích

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \int_c^d |f_1(y) - f_2(y)| dy$$
$$= \int_a^b |y(t).x'(t)| dt = \frac{1}{2}\int_a^b r^2(\varphi) d\varphi.$$

Dạng 3. Tính thể tích
- Dạng: Nếu $y = f(x) \ge 0$ **thì**

$$V_{Ox}\{y = f(x); Ox; x = a; x = b\} = \pi.\int_a^b f^2(x) dx.$$

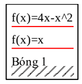
- Nếu $f(x) \ge g(x) \ge 0$ **thì thể tích**

$$V_{Ox}\{y = f(x); y = g(x)\} = \pi.\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx.$$

217. **Tính** $V_{Ox}\{y = 4x - x^2; y = x\}.$

G: GPT $4x - x^2 = x \to 3x - x^2 = 0 \to \left[\begin{array}{l} x = 0 \to y = 0 \\ x = 3 \to y = 3. \end{array}\right.$

Vẽ hình: Tính $y' = 4 - 2x = 0 \to x = 2 \to y = 4 \to$ **Đỉnh** $I(2, 4).$



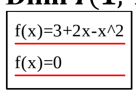
-Thấy $4x - x^2 \geq x\ \forall x \in [0,3]$ **nên**

$V_{Ox} = \pi.\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx = \pi.\int_0^3 \left[\left(4x - x^2\right)^2 - x^2\right]\ dx = \pi.\int_0^3 \left(16x^2 - 8x^3 + x^4 - x^2\right)dx = \pi.\int_0^3 \left(x^4 - 8x^3 + 15x^2\right)dx = \pi.\left(\frac{x^5}{5} - 2x^4 + 5x^3\right)\Big|_0^3 = \cdots$

218. **Tính** $V_{Ox}\left\{y = 3 + 2x - x^2; Ox\right\}$.

G: Có PT $3 + 2x - x^2 = 0 \rightarrow x = 3\ \ or\ x = -1$.

- Vẽ hình: $y' = 2 - 2x = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 4 \rightarrow$ **Đỉnh** $I(1,4)$.



Vì $3 + 2x - x^2 \geq 0\ \ \forall x \in [-1,3]$ **nên**

$$V_{Ox} = \pi.\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx = \pi.\int_{-1}^3 \left[\left(3 + 2x - x^2\right)^2 - 0^2\right]dx = \pi.\int_{-1}^3 \left(3 + 2x - x^2\right)^2 dx.$$

Vì $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac$ **nên**

$$V = \pi.\int_{-1}^3 (9 + 4x^2 + x^4 + 12x - 4x^3 - 6x^2)dx = \pi.\int_{-1}^3 (x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9)dx = \pi.\left(\frac{x^5}{5} + \cdots\right) = \cdots$$

219. $V_{Ox}\left\{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0\right\}$.

G: Có $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2 \rightarrow (y-2)^2 = 2 - (x-1)^2 \rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 + \sqrt{2 - (x-1)^2} \\ y = 2 - \sqrt{2 - (x-1)^2} \end{array}\right.$

f(x)=2+(2-(x-1)^2)^(1/2)
f(x)=2-(2-(x-1)^2)^(1/2)

Vì

$$(x-1)^2 \le 2 \to -\sqrt{2} \le x-1 \le \sqrt{2} \to 1-\sqrt{2} \le x \le 1+\sqrt{2}.$$

Nên

$$V_{Ox} = \pi.\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \left[\left(2+\sqrt{2-(x-1)^2}\right)^2 - \left(2-\sqrt{2-(x-1)^2}\right)^2\right] dx$$

$$= 8\pi.\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-(x-1)^2}\,dx. \quad \left(v\text{ì } (a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab\right)$$

Đặt $x-1 = \sqrt{2}.sint \to x = 1+\sqrt{2}.\sin t \to dx = \sqrt{2}.\cos t\, dt$. **Nên**

$$V_{Ox} = \cdots$$

220. **Tính** $V_{Ox}\left\{y = x^2; y = \sqrt{x}\right\}$.

G: Có PT $x^2 = \sqrt{x} \to x = 0 \text{ or } x = 1$. **Và** $y = \sqrt{x} \to x = y^2$.

- Vẽ hình: …

f(x)=x^2
f(x)=x^(1/2)

Vì $\sqrt{x} \ge x^2\ \forall x \in [0,1]$ **nên**

$$V_{Ox} = \pi.\int_0^1 \left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(x^2\right)^2\right] dx = \pi.\int_0^1 (x-x^4)dx = \pi.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \pi.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right) = \frac{3\pi}{10}.$$

$$V_{Ox} = \pi.\int_a^b [f^2-g^2]dx = \cdots$$

- Chú ý: Nếu $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ **thì thể tích**

$$V_{Ox} = \pi.\int_a^b |y^2(t).x'(t)|dt$$

221. **Tính $V_{Ox}\{x = 2t^2; y = t + 2; t = 0; t = 2\}$.**

G: Có $x'(t) = 4t$ nên

$$V_{Ox} = \pi.\int_a^b \left|y^2(t).x'(t)\right|dt = \pi.\int_0^2 \left|(t+2)^2.4t\right|dt = 4\pi.\int_0^2 \left(t^2+4t+4\right).tdt = 4\pi.\int_0^2 \left(t^3+4t^2+4t\right)dt$$

$$= 4\pi.\left(\frac{t^4}{4} + \frac{4t^3}{3} + 2t^2\right)|_0^2 = \cdots$$

222. **Tính $V_{Ox}\{x = a\,(t - \sin t); y = a(1 - \cos t); 0 \le t \le 2\pi\}$.**

G: Có $x'(t) = a(1 - \cos t) = y(t) \to$ thể tích

$$V_{Ox} = \pi.\int_a^b \left|y^2(t).x'(t)\right|dt = \pi.\int_0^{\pi} a^3(1-\cos t)^3 dt = \pi a^3.\int_0^{\pi}(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)dt = \cdots$$

223. **C3.b) Tính thể tích $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}; a > 0$ quay quanh trục Ox.**

x(t)=3 (cos t)^3, y(t)=3 (sin t)^3

G: Tham số hóa có $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ nên $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t\,; t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$

NX: Vì ĐTHS nhận Ox, Oy là trục đối xứng nên quay nửa trên Ox và nửa dưới Ox là trùng nhau. Nên ta chỉ tính thể tích quay phần nằm trong góc xOy rồi nhân 2. Nên $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Nên $x(t) = a\cos^3 t \to x'(t) = 3a\cos^2 t.(-\sin t), y(t) = a\sin^3 t \to$ thể tích

$$V_{Ox} = 2.V_1 = 2.\pi\int_a^b \left|y^2(t).x'(t)\right|dt = 2\pi.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|a^2\sin^6 t.3a\cos^2 t\,(-\sin t)\right|dt = 6\pi a^3.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t.\cos^2 t dt$$

$$= 6\pi a^3.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^2 t\right)^3 \cos^2 t\,\sin t\,dt.$$

Đặt $u = \cos t \to du = -\sin t\,dt$. Nên $V = 6\pi a^3\int_1^0 \left(1-u^2\right)^3 u^2(-du) = 6\pi a^3.\int_0^1\left(1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6\right)u^2 du = 6\pi a^3\int_0^1\left(u^2 - 3u^4 + 3u^6 - u^8\right)du = \cdots$

- Quay xung quanh Oy: Công thức:

$$V_{Oy}\{y = f(x); x = a; x = b; Ox\} = 2\pi.\int_a^b xf(x)dx.$$

224. **Tính $V_{Oy}\{y = 5x - x^2; Ox\}$.**

G: Có PT $5x - x^2 = 0 \to x = 0$ or $x = 5$. Nên

$$V_{Oy} = 2\pi.\int_a^b xf(x)dx = 2\pi.\int_0^5 x\left(5x - x^2\right)dx = 2\pi.\int_0^5\left(5x^2 - x^3\right)dx = 2\pi.\left(\frac{5x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)|_0^5 = \frac{625\pi}{6}.$$

f(x)=5x-x^2

225. Tính thể tích $V_{Oy}\{y = 2x - x^2; y = 0\}$ quay quanh Oy.

G: Ta có PT $2x - x^2 = 0 \to x = 0; x = 2$.

- Vẽ hình: $y' = 2 - 2x = 0 \to x = 1 \to y = 1 \to$ Đỉnh $I(1,1)$.

f(x)=2x-x^2

Nên

$$V_{Oy} = 2\pi.\int_a^b xf(x)dx = 2\pi.\int_0^2 x(2x - x^2)dx = 2\pi.\int_0^2 (2x^2 - x^3)dx = 2\pi.\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2 = \frac{8\pi}{3}.$$

- Công thức: Nếu $f_1(y) \geq f_2(y) \geq 0 \to$ thể tích

$$V_{Oy}\{x = f_1(y); x = f_2(y)\} = \pi.\int_c^d [f_1^2(y) - f_2^2(y)]dy.$$

226. Tính $V_{Oy}\{x = y^2; x = y\}$.

G: Xét PT $y^2 = y \to y(y-1) = 0 \to \left[\begin{array}{l} y = 0 \to x = y = 0 \\ y = 1 \to x = 1. \end{array}\right.$

- Vẽ hình: …

x(t)=t^2, y(t)=t
f(x)=x

Vì $y \geq y^2\ \forall y \in [0,1] \to$ thể tích

$$V_{Oy} = \pi.\int_0^1 \left[y^2 - \left(y^2\right)^2\right] dy = \pi.\int_0^1 \left(y^2 - y^4\right) dy = \pi.\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right) \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{15}.$$

227. **Tính $V_{Oy}\left\{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0\right\}$.**

G: Có $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 \rightarrow (x-1)^2 = 1 - (y-2)^2 \rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{1-(y-2)^2} = f_1(y) \\ x = 1 - \sqrt{1-(y-2)^2} = f_2(y) \end{array}\right.$

- Vì $(y-2)^2 \le 1 \rightarrow -1 \le y - 2 \le 1 \rightarrow 1 \le y \le 3$. Nên

$$V_{Oy} = \pi.\int_c^d \left[f_1^2(y) - f_2^2(y)\right] dy = \pi.\int_1^3 \left[\left(1 + \sqrt{1-(y-2)^2}\right)^2 - \left(1 - \sqrt{1-(y-2)^2}\right)^2\right] dy.$$

Vì $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ nên

$$V = \pi.\int_1^3 4.1.\sqrt{1-(y-2)^2}\, dy = 4\pi.\int_1^3 \sqrt{1-(y-2)^2}\, dy.$$

Chú ý: Nếu $I = \int f\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) dx \rightarrow$ đặt $x = a\sin t$.

- Đặt $y - 2 = 1.\sin t \rightarrow y = 2 + \sin t \rightarrow dy = \cos t\, dt \rightarrow \cdots$

x(t)=1+cos t, y(t)=2+sin t

- Công thức: Nếu $f_1(y) \ge f_2(y) \ge 0 \rightarrow$ thể tích

$$V_{Oy}\{x = f_1(y); x = f_2(y)\} = \pi.\int_c^d \left[f_1^2(y) - f_2^2(y)\right] dy.$$

228. **C3. f) $y^2 + x = 9; x = 0$ quay quanh Oy.**

G: Có $y^2 + x = 9 \rightarrow x = 9 - y^2$. Xét PT

$$9 - y^2 = 0 \rightarrow y = \pm 3.$$

- Hình vẽ: $x' = -2y = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow x = 9 \rightarrow$ Đỉnh $I(9,0)$.

x(t)=9-t^2, y(t)=t
x(t)=0, y(t)=t

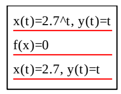
Vì $9 - y^2 \ge 0\ \forall y \in [-3, -3]$ nên

$$V_{Oy} = \pi.\int_c^d [f_1^2(y) - f_2^2(y)]dy = \pi.\int_{-3}^{3}[(9-y^2)^2 - 0^2]dy = \pi.\int_{-3}^{3}(9-y^2)^2dy = \pi.\int_{-3}^{3}(81 - 18y^2 + y^4)dy$$
$$= \pi.\left(81y - 6y^3 + \frac{y^5}{5}\right) = \frac{1296\pi}{5}.$$

229. **Tính $V_{Ox}\{y = ln\, x; Ox; x = e\}$.**

Giải: Giải PT $ln\, x = 0 \to x = 1$.

- Hình vẽ:



- Vì $ln\, x \geq 0\ \forall x \in [1, e]$ nên $V_{Ox} = \pi.\int_1^e [ln^2x - 0^2]dx = \pi.\int_1^e ln^2x dx$. Đặt $I = \int_1^e ln^2xdx$.

TPTP. Đặt $\begin{cases} u = ln^2x \\ dv = dx \end{cases} \to \begin{cases} u' = 2ln\, x.\frac{1}{x} \\ v = x. \end{cases}$ Nên

$$I = ln^2x.x - \int 2ln\, xdx = ln^2x.x - 2.\int ln\, xdx.$$

Đặt $J = \int ln\, xdx$. Đặt $\begin{cases} u = ln\, x \\ dv = dx \end{cases} \to \begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = x. \end{cases}$ Nên

$$J = \cdots$$

- Tính thể tích. Nếu $f(x); g(x); f_1(y); f_2(y) \geq 0 \to$

$$V = \pi\int_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right|dx$$
$$= \pi\int_c^d \left|f_1^2(y) - f_2^2(y)\right|dy = \pi\int_a^b \left|y^2(t).x'(t)\right|dt.$$

- Và

$$V_{Oy}\{y = f(x); x = a; x = b; Ox\} = 2\pi.\int_a^b xf(x)dx.$$

- Tính độ dài: Nếu $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \to l = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$.

- Nếu $y = y(x) \to l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx$.

- Nếu $r = r(\varphi) \to l = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2}d\varphi$.

- Tính diện tích:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx = \int_c^d |f_1(y) - f_2(y)|dy$$
$$= \int_a^b |y(t).x'(t)|dt = \frac{1}{2}\int_a^b r^2(\varphi)d\varphi.$$

Bài tập:

230. **C3. a) Tính thể tích $V_{Ox}\{y = 2x - x^2; y = 0\}$ quay quanh Ox.**

f(x)=2x-x^2
f(x)=0

G: Có $2x - x^2 = 0 \to x = 0; = 2$.

- Vẽ hình: $y = 2x - x^2 \to y' = 2 - 2x = 0 \to x = 1 \to y = 1 \to$ **Đỉnh** $I(1, 1)$. **Vì** $2x - x^2 \geq 0 \ \ \forall x \in [0, 2]$ **nên** $V_{Ox} = \pi . \int_a^b \left| f^2(x) - g^2(x) \right| dx = \pi \int_0^2 \left[\left(2x - x^2\right)^2 - 0^2 \right] dx = \pi \int_0^2 \left(4x^2 - 4x^3 + x^4\right) dx = \pi \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) |\_0\hat{}2 = \frac{16\pi}{15}$.

- Chú ý. Nếu $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \geq 0; \ t \in [a, b] \end{cases}$ **thì thể tích** $V_{Ox} = \pi . \int_a^b |y^2(t). x'(t)| dt$.

231. C3. b) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}; \ a > 0$ **quanh trục Ox.**

x(t)= (cos t)^3, y(t)= (sin t)^3

G: **Tham số hóa có** $cos^2 t + sin^2 t = 1$, **nên** $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$.

- Vì $y \geq 0 \to sin\ t \geq 0 \to t \in [0, \pi]; \ x = a \cos^3 t \to x'(t) = a. 3cos^2 t. (-sin\ t)$. **Nên thể tích** $V_{Ox} = \pi . \int_a^b \left| y^2(t). x'(t) \right| dt = \pi . \int_0^\pi \left| a^2 \, sin^6 t. 3a \, cos^2 t \, (-sin\ t) \right| dt = 3\pi a^3 . \int_0^\pi \left(1 - cos^2 t\right)^3 cos^2 t\, . sin\ t\ dt$.

- Đặt $u = cos\ t \to du = -sin\ t\ dt \to sin\ t\ dt = -du$. **Đổi cận nên** $V_{Ox} = 3\pi a^3 . \int_1^{-1} \left(1 - u^2\right)^3 . u^2 . (-du) = 3\pi a^3 . \int_{-1}^{1} \left(1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6\right) . u^2 du = 3\pi a^3 . \int_{-1}^{1} \left(u^2 - 3u^4 + 3u^6 - u^8\right) du = 3\pi a^3 . \left(\frac{u^3}{3} - u^4 + \frac{3u^7}{7} - \frac{u^9}{9} \right) |_{-1}^{1} = \cdots$

232. C3. c) $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ **quay quanh Ox.**

x(t)=cos t, y(t)=2+sin t

G: Ta gọi là hình vành khuyên. Có $(y-2)^2 = 1 - x^2 \to y - 2 = \pm\sqrt{1-x^2} \to \left[\begin{array}{l} y = 2+\sqrt{1-x^2} = f(x) \\ y = 2-\sqrt{1-x^2} = g(x) \end{array}\right.$; $x \in [-1, 1]$. Nên thể tích

$V_{Ox} = \pi.\int_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right| dx = \pi.\int_{-1}^{1} \left[\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)^2 - \left(2-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right] dx.$

- Vì $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ nên

$V_{Ox} = \pi.\int_{-1}^{1} 4.2.\sqrt{1-x^2}\, dx = 8\pi.\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} dx.$

- Đặt $x = a\sin t = \sin t \to dx = \cos t\, dt$. Đổi cận nên

$V_{Ox} = 8\pi.\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t.\cos t dt = 8\pi.\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 8\pi.\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = 4\pi.\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t) dt = 4\pi.\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi.\pi = 4\pi^2.$

- Quay xung quanh trục Oy:

- Công thức: Nếu $y = f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, b] \to$ thể tích

$V_{Oy}\{y = f(x); x = a; x = b; Ox\} = 2\pi.\int_a^b x f(x) dx.$

233. **Tính $V_{Oy}\{y = 5x - x^2; Ox\}$.**

f(x)=5x-x^2

G: **Có $5x - x^2 = 0 \to x = 0; x = 5$.**

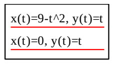
- Vẽ: $y = 5x - x^2 \to y' = 5 - 2x = 0 \to x = \frac{5}{2} \to y = \frac{25}{4}$. Nên

$V_{Oy} = 2\pi.\int_a^b x f(x) dx = 2\pi.\int_0^5 x\left(5x - x^2\right) dx = 2\pi.\int_0^5 \left(5x^2 - x^3\right) dx = 2\pi.\left(\frac{5x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^5 = \frac{625\pi}{6}.$

- Chú ý: Thể tích

$$V_{Oy}\{x = f_1(y); x = f_2(y)\} = \pi.\int_c^d [f_1^2(y) - f_2^2(y)] dy.$$

234. **C3. f) $y^2 + x = 9; x = 0$ quay quanh trục Oy.**

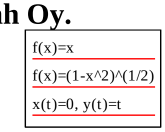


G: Có $y^2 + x = 9 \to x = 9 - y^2 = 0 \to y = \pm 3$.

- Vẽ: $x = 9 - y^2 \to x' = -2y = 0 \to y = 0 \to x = 9$. **Vì** $x = 9 - y^2 \geq x = 0\ \ \forall y \in [-3, 3]$ **nên**

$V_{Oy} = \pi.\int_c^d \left[f_1^2(y) - f_2^2(y)\right]dy = \pi.\int_{-3}^{3}\left[\left(9 - y^2\right)^2 - 0^2\right]dy = \pi.\int_{-3}^{3}\left(81 - 18y^2 + y^4\right)dy = \pi.\left(81 - 6y^3 + \frac{y^5}{5}\right)\Big|_{-3}^{3} = \frac{1296\pi}{5}$.

235. **d)** $y = x; x = 0; y = \sqrt{1 - x^2}$ **quanh Oy.**



G: **Có** $x = \sqrt{1 - x^2} \to x^2 = 1 - x^2 \to x^2 = \frac{1}{2} \to x = \frac{\sqrt{2}}{2} = y$.

Và $y = x \to x = y = f_1(y)$;

$y = \sqrt{1 - x^2} \to y^2 = 1 - x^2 \to x^2 + y^2 = 1 \to x^2 = 1 - y^2 \to x = \sqrt{1 - y^2} = f_2(y)$.

Nên

f(x)=x
f(x)=(1-x^2)^(1/2)
x(t)=0, y(t)=t
f(x)=1/2^(1/2)

$$V_{Oy} = V_1(H_1) + V_2(H_2) = \pi.\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f_1^2(y)dy + \pi.\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} f_2^2(y)dy = \pi.\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(y)^2dy + \pi.\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\left(\sqrt{1-y^2}\right)^2 dy =$$

$$\pi.\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y^2dy + \pi.\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}(1-y^2)dy = \pi.\frac{y^3}{3}\Big|\ldots + \left(y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|\ldots = \cdots$$

236. e) $x^2 + y^2 = 4x - 3$ quay quanh Oy.

G: Có $(x-2)^2 + y^2 = 1 \to (x-2)^2 = 1 - y^2 \to x = 2 \pm \sqrt{1-y^2}$. Có $y^2 \le 1 \to -1 \le y \le 1$. Nên

$$V_{Oy} = \pi.\int_{-1}^{1}\left[\left(2+\sqrt{1-y^2}\right)^2 - \left(2-\sqrt{1-y^2}\right)^2\right]dy = 8\pi.\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}dy.\ \left(vì\ (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab\right).$$

- Đặt $y = 1.\sin t = \sin t \to dy = \cos t dt$. Nên

$$V_{Oy} = 8\pi.\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t.\cos t dt = 8\pi.\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt = 4\pi.\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)| = 4\pi^2.$$

x(t)=2+cos t, y(t)=sin t

- Tính thể tích. Nếu $f(x); g(x); f_1(y); f_2(y) \ge 0 \to$

$$V = \pi\int_a^b\left|f^2(x) - g^2(x)\right|dx$$

$$= \pi\int_c^d\left|f_1^2(y) - f_2^2(y)\right|dy = \pi\int_a^b\left|y^2(t).x'(t)\right|dt.$$

- Và

$$V_{Oy}\{y = f(x); x = a; x = b; Ox\} = 2\pi.\int_a^b xf(x)dx.$$

- Tính độ dài: Nếu $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \rightarrow l = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$

- Nếu $y = y(x) \rightarrow l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx.$

- Nếu $r = r(\varphi) \rightarrow l = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi.$

- Tính diện tích:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx = \int_c^d |f_1(y) - f_2(y)|dy$$
$$= \int_a^b |y(t).x'(t)|dt = \frac{1}{2}\int_a^b r^2(\varphi)d\varphi.$$

BÀI 6 TÍCH PHÂN SUY RỘNG

1. Tích phân suy rộng loại I

- ĐN: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx.$

- Công thức Newton- Leibnit mở rộng: Nếu F là 1 nguyên hàm của f thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\ |_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a) = lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a).$

- VD. Hàm $F(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow F(+\infty) = \frac{1}{+\infty} = 0.$

237. Tính $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}.$

G: Có $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = \int_1^{+\infty} x^{-4}dx = \left(\frac{x^{-3}}{-3}\right)|_1^{+\infty} = \left(-\frac{1}{3x^3}\right)|_1^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$

238. Tính $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1).(x+5)^2}.$

G: Có

$I = \int_0^{+\infty} \frac{(x+5)-(x+1)}{(x+1)(x+5)^2}.\frac{1}{4}dx = \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{(x+1).(x+5)} - \frac{1}{(x+5)^2}\right).\frac{1}{4}dx = \frac{1}{4}.\int_0^{+\infty}\left(\frac{(x+5)-(x+1)}{(x+1)(x+5)}.\frac{1}{4} - \frac{1}{(x+5)^2}\right)dx = \frac{1}{4}.\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+5}\right) - \frac{1}{(x+5)^2}\right)dx = \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{4}(ln\,|x+1| - ln\,|x+5|) + \frac{1}{x+5}\right)|_0^{+\infty} = \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{4}ln\,\left|\frac{x+1}{x+5}\right| + \frac{1}{x+5}\right)|_0^{+\infty} = 0 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}.ln\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) = \cdots$

239. C1. $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2.(x+2)}.$

G: Viết

$$\frac{1}{x^2.(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+2} = \frac{ax(x+2) + b(x+2) + cx^2}{x^2(x+2)} = \frac{x^2(a+c) + x(2a+b) + 2b}{x^2(x+2)}$$
$$\rightarrow x^2(a+c) + x(2a+b) + 2b = 1.$$

Đồng nhất hệ số, được $\begin{cases} a + c = 0 \\ 2a + b = 0 \\ 2b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}$

$$\rightarrow \frac{1}{x^2.(x+2)} = -\frac{1}{4}.\frac{1}{x} + \frac{1}{2}.\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4}.\frac{1}{x+2}.$$

Cách 2. Có

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{(x+2) - x}{x^2.(x+2)}.\frac{1}{2}dx = \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x.(x+2)}\right).\frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}.\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{(x+2)-x}{x(x+2)}.\frac{1}{2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}.\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right)\right)dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ (ln\,|x| - ln\,|x+2|)\right)|_1^{+\infty}$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2}ln\ \left|\frac{x}{x+2}\right|\right)|_1^{+\infty} = 0 - \frac{1}{2}\left(-1 - \frac{1}{2}ln\ \left|\frac{1}{3}\right|\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}ln\ \left|\frac{1}{3}\right|\right).$$

240. Tính $I = \int_2^{+\infty} \frac{xdx}{x^4+4x^2+3}.$

G: Đặt $t = x^2 \rightarrow dt = 2xdx \rightarrow xdx = \frac{dt}{2}$**. Đổi cận nên**

$I = \frac{1}{2}\int_4^{+\infty}\frac{dt}{t^2+4t+3} = \frac{1}{2}\int_4^{+\infty}\frac{dt}{(t+1)(t+3)} = \frac{1}{2}\int_4^{+\infty}\frac{(t+3)-(t+1)}{(t+1).(t+3)}dt = \cdots$

241. **C3.** $I = \int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(x^2+1)^3}$.

G: Đặt $t = x^2+1 \to dt = 2xdx \to xdx = \frac{dt}{2}$. **Nên**

$I = \int_1^{+\infty}\frac{dt}{2t^3} = \frac{1}{2}.\int_1^{+\infty}t^{-3}dt = \frac{1}{2}.\frac{t^{-2}}{-2}|\_1\hat{} +\infty = (-\frac{1}{4t^2})\,|\_1\hat{} +\infty = 0-\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$.

242. **C4.** $I = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x.\sqrt{x^4+1}}$.

G: Viết $I = \int_1^{+\infty}\frac{x^3dx}{x^4.\sqrt{x^4+1}}$. **Đặt** $t = \sqrt{x^4+1} \to t^2 = x^4+1 \to x^4 = t^2-1 \to 4x^3dx = 2tdt \to x^3dx = \frac{tdt}{2}$. **Nên**

$I = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{tdt}{2(t^2-1)t} = \frac{1}{2}.\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}.\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{dt}{(t-1).(t+1)} = \frac{1}{2}.\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{t+1-(t-1)}{(t-1)(t+1)}.\frac{dt}{2} = \frac{1}{4}.\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{4}.(ln\,|t-1| - ln\,|t+1|)\,|_{\sqrt{2}}^{+\infty} = \frac{1}{4}.ln\,\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\,|_{\sqrt{2}}^{+\infty} = 0-\frac{1}{4}ln\,\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right| = -\frac{1}{4}ln\,\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|$.

243. **C5. Tính** $I = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{(\sqrt{x}+1)^3}$.

G: Đặt $t = \sqrt{x}+1 \to \sqrt{x} = t-1 \to x = (t-1)^2 \to dx = (2t-2)dt$. **Nên**

$I = \int_1^{+\infty}\frac{(2t-2)dt}{t^3} = \int_1^{+\infty}\left(\frac{2}{t^2}-\frac{2}{t^3}\right)dt = \int_1^{+\infty}(2t^{-2}-2t^{-3})dt = \left(\frac{2t^{-1}}{-1}-\frac{2t^{-2}}{-2}\right)\,|_1^{+\infty} = \left(-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}\right) = \cdots$

*** Công thức:** $\int\frac{dx}{1+x^2} = arctan\,x + C$.

Nên $\int\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}.arctan\frac{x}{a}+C \to \int\frac{dx}{1+x^2} = arctan\,x + C$.

244. **Tính** $I = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{4x^2+4x+4}$.

G: Ta có $I = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{4x^2+4x+1+3} = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{3+(2x+1)^2}$. **Đặt** $t = 2x+1 \to dt = 2dx \to dx = \frac{1}{2}dt$. **Nên**

$I = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{dt}{3+t^2} = \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{3}}\,arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\,|_1^{+\infty} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

245. **Tính** $I = \int_2^{+\infty}\frac{xdx}{x^4+2x^2+3}$.

G: Đặt $t = x^2 \to dt = 2xdx \to xdx = \frac{dt}{2}$. **Đổi cận nên** $I = \frac{1}{2}.\int_4^{+\infty}\frac{dt}{t^2+2t+3} = \int_4^{+\infty}\frac{dx}{t^2+2t+1+2} = \int_4^{+\infty}\frac{dx}{2+(t+1)^2} = \int_1^{+\infty}\frac{d(t+1)}{(\sqrt{2})^2+(t+1)^2} =$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\,arctan\frac{t+1}{\sqrt{2}}\,|\,{}^{+\infty}_{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-arctan\,2\sqrt{2}\right)$. $\left(v\text{ì } \int\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}.arctan\frac{x}{a}+C\ v\text{à } arctan\,(+\infty) = \frac{\pi}{2}\right)$

246. **Tính** $I = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4+4x^2+3}$.

G: Có

$I = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+3)} = \int_1^{+\infty}\frac{(x^2+3)-(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+3)}.\frac{dx}{2} = \frac{1}{2}.\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+3}\right)dx = \cdots$

247. **Tính** $I = \int_1^{+\infty}\frac{x+5}{x(x^2+3)}dx$.

G: Tách $I = \int_1^{+\infty}\left(\frac{x}{x(x^2+3)}+\frac{5}{x(x^2+3)}\right)dx = \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+3}dx + 5\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x^2+3)}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\,arctan\frac{x}{\sqrt{3}} + 5\int_1^{+\infty}\frac{x}{x^2(x^2+3)}dx$.

- Xét $J = \int_1^{+\infty}\frac{x}{x^2(x^2+3)}dx$. **Đặt** $t = x^2 \to dt = 2xdx \to xdx = \frac{dt}{2}$. **Đổi cận nên**

$J = \int_1^{+\infty}\frac{dt}{2t(t+3)} = \frac{1}{2}.\int_1^{+\infty}\frac{(t+3)-t}{t.(t+3)}dt = \frac{1}{2}.\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+3}\right)dt = \cdots$

248. $I = \int_2^{+\infty}\frac{dx}{x.\sqrt{x^4-1}}$.

G: Viết $I = \int_1^{+\infty}\frac{x^3dx}{x^4.\sqrt{x^4-1}}$. **Đặt** $t = \sqrt{x^4-1} \to t^2 = x^4-1 \to x^4 = t^2+1 \to 4x^3dx = 2tdt \to x^3dx = \frac{tdt}{2}$. **Nên**

$I = \int_{\sqrt{15}}^{+\infty}\frac{tdt}{2(t^2+1)t} = \frac{1}{2}.\int_{\sqrt{15}}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\ldots$

249. **C7.** $I = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x.\sqrt[4]{1+x^3}}$.

G: Viết $I = \int_1^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^3.\sqrt[4]{1+x^3}}$. **Đặt** $t = \sqrt[4]{1+x^3} \to t^4 = 1+x^3 \to x^3 = t^4-1 \to 3x^2dx = 4t^3dt \to x^2dx = \frac{4t^3}{3}dt$. **Nên**

$I=\int_{\sqrt[4]{2}}^{+\infty}\frac{4t^3dt}{3.(t^4-1)t}=\frac{4}{3}.\int_{\sqrt[4]{2}}^{+\infty}\frac{t^2dt}{t^4-1}=\frac{4}{3}.\int_{\sqrt[4]{2}}^{+\infty}\frac{t^2dt}{(t^2-1)(t^2+1)}=\frac{4}{3}.\int_{\sqrt[4]{2}}^{+\infty}\frac{(t^2+1)+(t^2-1)}{(t^2-1)(t^2+1)}.\frac{1}{2}dt=\frac{2}{3}.\int_{\sqrt[4]{2}}^{+\infty}\left(\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$
$\frac{2}{3}.\int_{\sqrt[4]{2}}^{+\infty}\left(\frac{1}{(t+1)(t-1)}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\cdots$

250. C8. $I=\int_1^{+\infty}\frac{\ln x\,dx}{x^2}$.

G: Sử dụng TPTP. Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=\frac{dx}{x^2}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}u'=\frac{1}{x}\\ v=\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}.\end{cases}$

Nên

$I=uv-\int vdu=-\frac{\ln x}{x}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\left(-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right)|\_1\text{^}+\infty=0-(-1)=1.$

251. C10. $I=\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$.

G: Đặt $\begin{cases}u=\arctan x\\ dv=\frac{1}{x^2}dx\end{cases}\rightarrow\begin{cases}u'=\frac{1}{x^2+1}\\ v=\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}.\end{cases}$

Nên

$I=uv-\int vdu=\arctan x.\left(-\frac{1}{x}\right)-\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}.\left(-\frac{1}{x}\right)dx=\left(-\frac{\arctan x}{x}\right)|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x^2+1)}=0-\left(-\frac{\pi}{4}\right)+$
$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x^2+1)}=\frac{\pi}{4}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x.(x^2+1)}$.

Đặt $J=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x.(x^2+1)}=\int_1^{+\infty}\frac{x.dx}{x^2(x^2+1)}$.

Đặt $t=x^2\rightarrow dt=2xdx\rightarrow xdx=\frac{dt}{2}$. **Nên**

$J=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{2t.(t+1)}=\frac{1}{2}.\int_1^{+\infty}\frac{(t+1)-t}{t(t+1)}dt=\frac{1}{2}.\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{2}.(\ln|t|-\ln|t+1|)|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}.\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\;|_1^{+\infty}=0-$
$\frac{1}{2}.\ln\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\;.\ln\frac{1}{2}$.

Vậy $I=\frac{\pi}{4}+J=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$.

252. C11. Tính $I=\int_0^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx$.

G: Đặt $t=\sqrt{x}\rightarrow t^2=x\rightarrow x=t^2\rightarrow dx=2tdt$. **Nên**

$I=\int_0^{+\infty}e^{-t}.2tdt=\int_0^{+\infty}2te^{-t}dt$.

Đặt $\begin{cases}u=2t\\ dv=e^{-t}dt\end{cases}\rightarrow\begin{cases}u'=2\\ v=\int e^{-t}dt=-e^{-t}.\end{cases}$

Nên

$I=uv-\int vdu=-2te^{-t}+\int_0^{+\infty}2e^{-t}dt=(-2te^{-t}-2e^{-t})\;|_0^{+\infty}=0-(-2)=2.\quad\left(do\;e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0\right)$

253. C12. Tính $I=\int_1^{+\infty}\frac{x^3}{e^{x^2}}dx$.

G: Viết $I=\int_1^{+\infty}x^3e^{-x^2}dx=\int_1^{+\infty}x^2e^{-x^2}.xdx$

Đặt $t=x^2\rightarrow dt=2xdx\rightarrow xdx=\frac{dt}{2}$. **Nên**

$I=\int_1^{+\infty}te^{-t}.\frac{dt}{2}=\int_1^{+\infty}\frac{t}{2}e^{-t}dt$.

TPTP. Đặt $\begin{cases}u=\frac{t}{2}\\ dv=e^{-t}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}u'=\frac{1}{2}\\ dv=\int e^{-t}dt=-e^{-t}.\end{cases}$

Nên $I=uv-\int vdu=-\frac{t}{2}e^{-t}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-t}\,dt=-\frac{t}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}.\int_1^{+\infty}e^{-t}\,dt=\cdots\;\left(do\;\;e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0\right)$

- Chú ý: Nếu F là 1 nguyên hàm của f thì

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=F(x)\;|_{-\infty}^{+\infty}=F(+\infty)-F(-\infty).$$

(Công thức Newton- Leibnit mở rộng).

254. Tính $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{4x^2+4x+4}$.

G: Ta có $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{4x^2+4x+1+3}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{3+(2x+1)^2}$.

Đặt $t = 2x + 1 \to dt = 2dx \to dx = \frac{1}{2}dt$. Nên

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\left(\sqrt{3}\right)^2 + t^2} = \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{3}}\ arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\ |_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$
$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \quad \left(do \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctan\frac{x}{a} + C \text{ và } arctan\,(-\infty) = -\frac{\pi}{2}\right).$$

255. C13. $I = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$.

G: TPTP. Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \to \begin{cases} u' = 2x \\ dv = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{cases}$. **Nên**

$$I = uv - \int vdu = \left(-x^2e^{-x}\right)|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-x}dx = 0 + \int_0^{+\infty} 2xe^{-x}dx = \int_0^{+\infty} 2xe^{-x}dx.$$

TPTP lần 2. Đặt $\begin{cases} u = 2x \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \to \begin{cases} u' = 2 \\ dv = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{cases}$.

Nên

$$I = uv - \int vdu = (-2xe^{-x})\,|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2e^{-x}dx = 0 - 2e^{-x} = (-2e^{-x})\,|_0^{+\infty} = 0 - (-2) = 2.$$

256. Tính $I = \int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{x^2 - 2x + 3}$.

G: …

Bài tập:

- Công thức Newton- Leibnit mở rộng: Nếu F là 1 nguyên hàm của f thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\,|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$.

- Chú ý: $\frac{1}{\infty} = 0 \to F(+\infty) = 0$.

257. C2. Tính $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2.\ (x+2)}$.

G: Tách

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)^2.(x+2)}dx = \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1).\ (x+2)}\right)dx = \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{(x+2)-(x+1)}{(x+1).(x+2)}\right)dx = \int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{(x+1)^2} - \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)\right]dx = -\frac{1}{x+1} - (ln\,|x+1| - ln\,|x+2|) = \left(-\frac{1}{x+1} - ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\right)|_0^{+\infty} = 0 - \left(-1 - ln\frac{1}{2}\right) = 1 + ln\frac{1}{2}.$$
$$\left(\text{vì } khi\ x \to \infty, theo\ quy\ tắc\ ngắt\ bỏ\ VCL\ bậc\ thấp\ hơn\ thì\ \frac{x+1}{x+2} \sim \frac{x}{x} = 1\right)$$

258. C1. $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2.(x+2)}$.

G: Viết

$$\frac{1}{x^2.(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+2} = \frac{ax(x+2) + b(x+2) + cx^2}{x^2(x+2)} = \frac{x^2(a+c) + x(2a+b) + 2b}{x^2(x+2)}$$
$$\to x^2(a+c) + x(2a+b) + 2b = 1.$$

Đồng nhất hệ số, được $\begin{cases} a + c = 0 \\ 2a + b = 0 \\ 2b = 1 \end{cases} \to \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}$

$$\to \frac{1}{x^2.(x+2)} = -\frac{1}{4}.\frac{1}{x} + \frac{1}{2}.\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4}.\frac{1}{x+2}.$$

Cách 2. Có

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{(x+2) - x}{x^2.(x+2)}.\frac{1}{2}dx = \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x.(x+2)}\right).\frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}.\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{(x+2)-x}{x(x+2)}.\frac{1}{2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}.\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right)\right)dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ (ln\,|x| - ln\,|x+2|)\right)\,|_1^{+\infty}$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2}ln\ \left|\frac{x}{x+2}\right|\right)\,|_1^{+\infty} = 0 - \frac{1}{2}\left(-1 - \frac{1}{2}ln\ \left|\frac{1}{3}\right|\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}ln\ \left|\frac{1}{3}\right|\right).$$

259. C4. Tính $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x.\ \sqrt{x^4+1}}$.

G: Viết $I = \int_1^{+\infty} \frac{x^3dx}{x^4.\ \sqrt{x^4+1}}$.

- Đặt $t = \sqrt{x^4+1} \to t^2 = x^4 + 1 \to x^4 = t^2 - 1 \to 4x^3dx = 2tdt \to x^3dx = \frac{tdt}{2}$. Đổi cận nên

$I=\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{tdt}{2(t^2-1)t}=\frac{1}{2}.\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{dt}{(t-1).\ (t+1)}=\frac{1}{2}.\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{t+1-(t-1)}{(t-1).(t+1)}.\frac{dt}{2}=\frac{1}{4}.\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{4}.(ln\,|t-1|-ln\,|t+1|)|_{\sqrt{2}}^{+\infty}=\frac{1}{4}.ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right||_{\sqrt{2}}^{+\infty}=0-\frac{1}{4}ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|=$
$-\frac{1}{4}ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|.$ $\left(\text{vì } khi\ t\to\infty, theo\ quy\ tắc\ ngắt\ bỏ\ VCL\ bậc\ thấp\ hơn\ thì\ \frac{t-1}{t+1}\sim\frac{t}{t}=1\right)$

260. C5. Tính $I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}.$

G: Đặt $t=\sqrt{x}+1\to\sqrt{x}=t-1\to x=(t-1)^2=t^2-2t+1\to dx=(2t-2)dt$. **Đổi cận nên**
$I=\int_1^{+\infty}\frac{(2t-2)dt}{t^3}=\int_1^{+\infty}\left(\frac{2}{t^2}-\frac{2}{t^3}\right)dt=\int_1^{+\infty}(2t^{-2}-2t^{-3})dt=\left(\frac{2t^{-1}}{-1}-\frac{2t^{-2}}{-2}\right)|_1^{+\infty}=\left(-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}\right)|_1^{+\infty}=0-(-1)=1.$

*** Công thức:** $\int\frac{dx}{1+x^2}=arctan\,x+C.$

Nên $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}.arctan\frac{x}{a}+C;\ arctan\,(+\infty)=\frac{\pi}{2}.$

261. C6. Tính $I=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x.\ \sqrt{x^2-2}}$

G: Viết $I=\int_2^{+\infty}\frac{xdx}{x^2.\ \sqrt{x^2-2}}.$

- Đặt $t=\sqrt{x^2-2}\to t^2=x^2-2\to x^2=t^2+2\to 2xdx=2tdt\to xdx=tdt$. **Đổi cận nên**
$I=\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{tdt}{(t^2+2)t}=\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{dt}{\left(\sqrt{2}\right)^2+t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}arctan\frac{t}{\sqrt{2}}|_{\sqrt{2}}^{+\infty}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$ $\left(v\text{ì } arctan(+\infty)=\frac{\pi}{2}\right)$

262. Tính $I=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x.\ \sqrt{x^4-3}}.$

G: Viết $I=\int_2^{+\infty}\frac{x^3dx}{x^4.\ \sqrt{x^4-3}}$. **Đặt** $t=\sqrt{x^4-3}\to t^2=x^4-3\to x^4=3+t^2\to 4x^3dx=2tdt\to x^3dx=\frac{tdt}{2}$. **Đổi cận nên**
$I=\int_{\sqrt{13}}^{+\infty}\frac{tdt}{2(3+t^2)t}=\frac{1}{2}.\int_{\sqrt{13}}^{+\infty}\frac{dt}{\left(\sqrt{3}\right)^2+t^2}=\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{3}}\ arctan\frac{t}{\sqrt{3}}=\cdots$

263. C7. Tính $I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x.\sqrt[4]{1+x^3}}.$

G: Viết $I=\int_1^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^3.\sqrt[4]{1+x^3}}$. **Đặt** $t=\sqrt[4]{1+x^3}\to t^4=1+x^3\to x^3=t^4-1\to 3x^2dx=4t^3dt\to x^2dx=\frac{4t^3}{3}dt$. **Đổi cận nên** $I=\int_{\sqrt[4]{2}}^{+\infty}\frac{4t^3dt}{3.(t^4-1)t}=\frac{4}{3}.\int_{\sqrt[4]{2}}^{+\infty}\frac{t^2dt}{t^4-1}=\frac{4}{3}.\int_{\sqrt[4]{2}}^{+\infty}\frac{t^2dt}{(t^2-1).(t^2+1)}=\frac{4}{3}.\int_{\sqrt[4]{2}}^{+\infty}\frac{(t^2+1)+(t^2-1)}{(t^2-1).(t^2+1)}.\frac{dt}{2}=\frac{2}{3}.\int_{\sqrt[4]{2}}^{+\infty}\left(\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\frac{2}{3}.\int_{\sqrt[4]{2}}^{+\infty}\left(\frac{1}{(t+1).(t-1)}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\frac{2}{3}.\int_{\sqrt[4]{2}}^{+\infty}\left(\frac{(t+1)-(t-1)}{(t+1).(t-1)}.\frac{1}{2}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\frac{2}{3}.\int_{\sqrt[4]{2}}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)+\frac{1}{1+t^2}\right]dt=\frac{2}{3}.\left[\frac{1}{2}.(ln\,|t-1|-ln\,|t+1|)+arctan\,t\right]=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}.ln\ \left|\frac{t-1}{t+1}\right|+arctan\,t\right)\ |_{\sqrt[4]{2}}^{+\infty}=\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}.ln\ \left|\frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[4]{2}+1}\right|-arctan\sqrt[4]{2}\right).$

264. C9. Tính $I=\int_1^{+\infty}\frac{ln\,x\,dx}{x^3}.$

G: Sử dụng TPTP. Đặt $\begin{cases}u=ln\,x\\ dv=\frac{dx}{x^3}\end{cases}\to\begin{cases}u'=\frac{1}{x}\\ v=\int\frac{dx}{x^3}=\int x^{-3}dx=\frac{x^{-2}}{-2}=-\frac{1}{2x^2}.\end{cases}$ **Nên**
$I=uv-\int vdu=-\frac{ln\,x}{2x^2}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{2x^3}=-\frac{ln\,x}{2x^2}+\frac{1}{2}.\int_1^{+\infty}x^{-3}dx=-\frac{ln\,x}{2x^2}+\frac{1}{2}.\frac{x^{-2}}{-2}=\left(-\frac{ln\,x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}\right)|_1^{+\infty}=0-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}.$

265. C10. Tính $I=\int_1^{+\infty}\frac{arctan\,x}{x^2}dx.$

G: Đặt $\begin{cases}u=arctan\,x\\ dv=\frac{dx}{x^2}\end{cases}\to\begin{cases}u'=\frac{1}{x^2+1}\\ v=\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}.\end{cases}$ **Nên TPTP** $I=uv-\int vdu=arctan\,x.\left(-\frac{1}{x}\right)-\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}.\left(-\frac{1}{x}\right)dx=\left(-\frac{arctan\,x}{x}\right)|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x^2+1)}=0-\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x^2+1)}=\frac{\pi}{4}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x.\ (x^2+1)}=\frac{\pi}{4}+J.$

- Với $J=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x.\ (x^2+1)}=\int_1^{+\infty}\frac{xdx}{x^2.\ (x^2+1)}$. **Đặt** $t=x^2\to dt=2xdx\to xdx=\frac{dt}{2}$. **Đổi cận nên**
$J=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{2t.(t+1)}=\frac{1}{2}.\int_1^{+\infty}\frac{(t+1)-t}{t.\ (t+1)}dt=\frac{1}{2}.\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{2}.(ln\,|t|-ln\,|t+1|)\ |_1^{+\infty}=\frac{1}{2}.ln\ \left|\frac{t}{t+1}\right||_1^{+\infty}=0-\frac{1}{2}.ln\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}ln\frac{1}{2}.$

- Vậy $I=\frac{\pi}{4}+J=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}ln\frac{1}{2}.$

266. **C12. Tính** $I = \int_1^{+\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}} dx$.

G: Viết $I = \int_1^{+\infty} x^3 . e^{-x^2} dx = \int_1^{+\infty} x^2 e^{-x^2} . xdx$. **Đặt** $t = x^2 \to dt = 2xdx \to xdx = \frac{dt}{2}$. **Đổi cận nên** $I = \int_1^{+\infty} te^{-t} . \frac{dt}{2} = \int_1^{+\infty} \frac{t}{2} . e^{-t} dt$.

- TPTP. Đặt $\begin{cases} u = \frac{t}{2} \\ dv = e^{-t} \end{cases} \to \begin{cases} u' = \frac{1}{2} \\ dv = \int e^{-t} dt = -e^{-t}. \end{cases}$ **Nên**

$I = uv - \int vdu = -\frac{t}{2} e^{-t} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-t} dt = -\frac{t}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} . \int_1^{+\infty} e^{-t} dt = \left(-\frac{t}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} . (-e^{-t}) \right) |_1^{+\infty} = \left(-\frac{t+1}{2} e^{-t} \right) |_1^{+\infty} = 0 - (-e^{-1}) = e^{-1} \quad \left(do \ \ e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \right)$

267. **C13.** $I = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$.

G: TPTP. Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \to \begin{cases} u' = 2x \\ dv = \int e^{-x} dx = -e^{-x}. \end{cases}$ **Nên**

$I = uv - \int vdu = (-x^2 e^{-x}) |_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-x} dx = 0 + \int_0^{+\infty} 2xe^{-x} dx = \int_0^{+\infty} 2xe^{-x} dx.$

TPTP lần 2. Đặt $\begin{cases} u = 2x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \to \begin{cases} u' = 2 \\ dv = \int e^{-x} dx = -e^{-x}. \end{cases}$

Nên

$I = uv - \int vdu = (-2xe^{-x}) |_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2e^{-x} dx = 0 - 2e^{-x} = (-2e^{-x}) |_0^{+\infty} = 0 - (-2) = 2.$

- Chú ý: Nếu F là 1 nguyên hàm của f thì

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(x) |_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty).$$

(Công thức Newton- Leibnit mở rộng).

Và $arctan\,(-\infty) = -\frac{\pi}{2}; \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} . arctan \frac{x}{a} + C$.

268. **Tính** $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2 + 4x + 4}$.

G: Có $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2 + 4x + 1 + 3} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(2x+1)^2 + 3}$.

Đặt $t = 2x + 1 \to dt = 2dx \to dx = \frac{1}{2} dt$. **Đổi cận nên**

$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2(t^2 + 3)} = \frac{1}{2} . \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(\sqrt{3})^2 + t^2} = \frac{1}{2} . \frac{1}{\sqrt{3}} . arctan \frac{t}{\sqrt{3}} |_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2\sqrt{3}} . \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$

…

269. **Tính** $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}$.

G: Ta có

$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 1 + 2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2 + 2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x+1)}{(\sqrt{2})^2 + (x+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} . arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) |_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(arctan(+\infty) - arctan(-\infty) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

270. **Tính** $I = \int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{x^2 - 4x + 8}$.

G: …

2. Tích phân suy rộng loại II

- ĐN: Cho hàm $y = f(x)$ **ko xác định tại** $x = a \ \ or \ \ x = b$. **Thì TPSR loại 2 là** $I = \int_a^b f(x) dx$.

271. **Tính** $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

G: Hàm f ko xác định tại $x = 0$. **Ta gọi I là TPSR loại II. Có** $I = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = (2\sqrt{x})|_0^1 = 2 - 0 = 2.$

272. **Tính** $I = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

G: Hàm f xác định tại cận $x = 0$, nhưng ko xác định tại $x = 1 \to I$ gọi là TPSR loại II. Có $I = \int_0^1 (x-1)^{-2}dx = \frac{(x-1)^{-1}}{-1} = \left(\frac{-1}{x-1}\right)|_0^1 = \frac{-1}{0} - 1 = \infty$.

273. Tính $I = \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$.

G: $I = ln\left|x + \sqrt{x^2-4}\right| = \cdots$

274. Tính $I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$.

G: $I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = arcsin\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \cdots$

275. Tính $I = \int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx$.

G: Hàm lấy tích phân ko xác định tại $x = 1$. Nên I là TPSR loại 2. Đặt $t = \sqrt{x-1} \to t^2 = x - 1 \to x = t^2 + 1 \to dx = 2tdt$. Đổi cận. Nên $I = \int_0^1 \frac{t^2+1-2}{t}.2tdt = 2.\int_0^1 (t^2-1)dt = 2.\left(\frac{t^3}{3} - t\right)|_0^1 = -\frac{4}{3}$.

276. Tính $I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}.(x+5)}$.

G: Hàm f ko xác định tại $x = 0$. Đặt $t = \sqrt{x} \to t^2 = x \to x = t^2 \to dx = 2tdt$. Đổi cận nên

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2tdt}{t(t^2+5)} = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2dt}{t^2+5} = 2.\int_0^{\sqrt{2}} \frac{dt}{(\sqrt{5})^2+t^2} == 2.\frac{1}{\sqrt{5}}\ arctan\frac{t}{\sqrt{5}}\ |_0^{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(arctan\sqrt{\frac{2}{5}} - 0\right).$$

277. Tính $I = \int_0^1 \frac{dx}{(x+3).\sqrt{1-x}}$.

G: Hàm f ko xác định tại $x = 1$. Đặt $t = \sqrt{1-x} \to t^2 = 1 - x \to x = 1 - t^2 \to dx = -2tdt$. Nên

$$I = \int_1^0 \frac{-2tdt}{(4-t^2).t} = \int_0^1 \frac{2dt}{4-t^2} = \int_0^1 \frac{2dt}{(2-t)(2+t)} = 2.\int_0^1 \frac{(2-t)+(2+t)}{(2-t)(2+t)}.\frac{1}{4}dt = \frac{1}{2}.\int_0^1 \left(\frac{1}{2+t} + \frac{1}{2-t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}.\left(ln\,|2+t| + \frac{ln|2-t|}{-1}\right)|_0^1 = \frac{1}{2}.(ln\,|2+t| - ln\,|2-t|)\,|_0^1 = \cdots$$

278. Tính $I = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^3}$.

G: Có $I = \int_0^1 (x-1)^{-3}dx = \frac{(x-1)^{-2}}{-2}\ |_0^1 = \left(-\frac{1}{2(x-1)^2}\right)|_0^1 = \infty - \left(-\frac{1}{2}\right) = \infty$.

279. Tính $I = \int_1^{+\infty} \frac{x+5}{x(x^2+3)}dx$.

G: Tách $I = \int_1^{+\infty}\left(\frac{x}{x(x^2+3)} + \frac{5}{x(x^2+3)}\right)dx = \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+3}dx + 5\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x^2+3)}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\ arctan\frac{x}{\sqrt{3}} + 5\int_1^{+\infty}\frac{x}{x^2(x^2+3)}dx$.

- Xét $J = \int_1^{+\infty}\frac{x}{x^2(x^2+3)}dx$. Đặt $t = x^2 \to dt = 2xdx \to xdx = \frac{dt}{2}$. Đổi cận nên

$$J = \int_1^{+\infty}\frac{dt}{2t(t+3)} = \frac{1}{2}.\int_1^{+\infty}\frac{(t+3)-t}{t.(t+3)}dt = \frac{1}{2}.\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+3}\right)dt = \cdots$$

280. Tính $I = \int_0^1 x\,ln^2x dx$.

G: TPTP. Đặt $\begin{cases} u = ln^2x \\ dv = x \end{cases} \to \begin{cases} u' = 2\,lnx.\frac{1}{x} \\ v = \int xdx = \frac{x^2}{2}. \end{cases}$

Nên

$$I = uv - \int vdu = \frac{x^2ln^2x}{2}\ |_0^1 - \int_0^1 xln\,xdx = \int_0^1 -xln\,xdx.$$

TPTP lần hai. Đặt $\begin{cases} u = ln\,x \\ dv = -x \end{cases} \to \begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = \int -xdx = -\frac{x^2}{2}. \end{cases}$

Nên

$$I = uv - \int vdu = -\frac{ln\,x.x^2}{2} + \int_0^1 \frac{x}{2}dx = \left(-\frac{ln\,x.x^2}{2} + \frac{x^2}{4}\right)|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

281. Tính $I = \int_0^1 \frac{dx}{(8-4\sqrt{1-x}-4x)\sqrt{1-x}}$.

G: Đặt $t = \sqrt{1-x} \to t^2 = 1 - x \to x = 1 - t^2 \to dx = -2tdt$.

Nên $I = \int_1^0 \frac{-2tdt}{(8-4t+4t^2).t} = 2.\int_0^1 \frac{dt}{4t^2-4t+4} = 2.\int_0^1 \frac{dt}{4t^2-4t+1+3} = 2.\int_0^1 \frac{dt}{3+(2t-1)^2}$.

Đặt $u = 2t - 1 \to du = 2dt \to dt = \frac{1}{2}du$. **Nên** $I = 2.\int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{2}du}{3+u^2} = \int_{-1}^{1} \frac{du}{3+u^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.arctan\frac{u}{\sqrt{3}} \, |_{-1}^{1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Bài tập

- ĐN: Cho hàm $y = f(x)$ **ko xác định tại cận** $x = a \;\; or \;\; x = b$. **Thì TPSR loại 2 là** $I = \int_a^b f(x)dx$.

282. C15. Tính $I = \int_0^1 \frac{dx}{(2-x).\,\sqrt{1-x}}$.

G: Tại $x = 0$, **hàm f xác định. Hàm f ko xác định tại cận** $x = 1$. **Nên đây là TPSR loại II.**

- Đặt $t = \sqrt{1-x} \to t^2 = 1 - x \to x = 1 - t^2 \to dx = -2tdt$. **Đổi cận nên**

$I = \int_1^0 \frac{-2tdt}{(2-1+t^2).\;t} = 2.\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = 2\;arctan\;t$ |_0^1 $= 2(arctan\,1 - arctan\,0) = 2\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{2}$.

283. Tính $I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}.\;(x-4)}$.

G: Hàm f ko xác định tại cận $x = 0$. **Đặt** $t = \sqrt{x} \to t^2 = x \to x = t^2 \to dx = 2tdt$. **Đổi cận nên**

$I = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2tdt}{t.(t^2-4)} = 2.\int_0^{\sqrt{2}} \frac{dt}{(t-2).(t+2)} = 2.\int_0^{\sqrt{2}} \frac{(t+2)-(t-2)}{(t-2).(t+2)}.\frac{dt}{4} = \frac{1}{2}.\int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right)dt = \frac{1}{2}.(ln\,|t-2| - ln\,|t+2|)|_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| \,|_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\,ln\left|\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2}\right| - 0 = \frac{1}{2}\,ln\left|\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2}\right|$.

284. Tính $I = \int_0^1 x^2.\,ln\,xdx$.

G: TPTP. Đặt $\begin{cases} u = ln\,x \\ dv = x^2dx \end{cases} \to \begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = \int x^2dx = \frac{x^3}{3}. \end{cases}$ **Nên**

$I = uv - \int vdu = \frac{ln\,x.\,x^3}{3} - \int_0^1 \frac{1}{x}.\frac{x^3}{3}dx = \frac{ln\,x.x^3}{3} - \int_0^1 \frac{x^2}{3}dx = \left(\frac{ln\,x.x^3}{3} - \frac{x^3}{9}\right) |_0^1 = -\frac{1}{9}$.

Bài 7. Xét sự hội tụ của TPSR loại II

1. Định nghĩa

- Xét $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2}$. Hàm f ko xác định tại $x = 0$. Có

$$I = \left(-\frac{1}{x}\right)|_0^1 = -1 - \left(-\frac{1}{0}\right) = \infty.$$

Nên $I = \infty$. Ta nói I là phân kỳ.

- Nếu tích phân $I = L < \infty \to I$ hữu hạn. Ta nói I là hội tụ.

2. Tích phân cơ bản

- Xét $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^a}$ là TPSR loại II. Nếu mũ $a < 1 \to I < \infty \to I$ hội tụ.

- Nếu mũ $a \geq 1 \to I = \infty \to I$ ph kì.

3. Tiêu chuẩn tương đương

- Cho $0 \leq f(x); g(x)$ và $f(x) \sim g(x)$ khi $x \to 0^+$. (tức $lim_{x\to 0^+} \frac{f}{g} = 1$) Nếu $\int f dx$ hội tụ → $\int g dx$ hội tụ.

- Nếu $\int f dx$ ph kì → $\int g dx$ ph kì.

- (Một số VCB tương đương) Khi $x \to 0$, ta có

$$\sin x \sim x; \tan x \sim x \sim \arcsin x;$$
$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2; 1 - cos\, ax \sim \frac{1}{2}.(ax)^2 = \frac{a^2x^2}{2};$$
$$e^x - 1 \sim x; a^x - 1 \sim x \ln a; \ln(1+x) \sim x;$$
$$(1+x)^a - 1 \sim a.x; \sqrt{1+x} - 1 = (1+x)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2}.x; \sqrt[3]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{3}x.$$

285. Xét sự hội tụ của $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}-1}{1-cos\, x} dx$.

G: Hàm f ko xác định tại $x = 0$. Khi $x \to 0^+$, ta có

$\frac{\sqrt{1+x}-1}{1-cos\, x} = \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{1-cos\, x} \sim \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{1}{x} = \frac{1}{x^1}$.

Vì mũ $a = 1$, nên $J = \int_0^1 \frac{dx}{x^1} = \infty$. Nên theo tiêu chuẩn tương đương, I cũng ph kì.

286. C10. $I = \int_0^1 \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$.

G: Hàm f ko xác định tại $x = 0 \to I$ là TPSR loại II. Ta có

$I = \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \frac{1}{e^x}} = \int_0^1 \frac{e^x dx}{e^{2x}-1}$.

Vì khi $x \to 0^+$, ta có $e^x - 1 \sim x \to e^{2x} - 1 \sim 2x$. Nên

$\frac{e^x}{e^{2x}-1} \sim \frac{e^0}{2x} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}.\frac{1}{x^1}$

Vì mũ $\alpha = 1$, nên $J = \int_0^1 \frac{1}{2}.\frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}.\int_0^1 \frac{dx}{x^1} = \infty$. Nên theo tiêu chuẩn tương đương, I cũng ph kì.

287. Xét sự hội tụ của $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}.(x+3)}$.

G: Hàm f ko xác định tại $x = 0$. Khi $x \to 0^+$, thì $\frac{1}{\sqrt{x}.\ (x+3)} \sim \frac{1}{\sqrt{x}.3} = \frac{1}{3}.\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$.

Vì mũ $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ nên $J = \int_0^1 \frac{1}{3}.\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3}.\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} < \infty$. Theo tiêu chuẩn tương đương, nên I cũng hội tụ.

Cách 2. Ta đi tính $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}.\ (x+3)}$.

G: Hàm f ko xác định tại $x = 0$. Đặt $t = \sqrt{x} \to t^2 = x \to x = t^2 \to dx = 2tdt$. Đổi cận. Nên

$$I = \int_0^1 \frac{2tdt}{t.(t^2+3)} = \int_0^1 \frac{2dt}{t^2+3} = 2.\int_0^1 \frac{dt}{(\sqrt{3})^2 + t^2} = 2.\frac{1}{\sqrt{3}}.arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\,|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6} - 0\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} < \infty.$$

Nên theo định nghĩa, I là hội tụ.

288. $I = \int_0^1 \frac{xdx}{e^{x^3}-1}$.

G: Hàm f ko xác định tại $x = 0$. Vì khi $x \to 0^+$, có $e^x - 1 \sim x \to e^{x^3} - 1 \sim x^3 \to \frac{x}{e^{x^3}-1} \sim \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$.

Vì mũ $a = 2 > 1 \to J = \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \infty$. Theo tiêu chuẩn tương đương, I cũng ph kỳ.

289. $I = \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2.(2-x)^3}$

G: …

290. **Xét sự hội tụ của** $I = \int_0^1 \frac{dx}{(2-x).\sqrt{1-x}}$.

G: Tại $x = 0$ **hàm f xác định. Hàm f ko xác định tại** $x = 1$. **Khi** $x \to 1^-$, **thì** $\frac{1}{(2-x).\sqrt{1-x}} \sim \frac{1}{2-1}.\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$

Vì mũ $a = \frac{1}{2} < 1 \to J = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} < \infty$. **Theo tiêu chuẩn tương đương, I cũng h tụ.**

291. **Xét sự hội tụ của** $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x-x^2}}$.

G: $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}} = arcsin\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \cdots$

C2. Có $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(x+2)}} \sim \ldots$

292. $I = \int_0^1 \frac{3sin\,x+x^2}{x^4}dx$.

G: …

293. $I = \int_0^1 \frac{x+sin\,x^2}{\sqrt{x^5}}dx$.

G: …

294. **C14.** $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{sin\,x}-1}dx$.

G: HS ko xác định tại $x = 0$. **Khi** $x \to 0^+$, **ta có** $e^x - 1 \sim x \to e^{sin\,x} - 1 \sim sin\,x \sim x$.

Nên $\frac{\sqrt{x}}{e^{sin\,x}-1} \sim \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$.

khi $x \to 0$. **Vì mũ** $a = \frac{1}{2} < 1$ **nên** $J = \int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} < \infty$. **Theo tiêu chuẩn tương đương, I cũng hội tụ.**

4. Tích phân suy rộng loại I

a) Tích phân cơ bản suy rộng loại I

- Xét $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a}$ **là TPSR loại I. Nếu** $a > 1 \to I < \infty \to I$ **hội tụ.**

- Nếu $a \le 1 \to I = \infty \to I$ **ph kì.**

b) Tiêu chuẩn tương đương

- Cho $0 \le f(x); g(x)$ **và** $f(x) \sim g(x)$ **khi** $x \to +\infty$. **(tức** $lim_{x\to+\infty}\frac{f}{g} = 1$**) Nếu** $\int f dx$ **hội tụ** $\to \int g dx$ **hội tụ.**

- Nếu $\int f dx$ **ph kì** $\to \int g dx$ **ph kì.**

Xét sự hội tụ của các tích phân sau:

295. $I = \int_1^{+\infty} \sqrt{x}.\,ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$.

G: Vì khi $x \to +\infty$ **thì** $t = \frac{1}{x} \to 0$, **nên**

$ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x} \to \sqrt{x}.\,ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim \sqrt{x}.\frac{1}{x} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$

khi $x \to +\infty$. **Vì mũ** $a = \frac{1}{2} < 1$ **nên** $J = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = \infty$.

Theo tiêu chuẩn tương đương, $I = \infty$ **cũng là ph kì.**

296. **C6.** $I = \int_1^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{x}\right)dx$.

G: Vì khi $x \to +\infty$ **thì** $t = \frac{1}{x} \to 0$, **nên**

$1 - \cos\frac{1}{x} \sim \frac{1}{2}.\frac{1}{x^2}$.

Vì mũ $a = 2 > 1$, nên $J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2}.\frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2}.\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx < \infty$. Nên theo tiêu chuẩn tương đương, $I = \int_1^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) dx < \infty$ cũng là hội tụ.

- Quy tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp hơn trong tổng hiệu: …
VD. Tìm

$$I = lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 + x - 1}{5x^3 + 2x^2 + 7} = lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{5x^3} = \frac{3}{5}.$$

297. $I = \int_1^{+\infty} \frac{2+x}{1+x+x^2.\sqrt{x}} dx.$

G: Theo quy tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp hơn trong tổng hiệu nên khi $x \to +\infty$, thì $\frac{2+x}{1+x+x^2.\sqrt{x}} = \frac{2+x}{1+x+x^{\frac{5}{2}}} \sim \frac{x}{x^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.

Vì mũ $a = \frac{3}{2} > 1$ nên $J = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} < \infty$.

Theo tiêu chuẩn tương đương, nên $I < \infty$ cũng là hội tụ.

298. **C7.** $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x.\sqrt{x^4+x^2+1}}.$

G: Vì khi $x \to +\infty$, theo quy tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp hơn thì
$\frac{1}{x.\sqrt{x^4+x^2+1}} \sim \frac{1}{x.\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^3}.$

Vì $\alpha = 3 > 1$, nên $J = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} < \infty$. Theo tiêu chuẩn tương đương, nên $I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x.\sqrt{x^4+x^2+1}} < \infty$ cũng là hội tụ.

5. Tiêu chuẩn so sánh
- Cho $0 \le f(x) \le g(x)$. Nếu $\int f dx$ ph kì $\to \int g dx$ ph kì.
- Nếu $\int g dx$ hội tụ $\to \int f dx$ hội tụ.

- Chú ý: Tiêu chuẩn so sánh. Nếu $\int f dx$ hội tụ và $g \le f \to \int g dx$ hội tụ.
- Nếu $\int f dx$ ph kì và $g \ge f \to \int g dx$ ph kì.
- Tức là: Lớn hơn ph kỳ là ph kỳ. Nhỏ hơn hội tụ là hội tụ.

Chú ý. Khi $x \to +\infty$, thì $\begin{cases} ln\,(1+x) > 1 \\ ln\,(1+x) < x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \\ e^x > x^9 \\ arctan\, x \to arctan\,(+\infty) = \frac{\pi}{2} \approx 1,5 > 1; \approx 1,5 < 2. \end{cases}$

299. **Xét** $I = \int_1^{+\infty} \frac{ln\,(1+x^2)}{\sqrt{x}} dx.$

G: Xét $J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx$. Vì mũ $a = \frac{1}{2}$ nên J ph kì.

Định hướng: Chứng minh I cũng là ph kì và I > J. (lớn hơn ph ki là ph ki)

- Vì khi $x \to +\infty$ nên $1 + x^2 \to +\infty$, nên $ln\left(1 + x^2\right) \to +\infty$. Suy ra khi $x \to +\infty$, thì
$ln\left(1 + x^2\right) > 1 \to \frac{ln\,(1+x^2)}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \to I > J.$

Vì mũ $a = \frac{1}{2}$ nên $J = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$ ph kì. Theo tiêu chuẩn so sánh, nên I cũng ph kì.

300. **C3.** $I = \int_1^{+\infty} \frac{ln\,(1+x^5)}{x^2} dx.$

G: Xét $J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$. Vì mũ $a = 2 > 1$ nên J hội tụ.

Định hướng. Ta CM I cũng h tụ và $I < J$. (nhỏ hơn htu là htu)
Thật vậy, vì khi $x \to +\infty$, thì
$ln\left(1 + x^5\right) < \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \to \frac{ln(1+x^5)}{x^2} < \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$

Vì mũ $a = \frac{3}{2} > 1$ nên $J = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} < \infty$. Theo tiêu chuẩn so sánh, vì $I < J \to$I cũng hội tụ.

301. **C6. Xét** $I = \int_4^{+\infty} \frac{dx}{x.\ ln^2 x}.$

G: Đặt $t = ln\,x \to dt = \frac{dx}{x}$. Đổi cận nên
$I = \int_{ln\,4}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_{ln\,4}^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{ln\,4}\right) = \frac{1}{ln\,4} < \infty.$
Nên I là hội tụ.
302. **Xét $I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x.ln\,x}$.**
G: Đặt $t = ln\,x \to dt = \frac{1}{x}dx$. Đổi cận nên
$I = \int_{ln\,2}^{+\infty} \frac{dt}{t} = (ln\,t)\,\Big|_{ln\,2}^{+\infty} = +\infty.$
Vậy I là ph kỳ.
303. **Xét $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x + ln\,x}}$.**
G: Vì khi $x \to +\infty$, ta có $1 < ln\,x < \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} < x^1$ nên theo quy tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp hơn nên
$\frac{1}{\sqrt{x + ln\,x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}.$
Vì mũ $a = \frac{1}{2} < 1$ nên $J = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = \infty$. Theo tiêu chuẩn tương đương, nên I cũng ph kỳ.
304. **Xét $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + ln\,x}}$.**
G: Vì khi $x \to +\infty$, ta có $1 < ln\,x < \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} < x^1$ nên theo quy tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp hơn nên
$\frac{1}{\sqrt{x^3 + ln\,x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$
- Vì mũ $a = \frac{3}{2} > 1$ nên …

Bài tập:
- Cho $f(x); g(x) \geq 0$ và $f(x) \sim g(x)$ khi $x \to +\infty$. (tức $lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g} = 1$) Nếu $\int_1^{+\infty} f dx$ hội tụ $\to \int_1^{+\infty} g dx$ hội tụ.
- Ngược lại, nếu $\int f dx$ ph kỳ $\to \int g dx$ cũng ph kỳ.
305. **C1. Xét sự hội tụ của $I = \int_1^{+\infty} x.\,ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dx$.**
G: Vì khi $x \to +\infty$, thì $t = \frac{1}{x^2} \to 0$ nên
$ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x^2} \to x\,ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \sim x.\ \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} = \frac{1}{x^1}.$
- Vì mũ $a = 1$ nên $J = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^1} = \infty$. Theo tiêu chuẩn tương đương, nên $I = \infty$ cũng là ph kỳ.
306. **C6. $I = \int_1^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{x}\right)dx$.**
G: Vì khi $x \to +\infty$ thì $t = \frac{1}{x} \to 0$, nên
$1 - \cos\frac{1}{x} \sim \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2}.\ \frac{1}{x^2}.$
- Vì mũ $a = 2 > 1$, nên $J = \frac{1}{2}.\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < \infty$. Nên theo tiêu chuẩn tương đương, $I = \int_1^{\infty}\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right)dx < \infty$ cũng là hội tụ.

- Quy tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp hơn trong tổng hiệu: …
VD. Tìm $I = lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 + x - 1}{5x^3 + 2x^2 + 7} = lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{5x^3} = \frac{3}{5}$.
307. **C2. Xét $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2 + sin\,x}$.**
G: Vì khi $x \to +\infty$, nên $-1 \leq sin\,x \leq 1 < x = x^1 < x^2$. Theo quy tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp hơn, ta có khi $x \to +\infty$, thì
$\frac{\sqrt{x}}{x^2 + sin\,x} \sim \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$

- Vì mũ $a = \frac{3}{2} > 1$ nên $J = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} < \infty$. Theo tiêu chuẩn tương đương, thì $I < \infty$ cũng là hội tụ.

308. C7. $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x.\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

G: Vì khi $x \to +\infty$, theo quy tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp hơn thì

$\frac{1}{x.\sqrt{x^4+x^2+1}} \sim \frac{1}{x.\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^3}$.

- Vì mũ $a = 3 > 1$, nên $J = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} < \infty$. Theo tiêu chuẩn tương đương, nên $I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x.\sqrt{x^4+x^2+1}} < \infty$ cũng là hội tụ.

4. Tiêu chuẩn so sánh

- Cho $0 \le f(x) \le g(x)$. Nếu $\int f dx$ ph kì $\to \int g dx$ ph kì.
- Ngược lại, nếu $\int g dx$ hội tụ $\to \int f dx$ cũng hội tụ.
- Tức là: Lớn hơn ph kỳ là ph kỳ. Nhỏ hơn hội tụ là hội tụ.
- Chú ý. Khi $x \to +\infty$, thì $\begin{cases} \ln(1+x) > 1 \\ \ln(1+x) < \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \\ e^x > x^9 \\ \arctan x \to \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2} \approx 1,5 > 1;\ 1,5 < 2. \end{cases}$

309. Xét $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)dx}{x}$.

- Phân tích: Xét $J = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^1}$ là ph kì (do mũ $a = 1$). Nên ta sẽ CM I > J thì I cũng ph kì. (Lớn hơn ph kì là ph kì)

Giải. Vì khi $x \to +\infty$, thì

$\ln(1+x^2) > 1 \to \frac{\ln(1+x^2)}{x} > \frac{1}{x} = \frac{1}{x^1}$.

- Vì mũ $a = 1$ nên $J = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^1}$ ph kì. Theo tiêu chuẩn so sánh, vì $I > J$ nên $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)dx}{x}$ cũng ph kì.

310. C3. Xét $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^5)}{x^2} dx$.

- Phân tích: Xét $K = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$. Vì mũ $a = 2 > 1$ nên K hội tụ.
- Định hướng. Ta CM I cũng h tụ và $I < K$. (bé hơn htu là htu)

Giải. Thật vậy, vì khi $x \to +\infty$, thì

$\ln(1+x^5) < \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \to \frac{\ln(1+x^5)}{x^2} < \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.

- Vì mũ $a = \frac{3}{2} > 1$ nên $J = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} < \infty$. Theo tiêu chuẩn so sánh, vì $I < J \to I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^5)}{x^2} dx$ cũng hội tụ.

311. C4. $I = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx$.

Phân tích: Xét $J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$. Vì mũ $a = 1$ nên J ph kì.

- Định hướng: Nếu I > J thì I cũng ph kì. (Lớn hơn ph kì là ph kì)
- Giải: Vì khi $x \to +\infty$, thì

$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2} \approx 1,5 > 1 \to \frac{\arctan x}{x} > \frac{1}{x} = \frac{1}{x^1}$.

- Vì mũ $a = 1$ nên $J = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^1}$ ph kì. Theo tiêu chuẩn so sánh, vì $I > J$ nên I cũng ph kì.

312. Xét $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+\ln x}}$.

G: Vì khi $x \to +\infty$, ta có $1 < \ln x < \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} < x^4$. Theo quy tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp hơn trong tổng hiệu, thì

$\frac{1}{\sqrt{x^4+\ln x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^2}$.

- Vì mũ $a = 2 > 1$ nên $J = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < \infty$. Theo tiêu chuẩn tương đương, nên $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + \ln x}}$ cũng hội tụ.

313. C5. $I = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x.\sqrt{x}} dx$.

Phân tích: Xét $J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$. Vì mũ $a = \frac{3}{2} > 1$ nên $J = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}} < +\infty$.

- Định hướng: Nếu I < J thì I cũng hội tụ. (bé hơn htu là htu)

- Giải: Vì khi $x \to +\infty$, thì

$\arctan x \to \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2} \approx 1,5 < 2 \to \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} < \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} = 2.\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.

- Vì mũ $a = \frac{3}{2} > 1 \to J = 2.\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx < \infty$. Theo tiêu chuẩn so sánh, nên $I = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx$ cũng hội tụ.

314. Xét $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x + \ln x}}$.

G: Vì khi $x \to +\infty$, ta có $1 < \ln x < \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} < x^1$ nên theo quy tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp hơn nên

$$\frac{1}{\sqrt{x + \ln x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}.$$

Vì mũ $a = \frac{1}{2} < 1$ nên $J = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = \infty$. Theo tiêu chuẩn tương đương, nên I cũng ph kỳ.

315. Xét $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \ln x}}$.

Phân tích: Đặt $J = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2}} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^1}$. Vì mũ $a = 1 \to J$ ph kì.

- Định hướng. Ta CM I cũng ph kì và $I > J$ (Lớn hơn ph kì là ph kì).

Giải. Vì khi $x \to +\infty$, ta có

$\ln x < \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \to \frac{1}{\sqrt{x^2 + \ln x}} > \frac{1}{\sqrt{x^2 + x^{\frac{1}{2}}}} \sim \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x} = \frac{1}{x^1}$.

Vì mũ $a = 1 \to J = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^1}$ ph kì. Theo tiêu chuẩn so sánh, $I > J \to I$ cũng ph kì.

316. C8. Xét $I = \int_4^{+\infty} \frac{dx}{x.\ \ln^2 x}$.

G: Đặt $t = \ln x \to dt = \frac{dx}{x}$. Đổi cận nên

$I = \int_{\ln 4}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_{\ln 4}^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{\ln 4}\right) = \frac{1}{\ln 4} < \infty$.

Nên I là hội tụ.

317. C9. Xét sự hội tụ của $I = \int_1^{+\infty} \frac{x dx}{1 + \sin x + x.\ \sqrt{x}}$.

G: Theo quy tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp hơn trong tổng hiệu nên khi $x \to +\infty$, thì $-1 \le \sin x \le 1 < x < x.\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$ nên

$\frac{x}{1 + \sin x + x.\ \sqrt{x}} = \frac{x}{1 + \sin x + x^{\frac{3}{2}}} \sim \frac{x}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$.

- Vì mũ $a = \frac{1}{2} < 1$ nên $J = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = \infty$. Theo tiêu chuẩn tương đương, nên I cũng là ph kỳ.

318. C25. Xét $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x}) dx}{e^{\sin x} - 1}$.

G: HS ko xác định tại cận $x = 0$. Nên khi $x \to 0$, có $\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{e^{\sin x} - 1} \sim \frac{\sqrt{x}}{\sin x} \sim \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$. $(v\grave{\imath}\ e^x - 1 \sim x)$

- Vì mũ $a = \frac{1}{2} < 1$ nên $J = \int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} < \infty$ là h tụ. Nên theo tiêu chuẩn tương đương, I cũng là h tụ.

Bài tập

- Cho $f(x); g(x) \ge 0$ và $f(x) \sim g(x)$ khi $x \to 0^+$. (tức $\lim_{x \to 0^+} \frac{f}{g} = 1$) Nếu $\int_0^1 f dx$ hội tụ $\to \int_0^1 g dx$ hội tụ.

- Ngược lại, nếu $\int_0^1 f dx$ ph kì $\rightarrow \int_0^1 g dx$ cũng ph kì.
- (Một số VCB tương đương) Khi $x \rightarrow 0$, ta có

$$\sin x \sim x \sim \tan x \sim \arcsin x\, ;\, 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2;$$
$$1-\cos ax \sim \frac{a^2x^2}{2}\, ;\, e^x-1 \sim x;\, a^x-1 \sim x\ln a\, ;\, \ln(1+x) \sim x;$$
$$(1+x)^a-1 \sim a.x;\, \sqrt{1+x}-1 \sim \frac{1}{2}.x;\, \sqrt[3]{1+x}-1 \sim \frac{1}{3}x.$$

319. C11. Xét sự hội tụ của $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$.

G: Hàm f ko xác định tại cận $x=0$. Vì khi $x \rightarrow 0^+$, có
$\tan x \sim x \rightarrow \sqrt{\tan x} \sim \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\tan x}} \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$.

- Vì mũ $a=\frac{1}{2}<1$ nên $J=\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}<\infty$. Vậy theo tiêu chuẩn tương đương, I cũng hội tụ.

320. C13. $I=\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{1+x}-e^x}$.

G: Hàm f ko xác định tại cận $x=0$. Ta có khi $x \rightarrow 0^+$, nên
$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}-e^x}=\frac{\sin\sqrt{x}}{(\sqrt{1+x}-1)-(e^x-1)} \sim \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}.x-x}=-\frac{2}{\sqrt{x}}=-2.\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$

- Vì mũ $a=\frac{1}{2}<1$, nên $J=-2.\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}<\infty$. Theo tiêu chuẩn tương đương, nên $I=\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{1+x}-e^x}<\infty$ cũng hội tụ.

321. C12. $I=\int_0^1 \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

G: Tại cận $x=0$, hàm f xác định. Nhưng hàm f ko xác định tại cận $x=1$. Vì khi $x \rightarrow 1^-$, ta có
$\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}.\sqrt{1-x}} \sim \frac{\sin 1}{\sqrt{1+1}.\sqrt{1-x}}=\frac{\sin 1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$

- Vì mũ $a=\frac{1}{2}<1$, nên $J=\frac{\sin 1}{\sqrt{2}}.\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}<\infty$. Nên theo tiêu chuẩn tương đương, $I=\int_0^1 \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-x^2}}<\infty$ cũng hội tụ.

322. Xét $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^3 x}$.

G: Hàm f ko xác định tại cận $x=\frac{\pi}{2}$. Xét $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ thì $t=\frac{\pi}{2}-x \rightarrow 0$, nên $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \sim \frac{\pi}{2}-x$. Suy ra
$\frac{1}{\cos^3 x}=\frac{1}{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)^3} \sim \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^3}$.

- Vì mũ $a=3>1 \rightarrow J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^3}$ ph kỳ. Theo tiêu chuẩn tương đương, I cũng ph kì.

323. C16. $I=\int_0^1 \frac{x dx}{\tan x-\sin x}$.

G: Hàm f ko xác định tại cận $x=0$. Khi $x \rightarrow 0^+$, có
$\frac{x}{\tan x-\sin x}=\frac{x}{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}=\frac{x}{\sin x.\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}=\frac{x.\cos x}{\sin x.(1-\cos x)} \sim \frac{x.\cos 0}{x.\frac{1}{2}x^2}=\frac{2}{x^2}=2.\frac{1}{x^2}$

- Vì mũ $a=2>1$ nên $J=2.\int_0^1 \frac{dx}{x^2}=\infty$. Nên theo tiêu chuẩn tương đương, I cũng phân kì.

324. C15. $I=\int_0^1 \frac{dx}{x\left(e^{\sqrt[4]{x}}-1\right)}$.

G: …

325. C25. $I=\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{e^{\sin(x^2)}-1}dx$.

G: HS ko xác định tại $x=0$. Khi $x \rightarrow 0^+$, có $\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{e^{\sin(x^2)}-1} \sim \frac{\sqrt{x}}{\sin x^2} \sim \frac{\sqrt{x}}{x^2}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.

- Vì mũ $a=\frac{3}{2}>1$, nên $J=\int_0^1 \frac{dx}{x^2}=\infty$. Nên theo tiêu chuẩn tương đương, I cũng phân kì.

326. Xét $I=\int_0^1 \frac{dx}{(2-x).\sqrt{1-x^3}}$.

G: Tại $x=0$, hàm f xác định. Nhưng hàm f ko xác định tại cận $x=1$. Vì khi $x \rightarrow 1^-$, ta có
$\frac{1}{(2-x).\sqrt{1-x^3}}=\frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}.\sqrt{1+x+x^2}} \sim \frac{1}{1.\sqrt{3}.\sqrt{1-x}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$.

- Vì mũ $\boldsymbol{a = \frac{1}{2} < 1}$ nên $\boldsymbol{J = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} < \infty}$. Theo tiêu chuẩn tương đương, I cũng hội tụ.

CHƯƠNG IV CHUỖI
BÀI 1 CHUỖI SỐ

1. Định nghĩa

- ĐN: Cho dãy số $u_n; n \geq 1$. Chuỗi số là tổng vô hạn

$$\sum_{n\geq 1} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

- Số u_n gọi là số hạng tổng quát. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ là tổng của n số hạng đầu tiên thì S_n gọi là tổng riêng thứ n. Khi đó, chuỗi số

$$\sum_{n\geq 1} u_n = lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

- ĐN: Nếu chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n = lim_{n\to\infty} S_n = S < \infty$ hữu hạn thì chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ gọi là hội tụ.
Ngược lại, nếu chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n = lim_{n\to\infty} S_n = S = \infty$ vô hạn thì chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ gọi là phân kỳ.

327. VD1. Xét chuỗi $\frac{1}{1.\ 2} + \frac{1}{2.\ 3} + \frac{1}{3.\ 4} + \cdots + \frac{1}{n.\ (n+1)} + \cdots$.

- Ta có tổng riêng $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 - 0 = 1$ khi $n \to \infty$. Nên chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n = 1 < \infty$ là hội tụ.

- Chú ý: $1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$. $\quad (q \neq 1)$

- Nếu $|q| < 1 \to lim\ q^n = 0$; nếu $|q| > 1 \to lim\ q^n = \infty$.

328. VD2. Xét chuỗi $1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots \quad (q \neq 1)$

Ta có tổng riêng $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$.

- Nếu $|q| < 1$ thì $S_n = \frac{1-q^n}{1-q} \to \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q} < \infty$

khi $n \to \infty$. Nên chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n = \frac{1}{1-q}$ là hội tụ.

- Nếu $|q| > 1$ thì $S_n = \frac{1-q^n}{1-q} \to \frac{1-\infty}{1-q} = \infty$

khi $n \to \infty$. Nên chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n = \infty$ là phân kì.

2. Tiêu chuẩn hội tụ

- Chuỗi cơ bản: Xét chuỗi $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$. Nếu mũ $a > 1 \to$ Chuỗi là h tụ.

Nếu $a \leq 1 \to$ Chuỗi là ph kì.

- Tiêu chuẩn tương đương. Cho 2 chuỗi dương $u_n \geq 0; v_n \geq 0$. Nếu $u_n \sim v_n$ khi $n \to \infty$ (tức $lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$) thì 2 chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$; $\sum_{n\geq 1} v_n$ là cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

- Quy tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp hơn: … chỉ giữ lại mũ cao nhất.

329. - Xét sự hội tụ của chuỗi số: $\sum_{n\geq 1} \frac{n^3+n+sin\,n}{n^5+n^2+cos\,n}$.

G: Vì khi $n \to \infty$, ta có $-1 \leq sin\,n;\ cos\,n \leq 1 < n = n^1$, nên theo quy tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp hơn, nên khi $n \to +\infty$, có

$$u_n = \frac{n^3 + n + sin\,n}{n^5 + n^2 + cos\,n} \sim \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}.$$

- Vì mũ $a = 2 > 1$ nên chuỗi $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ là h tụ. Theo tiêu chuẩn tương đương, nên chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ là h tụ.

330. Xét sự hội tụ của $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n+n^2+1}{5^n+2n+2}$.

G: ...

331. Xét sự h tụ của $\sum_{n\geq 1} \frac{n^5-n+sin\,n}{n^6+2n^2+3\,cos\,n}$.

G: Vì khi $n \to +\infty$, có $-1 \leq sin\,n; cos\,n \leq 1 < n = n^1$, nên theo quy tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp hơn, nên có

$$u_n = \frac{n^5 - n + sin\,n}{n^6 + 2n^2 + 3\,cos\,n} \sim \frac{n^5}{n^6} = \frac{1}{n} = \frac{1}{n^1}.$$

- Vì mũ $a = 1$ nên chuỗi $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^1}$ là ph kì. Nên theo tiêu chuẩn tương đương, có chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ là ph kì.

332. Xét chuỗi $\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}\right)$.

G: Nhân và chia với liên hợp, được $u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1} = \frac{n+3-n-1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}$.

- Ngắt bỏ VCL bậc thấp hơn, khi $n \to +\infty$, được $u_n \sim \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$.

- Vì mũ $a = \frac{1}{2} < 1 \to \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ là ph kì. Theo tiêu chuẩn tương đương, nên chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ cũng là ph kì.

333. C1. $\sum_{n\geq 1}\left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$.

G: Có

$u_n = \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} = \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right) - \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \frac{n+2-(n+1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} - \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})-(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}).(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}).(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{n-(n+2)}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}).(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = -\frac{2}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}).(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$.

Nên khi $n \to \infty$, thì

$u_n \sim -\frac{2}{(\sqrt{n}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n}).(\sqrt{n}+\sqrt{n})} = -\frac{1}{4.n^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4}.\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

- Vì số mũ $a = \frac{3}{2} > 1 \to -\frac{1}{4}.\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < \infty$. Theo tiêu chuẩn tương đương, nên $\sum_{n\geq 1} u_n < \infty$ cũng h tụ.

334. C5. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n.\sqrt[n]{n}}$.

G: Đặt $u_n = \frac{1}{n.\sqrt[n]{n}}$; $v_n = \frac{1}{n}$. Có

$lim\, \frac{u_n}{v_n} = lim\, \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1.$ $\left(do\ lim\, \sqrt[n]{n} = lim\, n^{\frac{1}{n}} = e^{lim\, ln\left(n^{\frac{1}{n}}\right)} = e^{lim \frac{1}{n}.ln\, n} = e^{lim \frac{ln\, n}{n}} < e^{lim \frac{\sqrt{n}}{n}} = e^{lim \frac{1}{\sqrt{n}}} = e^0 = 1\right)$

Nên khi $n \to \infty$, thì $u_n \sim v_n$. Mà $\sum_{n\geq 1} v_n = \sum_n \frac{1}{n} = \sum_n \frac{1}{n^1}$
ph kì. Nên theo tiêu chuẩn tương đương, chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ cũng ph kì.

- Các VCB tương đương: Khi $x \to 0$, thì
* $sin\, x \sim x \sim tan\, x \sim arcsin\, x$.
* $1 - cos\, x \sim \frac{1}{2}x^2$; $e^x - 1 \sim x$; $a^x - 1 \sim x\, ln\, a$; $ln\,(1+x) \sim x$.
* $(1+x)^a - 1 \sim ax$; $\sqrt{1+x} - 1 = (1+x)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2}x$.

335. Xét chuỗi $\sum_{n\geq 1}\left(1 - cos\frac{2}{n}\right)$.

G: Vì khi $n \to \infty$ thì $t = \frac{2}{n} \to 0$, nên ta có tương đương

$$u_n = 1 - cos\frac{2}{n} \sim \frac{1}{2}.\left(\frac{2}{n}\right)^2 = \frac{2}{n^2} = 2.\frac{1}{n^2}$$

- Vì mũ $a = 2 > 1 \to 2.\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ là h tụ. Nên theo tiêu chuẩn tương đương, nên chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ cũng h tụ.

336. Xét $\sum_{n\geq 1} n.\,ln\,\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.

G: Vì khi $n \to \infty$, thì $t = \frac{1}{n} \to 0$ nên

$$ln\,\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2} \to n.\,ln\,\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim n.\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^1}.$$

- Vì mũ $a = 1$ nên chuỗi $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^1}$ là ph kì. Theo tiêu chuẩn tương đương, nên chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ cũng ph kì.

337. Xét chuỗi $\sum_{n\geq 1}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\sqrt{n}.\ ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

G: Vì khi $n \to \infty$, ta có $t = \frac{1}{n} \to 0$ nên thay thế tương đương

$u_n = \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\sqrt{n}.\ ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \sim \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{n}.\ \frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$.

- Vì mũ $a = \frac{1}{2} < 1$ nên chuỗi $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ là ph kì. Nên theo tiêu chuẩn tương đương, chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ cũng là ph kì.

338. C10. Xét $\sum_{n\geq 1}\left(tan\frac{3}{n} - sin\frac{3}{n}\right)$.

G: Có

$$u_n = tan\frac{3}{n} - sin\frac{3}{n} = \frac{sin\frac{3}{n}}{cos\frac{3}{n}} - sin\frac{3}{n} = sin\frac{3}{n}.\left(\frac{1}{cos\frac{3}{n}} - 1\right) = \frac{sin\frac{3}{n}.\left(1 - cos\frac{3}{n}\right)}{cos\frac{3}{n}}.$$

Nên khi $n \to +\infty$ thì $t = \frac{3}{n} \to 0$, nên $u_n \sim \frac{\frac{3}{n}.\frac{1}{2}.\left(\frac{3}{n}\right)^2}{cos\, 0} = \frac{27}{2}.\frac{1}{n^3}$.

- Vì mũ $a = 3 > 1$ nên chuỗi $\frac{27}{2}.\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$ là h tụ. Theo tiêu chuẩn tương đương, chuỗi là h tụ.

<u>* Tiêu chuẩn so sánh:</u>

- Lớn hơn chuỗi ph kì là ph kì.

- Bé hơn chuỗi h tụ là h tụ.

Chú ý. Khi $n \to +\infty$, có

$$\begin{cases} arctan\, n \to arctan\,(+\infty) = \frac{\pi}{2} < 2; > 1. \\ ln\, n > 1 \\ ln\, n < \sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

339. Xét $\sum_{n\geq 1}\frac{ln\, n}{n^3+n^2+2}$.

Phân tích: Xét chuỗi $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3+n^2+2}$. Có khi $n \to +\infty$, thì

$$\frac{1}{n^3+n^2+2} \sim \frac{1}{n^3}.$$

Vì số mũ $a = 3 > 1$ nên chuỗi này hội tụ. Ta CM chuỗi là hội tụ và đánh giá dấu bé hơn.

G: - Xét $u_n = \frac{ln\, n}{n^3+n^2+2}$. Vì khi $n \to \infty$, có $ln\, n\ < n \to$

$$u_n = \frac{ln\, n}{n^3+n^2+2} < \frac{n}{n^3+n^2+2} \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} \to u_n < \frac{1}{n^2}.$$

- Vì $a = 2 > 1 \to \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} < \infty$. Theo tiêu chuẩn so sánh, nên $\sum_{n\geq 1} u_n < \infty$ cũng là h tụ.

340. Xét $\sum_{n\geq 1}\frac{arctan\, n}{n^3}$.

Phân tích. Xét $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$ là h tụ do mũ $a = 3 > 1$. Định hướng CM $\sum_n u_n$ h tụ và đánh giá dấu bé hơn.

G: Vì khi $n \to \infty$, thì

$arctan\, n \to arctan\,(+\infty) = \frac{\pi}{2} < 2 \to \frac{arctan\, n}{n^3} < \frac{2}{n^3} = 2.\frac{1}{n^3}$.

- Vì mũ $a = 3 > 1 \to 2.\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$ h tụ. Theo tiêu chuẩn so sánh, nên chuỗi $\sum_n u_{n\geq 1}$ h tụ.

341. C2. Xét $\sum_{n\geq 1}\frac{ln\, n}{n+2}$.

- Phân tích. Xét chuỗi $\sum_n \frac{1}{n+2} \sim \frac{1}{n} = \frac{1}{n^1}$ ph kì do mũ $a = 1$. Định hướng CM $\sum_{n\geq 1} u_n$ ph kì và dấu lớn hơn.

G: Vì $n \to \infty$, thì

$$ln\, n > 1 \to \frac{ln\, n}{n+2} > \frac{1}{n+2} \sim \frac{1}{n} = \frac{1}{n^1}.$$

Vì mũ $a = 1 \to \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^1}$ ph kì. Theo tiêu chuẩn so sánh, nên chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ ph kì.

342. C12. $\sum_{n\geq 1}\frac{ln\,(n)}{\sqrt{2n^5+3n}}$.

Phân tích: Xét $\sum_n \frac{1}{\sqrt{2n^5+3n}}$. Có

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{2n^5+3n}} \sim \frac{1}{\sqrt{2n^5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$$

khi $n \to +\infty$. Vì mũ $a = \frac{5}{2} > 1$ nên $\sum_n v_n$ h tụ. Nên ta định hướng CM $\sum_n u_n$ h tụ và đánh giá dấu nhỏ hơn.

Giải. Vì khi $n \to +\infty$, có

$$ln\,(n) < \sqrt{n} \to \frac{ln\,(n)}{\sqrt{2n^5+3n}} < \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n^5+3n}} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n^5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{n^2}$$

Vì mũ $a = 2 > 1$ nên chuỗi $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ h tụ. Theo tiêu chuẩn so sánh, nên chuỗi $\sum_{n \geq 1} u_n$ cũng h tụ.

- Tiêu chuẩn Cauchy: Đặt $lim_n \sqrt[n]{|u_n|} = q$.
- Nếu $q > 1$ → chuỗi $\sum_{n \geq 1} u_n$ là phân kì.
- Nếu $q < 1$ → chuỗi $\sum_{n \geq 1} u_n$ là hội tụ.
- Chú ý: Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy khi tất cả các số hạng đều có mũ là n.

343. C4. $\sum_{n\geq 1}\frac{n^n}{(n+1)^n.\ 2^{n-1}}$.

G: Có $\sum_{n\geq 1}\frac{n^n}{(n+1)^n.\ 2^{n-1}}=\sum_{n\geq 1}\frac{n^n.\ 2}{(n+1)^n.\ 2^n}=2.\sum_{n\geq 1}\frac{n^n}{(n+1)^n.\ 2^n}$.

Xét $u_n=\frac{n^n}{(n+1)^n.2^n}$. **Nên khi** $n\to\infty$, **có**

$$\sqrt[n]{|u_n|}=\frac{n}{(n+1).2}=\frac{n}{2n+2}\sim\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}=q<1.$$

Vậy theo tiêu chuẩn Cauchy, vì $q=\frac{1}{2}<1$ **nên chuỗi** $\sum_{n\geq 1}u_n$ **là hội tụ.**

- Chú ý. Số $lim\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\approx 2,7$.

344. Xét $\sum_{n\geq 1}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}.\ 3^n}$

G: Có

$$u_n=\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}.\ 3^n}\to\sqrt[n]{|u_n|}=\frac{(n+1)^n}{n^n.\ 3}=\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{3}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{3}\to\frac{e}{3}=q<1.\quad \left(v\text{ì } lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\right)$$

Vậy theo tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi $\sum_{n\geq 1}u_n$ **là hội tụ.**

345. $\sum_{n\geq 1}\ (-1)^n.\left(\frac{5n+2}{4n+7}\right)^n$.

G: Có

$$|u_n|=\left(\frac{5n+2}{4n+7}\right)^n\to\sqrt[n]{|u_n|}=\frac{5n+2}{4n+7}=\frac{5+\frac{2}{n}}{4+\frac{7}{n}}\to\frac{5}{4}=q>1.$$

- Vậy vì $q=\frac{5}{4}>1$ **nên theo tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi** $\sum_{n\geq 1}u_n$ **là ph kỳ.**

346. C8. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}.\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2}$.

G: $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$. **Có** $u_n=\frac{1}{2^n}.\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2}$. **Nên**

$$\sqrt[n]{|u_n|}=\frac{1}{2}.\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\frac{1}{2}.\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1).\ \frac{n}{n+1}}\to\frac{1}{2}.e^1=\frac{e}{2}=q>1.\quad\left(v\text{ì } lim\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\approx 2,7\right)$$

- Nên theo tiêu chuẩn Cauchy, vì $q=\frac{e}{2}>1$ **nên chuỗi là ph kì.**

347. Xét $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n+3\ ln\ n}}$.

G: Vì khi $n\to\infty$, **thì** $1<ln\ n<\sqrt{n}=n^{\frac{1}{2}}<n=n^1$, **nên theo quy tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp hơn, thì**

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n+3\ ln\ n}}=\frac{1}{\sqrt{n^1+3\ ln\ n}}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

- Vì mũ $a=\frac{1}{2}<1\to\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ **là ph kì. Theo tiêu chuẩn tương đương, chuỗi** $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n+3\ ln\ n}}$ **cũng ph kì.**

348. Xét $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{\sqrt{n^5+4\ ln\ (1+n^5)}}$.

G: Vì khi $n\to\infty$, **thì** $1<ln\ (1+n^5)<\sqrt{n}=n^{\frac{1}{2}}<n^5$, **nên theo quy tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp hơn thì**

$$u_n=\frac{n}{\sqrt{n^5+4\ ln\ (1+n^5)}}\sim\frac{n}{\sqrt{n^5}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

- Vì mũ $a=\frac{3}{2}>1$ **nên** $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ **là h tụ. Theo tiêu chuẩn tương đương, chuỗi** $\sum_{n\geq 1}u_n$ **cũng h tụ.**

- Tiêu chuẩn Dalembert: Đặt $lim_n\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=q$.

- Nếu $q>1\to$ **chuỗi** $\sum_{n\geq 1}u_n$ **là phân kì.**

- Nếu $q<1\to$ **chuỗi** $\sum_{n\geq 1}u_n$ **là hội tụ.**

- Chú ý. Các bài có $n!$ **ta hay dùng tiêu chuẩn Dalembert. Vì**

$$\frac{(n+1)!}{n!}=\frac{(n+1).n!}{n!}=n+1;\frac{n!}{(n-1)!}=\frac{n.(n-1)!}{(n-1)!}=n.$$

349. **Xét** $\sum_{n\geq1}\frac{2^n.\ n!}{n^n}$.

G: Có $u_n=\frac{2^n.\ n!}{n^n}\to u_{n+1}=\frac{2^{n+1}.\ (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$. **Nên**

$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{2^{n+1}.\ (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.\frac{n^n}{2^n.\ n!}=\frac{2.(n+1)}{(n+1)^{n+1}}.n^n=\frac{2.\ n^n}{(n+1)^n}=\frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\to\frac{2}{e}=q<1\ \left(vì\ lim_n\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\right)$

khi $n\to+\infty$.

- Vì $q=\frac{2}{e}<1$ **nên theo tiêu chuẩn Dalembert, chuỗi** $\sum_{n\geq1}u_n$**là h tụ.**

350. **Xét** $\sum_{n\geq1}\ (-1)^n.\frac{3^n}{n^5}$.

G: Có $u_n=(-1)^n.\frac{3^n}{n^5}\to u_{n+1}=(-1)^{n+1}.\frac{3^{n+1}}{(n+1)^5}$. **Nên**

$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{3^{n+1}}{(n+1)^5}.\frac{n^5}{3^n}=\frac{3}{(n+1)^5}.n^5=3.\left(\frac{n}{n+1}\right)^5\to3.1^5=3=q$

khi $n\to\infty$.

- Vì $q=3>1$ **nên theo tiêu chuẩn Dalembert, chuỗi** $\sum_{n\geq1}u_n$ **là ph kì.**

351. **C6.** $\sum_{n\geq1}\ \frac{3.5.7...(2n+1)}{2.5.8...(3n-1)}$.

G: Đặt $u_n=\frac{3.5.7...(2n+1)}{2.5.8...(3n-1)}\to u_{n+1}=\frac{3.5....(2n+3)}{2.5...(3n+2)}=\frac{3.5....(2n+1)(2n+3)}{2.5...(3n-1)(3n+2)}=u_n.\frac{2n+3}{3n+2}$.

Nên $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{2n+3}{3n+2}\sim\frac{2n}{3n}\to\frac{2}{3}=q$ **khi** $n\to+\infty$.

- Vì $q=\frac{2}{3}<1$ **nên theo tiêu chuẩn Dalambert, chuỗi** $\sum_{n\geq1}u_n$ **là h tụ.**

352. **C7.** $\sum_{n\geq1}\ \frac{3^n.n!}{n^n}$.

G: Có $u_n=\frac{3^n.n!}{n^n}\to u_{n+1}=\frac{3^{n+1}.(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$. **Nên**

$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{3^{n+1}.(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.\frac{n^n}{3^n.n!}=\frac{3.(n+1)}{(n+1)^{n+1}}.n^n=\frac{3.n^n}{(n+1)^n}=\frac{3}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\to\frac{3}{e}=q>1$

khi $n\to+\infty$.

- Vì $q=\frac{3}{e}>1$ **nên theo Dalembert, chuỗi** $\sum_{n\geq1}u_n$**là ph kì.**

<u>ĐK cần để chuỗi h tụ.</u>

- Nếu chuỗi $\sum_{n\geq1}u_n$ **h tụ thì** $lim\ u_n=0$.

- Vậy nếu $lim\ u_n\neq0\to\sum_{n\geq1}u_n$ **là ph kì.**

353. **Xét** $\sum_{n\geq1}\ \frac{2n+1}{3n-2}$.

G: Có khi $n\to\infty$, **thì ngắt bỏ VCL bậc thấp hơn, có**

$$u_n=\frac{2n+1}{3n-2}\sim\frac{2n}{3n}\to\frac{2}{3}\neq0.$$

Nên chuỗi $\sum_{n\geq1}u_n$ **là ph kì (theo ĐK cần để chuỗi h tụ)**

- Chú ý: Số $e=lim_{n\to\infty}\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\approx2,7$.

354. **C20. Xét** $\sum_{n\geq1}\ (-1)^n.\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

G: Ta có

$u_n=(-1)^n.\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\pm\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\pm\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\pm\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\to\pm\frac{1}{e}\neq0.\quad\left(vì\ lim\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\quad\right)$

- Nên $lim\ u_n\neq0\to$ **theo DK cần để chuỗi h tụ, thì chuỗi** $\sum_{n\geq1}u_n$ **là ph kì.**

355. **C22.** $\sum_{n\geq1}(-1)^n.\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$.

G: Ta có

$u_n=(-1)^n.\left(\frac{n}{n-1}\right)^n=\pm\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n=\pm\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n=\pm\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{(n-1).\ \frac{n}{n-1}}\to\pm e^1=\pm e\neq0.$

khi $n\to\infty$.

- Nên $lim\ u_n\neq0\to$ **theo ĐK cần để chuỗi h tụ, thì chuỗi** $\sum_{n\geq1}u_n$ **là ph kì.**

<u>* Tiêu chuẩn tích phân:</u>

- Xét chuỗi $\sum_{n\ge1} u_n$ với $u_n = f(n) \ge 0$. Đặt $y = f(x)$ và xét $I = \int_2^{+\infty} f(x)dx$ là TPSR loại I. Thì
- nếu tích phân I hội tụ thì chuỗi $\sum_{n\ge1} u_n$ cũng là h tụ.
- nếu I ph kì thì $\sum_{n\ge1} u_n$ cũng ph kì.

356. C16. Xét $\sum_{n\ge1} \frac{1}{n.(\ln n)^2}$.

G: Có $u_n = \frac{1}{n.(\ln n)^2} = f(n) \to f(x) = \frac{1}{x.(\ln x)^2}$.

Xét
$$I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x.(\ln x)^2} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^2} = \left(-\frac{1}{\ln x}\right) \Big|_2^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2} < \infty.$$
- Nên theo tiêu chuẩn tích phân, chuỗi $\sum_{n\ge1} u_n$ là h tụ.

357. $\sum_{n\ge1} \frac{1}{n \ln n}$.

G: Có $u_n = \frac{1}{n \ln n} = f(n) \to f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. Xét
$$I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^{+\infty} \frac{d\,(\ln x)}{\ln x} = \left(\ln(\ln x)\right) \Big|_2^{+\infty} = +\infty.$$
Nên theo tiêu chuẩn tích phân, chuỗi $\sum_{n\ge1} u_n$ là ph kì.

358. Xét $\sum_{n\ge1} \frac{1}{n.\sqrt{\ln n}}$.

G: Có $u_n = \frac{1}{n.\sqrt{\ln n}} = f(n) \to f(x) = \frac{1}{x.\sqrt{\ln x}}$. Xét
$$I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x.\sqrt{\ln x}} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}} = \left(2\sqrt{\ln x}\right) \Big|_2^{+\infty} = +\infty.$$
- Nên theo tiêu chuẩn tích phân, chuỗi $\sum_{n\ge1} u_n$ là ph kì.

359. Xét $\sum_{n\ge1} \frac{1}{n.\ln^3 n}$.

Giải. …

<u>- Tiêu chuẩn Leibnitz về chuỗi đan dấu:</u>

- Xét chuỗi đan dấu
$$\sum_{n\ge1} (-1)^n.a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \cdots$$
- Nếu dãy a_n giảm và $\lim a_n = 0$ thì chuỗi đan dấu $\sum_{n\ge1} (-1)^n.a_n$ là hội tụ.
- Nó gọi là tiêu chuẩn Leibnitz cho chuỗi đan dấu.

360. C17. Xét sự h tụ của $\sum_{n\ge1} (-1)^n.\frac{n}{n^2-1}$

G: Đây là chuỗi đan dấu. Có
$$u_n = (-1)^n.\frac{n}{n^2-1} \to a_n = \frac{n}{n^2-1} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$
là giảm và có giới hạn là 0 khi $n \to \infty$.
- Nên theo tiêu chuẩn Leibnitz về chuỗi đan dấu, chuỗi $\sum_{n\ge1} (-1)^n.\frac{n}{n^2-1}$ là hội tụ.

361. C21. Xét $\sum_{n\ge1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+2}$.

G: Đây là chuỗi đan dấu. Có
$$u_n = (-1)^n.\frac{1}{\sqrt{n}+2} \to a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+2}$$
là giảm khi n tăng và có giới hạn là 0 khi $n \to \infty$.
- Nên theo tiêu chuẩn Leibnitz, chuỗi đan dấu $\sum_{n\ge1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+2}$ hội tụ.

<u>Xét sự hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ:</u>

- ĐL: Nếu chuỗi $\sum_{n\ge1} |u_n|$ là h tụ thì $\sum_{n\ge1} u_n$ cũng hội tụ.
- ĐN: Nếu chuỗi $\sum_{n\ge1} |u_n|$ là h tụ thì chuỗi $\sum_{n\ge1} u_n$ gọi là hội tụ tuyệt đối.
- Nếu chuỗi $\sum_{n\ge1} |u_n|$ là ph kì nhưng $\sum_{n\ge1} u_n$ là h tụ thì $\sum_{n\ge1} u_n$ gọi là bán hội tụ.

362. C1. Xét sự hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ của $\sum_{n\ge1} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$.

G: Có

$u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} \to |u_n| = \frac{1}{(n+1).\ (n+2)} \sim \frac{1}{n.\ n} = \frac{1}{n^2}$

khi $n \to \infty$.

- Vì mũ $a = 2 > 1$ nên $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ hội tụ, nên chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ là hội tụ tuyệt đối.

363. C2. Xét $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1}.\frac{2^n}{n!}$

G: Có

$|u_n| = \frac{2^n}{n!} \to |u_{n+1}| = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \to \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \to 0 = q$

khi $n \to \infty$.

- Theo tiêu chuẩn Dalembert, vì $q = 0 < 1$ nên $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ hội tụ, nên chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ là hội tụ tuyệt đối.

364. C16. Xét $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n.(ln\, n)^2}$.

G: Có $u_n = \frac{1}{n.(ln\, n)^2} = f(n) \to f(x) = \frac{1}{x.(ln\, x)^2}$.

Xét

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x.(ln\, x)^2} = \int_2^{+\infty} \frac{d(ln\, x)}{(ln\, x)^2} = \left(-\frac{1}{ln\, x}\right)\ |_2^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{ln\, 2}\right) = \frac{1}{ln\, 2} < \infty.$$

- Nên theo tiêu chuẩn tích phân, chuỗi $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ là h tụ, nên chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ là h tụ tuyệt đối.

365. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n\, ln\, n}$.

G: Có $u_n = \frac{1}{n\, ln\, n} = f(n) \to f(x) = \frac{1}{x\, ln\, x}$. Xét

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\, ln\, x} = \int_2^{+\infty} \frac{d\,(ln\, x)}{ln\, x} = \left(\, ln\,(ln\, x)\right)|_2^{+\infty} = +\infty.$$

Nên theo tiêu chuẩn tích phân, chuỗi $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ là ph kì. Mà chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ h tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz về chuối đan dấu. Vậy chuỗi là bán h tụ.

366. C4. Xét $\sum_{n\geq 1} (-1)^n.\frac{1+n}{n^2}$

G: Có

$u_n = (-1)^n.\frac{1+n}{n^2} \to |u_n| = \frac{1+n}{n^2} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} = \frac{1}{n^1}$

khi $n \to \infty$. Vì mũ $a = 1 \to \sum_{n\geq 1} |u_n|$ là ph kì.

- Mặt khác, đây là chuỗi đan dấu với

$$a_n = \frac{1+n}{n^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$$

giảm và có giới hạn là 0 khi $n \to \infty$ nên theo tiêu chuẩn Leibnitz về chuỗi đan dấu, chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ là hội tụ. Mà $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ là ph kì, nên chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ là bán hội tụ.

367. C5. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{ln\,(n+1)}$.

G: Có

$u_n = \frac{(-1)^n}{ln\,(n+1)} = (-1)^n.\frac{1}{ln\,(n+1)} \to |u_n| = \frac{1}{ln\,(n+1)}$.

Vì khi $n \to \infty$, thì $ln\,(n+1) < \sqrt{n}$ nên $\frac{1}{ln\,(n+1)} > \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$.

- Vì mũ $a = \frac{1}{2} < 1 \to \sum_{n\geq 1} |u_n|$ ph kì. Mặt khác đây là chuỗi đan dấu với $a_n = \frac{1}{ln\,(n+1)}$ là dãy giảm và có giới hạn là 0 khi $n \to \infty$ nên theo tiêu chuẩn Leibnitz về chuỗi đan dấu, chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n = (-1)^n.a_n$ là hội tụ. Mà chuỗi $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ ph kì, nên chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ là bán hội tụ.

368. C6. $\sum_n (-1)^n.\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)$.

G: Có

$u_n = (-1)^n.\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right) = (-1)^n.\frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = (-1)^n.\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$.

Nên $|u_n| = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \sim \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$.

Vì …

BÀI 3 TÌM MIỀN HỘI TỤ CỦA CHUỖI HÀM LŨY THỪA

369. C1. Tìm miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n\geq 1} \frac{(-4)^n .\ arcsin^n x}{\pi^n(n+1)}$.

G: Có

$$u_n = \frac{(-4)^n .arcsin^n x}{\pi^n(n+1)} = \frac{1}{n+1}.\left(\frac{-4\ arcsin\ x}{\pi}\right)^n.$$

Đặt $X = \frac{-4.\ arcsin\ x}{\pi} \to u_n = \frac{X^n}{n+1}$.

Tiêu chuẩn Dalembert: Đặt $lim_n \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = q$.

- Nếu $q > 1 \to$ chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ là phân kì.

- Nếu $q < 1 \to$ chuỗi là hội tụ.

Áp dụng: Có

$u_n = \frac{X^n}{n+1} \to u_{n+1} = \frac{X^{n+1}}{n+2} \to \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{X^{n+1}}{n+2}.\frac{n+1}{X^n}\right| = \left|\frac{X}{n+2}.(n+1)\right| = |X|.\frac{n+1}{n+2} \to |X|.1 = |X| = q$

khi $n \to \infty$. Nên theo tiêu chuẩn Dalembert, chuỗi là hội tụ nếu

$$q = |X| < 1 \to -1 < X < 1.$$

- Nếu $X = 1 \to u_n = \frac{X^n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n} = \frac{1}{n^1}$

khi $n \to \infty$. Mà $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^1}$ ph kì nên theo tiêu chuẩn tương đương, $\sum_{n\geq 1} u_n$ là ph kì.

- Nếu $X = -1 \to u_n = \frac{(-1)^n}{n+1} = (-1)^n.\frac{1}{n+1}$ là chuỗi đan dấu. Theo tiêu chuẩn Leibnitz về chuỗi đan dấu, vì $a_n = \frac{1}{n+1}$ giảm và có giới hạn là 0 khi $n \to \infty$ nên chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n$ là hội tụ.

Vậy miền hội tụ là

$$-1 \leq X < 1 \to -1 \leq \frac{-4\ arcsin\ x}{\pi} < 1 \to \frac{\pi}{4} \geq arcsin\ x > -\frac{\pi}{4} \to \frac{\sqrt{2}}{2} \geq x > -\frac{\sqrt{2}}{2} \to x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

370. C2. Xét $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n.\ 2^n} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n$.

G: Có $u_n = \frac{1}{n.\ 2^n} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n = \frac{1}{n}.\left(\frac{x}{2x+2}\right)^n$.

Đặt $X = \frac{x}{2x+2} \to u_n = \frac{X^n}{n}$. Nên

$u_{n+1} = \frac{X^{n+1}}{n+1} \to \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{X^{n+1}}{n+1}.\frac{n}{X^n}\right| = \left|\frac{X}{n+1}.n\right| = |X|.\frac{n}{n+1} \to |X|.1 = |X| = q$

khi $n \to \infty$. Nên theo tiêu chuẩn Dalembert, chuỗi hội tụ nếu

$$q = |X| < 1 \to -1 < X < 1.$$

- Xét nếu $X = 1 \to u_n = \frac{1}{n} = \frac{1}{n^1}$. Vì mũ $a = 1$ nên $\sum_{n\geq 1} u_n$ ph kì.

- Nếu $X = -1 \to u_n = \frac{(-1)^n}{n} = (-1)^n.\frac{1}{n}$ là chuỗi đan dấu. Theo tiêu chuẩn Leibnitz về chuỗi đan dấu, vì $a_n = \frac{1}{n}$ giảm và có giới hạn là 0 khi $n \to \infty$ nên chuỗi $\sum_{n\geq 1} u_n = (-1)^n.a_n$ là hội tụ.

- Vậy miền hội tụ là

$-1 \leq X < 1 \to -1 \leq \frac{x}{2x+2} < 1 \to \begin{cases} \frac{x}{2x+2} + 1 \geq 0 \\ \frac{x}{2x+2} - 1 < 0 \end{cases} \to \begin{cases} \frac{3x+2}{2x+2} \geq 0 \\ \frac{-x-2}{2x+2} < 0 \end{cases} \to \begin{cases} x < -1\ or\ x \geq -\frac{2}{3} \\ x < -2\ \ or\ \ x > -1 \end{cases} \to x < -2\ \ or\ \ x \geq -\frac{2}{3} \to$

$x \in (-\infty, -2) \cup \left[-\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

371. C4. $\sum_n \frac{(-1)^n n^2}{3^n}.e^{nx}$.

G: Có

$$u_n = \frac{(-1)^n n^2}{3^n}.e^{nx} = n^2.\left(\frac{-e^x}{3}\right)^n.$$

Đặt

$$X = \frac{-e^x}{3} \to u_n = n^2.X^n$$

Có

$$u_{n+1} = (n+1)^2.X^{n+1} \to \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^2 X}{n^2}\right| = |X|.\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \to |X|.1^2 = |X| = q.$$

Nên theo tiêu chuẩn Dalembert, chuỗi hội tụ nếu

$$q = |X| < 1 \to -1 < X < 1.$$

- Nếu $X = 1 \to u_n = n^2 \to \infty \neq 0$ khi $n \to \infty$. Nên theo ĐK cần để chuỗi htu, thì chuỗi là ph kì.

- Nếu $X = -1 \to u_n = -n^2 \to |u_n| = n^2 \to \infty \neq 0$ khi $n \to \infty$. Nên theo ĐK cần để chuỗi htu, thì chuỗi ph kì.

Vậy chuỗi hội tụ nếu

$$-1 < X < 1 \to -1 < \frac{-e^x}{3} < 1 \to 3 > e^x > -3 \to e^x < 3 \to x < \ln 3 \to x \in (-\infty, \ln 3).$$

372. C6. $\sum_n \frac{2^n.\sin^n x}{n^2}$.

G: Có

$$u_n = \frac{2^n.\sin^n x}{n^2} = \frac{(2\sin x)^n}{n^2}.$$

Đặt

$$X = 2\sin x \to u_n = \frac{X^n}{n^2} \to u_{n+1} = \frac{X^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

Nên

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{X}{(n+1)^2}.n^2\right| = |X|\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to |X|1 = |X| = q.$$

Nên theo tiêu chuẩn Dalembert, chuỗi hội tụ nếu

$$q = |X| < 1 \to -1 < X < 1.$$

Tại $X = 1 \to u_n = \frac{1}{n^2}$. Vì mũ $a = 2 > 1$ nên chuỗi là hội tụ.

Tại $X = -1 \to u_n = (-1)^n.\frac{1}{n^2}$. Theo tiêu chuẩn Leibnitz cho chuỗi đan dấu, vì $a_n = \frac{1}{n^2}$ giảm và có giới hạn là 0 khi $n \to \infty$ nên chuỗi là hội tụ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi là

$$-1 \le X \le 1 \to -1 \le 2\sin x \le 1 \to -\frac{1}{2} \le \sin x \le \frac{1}{2} \to -\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{6} \to x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right].$$

373. C3. $\sum_n \frac{(-\ln x)^n}{2n+1}$.

G: Đặt $X = -\ln x$. Nên

$$u_n = \frac{X^n}{2n+1} \to u_{n+1} = \frac{X^{n+1}}{2n+3} \to \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{X}{2n+3}.(2n+1)\right| = |X|.\frac{2n+1}{2n+3} \to |X|.1 = |X| = q.$$

Nên …

374. C11. $\sum_n \frac{1}{2^n}.\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n$.

G: Có

$$u_n = \frac{1}{2^n}.\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n = \left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)^n.$$

Đặt

$$X = \frac{2x+1}{2x+2} \to u_n = X^n \to \sqrt[n]{|u_n|} = |X| = q.$$

Theo Tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi hội tụ nếu $q = |X| < 1 \to -1 < X < 1$.

Tại $X = 1 \to u_n = 1 \to 1 \neq 0$. Nên theo ĐK cần để chuỗi htu, thì chuỗi ph kì.

Tại $X = -1 \to u_n = (-1)^n \to |u_n| = 1 \to 1 \neq 0$. Nên theo ĐK cần để chuỗi htu, thì chuỗi ph kì.

Vậy miền hội tụ của chuỗi là

$$-1 < X < 1 \to -1 < \frac{2x+1}{2x+2} < 1 \to \begin{cases} \frac{2x+1}{2x+2} - 1 < 0 \\ \frac{2x+1}{2x+2} + 1 > 0 \end{cases} \to \begin{cases} \frac{-1}{2x+2} < 0 \\ \frac{4x+3}{2x+2} > 0 \end{cases} \to -1 < x < -\frac{3}{4} \to x \in \left(-1, -\frac{3}{4}\right).$$

375. C12. $\sum_n \frac{(n+1)^n}{n^n}.(2x-1)^n$.

G: Có

$$u_n = \frac{(n+1)^n}{n^n}.(2x-1)^n.$$

Đặt

$$X = 2x - 1 \to u_n = \left(\frac{(n+1)X}{n}\right)^n \to \sqrt[n]{|u_n|} = \left|\frac{(n+1)X}{n}\right| = |X|.\frac{n+1}{n} \to |X| = q$$

khi $n \to \infty$. Theo tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi hội tụ nếu

$$q = |X| < 1 \to -1 < X < 1.$$

Xét $X = 1 \to u_n = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \neq 0$ khi $n \to \infty$. Nên chuỗi phân kì.

Xét $X = -1$.

Vậy miền hội tụ là

$$-1 < X < 1 \to -1 < 2x - 1 < 1 \to 0 < x < 1 \to x \in (0, 1).$$

376. $\sum_n \frac{n^n}{(3n-1)^n}.(2x+1)^n.$

G: Có

$$u_n = \frac{n^n}{(3n-1)^n}.(2x+1)^n.$$

Đặt

$X = 2x + 1 \to u_n = \frac{n^n}{(3n-1)^n}.X^n \to \sqrt[n]{|u_n|} = \left|\frac{n}{3n-1}.X\right| = |X|.\frac{n}{3n-1} \to |X|.\frac{1}{3} = q$

khi $n \to \infty$. Theo tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi hội tụ nếu

$$q = |X|.\frac{1}{3} < 1 \to |X| < 3 \to -3 < X < 3.$$

- Nếu $X = 3 \to u_n = \cdots$

377. **C13.** $\sum_n \frac{n^n}{(2n-1)^n}.(3x+1)^n.$

G: …