BÀI TẬP GIẢI TÍCH 2 - 2020

Chương 1. Hàm nhiều biến

A. Tính giới hạn

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sqrt{x^2+(y-2)^2+1}-1}{x^2+(y-2)^2}$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2+y^2)^{\dfrac{1}{x^2+y^2}}$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1+x^2+y^2}{y^2}(1-\cos y)$

B. Đạo hàm và vi phân

Bài 1. Tính đạo hàm riêng và vi phân toàn phần của:

(1) $z = \ln\left(\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

(2) $z = \ln\tan\dfrac{x}{y}$

(3) $f(x,y,z) = \arctan\dfrac{y}{xz}$

(4) $f(x,y,z) = x^2+3y^2z+xz^3+e^{xyz}$

Bài 2. Đạo hàm của hàm hợp

(1) Cho $z=\ln(u^2+v^2),\ u=xy,\ v=e^{x+y}$. Tính z'_x và z'_y.

(2) Cho $z=\ln(3x+2y-1),\ x=e^t,\ y=\sin t$. Tính $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{dz}{dt}$.

(3) Cho $z=f(xy+y^2)$, f là hàm khả vi. Rút gọn biểu thức

$$A=(x+2y)\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}$$

(4) Cho hàm: $u(x,y,z)=\arctan\dfrac{y}{x}+\left(\dfrac{x}{z}\right)^2$. Rút gọn biểu thức $B=x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

Bài 3. Tính $z'_x(0,0), z'_y(0,0)$ với $z=\sqrt[3]{xy}$

Bài 4. Tính $y'(x)$ biết $y=y(x)$ là hàm ẩn xác định bởi phương trình

(1) $\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\arctan\dfrac{x}{y}$

(2) $xe^y+ye^x=1$

Từ đó, tính $y'(0)$ biết $y(0)=1$.

Bài 5. Tính dz biết $z=z(x,y)$ là hàm ẩn xác định bởi

(1) $\arctan z+z^2=e^{xy}$

(2) $z-ye^{x/z}=0$

(3) $3x+2y+z=e^{-x-y-z}$

(4) $x^3+y^3+z^3=3xyz$

(5) $ze^z=ye^x+xe^y$.

Bài 6. Tính $y'(x), z'(x)$ biết $y=y(x), z=z(x)$ xác định bởi

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x^2+y^2+z^3=4 \end{cases}$$

Bài 7. Đạo hàm cấp cao

(1) Cho $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Chứng minh rằng:

$$u''_{x^2}+u''_{y^2}+u''_{z^2}=\frac{2}{u}$$

(2) Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số $f(x,y)=x\sin(x^2+3y)+\ln(x+2y)$.

(3) Tính các đạo hàm riêng cấp 2 tại $(0,1)$ của hàm số $f(x,y)=e^{2x+3y}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Bài 8. Tìm d^2z biết:

(1) $z=x^2\ln(x+y)$

(2) $z=\arctan\dfrac{y}{x}$

(3) $z=\sin(x^2+3y)$

C. Dùng vi phân tính gần đúng

1. $A=\sqrt{1,98^4+3,03^2}$

2. $B=\ln(\sqrt{1,03}+\sqrt[3]{0,99}-1)$

3. $C=\arctan\dfrac{1+0,02^3}{0,99^2}$

4. $D=\sqrt{(1,04)^{1,99}+\ln(1,02)}$

D. Cực trị của hàm nhiều biến

Bài 1. Tìm cực trị các hàm sau:

(1) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$.

(2) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 15xy$.

(3) $f(x,y) = xy + \dfrac{8}{x} + \dfrac{1}{y}$

(4) $f(x,y) = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 7y + 5$.

(5) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2\ln(xy)$.

(6) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

(7) $f(x,y) = x + 2y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 5$

(8) $f(x,y) = x^2 + y^2$ với điều kiện $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

(1) $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + x - y$, trên miền đóng D giới hạn bởi các đường $x = 1, y = 1, x + y = 1$.

(2) $f(x,y) = x^2 - y^2$ trên miền $D = \{x^2 + y^2 \leq 9\}$.

(3) $f(x,y) = xy$ trên miền $D = \left\{\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} \leq 1\right\}$.

(4) $z = 1 + xy - x - y$, trên miền đóng D giới hạn bởi $y = x^2$ và $y = 1$

Chương 2. Tích phân nhiều lớp

A. Tích phân hai lớp

Bài 1. Tính các tích phân hai lớp sau:

(1) $I = \iint\limits_D (x - y)dxdy$; D là miền giới hạn bởi các đường $y = x$, $y = 2 - x^2$

(2) $I = \iint\limits_D (x^2 + 2y)dxdy$; D là miền giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 1, y = x + 1$.

(3) $I = \iint\limits_D (x + y)dxdy$; D là miền phẳng giới hạn bởi các đường $y = x,\ y = 0,\ x + y = 2,\ x + y = 4$.

(4) $I = \iint\limits_D (x^3 + 4y)dxdy$, D là miền phẳng được giới hạn bởi các đường $y = 0;\ x = \sqrt{y};\ y = 2 - x$.

(5) $I = \iint\limits_D xydxdy$, D là miền phẳng được giới hạn bởi các đường $x = 0,\ y = 1,\ x^2 + y^2 = 2x$.

(6) $I = \iint\limits_D (3x + 4y)dxdy$, D là tam giác OAB, $O(0,0)$, $B(-2,2)$, $C(2,0)$.

(7) $I = \iint\limits_D \dfrac{x^2}{y^2}dxdy$, D là miền phẳng được giới hạn bởi các đường $x = 2,\ xy = 1,\ y = x$.

(8) $I = \iint\limits_D xydxdy$, D là miền phẳng được giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{2x - x^2},\ y = 0$

(9) $I = \iint\limits_D x^2ydxdy$, D là miền phẳng được giới hạn bởi các đường $y = x^2,\ y = \dfrac{x^2}{4},\ y = 1$

(10) $I = \iint\limits_D (x + 2y)dxdy$, D là tam giác ABC, với $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(4,-2)$.

Bài 2. Đổi thứ tự lấy tích phân:

(1) $I = \displaystyle\int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{4-x^2} f(x,y)dy$

(2) $I = \displaystyle\int_0^1 dx \int_{2x-x^2}^{2x} f(x,y)dy$

(3) $I = \displaystyle\int_0^1 dy \int_{\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y}} f(x,y)dx$.

(4) $I = \displaystyle\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$

Bài 3. Tính các tích phân sau bằng cách đổi biến:

(1) $I = \iint\limits_D (x^3 - y^3)dxdy$; D giới hạn bởi

$x + y = 1,\ x + y = 4,\ x - y = 1,\ x - y = -1$

(2) $I = \iint\limits_D \sqrt{(x^2 + y^2)^3}dxdy$; D giới hạn bởi các đường $x = \sqrt{1 - y^2},\ y = x,\ y = -x$.

(3) $I = \iint\limits_D (1+xy)dxdy$;

với $D = \{1 \le x^2+y^2 \le 2x\}$

(4) $I = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$,

với $D = \{x^2+y^2 \le x,\ y \ge 0\}$

(5) $I = \iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$; trong đó

$$D = \{x^2+y^2 \le R^2,\ y \ge 0\}.$$

(6) $I = \iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$;

với $D = \left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$.

(7) $I = \iint\limits_D (x+y)dxdy$; trong đó

$$D = \left\{\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{1} \le 1\right\}$$

B. Tích phân ba lớp

Tính các tích phân ba lớp sau:

(1) $I = \iiint\limits_V xdxdydz$; V là tứ diện được giới hạn bởi các mặt $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

(2) $I = \iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$; V là lăng trụ tam giác được giới hạn bởi các mặt $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=1$, $x+y=1$.

(3) $I = \iiint\limits_V (z+x^2+y^2)dxdydz$; V được giới hạn bởi các mặt $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=1$.

(4) $I = \iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$; V giới hạn bởi

$$z=\sqrt{2-x^2-y^2},\ z=\sqrt{x^2+y^2}$$

(5) $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$; trong đó

$$V = \{x^2+y^2+z^2 \le z\}$$

(6) $I = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$; trong đó

$$V = \{1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\}.$$

C. Ứng dụng của tích phân nhiều lớp

Bài 1. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt

(1) $2x+3y=12,\ x=0,\ z=0,\ z=\frac{1}{2}y$

(2) $z=x^2+y^2,\ z=2-x^2-y^2$

(3) $z=x^2+y^2$ và $z^2=x^2+y^2$

(4) $z=\sqrt{2-x^2-y^2},\ z=\sqrt{x^2+y^2}$.

(5) $z=6-x^2-y^2,\ z=\sqrt{x^2+y^2}$

Bài 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

(1) $y=x^2,\ y=2-x,\ y=0$

(2) $y=e^x,\quad y=e^{-2x},\quad y=4$

(3) $x^2=y,\ x^2=2y,\ y^2=x,\ y^2=4x$

(4) $x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2=4x,\ y=x,\ y=0$

Chương 3. Tích phân đường và tích phân mặt

Bài 1. Tính tích phân đường loại 1

(1) $I = \int\limits_{\widehat{AB}} x^2ds$, $\widehat{AB}$ là cung $y=\ln x$ và $A(1,0)$, $B(e,1)$.

(2) $I = \int\limits_{\widehat{OA}} \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, $\widehat{OA}$ là đoạn thẳng nối gốc $O(0,0)$ với điểm $A(1,2)$.

(3) $I = \int\limits_L (x^2+y^2)ds$, L là biên của tam giác OAB với $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(-1,1)$.

(4) $I = \int\limits_L (x+y)ds$; $L:\ x^2+y^2=ax,\ a>0$

(5) $I = \int\limits_L (x+y+z)ds$; L là đường cong

$$x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ z=t,\ 0 \le t \le 2\pi$$

(6) $I = \int_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})ds;\quad C:\ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ a > 0$

(7) $I = \int_C \sqrt{x^2+y^2}\, ds;\quad C:\ x^2+y^2 = 2y.$

Bài 2. Tính tích phân đường loại 2

(1) $I = \int_L ye^{xy}dx + x^4e^{xy}dy;$ trong đó L: $y = x^2$ đi từ $A(0,0) \to\ B(1,1).$

(2) $I = \int_L \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{5/3}+y^{5/3}};$ trong đó:

$$L: \begin{cases} x = R\cos^3 t \\ y = R\sin^3 t \end{cases},\ 0 \le t \le \pi/2.$$

(3) $I = \oint_L |x|dx + |y|dy;$ L là đường gấp khúc nối các điểm

$A(1,0) \to B(0,2) \to C(-1,0) \to D(0,-2) \to A(1,0).$

(4) $I = \oint_{L^+} (x+y)^2dx + (x-y)dy;\ L:\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

(5) $I = \oint_{L^+} 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy,$ L là biên của tam giác ΔLMN, $L(1,1)$, $M(2,2)$, $N(1,3)$.

(6) $I = \oint_{L^+} (xy+x+y)dx + (xy+x-y)dy;$ trong đó L: $x^2+y^2 = ax,\ a > 0.$

(7) $I = \int_{(2,1)}^{(4,3)} e^{xy}(1+xy)dx + x^2e^{xy}dy.$

(8) $I = \oint_{L^+} (-x^2y)dx + xy^2dy;\quad L:\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$

(9) $I = \oint_{L^+} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2};\ L:\ x^2+y^2 = 4.$

(10) $I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x+y)dx + (x-y)dy.$

(11) $I = \int_L (x+y+z)dx - xdy + xydz;$ trong đó L là đoạn thẳng đi từ $A(1,2,3)$ đến $B(2,4,5)$.

(12) $I = \int_C (ye^{xy} - x^2y + 3x)dx + (xe^{xy} + xy^2 + 2y)dy;$ trong đó $C: x^2+y^2 = 1,\ y \ge 0$, đi từ $A(1,0)$ đến $B(-1,0)$.

Bài 3. Tính tích phân mặt loại 1

(1) $I = \iint_S (x^2+y^2)dS;$ S là phần mặt cầu

$$x^2+y^2+z^2 = a^2,\ z \ge 0.$$

(2) $I = \iint_S (x^2+z^2)dS;$ trong đó S là phần mặt $z = \sqrt{2-x^2-y^2}, z \ge 1.$

(3) $I = \iint_S \frac{dS}{(1+x+y)^2};$ S là phần mặt $x+y+z = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

(4) $I = \iint_S xdS;$ S là phần mặt $10x = y^2+z^2$ bị cắt bởi mặt $x = 10$.

(5) $\iint_S xyzdS,$ S là phần mặt $z = x^2+y^2$ giới hạn bởi $z = 1$.

(6) $I = \iint_S \left(z+2x+\frac{4y}{3}\right)dS;$ trong đó S là phần mặt $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

(7) $I = \int_S (x^2+z^2)dS;$ S là biên của vật thể giới hạn bởi $y = \sqrt{x^2+z^2},\ y = 1.$

Bài 4. Tính tích phân mặt loại 2

(1) $I = \iint_S zdxdy;$

S là phía ngoài mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 1$.

(2) $I = \iint_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy;$ S là phía ngoài của nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \ge 0.$

(3) $I = \iint\limits_S xyzdydx$; S là phía ngoài phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0,\ y \geq 0$.

(4) $I = \iint\limits_S yzdxdy$; S là mặt phía ngoài của vật thể giới hạn bởi $x^2 + y^2 \leq 1,\ \ 0 \leq z \leq 1$.

(5) $I = \iint\limits_S y^2dxdz + z^2dxdy$; S là mặt phía ngoài của vật thể giới hạn bởi $z = x^2 + y^2,\ z = 1$.

(6) $I = \iint\limits_S z^2dxdy$, S là phía ngoài mặt $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

Chương 4. Phương trình vi phân

A. Phương trình vi phân cấp 1

Bài 1. Giải các phương trình tách biến

(1) $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$

(2) $y' = x^2 + xy + \dfrac{y^2}{4} - 1$

(3) $y' = (x+y+1)^2$

(4) $y' = \cos(x-y-1)$

Bài 2. Giải các phương trình đẳng cấp

(1) $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$

(2) $xy' - y + x\cos\dfrac{y}{x} = 0$

(3) $xy' - y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$

(4) $y' = \dfrac{y}{x} + \cos\dfrac{y}{x}$

(5) $y' = \dfrac{3x^2 - xy - y^2}{x^2}$

(6) $y' = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{xy}$

Bài 3. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

(1) $y' - \dfrac{2}{x+1}y = (x+1)^3$

(2) $y' + y = \dfrac{1}{e^x(1-x)}$, $\ y(2) = 1$.

(3) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

(4) $(x^2 + y)dx = xdy$

(5) $(y + \ln x)dx - xdy = 0$

(6) $y'\cos y + \sin y = x$

Bài 4. Giải các phương trình Becnoulli

(1) $y' - 2xy = 3x^3y^2$

(2) $2y' - \dfrac{x}{y} = \dfrac{xy}{x^2-1}$

(3) $y' + 2y = y^2e^x$

(4) $xy' + y = y^2\ln x$; $\ y(1) = 1$

(5) $ydx - (x^2y^2 + x)dy = 0$

(6) $xy' - 2x\sqrt{y}\cos x = -2y$

Bài 5. Giải các phương trình vi phân toàn phần

(1) $(x+y)dx + (x-y)dy = 0$; $\ y(0) = 0$.

(2) $(1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0$

(3) $\dfrac{2x}{y^3}dx + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$

(4) $(1 + y^2\sin 2x)dx - 2y\cos^2 xdy = 0$

B. Phương trình vi phân cấp 2

Bài 1. Giải các phương trình vi phân cấp 2 giảm cấp

(1) $(1+x^2)y'' + 1 = 0$

(2) $y'' = \dfrac{y'}{x} + x^2$

(3) $(1-x^2)y'' - xy' = 2$, $\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

(4) $(y')^2 + 2yy'' = 0$

Bài 2. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng

(1) $y'' - 2y' + y = 2e^{2x}$.

(2) $y'' - 6y' + 9y = \cos 3x$.

(3) $2y'' + 3y' + y = xe^{-x}$

(4) $y'' + 2y' + 2y = x^2 - 4x + 3$

(5) $y'' - 4y' = 4x^2 + 3x + 2$; $\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

(6) $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}$, $\ y(2) = y'(2) = 0$

(7) $4y'' - 4y' + y = xe^{\frac{1}{2}x}$

(8) $y'' + 2y' + 2y = e^x\sin x$.

(9) $y'' + 9y = \cos 3x + e^x$

(10) $y'' + y = 4xe^x$

(11) $y'' + y = 6\sin x$

(12) $y'' - 2y' + y = xe^x$

(13) $y'' - 4y' = x^2 + 2x + 3$

(14) $y'' - 2y' = 2\cos^2 x$

(15) $y'' - y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

(16) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

Bài 3. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hàm

(1) $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$ biết một nghiệm riêng $y_1 = x$.

(2) $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$ biết một nghiệm riêng $y_1 = x$.

(3) $y'' + \dfrac{2}{x}y' + y = 0$ biết một nghiệm riêng $y_1 = \dfrac{\cos x}{x}$.

(4) $(x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = 0$ biết một nghiệm riêng $y_1 = \dfrac{1}{1+x}$.

Chương 5. Hình học vi phân

Bài 1. Viết phương trình tiếp diện, pháp tuyến của mặt

(1) $z = x^2 + y^2$ tại $A(1,2,5)$

(2) $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ tại $A(1,2,3)$

(3) $z^3 + 2xy + y^2 = 0$ tại $A(-1,2,0)$

(4) $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 0$ tại $A(2,3,4)$

(5) $z^2 = x^2 + y^2$ tại $A(3,4,5)$.

(6) $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$ tại $A(2,2,3)$

Bài 2. Viết phương trình tiếp tuyến, pháp diện của các đường cong

(1) $x = 3\cos t,\ y = 3\sin t,\ z = 2t$ tại $t = \dfrac{\pi}{2}$

(2) $x = t,\ y = 2t^2,\ z = t^3$ tại $t = 2$

(3) $x = \dfrac{e^t \sin t}{\sqrt{2}},\ y = 1,\ z = \dfrac{e^t \sin t}{\sqrt{2}}$ tại $t = \dfrac{\pi}{4}$

Bài 3. Tính độ cong

(1) $xy = 1$ tại $A(1,1)$

(2) $y = x^3 - 3x + 2$, tại $A(0,2)$

(3) $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$, tại điểm ứng với $t = \sqrt{3}$

(4) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ a>0, tại điểm ứng với $t = \dfrac{\pi}{2}$

(5) $y^2 = x$ tại $A(1,1)$

(6) $r = a(1+\cos\varphi)$, $a > 0$

(7) $r = e^{a\varphi}$

(8) $y^2 = (x-1)^3$ tại $A(2,1)$