GIẢI TÍCH II

Nội dung:
- Chương 1. Hàm nhiều biến
1. Đạo hàm riêng $z = z(x,y) \to \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x; z'_y; dz = z'_x dx + z'_y dy; dz(x_o, y_o);$

$$f = f(x,y,z) \to \frac{\partial f}{\partial x} = f'_x; f'_y; f'_z; df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz; df(x_o, y_o, z_o).$$

2. Đạo hàm của hàm ẩn

$$F(x,y) = 0 \to y'_x = -\frac{F'_y}{F'_x}; F(x,y,z) = 0 \to z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}; z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

3. Đạo hàm và vi phân cấp 2

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x; z''_{xy} = (z'_x)'_y; z''_{yy} = \cdots \to d^2z = \left(z'_x dx + z'_y dy\right)^2 = z''_{xx}dx^2 + 2.z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2.$$

4. Cực trị
Bc 1.
Bc 2.

- Chương 2. Tích phân bội
1. Tích phân 2 lớp trên miền D là đường thẳng và parabol; miền D là HCN; miền D là tam giác; cách chiếu sang Oy.
2. PP đổi biến số, PP đổi tọa độ cực trên hình tròn tâm là gốc O, trên hình tròn tâm ko là gốc O, trên elip chính tắc.
3. Tích phân 3 lớp trên tứ diện, trên trụ và trên cầu.

- Chương 3. Tích phân đường
1. Tích phân đường loại 1 có 4 dạng
2. Tích phân đường loại 2 có 3 dạng, CT Green và ĐK để ko phụ thuộc vào đường nối AB.
3. Tích phân mặt loại 1 trên 1 mặt và TP mặt loại 2 (CT Ostro)

- Chương 4. Hình vi phân
- Có 3 dạng.

- Chương 5. PTVT
1. 5 dạng cấp 1.
2. PT cấp 2 hệ số hằng

CHƯƠNG 1 HÀM NHIỀU BIẾN
A. TÍNH GIỚI HẠN (giảm tải)
B. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN
1 ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN TOÀN PHẦN
- ĐN: Cho HS $z = z(x,y)$**. Để tính đạo hàm riêng**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x,$$

thì ta coi x là ẩn và y là hằng số. Và tương tự, để tính đạo hàm riêng $\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y$, thì ta coi y là ẩn và x là hằng số.

VD1. Tính các đạo hàm riêng của hàm

$$z = ln\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

G: Coi x là ẩn và y là hằng số, có $(ln\,u)' = \frac{1}{u}.u'$; $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$; $(y)' = 0 \rightarrow$ đạo hàm riêng

$$z'_x = \frac{1}{y + \sqrt{x^2 + y^2}}.\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)'_x = \frac{1}{y + \sqrt{x^2 + y^2}}.\left(0 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$
$$= \frac{x}{\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right).\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

- Và tương tự, coi y là ẩn và x là hằng số, có $(y)' = 1$; $(x^2)' = 0$ nên đạo hàm riêng

$$z'_y = \frac{1}{y + \sqrt{x^2 + y^2}}.\left(1 + \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{1}{y + \sqrt{x^2 + y^2}}.\left(1 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$
$$= \frac{1}{y + \sqrt{x^2 + y^2}}.\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

VD2. Tính các đạo hàm riêng của hàm

$$z = arctan\frac{y}{x}.$$

G: Vì $(arctan\,u)' = \frac{1}{u^2+1}.u'$ nên coi x là ẩn và y là hằng số, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $(k.f)' = k.f'$ thì đạo hàm riêng

$$z'_x = \frac{1}{u^2 + 1}.u' = \frac{1}{\frac{y^2}{x^2} + 1}.\left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{\frac{y^2}{x^2} + 1}.\frac{-y}{x^2} = -\frac{y}{y^2 + x^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

- Và tương tự, có

$$z'_y = \frac{1}{\frac{y^2}{x^2} + 1}.\left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{\frac{y^2}{x^2} + 1}.\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{y^2}{x^2} + 1}.\frac{x}{x^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

VD3. a) Cho hàm $z = x^y$. Tính các đạo hàm riêng tại điểm (1, 2).

G: Coi x là ẩn và y là hằng số $\rightarrow z = x^y$ là hàm lũy thừa, có $(x^a)' = ax^{a-1} \rightarrow$ đạo hàm riêng

$$z'_x = (x^y)'_x = yx^{y-1}.$$

- Thay $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow z'_x(1,2) = yx^{y-1} = 2.1^{2-1} = 2.$

Và tương tự, coi y là ẩn và x là hằng số $\rightarrow z = x^y$ là hàm mũ, $(a^y)' = a^y ln\,a \rightarrow$

$$z'_y = (x^y)'_y = x^y.ln\,x.$$

Thay $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow z'_y(1,2) = x^y.ln\,x = 1^2.ln\,1 = 0.$

b) Cho HS $z = tan\frac{x}{y}$. Tính

$$A = x.\frac{\partial z}{\partial x} + y.\frac{\partial z}{\partial y}$$

G: Coi x là ẩn và y là hằng số, có

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{cos^2\frac{x}{y}}.\frac{1}{y}.$$

Và tương tự, có

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{cos^2\frac{x}{y}}.\frac{-x}{y^2} \to A = x.\frac{\partial z}{\partial x} + y.\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{cos^2\frac{x}{y}}.\frac{x}{y} - \frac{1}{cos^2\frac{x}{y}}.\frac{x}{y} = 0.$$

$$df(x) = f'(x).dx$$

- ĐN: Cho hàm $z = z(x,y)$. Thì vi phân (toàn phần)

$$dz = z'_x.dx + z'_y.dy$$

VD1. Tính vi phân dz, với HS

$$z = \sqrt{x^6 + y^2}.$$

G: Có $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ nên coi x là ẩn và y là hằng số thì $(y^2)' = 0$ → đạo hàm riêng

$$z'_x = \left(\sqrt{x^6 + y^2}\right)'_x = \frac{(x^6 + y^2)'_x}{2\sqrt{x^6 + y^2}} = \frac{6x^5}{2\sqrt{x^6 + y^2}} = \frac{3x^5}{\sqrt{x^6 + y^2}}.$$

Và tương tự, coi y là ẩn và x là hằng số, có

$$z'_y = \frac{(x^6 + y^2)'_y}{2\sqrt{x^6 + y^2}} = \frac{2y}{2\sqrt{x^6 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^6 + y^2}}.$$

- Nên vi phân $dz = z'_x.dx + z'_y.dy = \frac{3x^5}{\sqrt{x^6+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^6+y^2}}dy.$

VD2. Tính vi phân dz, với HS $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Từ đó, tính dz(3, 4).

G: Có $z = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$; $(u^a)' = au^{a-1}.u'$ → đạo hàm riêng

$$z'_x = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}.2x = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Và tương tự, có

$$z'_y = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}.2y = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nên vi phân $dz = z'_x.dx + z'_y.dy = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx - \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy.$

$$dx = \Delta x = x - x_o = t - t_o.$$

- Từ đó, tính dz(3, 4).

Thay $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \to dz(3,4) = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx - \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy = -\frac{3}{125}dx - \frac{4}{125}dy.$

VD3. a) Tính dz(1, 3), với HS $z = y^x$.

G: Coi x là ẩn và y là hằng số, $z = y^x$ là hàm mũ, có $(a^x)' = a^x ln\, a$

$$\to z'_x = y^x ln\, y.$$

Thay $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \to z'_x(1,3) = 3^1.ln\,3 = 3ln\,3.$

Và y là ẩn và x là hằng số, $z = y^x$ là hàm lũy thừa

$$\rightarrow z'_y = xy^{x-1}.$$

Thay $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow z'_y(1,3) = 1.3^{1-1} = 1.$

Nên vi phân $dz(1,3) = z'_x.dx + z'_y.dy = 3ln\,3\,dx + dy.$

b) Tính $dz(1,1)$**, với HS** $z = ln\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} - 1\right).$

G: Có $z'_x = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}-1}.\frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow z'_x(1,1) = \frac{1}{2}.$

Và $z'_y = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}-1}.\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} \rightarrow z'_y(1,1) = \frac{1}{3}$**. Nên** $dz(1,1) = z'_x.dx + z'_y.dy = \frac{1}{2}dx + \frac{1}{3}dy.$

- ĐN: Cho HS $f = f(x,y,z)$**. Thì để tính đạo hàm riêng**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x,$$

thì ta coi x là ẩn và y, z là các hằng số. Tương tự, để tính đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y$**, thì ta coi y là ẩn và x, z là các hằng số. Và** f'_z**.**

- Và vi phân

$$df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz.$$

VD4. a) Tính vi phân df, biết HS $f = f(x,y,z) = tan\frac{xy}{z}$**. Từ đó, tính** $df(1,2,1)$**.**

G: Coi x là ẩn và y, z là các hằng số, $(tan\,u)' = \frac{1}{cos^2 u}.u' \rightarrow$ **đạo hàm riêng**

$$f'_x = \frac{1}{cos^2 u}.u' = \frac{1}{cos^2\frac{xy}{z}}.\left(\frac{xy}{z}\right)'_x = \frac{1}{cos^2\frac{xy}{z}}.\frac{y}{z} = \frac{y}{z.cos^2\frac{xy}{z}}.$$

Và tương tự, vì $\left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2} \rightarrow$ **các đạo hàm riêng**

$$f'_y = \frac{1}{cos^2\frac{xy}{z}}.\left(\frac{xy}{z}\right)'_y = \frac{1}{cos^2\frac{xy}{z}}.\frac{x}{z} = \frac{x}{zcos^2\frac{xy}{z}};$$

$$f'_z = \frac{1}{cos^2\frac{xy}{z}}.\left(\frac{xy}{z}\right)'_z = \frac{1}{cos^2\frac{xy}{z}}.\frac{-xy}{z^2} = -\frac{xy}{z^2\,cos^2\frac{xy}{z}}.$$

Nên vi phân $df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz = \frac{y}{z.cos^2\frac{xy}{z}}dx + \frac{x}{z.cos^2\frac{xy}{z}}dy - \frac{xy}{z^2.cos^2\frac{xy}{z}}dz.$

- Từ đó, tính $df(1,2,1)$**.**

Thay $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow df(1,2,1) = \frac{y}{z.cos^2\frac{xy}{z}}dx + \frac{x}{z.cos^2\frac{xy}{z}}dy - \frac{xy}{z^2.cos^2\frac{xy}{z}}dz = \frac{2}{cos^2 2}dx + \frac{1}{cos^2 2}dy - \frac{2}{cos^2 2}dz.$

b) C4. Tính df của HS

$$f = x^2 + 3y^2z + xz^3 + e^{xyz}.$$

G: Có $(e^u)' = e^u.u' \rightarrow$

$$f'_x = 2x + z^3 + yze^{xyz}.$$

Và

$$f'_y = 6yz + xze^{xyz};\;\; f'_z = 3y^2 + 3xz^2 + xye^{xyz}.$$

Nên $df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz = (2x + z^3 + yze^{xyz})dx + (6yz + xze^{xyz})dy + (3y^2 + 3xz^2 + xye^{xyz})dz$.

c) Cho hàm $u = arctan\frac{y}{x} + \left(\frac{x}{z}\right)^2$. **Tính**

$$B = x.\frac{\partial u}{\partial x} + y.\frac{\partial u}{\partial y} + z.\frac{\partial u}{\partial z}$$

G: Coi x là ẩn và y, z là các hằng số, $(arctan\, u)' = \frac{1}{u^2+1}.u'$ **thì**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\frac{y^2}{x^2}+1}.\frac{-y}{x^2} + \frac{2x}{z^2} = -\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{2x}{z^2}.$$

Tương tự có

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\frac{y^2}{x^2}+1}.\frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{\frac{y^2}{x^2}+1}.\frac{x}{x^2} = \frac{x}{x^2+y^2};\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0 + x^2.(-2)z^{-3} = -\frac{2x^2}{z^3}.$$

Thay vào

$$B = x.\frac{\partial u}{\partial x} + y.\frac{\partial u}{\partial y} + z.\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{xy}{x^2+y^2} + \frac{2x^2}{z^2} + \frac{xy}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{z^2} = 0.$$

VD5. a) Tính $df(0,1,2)$ **của HS**

$$f = e^{x^2+y^2+z^2}.$$

G: Có

$$f'_x = e^{x^2+y^2+z^2}.2x \to f'_x(0,1,2) = 0.$$

Và

$$f'_y = e^{x^2+y^2+z^2}.2y \to f'_y(0,1,2) = e^5.2.1 = 2e^5;$$
$$f'_z = e^{x^2+y^2+z^2}.2z \to f'_z(0,1,2) = e^5.4 = 4e^5.$$

Nên $df(0,1,2) = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz = 0dx + 2e^5 dy + 4e^5 dz$.

b) Tính $df(1,2,1)$, **với HS**

$$f = \sqrt{x^y + ln\, z}.$$

G: Có

$$f'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^y + ln\, z}}.(x^y + ln\, z)'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^y + ln\, z}}.yx^{y-1} \to f'_x(1,2,1) = \frac{1}{2.1}.2 = 1.$$

Và

$$f'_y = \frac{1}{2\sqrt{x^y + ln\, z}}.(x^y + ln\, z)'_y = \frac{1}{2\sqrt{x^y + ln\, z}}.x^y ln\, x \to f'_y(1,2,1) = \frac{1}{2}.ln\, 1 = 0;$$
$$f'_z = \frac{1}{2\sqrt{x^y + ln\, z}}.\frac{1}{z} \to f'_z(1,2,1) = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}.$$

Nên $df(1,2,1) = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz = 1dx + 0dy + \frac{1}{2}dz = dx + \frac{1}{2}dz$.

c) Cho hàm $f = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. **Tính**

$$B = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2.$$

G: Có

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\to\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2=\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Tương tự, có $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\to\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2};\ \frac{\partial f}{\partial z}=\cdots$.

Nên $B=\cdots=1$.

VD6. Tính vi phân du, biết HS $u=ln\sqrt{x^3+y^2+4z}$.

- Từ đó, tính $du(2,1,0)$.

$$u=u(x,y,z)\to du=u'_x dx+u'_y dy+u'_z dz.$$

G: Có $u=ln\sqrt{x^3+y^2+4z}=ln\,(x^3+y^2+4z)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.ln\,(x^3+y^2+4z)$**. Coi x là ẩn, y và z là các hằng số,** $(ln\,u)'=\frac{u'}{u}$ **thì**

$$u'_x=\frac{1}{2}.\frac{3x^2}{x^3+y^2+4z}=\frac{3x^2}{2(x^3+y^2+4z)}.$$

Tương tự, có

$$u'_y=\frac{1}{2}.\frac{2y}{x^3+y^2+4z}=\frac{y}{x^3+y^2+4z};\ u'_z=\frac{1}{2}.\frac{4}{x^3+y^2+4z}=\frac{2}{x^3+y^2+4z}.$$

Nên vi phân $du=u'_x dx+u'_y dy+u'_z dz=\frac{3x^2}{2(x^3+y^2+4z)}dx+\frac{y}{x^3+y^2+4z}dy+\frac{2}{x^3+y^2+4z}dz$.

- Tính $du(2,1,0)$**. Thay** $\begin{cases}x=2\\y=1\\z=0\end{cases}\to\begin{cases}u'_x(2,1,0)=\frac{3x^2}{2(x^3+y^2+4z)}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}\\u'_y(2,1,0)=\frac{y}{x^3+y^2+4z}=\frac{1}{9}\\u'_z(2,1,0)=\frac{2}{x^3+y^2+4z}=\frac{2}{9}.\end{cases}$ **Nên** $du(2,1,0)=u'_x dx+u'_y dy+u'_z dz=\frac{2}{3}dx+\frac{1}{9}dy+\frac{2}{9}dz$.

Bài tập

B2. Tính các đạo hàm riêng và vi phân toàn phần

C1. $z=ln\left(\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

G: Có $z=ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

- Coi x là ẩn và y là hằng số, $(ln\,u)'=\frac{1}{u}.u';\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ **thì**

$$z'_x=\frac{1}{2}.\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}.\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{1}{2}.\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}.\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{1}{2.\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Và tương tự có

$$z'_y=\frac{1}{2}.\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}.\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)}.$$

Nên vi phân $dz=z'_x dx+z'_y dy=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)}dy$.

C2. $z = \ln\tan\frac{x}{y}$**. Từ đó, tính dz(2, 1).**

G: Có

$$z'_x = \frac{1}{\tan\frac{x}{y}}.\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}.\frac{1}{y} = \frac{\cos\frac{x}{y}}{\sin\frac{x}{y}}.\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}.\frac{1}{y} = \frac{1}{y\sin\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}}.$$

Và

$$z'_y = \frac{1}{\tan\frac{x}{y}}.\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}.\frac{-x}{y^2} = \frac{\cos\frac{x}{y}}{\sin\frac{x}{y}}.\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}.\frac{-x}{y^2} = -\frac{x}{y^2\sin\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}}.$$

Nên vi phân $dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{1}{y\sin\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}}dx - \frac{x}{y^2\sin\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}}dy.$

- Từ đó, tính dz(2, 1).

Thay $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1, \end{cases}$ **suy ra** $dz(2,1) = \frac{1}{y\sin\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}}dx - \frac{x}{y^2\sin\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}}dy = \frac{1}{\sin 2\cos 2}dx - \frac{2}{\sin 2\cos 2}dy.$

C3. $f = \arctan\frac{y}{xz}$**. Từ đó, tính** $df(1,2,3)$**.**

G: Coi x là ẩn và y, z là các hằng số, $(\arctan u)' = \frac{1}{u^2+1}.u'$ **thì**

$$f'_x = \frac{1}{\frac{y^2}{x^2z^2}+1}.\frac{-y}{x^2z} = \frac{1}{\frac{y^2}{x^2z^2}+1}.\frac{-yz}{x^2z^2} = -\frac{yz}{y^2+x^2z^2}.$$

Và tương tự có

$$f'_y = \frac{1}{\frac{y^2}{x^2z^2}+1}.\frac{1}{xz} = \frac{1}{\frac{y^2}{x^2z^2}+1}.\frac{xz}{x^2z^2} = \frac{xz}{y^2+x^2z^2}$$

Và $f'_z = \frac{1}{\frac{y^2}{x^2z^2}+1}.\frac{-y}{xz^2} = \frac{1}{\frac{y^2}{x^2z^2}+1}.\frac{-xy}{x^2z^2} = -\frac{xy}{y^2+x^2z^2}.$

Nên vi phân $df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz = -\frac{yz}{y^2+x^2z^2}dx + \frac{xz}{y^2+x^2z^2}dy - \frac{xy}{y^2+x^2z^2}dz.$

- Từ đó, tính $df(1,2,3)$**.**

Thay $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3, \end{cases}$ **suy ra** $df(1,2,3) = -\frac{yz}{y^2+x^2z^2}dx + \frac{xz}{y^2+x^2z^2}dy - \frac{xy}{y^2+x^2z^2}dz = -\frac{6}{13}dx + \frac{3}{13}dy - \frac{2}{13}dz.$

3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM ẨN

- Hàm tường minh

$$y = f(x) = x^3 + 2x - 5 \to y' = f'(x) = \cdots.$$

- Hàm ẩn: ...

$$x^3 + y^3 = 3xy - 8 \to y' = y'(x) = \cdots ?.$$

- ĐL1: Cho HS $y = y(x)$ **là hàm ẩn xác định bởi PT**

$$F(x,y) = 0.$$

Thì đạo hàm

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

VD1. Tính y'_x, biết HS $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định bởi PT

$$x^3 + y^3 = 3xy - 8.$$

Tính $y'(0)$, biết $y(0) = -2$.

G: Đặt

$$F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 8 = 0 \to \begin{cases} F'_x = 3x^2 - 3y \\ F'_y = 3y^2 - 3x. \end{cases}$$

- Nên đạo hàm

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{3x^2 - 3y}{3y^2 - 3x} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

- Tính $y'(0)$, biết $y(0) = -2$.

Thay $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \to y'(0) = \frac{y - x^2}{y^2 - x} = \frac{-2 - 0}{4 - 0} = -\frac{1}{2}.$

VD2. Tính y'_x, biết HS $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định bởi PT

$$2y = \sin y + 2x^3 - 2.$$

Tính $y'(1)$, biết $y(1) = 0$.

G: Đặt

$$F(x,y) = 2y - \sin y - 2x^3 + 2 = 0 \to \begin{cases} F'_x = -6x^2 \\ F'_y = 2 - \cos y. \end{cases}$$

- Nên

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{6x^2}{2 - \cos y}.$$

- Tính $y'(1)$, biết $y(1) = 0$.

Thay $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \to y'(1) = \frac{6x^2}{2 - \cos y} = \frac{6}{2 - \cos 0} = 6.$

VD3. Cho HS $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định bởi PT $y\sin x = \cos(x - y)$.

- Tính $y'(x)$ và $y'(0)$, biết $y(0) = \frac{\pi}{2}$.

$$F(x,y) = 0 \to y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

G: Đặt $F(x,y) = y.\sin x - \cos(x - y) = 0$. Nên

$$\begin{cases} F'_x = y.\cos x + \sin(x - y).1 = y.\cos x + \sin(x - y) \\ F'_y = 1.\sin x + \sin(x - y).(-1) = \sin x - \sin(x - y). \end{cases}$$

Vậy $y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{y.\cos x + \sin(x - y)}{\sin x - \sin(x - y)}.$

- Tính $y'(0)$, biết $y(0) = \frac{\pi}{2}$. Thay $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\pi}{2} \end{cases} \to y'(0) = -\frac{y.\cos x + \sin(x - y)}{\sin x - \sin(x - y)} = -\frac{\frac{\pi}{2}.1 - 1}{0 - (-1)} = -\frac{\frac{\pi}{2} - 1}{1} = 1 - \frac{\pi}{2}.$

- ĐL2: Cho HS $z = z(x,y)$ là hàm ẩn xác định bởi PT $F(x,y,z) = 0$.

Thì

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}.$$

Và

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

VD1. C5. Cho HS $z = z(x, y)$ là hàm ẩn xác định bởi PT

$$ze^z = ye^x + xe^y.$$

Tính vi phân dz.

$$dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

G: Đặt $F(x, y, z) = ze^z - ye^x - xe^y = 0$; $(k.f)' = k.f' \rightarrow$

$$\begin{cases} F'_x = -ye^x - e^y \\ F'_y = -e^x - xe^y \\ F'_z = (u.v)' = u'v + uv' = 1e^z + ze^z - 0 = (z+1)e^z. \end{cases}$$

Nên

$$\begin{cases} z'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = \dfrac{ye^x + e^y}{(z+1)e^z} \\ z'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_z} = \dfrac{e^x + xe^y}{(z+1)e^z}. \end{cases}$$

Vậy vi phân

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{ye^x + e^y}{(z+1)e^z} dx + \frac{e^x + xe^y}{(z+1)e^z} dy.$$

VD2. C4. Cho

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz.$$

Tính dz. Từ đó, tính dz(1, -3), biết $z(1, -3) = 2$.
G: Đặt

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0 \rightarrow \begin{cases} F'_x = 3x^2 - 3yz \\ F'_y = 3y^2 - 3xz \\ F'_z = 3z^2 - 3xy. \end{cases}$$

Nên

$$\begin{cases} z'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = -\dfrac{3x^2 - 3yz}{3z^2 - 3xy} = \dfrac{yz - x^2}{z^2 - xy} \\ z'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_z} = -\dfrac{3y^2 - 3xz}{3z^2 - 3xy} = \dfrac{xz - y^2}{z^2 - xy}. \end{cases}$$

Vậy vi phân $dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{yz - x^2}{z^2 - xy} dx + \frac{xz - y^2}{z^2 - xy} dy$.

- Từ đó, tính dz(1, -3), biết $z(1, -3) = 2$.

Thay $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{cases} \rightarrow dz(1, -3) = \frac{yz - x^2}{z^2 - xy} dx + \frac{xz - y^2}{z^2 - xy} dy = \frac{-7}{7} dx + \frac{-7}{7} dy = -dx - dy$.

VD3. a) Tính dz, biết HS $z = z(x, y)$ là hàm ẩn xác định bởi PT

$$y^2 + z^3 = 4xz + 4.$$

Tính $dz(1, 2)$, biết $z(1, 2) = 2$.

G: Đặt

$$F(x,y,z)=y^2+z^3-4xz-4=0\rightarrow\begin{cases}F'_x=-4z\\ F'_y=2y\\ F'_z=3z^2-4x.\end{cases}$$

Nên

$$\begin{cases}z'_x=-\dfrac{F'_x}{F'_z}=\dfrac{4z}{3z^2-4x}\\ z'_y=-\dfrac{F'_y}{F'_z}=-\dfrac{2y}{3z^2-4x}=\dfrac{2y}{4x-3z^2}.\end{cases}$$

Nên

$$dz=z'_xdx+z'_ydy=\frac{4z}{3z^2-4x}dx+\frac{2y}{4x-3z^2}dy.$$

- Tính $dz(1,2)$, biết $z(1,2)=2$.

Thay

$$\begin{cases}x=1\\ y=2\\ z=2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}z'_x(1,2)=\dfrac{4z}{3z^2-4x}=\dfrac{8}{12-4}=1\\ z'_y(1,2)=\dfrac{2y}{4x-3z^2}=\dfrac{4}{4-12}=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Nên

$$dz(1,2)=z'_xdx+z'_ydy=dx-\frac{1}{2}dy.$$

d) Tính dz, biết HS $z=z(x,y)$ là hàm ẩn xác định bởi PT $xyz=\cos(x+y+z)$.

G: Đặt $F(x,y,z)=xyz-\cos(x+y+z)=0\rightarrow\begin{cases}F'_x=yz+\sin(x+y+z)\\ F'_y=xz+\sin(x+y+z)\\ F'_z=xy+\sin(x+y+z).\end{cases}$

Nên $\begin{cases}z'_x=-\dfrac{F'_x}{F'_z}=-\dfrac{yz+\sin(x+y+z)}{xy+\sin(x+y+z)}\\ z'_y=-\dfrac{F'_y}{F'_z}=-\dfrac{xz+\sin(x+y+z)}{xy+\sin(x+y+z)}.\end{cases}$

Vậy $dz=z'_xdx+z'_ydy=\cdots$

VD4. Tìm vi phân dz, biết $z=z(x,y)$ là hàm ẩn được cho bởi PT

$$x^2yz^3+x^3y^2z=2x+3y+4z.$$

$$dz=z'_xdx+z'_ydy;\ \begin{cases}z'_x=-\dfrac{F'_x}{F'_z}\\ z'_y=-\dfrac{F'_y}{F'_z}\end{cases}$$

G: Đặt $F(x,y,z)=x^2yz^3+x^3y^2z-2x-3y-4z=0$. **Nên** $\begin{cases}F'_x=2xyz^3+3x^2y^2z-2\\ F'_y=x^2z^3+2x^3yz-3\\ F'_z=3x^2yz^2+x^3y^2-4.\end{cases}$ **Suy ra**

$$\begin{cases}z'_x=-\dfrac{F'_x}{F'_z}=-\dfrac{2xyz^3+3x^2y^2z-2}{3x^2yz^2+x^3y^2-4}=\dfrac{2-2xyz^3-3x^2y^2z}{3x^2yz^2+x^3y^2-4}\\ z'_y=-\dfrac{F'_y}{F'_z}=-\dfrac{x^2z^3+2x^3yz-3}{3x^2yz^2+x^3y^2-4}=\dfrac{3-x^2z^3-2x^3yz}{3x^2yz^2+x^3y^2-4}.\end{cases}$$

Nên vi phân

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{2 - 2xyz^3 - 3x^2y^2z}{3x^2yz^2 + x^3y^2 - 4}dx + \frac{3 - x^2z^3 - 2x^3yz}{3x^2yz^2 + x^3y^2 - 4}dy.$$

VD5. Tìm vi phân dz, biết

$$ln\,(1 + y - z) = z + x.$$

G: Đặt $F(x, y, z) = ln\,(1 + y - z) - z - x = 0$. Nên

$$\begin{cases} F'_x = -1 \\ F'_y = \dfrac{1}{1 + y - z} \\ F'_z = \dfrac{-1}{1 + y - z} - 1 = \dfrac{-1 - 1 - y + z}{1 + y - z} = \dfrac{-2 - y + z}{1 + y - z} \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} z'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = 1 : \dfrac{-2 - y + z}{1 + y - z} = \dfrac{1 + y - z}{-2 - y + z} \\ z'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_z} = -\dfrac{1}{1 + y - z} : \dfrac{-2 - y + z}{1 + y - z} = -\dfrac{1}{-2 - y + z} = \dfrac{1}{2 + y - z}. \end{cases}$$

Nên vi phân $dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{1+y-z}{-2-y+z}dx + \frac{1}{2+y-z}dy$.

b) Tìm dz, biết HS $x^5 + 2y^6 + 3z^7 + xz = 8y + 10$.

VD6. Tìm vi phân dz, biết

$$z^3 = xz - y.$$

- Từ đó, tính $dz(3, -2)$, **biết** $z(3, -2) = 2$.

G: Đặt $F(x, y, z) = z^3 - xz + y = 0 \to \begin{cases} F'_x = -z \\ F'_y = 1 \\ F'_z = 3z^2 - x. \end{cases}$

Suy ra

$$\begin{cases} z'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = \dfrac{z}{3z^2 - x} \\ z'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_z} = -\dfrac{1}{3z^2 - x} = \dfrac{1}{x - 3z^2}. \end{cases}$$

Nên vi phân $dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{z}{3z^2-x}dx + \frac{1}{x-3z^2}dy$.

- Từ đó, tính $dz(3, -2)$, **biết** $z(3, -2) = 2$.

- Thay $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases} \to dz = \frac{z}{3z^2-x}dx + \frac{1}{x-3z^2}dy = \frac{2}{9}dx + \frac{1}{-9}dy = \frac{2}{9}dx - \frac{1}{9}dy.$

Bài tập

B4. Tính $y'(x)$, **biết** $y = y(x)$ **là hàm ẩn xác định bởi PT**

C1. $ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = arctan\frac{x}{y}$.

Từ đó tính $y'(1)$, **biết** $y(1) = 0$.

G: Có

$$\boldsymbol{ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = ln(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}.ln(x^2+y^2) = arctan\frac{y}{x} \to \frac{1}{2}ln(x^2+y^2) + arctan\frac{y}{x} = 0}.$$

- Đặt

$$\boldsymbol{F(x,y) = \frac{1}{2}ln\,(x^2+y^2) + arctan\frac{y}{x} = 0 \to y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}}.$$

Nên coi x là ẩn và y là hằng số, vì $\boldsymbol{(arctan\,u)' = \frac{1}{u^2+1}.u'}$ nên

$$\boldsymbol{F'_x = \frac{1}{2}.\frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{1}{\frac{y^2}{x^2}+1}.\frac{-y}{x^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{y^2+x^2} = \frac{x-y}{x^2+y^2}}.$$

- Tương tự, có $\boldsymbol{F'_y = \frac{1}{2}.\frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{1}{\frac{y^2}{x^2}+1}.\frac{1}{x} = \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{1}{\frac{y^2}{x^2}+1}.\frac{x}{x^2} = \frac{x+y}{x^2+y^2}}$. Vậy $\boldsymbol{y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{x-y}{x^2+y^2}.\frac{x^2+y^2}{x+y} = \frac{y-x}{x+y}}$.

- Tính $\boldsymbol{y'(1)}$, biết $\boldsymbol{y(1) = 0}$.

Vì $\boldsymbol{y(1) = 0 \to}$ thay $\boldsymbol{\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \to y'(1) = \frac{y-x}{x+y} = \frac{0-1}{1+0} = -1}$.

C2. $\boldsymbol{xe^y + e^x = y^2}$. Từ đó, tính $\boldsymbol{y'(0)}$ biết $\boldsymbol{y(0) = 1}$.

G: Ta có $\boldsymbol{F(x,y) = xe^y + e^x - y^2 = 0}$.

Nên $\boldsymbol{\begin{cases} F'_x = e^y + e^x \\ F'_y = xe^y - 2y. \end{cases}}$

Vậy $\boldsymbol{y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{e^y+e^x}{xe^y-2y} = \frac{e^x+e^y}{2y-xe^y}}$.

- Vì $\boldsymbol{y(0) = 1}$ nên thay $\boldsymbol{\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}}$ vào $\boldsymbol{y'(0) = \frac{e^0+e^1}{2.1-0.e^1} = \frac{e+1}{2}}$.

C3. $\boldsymbol{xe^y + ye^x = 1}$. Từ đó tính $\boldsymbol{y'(0)}$, biết $\boldsymbol{y(0) = 1}$.

G: Đặt $\boldsymbol{F(x,y) = \cdots}$

B5. Tính dz, biết $\boldsymbol{z = z(x,y)}$ là hàm ẩn xác định bởi PT

C1. $\boldsymbol{arctan\,z + z^2 = e^{xy}}$.

G: Có $\boldsymbol{arctan\,z + z^2 - e^{xy} = 0}$. Đặt

$$\boldsymbol{F(x,y,z) = arctan\,z + z^2 - e^{xy} = 0}.$$

Vì $\boldsymbol{(arctan\,x)' = \frac{1}{x^2+1}}$ nên $\boldsymbol{\begin{cases} F'_x = -e^{xy}.y \\ F'_y = -e^{xy}.x \\ F'_z = \frac{1}{z^2+1} + 2z. \end{cases}}$ Nên

$$\boldsymbol{z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{-e^{xy}.y}{\frac{1}{z^2+1}+2z} = \frac{e^{xy}.y}{\frac{1}{z^2+1}+2z}}.$$

Tương tự có

$$\boldsymbol{z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-e^{xy}.x}{\frac{1}{z^2+1}+2z} = \frac{e^{xy}.x}{\frac{1}{z^2+1}+2z}}.$$

Vậy vi phân $\boldsymbol{dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{e^{xy}.y}{\frac{1}{z^2+1}+2z}dx + \frac{e^{xy}.x}{\frac{1}{z^2+1}+2z}dy}$.

C2. $z = ye^{\frac{x}{z}}$**. Từ đó, tính dz(0, 1), biết** $z(0,1) = 1$.
G: Đặt

$$F(x,y,z) = z - ye^{\frac{x}{z}} = 0.$$

Nên

$$\begin{cases} F'_x = -ye^{\frac{x}{z}}.\dfrac{1}{z} = -\dfrac{ye^{\frac{x}{z}}}{z} \\ F'_y = -e^{\frac{x}{z}} \\ F'_z = 1 - ye^{\frac{x}{z}}.\dfrac{-x}{z^2} = 1 + \dfrac{xye^{\frac{x}{z}}}{z^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = -\dfrac{-\dfrac{ye^{\frac{x}{z}}}{z}}{1 + \dfrac{xye^{\frac{x}{z}}}{z^2}} = \dfrac{\dfrac{ye^{\frac{x}{z}}}{z}}{1 + \dfrac{xye^{\frac{x}{z}}}{z^2}} = \dfrac{yze^{\frac{x}{z}}}{z^2 + xye^{\frac{x}{z}}} \\ z'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_z} = -\dfrac{-e^{\frac{x}{z}}}{1 + \dfrac{xye^{\frac{x}{z}}}{z^2}} = \dfrac{e^{\frac{x}{z}}}{1 + \dfrac{xye^{\frac{x}{z}}}{z^2}} = \dfrac{z^2e^{\frac{x}{z}}}{z^2 + xye^{\frac{x}{z}}}. \end{cases}$$

Và vi phân $dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{yze^{\frac{x}{z}}}{z^2 + xye^{\frac{x}{z}}} dx + \frac{z^2e^{\frac{x}{z}}}{z^2 + xye^{\frac{x}{z}}} dy$.

- Từ đó, tính dz(0, 1), biết $z(0,1) = 1$.

- Vì $z(0,1) = 1 \rightarrow$ **thay** $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow dz = \frac{yze^{\frac{x}{z}}}{z^2 + xye^{\frac{x}{z}}} dx + \frac{z^2e^{\frac{x}{z}}}{z^2 + xye^{\frac{x}{z}}} dy = \frac{1}{1} dx + \frac{1}{1} dy = dx + dy$.

C3. $3x + 2y + z = e^{-x-y-z}$.
G: Đặt $F(x,y,z) = 3x + 2y + z - e^{-x-y-z} = 0$.
Nên coi x là ẩn và y, z là hằng số thì

$$\begin{cases} F'_x = 3 - e^{-x-y-z}.(-1) = 3 + e^{-x-y-z} \\ F'_y = 2 - e^{-x-y-z}.(-1) = 2 + e^{-x-y-z} \\ F'_z = 1 + e^{-x-y-z}. \end{cases}$$

Vậy

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{3 + e^{-x-y-z}}{1 + e^{-x-y-z}} = \frac{-3 - e^{-x-y-z}}{1 + e^{-x-y-z}}.$$

Và

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{-2 - e^{-x-y-z}}{1 + e^{-x-y-z}}.$$

Vậy vi phân

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{-3 - e^{-x-y-z}}{1 + e^{-x-y-z}} dx + \frac{-2 - e^{-x-y-z}}{1 + e^{-x-y-z}} dy.$$

$$y = x^3 - 2x \rightarrow y' = 3x^2 - 2 \rightarrow y'' = (y')' = (3x^2 - 2)' = 6x.$$

5. ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP 2

- ĐN: Cho HS $z = z(x,y)$**. Thì**

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x;\ z''_{xy} = (z'_x)'_y;\ z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x;\ z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y.$$

VD1. Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của HS $z = e^{xy}$.
G: Coi x là ẩn và y là hằng số, $(e^u)' = e^u.u'$ **thì có**

$$\begin{cases} z'_x = e^{xy}.y = ye^{xy} \\ z'_y = e^{xy}.x = xe^{xy}. \end{cases}$$

Nên

$$\begin{cases} z''_{xx} = (z'_x)'_x = (ye^{xy})'_x = y.e^{xy}.y = y^2e^{xy} \\ z''_{xy} = (z'_x)'_y = (y.e^{xy})'_y = (u.v)' = e^{xy} + y.e^{xy}.x \\ \qquad = (1+xy)e^{xy} \\ z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x = (x.e^{xy})'_x = (u.v)' = e^{xy} + x.e^{xy}.y \\ \qquad = (1+xy)e^{xy} \\ z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = (xe^{xy})'_y = x.e^{xy}.x = x^2e^{xy}. \end{cases}$$

NX: Có

$$z''_{xy} = z''_{yx} \quad (= (1+xy)e^{xy}).$$

- NX: (Bổ đề Svac) Cho hàm số $f = f(x,y)$. Thì

$$f''_{xy} = f''_{yx}.$$

- Nên ta chỉ cần tính 3 đạo hàm riêng cấp 2 là

$$f''_{xx}; f''_{xy}\ (= f''_{yx}); f''_{yy}.$$

b) C3. Tính các đạo hàm riêng cấp 2 tại điểm (0, 1) của HS $f = e^{2x+3y} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

G: Có $f(x,y) = e^{2x+3y} + (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}; (e^u)' = e^u.u'; (u^a)' = au^{a-1}.u' \to$

$$f'_x = e^{2x+3y}.2 - \frac{1}{2}.(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}.2x = 2e^{2x+3y} - x.(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Và

$$f'_y = e^{2x+3y}.3 - \frac{1}{2}.(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}.2y = 3e^{2x+3y} - y.(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Nên

$$f''_{xx} = \left(2e^{2x+3y} - x.(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\right)'_x = 2.e^{2x+3y}.2 - (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} - x.\left(-\frac{3}{2}\right).(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}}.2x$$

$$= 4e^{2x+3y} - (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2.(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

Thay $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \to f''_{xx}(0,1) = 4e^3 - 1 + 0 = 4e^3 - 1.$

- Và

$$f''_{xy} = f''_{yx} = \left(2e^{2x+3y} - x.(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\right)'_y = 2e^{2x+3y}.3 - x.\left(-\frac{3}{2}\right).(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}}.2y$$

$$= 6e^{2x+3y} + 3xy.(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}} \to f''_{xy}(0,1) = 6e^3 = f''_{yx}(0,1).$$

Và $f''_{yy} = \left(3e^{2x+3y} - y.(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\right)'_y = 3.e^{2x+3y}.3 - (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} - y.\left(-\frac{3}{2}\right).(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}}.2y =$
$9e^{2x+3y} - (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} + 3y^2.(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}} \to f''_{yy}(0,1) = 9e^3 - 1 + 3 = 9e^3 + 2.$

$$(k.f)' = k.f'$$

c) Tính các đạo hàm riêng cấp 2 tại điểm (1, 2) của HS

$$z = arctan\frac{x}{y}.$$

G: Vì $(\arctan u)' = \frac{1}{u^2+1}.u'$ **nên** $\begin{cases} z'_x = \frac{1}{\frac{x^2}{y^2}+1}.\frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{x^2}{y^2}+1}.\frac{y}{y^2} = \frac{y}{x^2+y^2} \\ z'_y = \frac{1}{\frac{x^2}{y^2}+1}.\frac{-x}{y^2} = -\frac{x}{x^2+y^2}. \end{cases}$

Vì $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ **nên** $\begin{cases} z''_{xx} = y.\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ z''_{xy} = \frac{x^2+y^2-y.\ 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ z''_{yy} = -x.\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}. = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}. \end{cases}$

Thay $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \to \begin{cases} z''_{xx}(1,2) = -\frac{4}{5^2} = -\frac{4}{25} \\ z''_{xy}(1,2) = -\frac{3}{25} \\ z''_{yy}(1,2) = \frac{4}{25}. \end{cases}$

- ĐN: Cho hàm số $u = u(x,y,z)$**. Thì**

$$u''_{xx} = (u'_x)'_x;\ u''_{xy} = (u'_x)'_y = u''_{yx}; \dots; u''_{zz} = (u'_z)'_z; u''_{xz} = (u'_x)'_z; \dots$$

VD2. a) C1. Cho HS $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$**. Chứng minh** $u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = \frac{2}{u}$**.**

G: Có $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \to u'_x = \frac{(x^2+y^2+z^2)'_x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Và $\begin{cases} u'_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ u'_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\ u'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \end{cases}$ **Nên**

$$u''_{xx} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)'_x = \left(\frac{u}{v}\right)'_x = \frac{1.\sqrt{x^2+y^2+z^2} - x.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}$$

$$= \frac{(x^2+y^2+z^2)-x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} : (x^2+y^2+z^2) = \frac{y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}.(x^2+y^2+z^2)}$$

$$= \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2).\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Tương tự, $\begin{cases} u''_{yy} = \frac{z^2+x^2}{(x^2+y^2+z^2).\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{z^2+x^2}{u^2.u} = \frac{x^2+z^2}{u^3} \\ u''_{zz} = \frac{x^2+y^2}{\dots} = \frac{x^2+y^2}{u^3};\ \ u''_{xx} = \frac{y^2+z^2}{u^3}. \end{cases}$

Vậy $u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = \frac{y^2+z^2}{u^3} + \frac{x^2+z^2}{u^3} + \frac{x^2+y^2}{u^3} = \frac{2(x^2+y^2+z^2)}{u^3} = \frac{2u^2}{u^3} = \frac{2}{u}$.

b) Cho HS $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$**. Chứng minh**

$$u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 0.$$

G: Có

$$u = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \to u'_x = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}.2x = -x.(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Nên

$$u''_{xx} = (u'_x)'_x = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - x.\left(-\frac{3}{2}\right).(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}.2x$$
$$= -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2.(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} = \frac{-x^2-y^2-z^2+3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$
$$= \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

- Tương tự, có

$$u''_{yy} = \frac{2y^2-z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}; u''_{zz} = \frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Nên $u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = \frac{0}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0.$

Bài tập

B7. Đạo hàm riêng cấp 2

C2. Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của HS $f = x\,sin\,(x^2+3y) + ln\,(x+2y)$.

G: Có $f'_x = sin\,(x^2+3y) + x.cos\,(x^2+3y).2x + \frac{1}{x+2y} = sin\,(x^2+3y) + 2x^2.cos\,(x^2+3y) + \frac{1}{x+2y}$.

Và $f'_y = x.cos\,(x^2+3y).3 + \frac{2}{x+2y} = 3x.cos\,(x^2+3y) + \frac{2}{x+2y}$.

- Vì $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \rightarrow$

$$f''_{xx} = (f'_x)'_x = cos\,(x^2+3y).2x + 4x.cos\,(x^2+3y) + 2x^2.\left(-sin\,(x^2+3y)\right).2x - \frac{1}{(x+2y)^2}$$
$$= 6x.cos\,(x^2+3y) - 4x^3.sin\,(x^2+3y) - \frac{1}{(x+2y)^2}$$

- Và $f''_{xy} = (f'_x)'_y = cos\,(x^2+3y).3 + 2x^2.\left(-sin\,(x^2+3y)\right).3 - \frac{2}{(x+2y)^2} = 3cos\,(x^2+3y) - 6x^2sin\,(x^2+3y) - \frac{2}{(x+2y)^2}$.

- Và $f''_{yy} = \left(f'_y\right)'_y = 3x.\left(-sin\,(x^2+3y)\right).3 + 2.\frac{-2}{(x+2y)^2} = -9x\,sin\,(x^2+3y) - \frac{4}{(x+2y)^2}$.

$$dz = z'_x dx + z'_y dy; dx = \Delta x = x - x_o.$$

6. VI PHÂN CẤP 2

- ĐN: Cho hàm số $z = z(x,y)$**. Thì vi phân cấp 2**

$$d^2z = d(dz) = \left(z'_x dx + z'_y dy\right)^2 = z''_{xx}dx^2 + 2.z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2$$
$$= z''_{xx}(dx)^2 + 2.z''_{xy}dx.dy + z''_{yy}.(dy)^2.$$

Nên vi phân

$$d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2.z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2.$$

VD1. Tính vi phân d^2z**, biết HS** $z = x^y$.

G: Có $(x^a)' = ax^{a-1}; (a^y)' = a^y \ln a$ → coi x là ẩn và y là hằng số

$$\begin{cases} z'_x = yx^{y-1} \quad (\text{vì nó là hàm lũy thừa}) \\ z'_y = x^y \ln x \quad (\text{vì nó là hàm mũ}). \end{cases}$$

Nên

$$\begin{cases} z''_{xx} = (y.x^{y-1})'_x = y.(y-1)x^{y-2} \\ z''_{xy} = z''_{yx} = (y.x^{y-1})'_y = (u.v)'_y = 1.x^{y-1} + y.x^{y-1}\ln x = [1 + y\ln x]x^{y-1} \\ z''_{yy} = (x^y.\ln x)'_y = x^y.(\ln x)^2 \end{cases}$$

Vậy vi phân cấp 2

$$d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2.z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2$$
$$= y(y-1)x^{y-2}dx^2 + 2.[1 + y\ln x]x^{y-1}dxdy + x^y.(\ln x)^2dy^2.$$

VD2. C3. Tính vi phân d^2z, biết HS $z = \sin(x^2 + 3y)$.

G: Có

$$\begin{cases} z'_x = \cos(x^2 + 3y).2x = 2x.\cos(x^2 + 3y) \\ z'_y = \cos(x^2 + 3y).3 = 3\cos(x^2 + 3y). \end{cases}$$

Nên

$$\begin{cases} z''_{xx} = \left(2x.\cos(x^2 + 3y)\right)'_x = (u.v)'_x = 2\cos(x^2 + 3y) + 2x.\left(-\sin(x^2 + 3y)\right).2x \\ \qquad = 2\cos(x^2 + 3y) - 4x^2.\sin(x^2 + 3y) \\ z''_{xy} = z''_{yx} = \left(2x.\cos(x^2 + 3y)\right)'_y = 2x.\left(-\sin(x^2 + 3y)\right).3 = -6x.\sin(x^2 + 3y) \\ z''_{yy} = \left(3\cos(x^2 + 3y)\right)'_y = 3.\left(-\sin(x^2 + 3y)\right).3 = -9\sin(x^2 + 3y). \end{cases}$$

Vậy vi phân

$$d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2.z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2$$
$$= [2\cos(x^2 + 3y) - 4x^2\sin(x^2 + 3y)]dx^2 - 12x\sin(x^2 + 3y)dxdy$$
$$- 9\sin(x^2 + 3y)dy^2.$$

b) Tìm vi phân cấp 2 của $f(x, y) = e^{x^2 - y^2} + \cos(xy)$.

G: Coi x là ẩn và y là hằng số thì $f(x, y) = e^{x^2 - y^2} + \cos(xy)$ →

$$\begin{cases} f'_x = e^{x^2 - y^2}.2x - \sin(xy).y = 2x.e^{x^2 - y^2} - y.\sin(xy) \\ f'_y = e^{x^2 - y^2}.(-2y) - \sin(xy).x = -2y.e^{x^2 - y^2} - x\sin(xy). \end{cases}$$

Nên

$$\begin{cases} f''_{xx} = \left(2x.e^{x^2 - y^2} - y.\sin(xy)\right)'_x = 2.e^{x^2 - y^2} + 2x.e^{x^2 - y^2}.2x - y.\cos(xy).y \\ \qquad = e^{x^2 - y^2}(4x^2 + 2) - y^2\cos(xy) \\ f''_{xy} = \left(2x.e^{x^2 - y^2} - y.\sin(xy)\right)'_y = 2x.e^{x^2 - y^2}.(-2y) - 1.\sin(xy) - y.\cos(xy).x \\ \qquad = -4xye^{x^2 - y^2} - \sin(xy) - xy\cos(xy) \\ f''_{yy} = \left(-2y.e^{x^2 - y^2} - x\sin(xy)\right)'_y = -2.e^{x^2 - y^2} - 2y.e^{x^2 - y^2}.(-2y) - x.\cos(xy).x \\ \qquad = e^{x^2 - y^2}.(4y^2 - 2) - x^2\cos(xy). \end{cases}$$

Nên vi phân $d^2f = f''_{xx}dx^2 + 2.f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2 = \cdots$

c) Tìm d^2z, biết $z = y\ln(y^2 - x^2)$.

VD3. Tính vi phân cấp 2 của HS $f = x\sin(x^2+3y) + \ln(x+2y)$.

$$d^2f = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2$$

G: Có $f'_x = \sin(x^2+3y) + x.\cos(x^2+3y).2x + \frac{1}{x+2y} = \sin(x^2+3y) + 2x^2.\cos(x^2+3y) + \frac{1}{x+2y}$.

Và $f'_y = x.\cos(x^2+3y).3 + \frac{2}{x+2y} = 3x.\cos(x^2+3y) + \frac{2}{x+2y}$.

- Vì $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \rightarrow$

$$f''_{xx} = (f'_x)'_x = \cos(x^2+3y).2x + 4x.\cos(x^2+3y) + 2x^2.\left(-\sin(x^2+3y)\right).2x - \frac{1}{(x+2y)^2}$$

$$= 6x.\cos(x^2+3y) - 4x^3.\sin(x^2+3y) - \frac{1}{(x+2y)^2}$$

- Và $f''_{xy} = (f'_x)'_y = \cos(x^2+3y).3 + 2x^2.\left(-\sin(x^2+3y)\right).3 - \frac{2}{(x+2y)^2} = 3\cos(x^2+3y) - 6x^2\sin(x^2+3y) - \frac{2}{(x+2y)^2}$.

- Và $f''_{yy} = \left(f'_y\right)'_y = 3x.\left(-\sin(x^2+3y)\right).3 + 2.\frac{-2}{(x+2y)^2} = -9x\sin(x^2+3y) - \frac{4}{(x+2y)^2}$.

Nên vi phân $d^2f = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2 = \cdots$

Bài tập

B12. Tính d^2z, biết

C1. $z = x^2\ln(x+y)$.

G: Có

$$\begin{cases} z'_x = 2x\ln(x+y) + x^2.\dfrac{1}{x+y}.1 = 2x\ln(x+y) + \dfrac{x^2}{x+y} \\ z'_y = x^2.\dfrac{1}{x+y}.1 = \dfrac{x^2}{x+y}. \end{cases}$$

Nên

$$\begin{cases} z''_{xx} = (z'_x)'_x = 2\ln(x+y) + 2x.\frac{1}{x+y} + \frac{2x.(x+y)-x^2.1}{(x+y)^2} \\ \qquad = 2\ln(x+y) + \frac{2x}{x+y} + \frac{x^2+2xy}{(x+y)^2} \\ z''_{xy} = (z'_x)'_y = 2x.\frac{1}{x+y} + x^2.\frac{-1}{(x+y)^2}.1 = \frac{2x}{x+y} - \frac{x^2}{(x+y)^2} \\ z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = x^2.\frac{-1}{(x+y)^2}.1 = -\frac{x^2}{(x+y)^2} \end{cases}$$

Nên vi phân $d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2.z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2 = \cdots$

C2. $z = \arctan\frac{y}{x}$.

G: Có $(\arctan u)' = \frac{1}{1+u^2}.u'$ **nên**

$$\begin{cases} z'_x = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}.\frac{-y}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2} \\ z'_y = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}.\frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^2+y^2}.\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}. \end{cases}$$

Nên $\begin{cases} z''_{xx} = -y.\frac{-1}{(x^2+y^2)^2}.2x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ z''_{xy} = -\left(\frac{1.(x^2+y^2)-y.2y}{(x^2+y^2)^2}\right) = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ z''_{yy} = x.\frac{-1}{(x^2+y^2)^2}.2y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$

Nên $d^2z = z''_{xx}.dx^2 + 2z''_{xy}.dxdy + z''_{yy}.dy^2 = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dx^2 + 2.\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dy^2$.

$$f'(x_o) = 0$$

D. CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

- ĐN điểm dừng: Cho HS $z = f(x,y)$. Điểm (x_o, y_o) gọi là điểm dừng nếu $\begin{cases} f'_x(x_o,y_o) = 0 \\ f'_y(x_o,y_o) = 0. \end{cases}$

- TC: ĐK cần. Nếu HS $z = f(x,y)$ đạt cực trị tại điểm (x_o, y_o) thì (x_o, y_o) là điểm dừng.

$$f''(x_o) > 0 \to x_o: CT;\ f''(x_o) < 0 \to x_o: CĐ.$$

- PP: ĐK đủ. Giả sử (x_o, y_o) là điểm dừng của HS $z = f(x,y)$. Tính $\begin{cases} f''_{xx} = A \\ f''_{xy} = B \\ f''_{yy} = C \end{cases} \to \Delta = B^2 - AC$.

*** Nếu $\begin{cases} \Delta < 0 \\ A = f''_{xx} < 0 \end{cases} \to (x_o, y_o)$ là C Đ.**

*** Nếu $\begin{cases} \Delta = B^2 - AC < 0 \\ A = f''_{xx} > 0 \end{cases} \to (x_o, y_o)$ là C Tiểu.**

*** Nếu $\Delta > 0 \to (x_o, y_o)$ ko là điểm cực trị.**

VD1. Tìm cực trị của HS

$$f = x^3 + y^3 + 3xy.$$

G: Bước 1. Tìm điểm dừng. Giải hệ $\begin{cases} f'_x = 3x^2 + 3y = 0 \\ f'_y = 3y^2 + 3x = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ y^2 + x = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y = -x^2 \\ y^2 + x = 0. \end{cases}$

Thay $y = -x^2$ vào PT sau

$$x^4 + x = 0 \to x.(x^3+1) = 0 \to \left[\begin{array}{l} x = 0 \to y = -x^2 = 0 \to (x,y) = (0,0) \\ x = -1 \to y = -1 \to (x,y) = (-1,-1). \end{array}\right.$$

- Bước 2. TH1. Xét điểm dừng $(x,y) = (0,0) \to$

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 + 3y \\ f'_y = 3y^2 + 3x \end{cases} \to \begin{cases} f''_{xx} = 6x = 6.0 = 0 = A \\ f''_{xy} = (f'_x)'_y = 3 = B \\ f''_{yy} = 6y = 6.0 = 0 = C \end{cases} \to \begin{cases} \Delta = B^2 - AC = 3^2 - 0 = 9 > 0 \\ \end{cases}$$

Nên điểm dừng $(0,0)$ ko là cực trị.

- TH2. Xét điểm dừng $(x,y) = (-1,-1) \to$

$$\begin{cases} f''_{xx} = 6x = 6.(-1) = -6 = A \\ f''_{xy} = 3 = B \\ f''_{yy} = 6y = 6.(-1) = -6 = C \end{cases} \to \begin{cases} \Delta = B^2 - AC = 9 - 36 = -27 < 0 \\ A = -6 = f''_{xx} < 0 \end{cases}$$

Nên điểm dừng $(-1,-1)$ là điểm CĐ và $f_{CD} = f(-1,-1) = x^3 + y^3 + 3xy = -1 - 1 + 3 = 1$.

VD2. C6. Tìm cực trị của HS

$$f = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

G: Bước 1. Tìm điểm dừng. Có

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ f'_y = 6xy - 12 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 = 1^2 + 2^2 = (-1)^2 + (-2)^2 \\ xy = 2 = 1.2 = (-1)(-2) \to y = \dfrac{2}{x} \end{cases} \to \cdots$$

$$\to \left[\begin{array}{l} x = 1 \to y = 2 \\ x = 2 \to y = 1 \\ x = -1 \to y = -2 \\ x = -2 \to y = -1. \end{array}\right.$$

- Bước 2. TH1. Nếu điểm dừng $(x, y) = (1, 2) \to \begin{cases} f'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15 \\ f'_y = 6xy - 12 \end{cases} \to$

$$\begin{cases} f''_{xx} = 6x = 6.1 = 6 = A \\ f''_{xy} = 6y = 6.2 = 12 = B \\ f''_{yy} = 6x = 6.1 = 6 = C \end{cases} \to \begin{cases} \Delta = \mathrm{B}^2 - \mathrm{AC} = 144 - 36 = 108 > 0. \\ \end{cases}$$

Nên điểm dừng $(1, 2)$ ko là điểm cực trị.

- TH2. Xét điểm dừng

$$(x, y) = (2, 1) \to \begin{cases} f''_{xx} = 6x = 12 = A \\ f''_{xy} = 6y = 6 = B \\ f''_{yy} = 6x = 12 = C \end{cases} \to \begin{cases} \Delta = \mathrm{B}^2 - \mathrm{AC} = 36 - 144 = -108 < 0 \\ A = 12 = f''_{xx} > 0 \end{cases}$$

Nên điểm dừng $(2, 1)$ là điểm C Tiểu và $f_{CT} = f(2, 1) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y = -28$.

- TH3. Xét điểm dừng

$$(x, y) = (-1, -2) \to \begin{cases} f''_{xx} = 6x = -6 = A \\ f''_{xy} = 6y = -12 = B \\ f''_{yy} = 6x = -6 = C \end{cases} \to \begin{cases} \Delta = \mathrm{B}^2 - \mathrm{AC} = 144 - 36 > 0 \\ \end{cases}$$

Nên $(-1, -2)$ ko là điểm cực trị.

- TH4. Xét điểm dừng $(x, y) = (-2, -1) \to \begin{cases} f''_{xx} = 6x = -12 \\ f''_{xy} = 6y = -6 \\ f''_{yy} = 6x = -12 \end{cases} \to \begin{cases} \Delta = \mathrm{B}^2 - \mathrm{AC} = 36 - 144 < 0 \\ A = -12 = f''_{xx} < 0. \end{cases}$

Nên điểm dừng $(-2, -1)$ là điểm CĐ và $f_{CD} = f(-2, -1) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y = 28$.

- Chú ý: Đặt ĐKXĐ: …

VD3. Tìm cực trị của HS $f = xy - \frac{1}{x} - \frac{27}{y}$.

G: ĐK: $x, y \neq 0$.

Bước 1. Tìm điểm dừng. Có $\begin{cases} f'_x = y + \frac{1}{x^2} = 0 \to y = -\frac{1}{x^2} \\ f'_y = x + \frac{27}{y^2} = 0. \end{cases}$ **Thay** $y = -\frac{1}{x^2} \to \frac{1}{y} = -x^2$ **vào PT dưới**

được

$$x+27x^4=0\to x(1+27x^3)=0\to\left[\begin{array}{c}x=0\ \ (lo\text{ại})\\ 1+3x=0\to x=-\dfrac{1}{3}\to y=-\dfrac{1}{x^2}=-9\end{array}\right.\to(x,y)$$

$$=\left(-\frac{1}{3},-9\right).$$

- Bước 2. Thay điểm dừng $(x,y)=\left(-\frac{1}{3},-9\right)$ **vào** $\begin{cases}f'_x=y+\frac{1}{x^2}=y+x^{-2}\\ f'_y=x+\frac{27}{y^2}=x+27.y^{-2}\end{cases}\to$

$$\begin{cases}f''_{xx}=-2x^{-3}=-\dfrac{2}{x^3}=\cdots=54=A\\ f''_{xy}=(f'_x)'_y=1=B\\ f''_{yy}=27.(-2)y^{-3}=-54y^{-3}=-\dfrac{54}{y^3}=\cdots=\dfrac{2}{27}=C\end{cases}\to\begin{cases}\Delta=\mathrm{B}^2-\mathrm{AC}=1-54.\dfrac{2}{27}=-3<0\\ A=f''_{xx}=54>0.\end{cases}$$

Nên điểm dừng $(-\frac{1}{3},-9)$ **là điểm C Tiểu và** $f_{CT}=f\left(-\frac{1}{3},-9\right)=xy-\frac{1}{x}-\frac{27}{y}=9.$

VD4. a) C5. Tìm cực trị của HS $f=x^2+4y^2-2\,ln\,(xy).$

G: ĐK: $xy>0\to\left[\begin{array}{l}x,y>0\\ x,y<0.\end{array}\right.$ **Bước 1. Tìm điểm dừng. Có** $(ln\,u)'=\frac{u'}{u}\to$

$$\begin{cases}f'_x=2x-2.\dfrac{y}{xy}=2x-\dfrac{2}{x}=0\\ f'_y=8y-2.\dfrac{x}{xy}=8y-\dfrac{2}{y}=0\end{cases}\to\begin{cases}x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-1}{x}=0\\ 4y-\dfrac{1}{y}=\dfrac{4y^2-1}{y}=0\end{cases}\to\begin{cases}x^2=1\\ y^2=\dfrac{1}{4}\end{cases}\to\begin{cases}x=\pm1\\ y=\pm\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\to\left[\begin{array}{c}x=1\to y=\dfrac{1}{2}\ \ (do\ xy>0)\\ x=-1\to y=-\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.\to\left[\begin{array}{c}(x,y)=\left(1,\dfrac{1}{2}\right)\\ (x,y)=\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right).\end{array}\right.$$

- Bước 2. TH1. Xét điểm dừng $(x,y)=\left(1,\frac{1}{2}\right)\to\begin{cases}f'_x=2x-2.\frac{y}{xy}=2x-\frac{2}{x}\\ f'_y=8y-2.\frac{x}{xy}=8y-\frac{2}{y}\end{cases}\to$

$$\begin{cases}f''_{xx}=2+\dfrac{2}{x^2}=2+\dfrac{2}{1}=4=A\\ f''_{xy}=(f'_x)'_y=0=B\\ f''_{yy}=8+\dfrac{2}{y^2}=8+\dfrac{2}{\frac{1}{4}}=16=C\end{cases}\to\begin{cases}\Delta=\mathrm{B}^2-\mathrm{AC}=0-4.16=-64<0\\ A=4=f''_{xx}>0\end{cases}$$

Nên điểm dừng $(1,\frac{1}{2})$ **là C Tiểu và** $f_{CT}=f\left(1,\frac{1}{2}\right)=x^2+4y^2-2\,ln\,(xy)=2+2ln\,2.$

- TH2. Xét diểm dừng

$$(x,y)=\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\to\begin{cases}f''_{xx}=2+\dfrac{2}{x^2}=4=A\\ f''_{xy}=0=B\\ f''_{yy}=8+\dfrac{2}{y^2}=16=C\end{cases}\to\begin{cases}\Delta=\mathrm{B}^2-\mathrm{AC}=0-4.16<0\\ A=4=f''_{xx}>0\end{cases}$$

Nên điểm dừng $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ là C Tiểu và $f_{CT}=f\left(-1,-\frac{1}{2}\right)=2+2ln\,2$.

VD5. Tìm cực trị của HS $f=x^2+xy+y^2-2x-2y$.

G: Có $\begin{cases} f'_x=2x+y-2=0 \\ f'_y=x+2y-2=0 \end{cases} \to \begin{cases} 2x+y=2 \\ x+2y=2 \end{cases} \to \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{2}{3}. \end{cases}$

Nên điểm dừng là $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

- Mà $\begin{cases} f''_{xx}=2=A \\ f''_{xy}=1=B \\ f''_{yy}=2=C \end{cases} \to \begin{cases} \Delta=\mathrm{B}^2-AC=-3<0 \\ A=2>0 \end{cases}$

Nên điểm dừng $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ là cực tiểu và $f\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=x^2+xy+y^2-2x-2y=\cdots$

VD6. Tìm cực trị của HS $f(x,y)=x^2+y^2-8ln\,(-xy)$.

G: Bước 1. Tìm điểm dừng. ĐK: $xy<0\to\left[\begin{array}{l} x>0,y<0 \\ x<0,y>0. \end{array}\right.$

- Giải hệ

$$\begin{cases} f'_x=2x-8.\frac{-y}{-xy}=2x-\frac{8}{x}=0 \\ f'_y=2y-8.\frac{-x}{-xy}=2y-\frac{8}{y}=0 \end{cases} \to \begin{cases} 2\left(x-\frac{4}{x}\right)=2.\frac{x^2-4}{x}=0 \\ 2\left(y-\frac{4}{y}\right)=2.\frac{y^2-4}{y}=0 \end{cases} \to \begin{cases} x=\pm 2 \\ y=\pm 2 \end{cases} \to$$

$$\left[\begin{array}{l} (x,y)=(2,-2) \\ (x,y)=(-2,2) \end{array}\right. \quad (v\text{ì } xy<0).$$

- Bước 2. TH1. Xét điểm dừng

$$(x,y)=(2,-2)\to\begin{cases} f'_x=2x-\frac{8}{x} \\ f'_y=2y-\frac{8}{y} \end{cases} \to \begin{cases} f''_{xx}=2+\frac{8}{x^2}=2+\frac{8}{2^2}=4=A \\ f''_{xy}=0=B \\ f''_{yy}=2+\frac{8}{y^2}=2+\frac{8}{(-2)^2}=4=C \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} \Delta=B^2-AC=0-4.4=-16<0 \\ A=f''_{xx}=4>0. \end{cases}$$

Nên điểm dừng $(x,y)=(2,-2)$ là điểm cực tiểu và $f_{CT}=f(2,-2)=8-8ln4$.

- TH2. Xét điểm dừng

$$(x,y)=(-2,2)\to\begin{cases} f''_{xx}=2+\frac{8}{x^2}=2+\frac{8}{(-2)^2}=4=A \\ f''_{xy}=0=B \\ f''_{yy}=2+\frac{8}{y^2}=2+\frac{8}{2}=4=C \end{cases} \to \begin{cases} \Delta=B^2-AC=0-4.4=-16<0 \\ A=f''_{xx}=4>0. \end{cases}$$

Nên điểm dừng $(x,y)=(-2,2)$ là điểm cực tiểu và $f_{CT}=f(-2,2)=8-8ln4$.

VD7. Tìm cực trị của HS

$$f(x,y)=2x^3+6xy-12y.$$

G: Bước 1. Tìm điểm dừng. Giải hệ $\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{cases} \to \begin{cases} 6x^2+6y=0\to x^2+y=0 \\ 6x-12=0\to x=2 \end{cases} \to y=-x^2=-4.$

Nên $(x,y)=(2,-4)$ là điểm dừng.

- Bước 2. Tính

$$\begin{cases} f''_{xx} = 12x = 12.2 = 24 = A \\ f''_{xy} = 6 = B \\ f''_{yy} = 0 = C \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Delta = B^2 - AC = 36 - 0 = 36 > 0. \end{cases}$$

Nên điểm dừng $(2, -4)$ ko là cực trị.

VD8. Tìm cực trị của HS $f(x, y) = x^2y + xy^2 - 3xy$.

G: Có $\begin{cases} f'_x = 2xy + y^2 - 3y = 0 \\ f'_y = x^2 + 2xy - 3x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y.(2x + y - 3) = 0 \\ x.(x + 2y - 3) = 0. \end{cases}$

- TH1. Nếu $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow (x, y) = (0, 0)$ **là điểm dừng. Và**

$\begin{cases} f''_{xx} = 2y = 2.0 = 0 \\ f''_{xy} = 2x + 2y - 3 = 0 + 0 - 3 = -3 \\ f''_{yy} = 2x = 2.0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Delta = B^2 - AC = 9 - 0 = 9 > 0. \end{cases}$ **Nên điểm dừng (0, 0) ko là cực trị.**

- TH2. Nếu $\begin{cases} y = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 3 \end{cases} \rightarrow (x, y) = (3, 0)$ **là điểm dừng. Và**

$\begin{cases} f''_{xx} = 2y = 2.3 = 6 \\ f''_{xy} = 2x + 2y - 3 = 6 + 0 - 3 = 3 \\ f''_{yy} = 2x = 2.3 = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Delta = B^2 - AC = 9 - 36 = -27 < 0 \\ A = f''_{xx} = 6 > 0 \end{cases} \rightarrow (3, 0)$ **là C Tiểu**

và $f_{CT} = f(3, 0) = x^2y + xy^2 - 3xy = \cdots$

- TH3. Nếu $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow \cdots$

- TH4. Nếu $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow \cdots$

b) Tìm cực trị của $f(x, y) = x^2 + y^2 - 32ln\,(xy)$.

G: ĐK: $xy > 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} x, y > 0 \\ x, y < 0. \end{array}\right.$ **Bước 1. Tìm điểm dừng. Có** $(ln\,u)' = \frac{u'}{u} \rightarrow$

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 32.\dfrac{y}{xy} = 2x - \dfrac{32}{x} = 0 \\ f'_y = 2y - 32.\dfrac{x}{xy} = 2y - \dfrac{32}{y} = 0 \end{cases} \rightarrow \cdots$$

c) $f = (x - 1)^2 + (y + 3)^2 - xy$.

G: Có $f = x^2 + y^2 - xy - 2x + 6y + 10 \rightarrow \begin{cases} f'_x = 2x - 2 - y = 0 \\ f'_y = 2y + 6 - x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2y - x = -6 \end{cases} \rightarrow \cdots$

Bài tập

B1. Tìm cực trị của các hàm

C1. $f = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$.

G: Có $\begin{cases} f'_x = 2x + y - 2 = 0 \\ f'_y = x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{4}{3}. \end{cases}$

Nên điểm dừng là $\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$.

- Mà $\begin{cases} f''_{xx} = 2 = A \\ f''_{xy} = 1 = B \\ f''_{yy} = 2 = C \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Delta = B^2 - AC = -3 < 0 \\ A = 2 > 0 \end{cases}$

Nên điểm dừng $\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$ **là cực tiểu và** $f\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y = \cdots$

C2. $f = x^3 + y^3 - 15xy$.

G: Bước 1. Tìm điểm dừng. Có

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 15y = 0 \\ f'_y = 3y^2 - 15x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 5y = 0 \rightarrow y = \dfrac{x^2}{5} \rightarrow y^2 = \dfrac{x^4}{25} \\ y^2 - 5x = 0 \rightarrow y^2 = 5x. \end{cases}$$

Nên $\frac{x^4}{25} = 5x \rightarrow \frac{x^4}{25} - 5x = 0 \rightarrow x\left(\frac{x^3}{25} - 5\right) = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \rightarrow y = \frac{x^2}{5} = 0 \\ \frac{x^3}{25} = 5 \rightarrow x^3 = 125 \rightarrow x = 5 \rightarrow y = \frac{x^2}{5} = 5. \end{array}\right.$

Nên có 2 điểm dừng là $(x,y) = (0,0); (5,5)$.

TH1. Nếu $(x,y) = (0,0)$. **Vì**

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 15y \\ f'_y = 3y^2 - 15x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f''_{xx} = 6x = 6.0 = 0 = a \\ f''_{xy} = -15 = b \\ f''_{yy} = 6y = 6.0 = 0 = c. \end{cases}$$

Nên $\Delta = b^2 - ac = 225 > 0 \rightarrow (0,0)$ **ko là cực trị.**

TH2. Xét điểm dừng $(x,y) = (5,5)$. **Suy ra**

$$\begin{cases} f''_{xx} = 6x = 6.5 = 30 = a \\ f''_{xy} = -15 = b \\ f''_{yy} = 6y = 6.5 = 30 = c. \end{cases}$$

Nên $\begin{cases} \Delta = b^2 - ac = 15^2 - 30^2 < 0 \\ a = 30 > 0 \end{cases} \rightarrow (5,5)$ **là điểm CT.**

C3. $f = xy + \frac{8}{x} + \frac{1}{y}$.

G: Bước 1. ĐK: $x, y \neq 0$. **Xét hệ** $\begin{cases} f'_x = -\frac{1}{x^2} + y = 0 \rightarrow y = \frac{1}{x^2} \rightarrow \frac{1}{y} = x^2 \rightarrow \frac{1}{y^2} = x^4 \\ f'_y = -\frac{1}{y^2} + x = 0 \end{cases}$

- Thế PT đầu vào PT sau, được

$-x^4 + x = 0 \rightarrow -x.(x^3 - 1) = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \;\; (Loại) \\ x^3 = 1 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = \frac{1}{x^2} = 1. \end{array}\right.$ **Nên điểm dừng** $(x,y) = (1,1)$.

Bước 2. Vì $\begin{cases} f'_x = -\frac{1}{x^2} + y = -x^{-2} + y \\ f'_y = -\frac{1}{y^2} + x = -y^{-2} + x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f''_{xx} = -(-2)x^{-3} = \frac{2}{x^3} = \frac{2}{1^3} = 2 = a \\ f''_{xy} = 1 = b \\ f''_{yy} = -(-2)y^{-3} = \frac{2}{y^3} = \frac{2}{1^3} = 2 = c. \end{cases}$

Nên $\begin{cases} \boldsymbol{\Delta = b^2 - ac = 1 - 4 = -3 < 0} \\ \boldsymbol{a = 2 > 0}. \end{cases}$ **Vậy điểm dừng** $\boldsymbol{(x, y) = (1, 1)}$ **là cực tiểu và** $\boldsymbol{f(1, 1) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy = 3}$.

C4. $\boldsymbol{f = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 7y + 5}$.
G: Có …

CHƯƠNG 2 TÍCH PHÂN BỘI

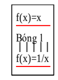
A. TÍCH PHÂN KÉP

1. ĐỊNH NGHĨA

- ĐN: Cho HS $z = f(x, y)$. Xét tích phân kép (tích phân bội 2) có dạng $I = \iint_D f(x,y)dxdy$, với miền $D = \{a \le x \le b;\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\} \subset R^2$ thì

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right).$$

VD1. C7. Tính



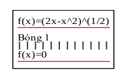
$$I = \iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy;\ D = \{x = 2; xy = 1; y = x\}.$$

G: Có $xy = 1 \to y = \frac{1}{x}$. Xét PT $x = \frac{1}{x} \to x^2 = 1 \to x = 1 > 0 \to A(1,1)$. Vẽ miền D: $x = 2; y = \frac{1}{x}; y = x$. Chiếu D thẳng xuống trục Ox. Nên miền $D = \left\{1 \le x \le 2;\ \frac{1}{x} \le y \le x\right\}$. Vậy

$$I = \iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy = \int_1^2 dx\left(\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}dy\right) = \int_1^2 x^2dx\left(\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{y^2}dy\right) = \int_1^2 x^2dx.\left(-\frac{1}{y}\right)\Big|_{y=\frac{1}{x}}^{x}$$

$$= \int_1^2 x^2dx.\left(-\frac{1}{x} + x\right) = \int_1^2 (x^3 - x)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 = \cdots$$

VD2. C8. Tính



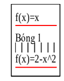
$$I = \iint_D xydxdy;\ D = \left\{y = \sqrt{2x - x^2}; y = 0\right\}.$$

G: Vẽ miền D: $y = \sqrt{2x - x^2} \to y \ge 0;\ y^2 = 2x - x^2 \to x^2 - 2x + y^2 = 0 \to (x-1)^2 + y^2 = 1 \to I(1,0); R = 1; y = 0: Ox$. Chiếu thẳng D xuống trục Ox. Nên miền $D = \left\{0 \le x \le 2; 0 \le y \le \sqrt{2x - x^2}\right\}$. Vậy

$$I = \iint_D xydxdy = \int_0^2 dx\left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xydy\right) = \int_0^2 xdx\left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} ydy\right) = \int_0^2 xdx.\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$= \int_0^2 xdx.\left[\frac{2x - x^2}{2} - 0\right] = \frac{1}{2}.\int_0^2 (2x^2 - x^3)dx = \cdots$$

VD3. a) Tính



$$I=\iint_D xydxdy\,;\ D=\{x\geq 0;y=x;y=2-x^2\}.$$

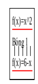
G: Có PT $x=2-x^2\rightarrow x^2+x-2=0\rightarrow x=1>0\rightarrow A(1,1)$. Vẽ miền D: $x=0$: Oy; $y=x$; $y=2-x^2\rightarrow y'=-2x=0\rightarrow x=0\rightarrow I(0,2)$.

Chiếu D thẳng xuống trục Ox. Nên miền $D=\{0\leq x\leq 1;\ x\leq y\leq 2-x^2\}$. Vậy

$$I=\iint_D xydxdy=\int_0^1 dx\left(\int_x^{2-x^2} xydy\right)=\int_0^1 xdx\left(\int_x^{2-x^2} ydy\right)=\int_0^1 xdx.\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=x}^{2-x^2}$$

$$=\int_0^1 xdx.\left[\frac{(2-x^2)^2}{2}-\frac{x^2}{2}\right]=\int_0^1 x.\frac{x^4-5x^2+4}{2}dx=\frac{1}{2}.\int_0^1(x^5-5x^3+4x)dx=\cdots$$

b) Tính



$$I=\iint_D (x+y)dxdy\,;\ D=\{y=x^2;y=6-x\}.$$

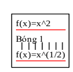
G: Có PT $x^2=6-x\rightarrow x^2+x-6=0\rightarrow x=-3;x=2\rightarrow A(-3,9);B(2,4)$. Vẽ miền $D=\{y=x^2;y=6-x\}$. Chiếu miền D thẳng xuống Ox $\rightarrow D=\{-3\leq x\leq 2;x^2\leq y\leq 6-x\}$. Nên

$$I=\iint_D (x+y)dxdy=\int_{-3}^2 dx\left(\int_{x^2}^{6-x}(x+y)dy\right)=\int_{-3}^2 dx.\ \left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=x^2}^{6-x}$$

$$=\int_{-3}^2\left[x(6-x)+\frac{(6-x)^2}{2}-\left(x^3+\frac{x^4}{2}\right)\right]dx$$

$$=\int_{-3}^2\frac{12x-2x^2+x^2-12x+36-2x^3-x^4}{2}dx=\frac{1}{2}.\int_{-3}^2(-x^4-2x^3-x^2+36)dx=\cdots$$

c) Tính



$$I=\iint_D x^2(y-x)dxdy\,;\ D=\{y=x^2;x=y^2\}.$$

G: Có $x=y^2\rightarrow y=\sqrt{x}$. Xét PT $x^2=\sqrt{x}\rightarrow x^4=x\rightarrow x^4-x=x.(x^3-1)=0\rightarrow x=0;x=1\rightarrow O(0,0);A(1,1)$. Vẽ miền D: $y=x^2;x=y^2$. Chiếu miền D thẳng xuống trục $Ox\rightarrow D=\left\{0\leq x\leq 1;x^2\leq y\leq\sqrt{x}\right\}$. Nên

$$I=\iint_D x^2(y-x)dxdy=\int_0^1 dx\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2.(y-x)dy\right)=\int_0^1 x^2dx\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(y-x)dy\right)$$
$$=\int_0^1 x^2dx.\left(\frac{y^2}{2}-xy\right)\Big|_{y=x^2}^{\sqrt{x}}=\int_0^1 x^2dx.\left[\frac{x}{2}-x\sqrt{x}-\left(\frac{x^4}{2}-x^3\right)\right]$$
$$=\int_0^1\left(\frac{x^3}{2}-x^{\frac{7}{2}}-\frac{x^6}{2}+x^5\right)dx=\left(\frac{x^4}{8}+\cdots\right)\Big|_0^1=\cdots$$

d) Tính $I=\iint_D xydxdy\,;D=\{x=0;y=1;y=2x-x^2\}$.

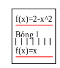
e) Tính $I=\iint_D(1+x+2y)dxdy\,;D=\{y=-x;y=\sqrt{x};x=2\}$.

f) Tính $I=\iint_D(x-y)dxdy\,;D=\{y=2-x^2;y=2x-1\}$.

Bài tập

B1. Tính các tích phân

C1. Tính

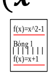


$$I=\iint_D(x-y)dxdy\,;\ D=\{y=x;y=2-x^2\}.$$

G: Xét PT $x=2-x^2\to x^2+x-2=0\to x=1;x=-2\to A(-2;-2);B(1,1)$. **Vẽ miền** D: $y=x;y=2-x^2\to y'=-2x=0\to x=0\to I(0,2)$. **Chiếu miền D xuống thẳng trục** $Ox\to D=\{-2\le x\le 1;x\le y\le 2-x^2\}$. **Nên**

$$I=\iint_D(x-y)dxdy=\int_{-2}^1 dx\int_x^{2-x^2}(x-y)dy=\int_{-2}^1 dx.\left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=x}^{2-x^2}$$
$$=\int_{-2}^1 dx.\left[x(2-x^2)-\frac{(2-x^2)^2}{2}-\left(x^2-\frac{x^2}{2}\right)\right]=\int_{-2}^1\frac{4x-2x^3-4+4x^2-x^4-x^2}{2}dx$$
$$=\cdots$$

C2. Tính $I=\iint_D(x^2+2y)dxdy\,;D=\{y=x^2-1;y=x+1\}$.



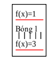
G: Xét PT $x^2-1=x+1\to\cdots$

2. Tích phân trên HCN

- ĐL: Nếu $\begin{cases} \boldsymbol{miền\ D = \{a \le x \le b;\ c \le y \le d\}} \\ \boldsymbol{f = f(x).g(y)} \end{cases}$ **thì**

$$\boldsymbol{I = \iint_D fdxdy = \iint_D f(x).g(y)dxdy = \int_a^b f(x)dx\ .\int_c^d g(y)dy}$$

VD1. Tính



$$\boldsymbol{I = \iint_D x.y^3dxdy\ ;\ D}$$
$$\boldsymbol{= \{0 \le x \le 4;\ 1 \le y \le 3\}.}$$

G: Có

$$\boldsymbol{I = \iint_D x.y^3dxdy = \int_0^4 xdx\,.\int_1^3 y^3dy = \frac{x^2}{2}|_{x=0}^2.\ \frac{y^4}{4}|_{y=1}^3 = \cdots}$$

b) Tính

$$\boldsymbol{I = \iint_D (cos^2x + sin^2y)dxdy\ ;\ D = \left\{0 \le x \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}.}$$

- Chú ý: $\boldsymbol{cos^2x = \frac{1+cos\ 2x}{2}; sin^2y = \frac{1-cos\ 2y}{2}}$**.**

G: NX miền $\boldsymbol{D = \left\{0 \le x \le \frac{\pi}{2}; 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}}$ **có dạng HCN có các cạnh // Ox, Oy nên tách**

$$\boldsymbol{I = \iint_D (cos^2x + sin^2y)dxdy = \iint_D cos^2xdxdy + \iint_D sin^2ydxdy}$$
$$\boldsymbol{= \iint_D cos^2x.1dxdy + \iint_D 1.sin^2ydxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2xdx\,.\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx\,.\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2ydy}$$
$$\boldsymbol{= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+cos\ 2x}{2}dx\,.\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx\,.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-cos\ 2y}{2}dy}$$
$$\boldsymbol{= \frac{1}{2}.\left(x + \frac{sin\ 2x}{2}\right)|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}.y|_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} + x|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}.\frac{1}{2}.\left(y + \frac{sin\ 2y}{2}\right)|_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} = \cdots}$$

VD2. a) Tính

$$\boldsymbol{I = \iint_D (x^2 + xy^2)dxdy\ ;\ D = \{0 \le x \le 1; 0 \le y \le 2\}.}$$

G: a) Tách

$$\boldsymbol{I = \iint_D x^2dxdy + \iint_D xy^2dxdy = \iint_D x^2.1dxdy + \iint_D x.y^2dxdy}$$
$$\boldsymbol{= \int_0^1 x^2dx\,.\int_0^2 1dy + \int_0^1 xdx\,.\int_0^2 y^2dy = \frac{x^3}{3}|_{x=0}^1.\dots}$$

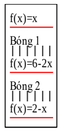
b) Tính $\boldsymbol{I = \iint_D x^2ydxdy\,; D = \{0 \le x \le 1; 1 \le y \le 2\}.}$

G: …

c) Tính $\boldsymbol{I = \iint_D (sin^2x + cos^3y)dxdy\,; D = \left\{0 \le x \le \frac{\pi}{2}; 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}.}$

G: ...

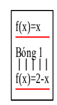
- Ox2.



VD3. C10. Tính $I = \iint_D (x+2y)dxdy\,; D = \Delta ABC; A(1,1); B(2,2); C(4,-2).$

G: Có $AB: A(1,1); B(2,2) \to y = x; BC: y = ax + b\ qua\ B(2,2); C(4,-2)\ thay \to \begin{cases} 2a + b = 2 \\ 4a + b = -2 \end{cases} \to \begin{cases} a = -2 \\ b = 6 \end{cases} \to BC: y = 6 - 2x; AC: y = ax + b\ qua\ A(1,1); C(4,-2) \to \begin{cases} a + b = 1 \\ 4a + b = -2 \end{cases} \to \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \to AC: y = 2 - x$. **Vẽ miền** $D: AB: y = x; BC: y = 6 - 2x; AC: y = 2 - x$ **thẳng xuống trục Ox. Tách** $D = D_1 + D_2$ **với** $D_1 = \{1 \le x \le 2; 2 - x \le y \le x\}; D_2 = \{2 \le x \le 4; 2 - x \le y \le 6 - 2x\}$. **Nên**

$$I = I_1 + I_2 = \int_1^2 dx \int_{2-x}^{x} (x+2y)dy + \int_2^4 dx \int_{2-x}^{6-2x} (x+2y)dy$$
$$= \int_1^2 dx.(xy + y^2)\big|_{y=2-x}^{x} + \int_2^4 dx.(xy+y^2)\big|_{y=2-x}^{6-2x}$$
$$= \int_1^2 [x^2 + x^2 - x(2-x) - (2-x)^2]dx$$
$$+ \int_2^4 [x(6-2x) + (6-2x)^2 - x(2-x) - (2-x)^2]dx = \cdots$$



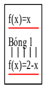
b) Tính $I = \iint_D (x+3y)dxdy\,; D: \Delta OAB; A(1,1); B(0,2).$

G: Vẽ miền $D: O(0,0); A(1,1); B(0,2).$

- Có $OA: A(1,1) \to OA: y = x;\ AB: y = ax + b \to thay\ A(1,1); B(0,2) \to \begin{cases} a + b = 1 \\ b = 2 \end{cases} \to a = -1 \to AB: y = 2 - x; OB = Oy: x = 0 \to D: OA: y = x; AB: y = 2 - x; OB: x = 0$. **Chiếu miền D thẳng xuống trục Ox được** $D = \{0 \le x \le 1; x \le y \le 2 - x\}$. **Nên**

$$I = \iint_D (x+3y)dxdy = \int_0^1 dx \int_x^{2-x} (x+3y)dy = \int_0^1 dx.\left(xy + \frac{3y^2}{2}\right)\Big|_{y=x}^{2-x}$$
$$= \int_0^1 dx.\left[x(2-x) + \frac{3(2-x)^2}{2} - \left(x^2 + \frac{3x^2}{2}\right)\right]$$
$$= \int_0^1 \frac{4x - 2x^2 + 12 - 12x + 3x^2 - 5x^2}{2} dx = \cdots$$

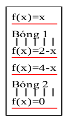
c) Tính $I = \iint_D (4x - y)dxdy$; $D = \Delta ABC; A(1,0); B(0,1); C(1,3)$.



G: ...

Bài tập

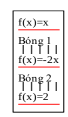
C3. Tính $I = \iint_D (x + y)dxdy; D = \{y = x; y = 0; x + y = 2; x + y = 4\}$.



G: Vẽ miền $D: y = x; y = 0: ox; x + y = 2 \to y = 2 - x; x + y = 4 \to y = 4 - x$. **Xét PT** $x = 2 - x \to x = 1 \to A(1,1); x = 4 - x \to x = 2 \to B(2,2)$. **Chiếu miền D xuống trục** $Ox \to D = D_1 + D_2 \to \cdots$

3. THEO Oy

VD1. Tính

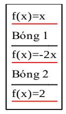


$$I = \iint_D (4x + y)dxdy;\ D$$
$$= \Delta OAB; A(2,2); B(-1,2).$$

G: Vẽ miền $D = \Delta OAB$.

- Có PT $OA: A(2,2) \to OA: y = x;\ OB: y = ax\ \ thay\ B(-1,2) \to -a = 2 \to a = -2 \to OB: y = -2x; AB: y = 2$. **Nên** $OA: y = x; OB: y = -2x; AB: y = 2$. **Chiếu miền D thẳng xuống trục** $Ox \to -1 \le x \le 2$. **Tách** $D = D_1 + D_2$ **với** $D_1 = \{-1 \le x \le 0; -2x \le y \le 2\};\ D_2 = \{0 \le x \le 2; x \le y \le 2\}$. **Nên**

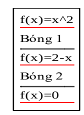
$$I = \iint_D (4x + y)dxdy = I_1 + I_2 = \int_{-1}^{0} dx \int_{-2x}^{2} (4x + y)dy + \int_{0}^{2} dx \int_{x}^{2} (4x + y)dy$$
$$= \int_{-1}^{0} dx.\left(4xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=-2x}^{2} + \int_{0}^{2} dx.\left(4xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=x}^{2}$$
$$= \int_{-1}^{0} [8x + 2 - (-8x + 2x^2)]dx + \cdots = \cdots$$



Cách 2. Chiếu D sang ngang trục $Oy \to 0 \le y \le 2; x: OB \to OA$.
- Có $OA: y = x \to x = y; OB: y = -2x \to x = -\frac{y}{2}$. Chiếu miền D sang ngang trục Oy có (tính từ trái sang phải) $D = \left\{0 \le y \le 2; -\frac{y}{2} \le x \le y\right\}$. Nên

$$I = \iint_D (4x+y)dxdy = \int_0^2 dy\left(\int_{-\frac{y}{2}}^{y}(4x+y)dx\right) = \int_0^2 dy\,.\,(2x^2+xy)\Big|_{x=-\frac{y}{2}}^{y}$$

$$= \int_0^2\left[2y^2+y^2-\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^2}{2}\right)\right]dy = \int_0^2 3y^2dy = y^3 \ldots$$



VD2. a) Tính

$$I = \iint_D (2x+y)dxdy\,;\ D$$
$$= \{y=0; y=x^2; x+y=2\}.$$

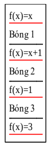
G: Vẽ miền D: $y = 0$: Ox; $y = x^2$; $x + y = 2 \to y = 2 - x$. Có PT $x^2 = 2 - x \to x^2 + x - 2 = 0 \to x = 1 > 0 \to A(1,1)$.
- NX: Nếu chiếu miền D xuống trục Ox thì ta phải tách $D = D_1 + D_2 \to I = I_1 + I_2 = \cdots$
- Nên chiếu D sang ngang trục Oy được $0 \le y \le 1$. Có $y = x^2 \to x = \sqrt{y} \ge 0$; $x + y = 2 \to x = 2 - y$.
Tính từ trái sang phải được $D = \left\{0 \le y \le 1; \sqrt{y} \le x \le 2 - y\right\}$. Nên

$$I = \iint_D (2x+y)dxdy = \int_0^1 dy\left(\int_{\sqrt{y}}^{2-y}(2x+y)dx\right) = \int_0^1 dy\,.\,(x^2+xy)\Big|_{x=\sqrt{y}}^{2-y}$$

$$= \int_0^1 [(2-y)^2+(2-y)y-(y+y\sqrt{y})]dy = \int_0^1\left[4-4y+y^2+2y-y^2-y-y^{\frac{3}{2}}\right]dy$$

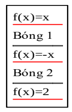
$$= \int_0^1 [4-3y-y^{\frac{3}{2}}]dy = \cdots$$

b) Tính $I = \iint_D (x^2+y^2)dxdy\,; D = \{y = x; y = x+1; y = 1; y = 3\}$.



G: …

c) Tính $I = \iint_D (2x - y)dxdy\,; D = \Delta OAB; A(2,2); B(-2,2).$



- NX: Nếu $f(-x, y) = f(x, y)$, **tức f là hàm chẵn đối với ẩn x và miền** $D = D_1 + D_2; D_1; D_2$ **đối xứng nhau qua trục Oy thì**

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1 + D_2} f(x,y)dxdy = 2.\iint_{D_1} f(x,y)dxdy.$$

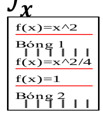
- Nếu $f(-x, y) = -f(x, y)$, **tức f là hàm lẻ đối với ẩn x thì**

$$I = \int_{-a}^{a} dx \int f(x,y)dy = 0.$$

VD1. Tính $I = \int_{-1}^{1} dx \int_{x}^{2x+3} (x^3y + xy^4)dy.$

G: Vì hàm $f(x, y) = x^3y + xy^4$ **là hàm lẻ đối với ẩn x nên**

$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{x}^{2x+3} (x^3y + xy^4)dy = 0.$$



VD2. C9. Tính $I = \iint_D x^2ydxdy\,; D = \left\{y = x^2; y = \frac{x^2}{4}; y = 1\right\}.$

G: Cho $x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1; \frac{x^2}{4} = 1 \rightarrow x = \pm 2$. **Vẽ miền** $D: y = x^2; y = \frac{x^2}{4}; y = 1$. **Nhận thấy miền** $D = D_1 + D_2; D_1; D_2$ **đối xứng nhau qua trục Oy và** $f(x, y) = x^2y$ **là hàm chẵn đối với ẩn x nên**

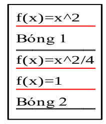
$$I = \iint_D x^2ydxdy = 2.\iint_{D_1} x^2ydxdy = 2.I_1$$

với $I_1 = \iint_{D_1} x^2ydxdy\,; D_1 = \left\{x \geq 0; y = x^2; y = \frac{x^2}{4}; y = 1\right\}.$

NX: Nếu chiếu miền D_1 thẳng xuống trục Ox thì $D_1 = D_{11} + D_{12}$ với $D_{11} = \left\{0 \le x \le 1; \frac{x^2}{4} \le y \le x^2\right\}; D_{12} = \left\{1 \le x \le 2; \frac{x^2}{4} \le y \le 1\right\}$. Nên

$$I_1 = I_{11} + I_{12} = \int_0^1 dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{x^2} x^2 y dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{1} x^2 y dy = \cdots$$

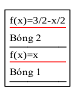
Khá là phức tạp.



- Giải tiếp VD2. Nhưng nếu ta chiếu D_1 sang ngang trục Oy, có $0 \le y \le 1; y = x^2 \to x = \sqrt{y} \ge 0; y = \frac{x^2}{4} \to x = 2\sqrt{y} \ge 0$ thì $D_1 = \{0 \le y \le 1; \sqrt{y} \le x \le 2\sqrt{y}\}$. Nên

$$I_1 = \int_0^1 dy \left(\int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} x^2 y dx \right) = \int_0^1 y dy . \int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} x^2 dx = \int_0^1 y dy . \frac{x^3}{3} \Big|_{x=\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} = \int_0^1 y . \frac{8y\sqrt{y} - y\sqrt{y}}{3} dy$$

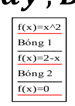
$$= \frac{7}{3} . \int_0^1 y^{\frac{5}{2}} dy = \cdots = \frac{2}{3} \to I = 2 . I_1 = \frac{4}{3}.$$



b) Tính $I = \iint_D (4x - y) dxdy ; D = \Delta OAB; A(1,1); B(3,0)$.
G: Chiếu sang ngang trục Oy được ...

Bài tập

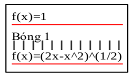
C4. Tính $I = \iint_D (x^3 + 4xy) dxdy ; D = \{y = 0; x = \sqrt{y}; y = 2 - x\}$.



G: Vẽ miền D: $y = 0$: Ox; $x = \sqrt{y} \to y = x^2$; $y = 2 - x$. Có PT $x^2 = 2 - x \to x^2 + x - 2 = 0 \to x = 1 > 0 \to A(1,1)$.
- NX: Nếu chiếu miền D xuống trục Ox thì ta phải tách $D = D_1 + D_2 \to I = I_1 + I_2 = \cdots$

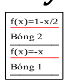
- Nên chiếu D sang ngang trục Oy được $0 \le y \le 1$. Có $y = x^2 \to x = \sqrt{y} \ge 0; x + y = 2 \to x = 2 - y$. Tính từ trái sang phải được $D = \left\{0 \le y \le 1; \sqrt{y} \le x \le 2 - y\right\}$. Nên

C5. Tính $I = \iint_D xydxdy\,; D = \{x = 0; y = 1; x^2 + y^2 = 2x\}$.



G: …

C6. Tính $I = \iint_D (3x + 4y)dxdy\,; D = \Delta OAB; A(-2, 2); B(2, 0)$.



G: Chiếu sang ngang trục Oy được ...

c) Tính $I = \iint_D (sin^2x + cos^3y)dxdy\,; D = \left\{0 \le x \le \frac{\pi}{2}; 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$.

G: ...

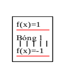
$$I = \int f(x)dx\,;\ x = x(t) \to I = \int f\big(x(t)\big).x'(t)dt.$$

5. PP ĐỔI BIẾN SỐ

- **ĐL:** Xét $I = \iint_D f(x, y)dxdy$. Đặt $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$; $(x, y) \in D \to (u, v) \in D'$. Đặt định thức $J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = x'_u.y'_v - x'_v.y'_u$. Thì

$$I = \iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D'} f\big(x(u, v), y(u, v)\big).|J|dudv$$

VD1. Tính

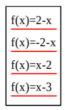


$$I = \iint_D (x + 3y)dxdy\,;\ D = \{x + y = 1; x + y = 2; x - y = 1; x - y = 3\}.$$

G: Đặt $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u+v = 2x \\ u-v = 2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases} \rightarrow J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$

Và miền $D = \{x+y=1; x+y=2; x-y=1; x-y=3\}; u = x+y; v = x-y \rightarrow D' = \{1 \le u \le 2; 1 \le v \le 3\}$ **là HCN có các cạnh // với 2 trục Ou, Ov nên**

$$I = \iint_{D'} f\big(x(u,v), y(u,v)\big).|J|dudv = \int_1^2 du \int_1^3 \left(\frac{u+v}{2} + 3.\frac{u-v}{2}\right).\left|-\frac{1}{2}\right| dv = \frac{1}{2}.\int_1^2 du \int_1^3 (2u-v)dv$$
$$= \frac{1}{2}.\left(\int_1^2 du \int_1^3 2udv - \int_1^2 du \int_1^3 vdv\right) = \frac{1}{2}.\left(\int_1^2 du \int_1^3 u.2dv - \int_1^2 du \int_1^3 1.vdv\right)$$
$$= \frac{1}{2}.\left[\int_1^2 udu.\int_1^3 2dv - \int_1^2 1du.\int_1^3 vdv\right] = \cdots$$



VD2. Tính

$$I = \iint_D (x^2+y^2)dxdy; D = \{x+y=2;\ x+y=-2;\ x-y=2;\ x-y=3\}.$$

-NX: Miền D là hbh (HCN) có các cạnh ko // với các trục Ox, Oy nên nếu tính trực tiếp, ví dụ chiếu xuống trục Ox thì phải tách D thành 3 phần, khá là phức tạp. Nếu sử dụng đổi biến, ta có thể đưa D thành miền D' có dạng HCN có các cạnh // với 2 trục.

Giải. Đặt $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases} \rightarrow J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$

Và miền $D' = \{-2 \le u \le 2; 2 \le v \le 3\}$ **là HCN có các cạnh // với 2 trục Ou, Ov nên**

$$I = \iint_D (x^2+y^2)dxdy = \iint_{D'} f\big(x(u,v), y(u,v)\big).|J|dudv = \iint_{D'} \left[\frac{(u+v)^2}{4} + \frac{(u-v)^2}{4}\right].\left|-\frac{1}{2}\right| dudv$$
$$= \frac{1}{4}.\iint_{D'} (u^2+v^2)dudv = \frac{1}{4}.\left(\iint_{D'} u^2.1dudv + \iint_{D'} 1.v^2dudv\right)$$
$$= \frac{1}{4}.\left(\int_{-2}^2 u^2du.\int_2^3 1dv + \int_{-2}^2 1du.\int_2^3 v^2dv\right) = \cdots$$

b) Tính $I = \iint_D xydxdy; D = \{xy=1; xy=3; y=2x; y=4x\}$ **bằng cách đặt** $\begin{cases} u = \sqrt{xy} \\ v = \sqrt{\frac{y}{x}}. \end{cases}$

G: Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{xy} \\ v = \sqrt{\frac{y}{x}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy = u^2 \\ \frac{y}{x} = v^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{u}{v} \\ y = uv \end{cases} \rightarrow J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ v & u \end{vmatrix} = \frac{2u}{v}.$

Và miền $D' = \{1 \le u \le \sqrt{3}; \sqrt{2} \le v \le 2\}$ **là HCN có các cạnh // với 2 trục nên**

$$I = \iint_D xydxdy = \iint_{D'} \frac{u}{v}.uv.\frac{2u}{v}\,du\,dv = \iint_{D'} 2u^3.\frac{1}{v}du\,dv = \int_1^{\sqrt{3}} 2u^3du.\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{v}dv = \cdots$$

c) Tính

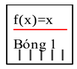
$$I=\iint_D e^{(x+y)^2}dxdy\,;D=\{x\geq 0;y\geq 0;x+y\leq 1\}.$$

bằng cách đổi biến $\begin{cases} u=x+y \\ v=y. \end{cases}$

G: Đặt $\begin{cases} u=x+y \\ v=y \end{cases}\to\begin{cases} x=u-y=u-v \\ y=v \end{cases}\to J=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$**. Và** $D'=\{u-v\geq 0;v\geq 0;u\leq 1\}$**. Coi u là trục hoành Ox và v là trục tung Oy. Hoặc ta biến đổi**

$$D'=\{u\geq v;v\geq 0;u\leq 1\}=\{0\leq u\leq 1;0\leq v\leq u\}.$$

Nên



$$\begin{aligned} I=\iint_D e^{(x+y)^2}dxdy &= \iint_{D'} e^{u^2}.|1|dudv \\ &= \int_0^1 e^{u^2}du\int_0^u dv \\ &= \int_0^1 e^{u^2}du.v|_{v=0}^{u}=\int_0^1 e^{u^2}.udu \\ &= \frac{1}{2}.\int_0^1 e^{u^2}\,d(u^2)=\frac{1}{2}.e^{u^2}|_0^1 \\ &= \frac{e-1}{2}. \end{aligned}$$

Bài tập

Bài 3. Đổi biến số

1. **C1. Tính** $I=\iint_D(x^3-y^3)dxdy\,;D=\{x+y=1;x+y=4;x-y=1;x-y=-1\}$.

G: Đặt $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}\to\begin{cases} x=\frac{u+v}{2} \\ y=\frac{u-v}{2} \end{cases}\to J=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.$

Và miền $D'=\{1\leq u\leq 4;-1\leq v\leq 1\}$ **là HCN có các cạnh // với 2 trục Ou, Ov nên**

$$I=\iint_{D'} f\big(x(u,v),y(u,v)\big).|J|dudv=\cdots$$

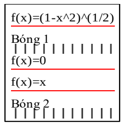
6. TÍCH PHÂN TRÊN HÌNH TRÒN VÀ PP ĐỔI TỌA ĐỘ CỰC

- Tọa độ cực. Trên mp Oxy, cho điểm $M(x,y)$**. Khi đó đặt**

$\begin{cases} r=OM=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0 \\ \varphi=(\widehat{Ox,OM})\in[0;2\pi];\cos\varphi=\frac{x}{r};\sin\varphi=\frac{y}{r} \end{cases}\to\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi. \end{cases}$ **Khi đó cặp** $M(r,\varphi)$ **gọi là tọa độ cực của điểm M.**

- ĐL: Xét $I=\iint_D f(x,y)dxdy$**. Đặt** $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi; \end{cases} r=OM=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0;\varphi=(\widehat{Ox,OM})\in[0;2\pi]\to$ $J=r$**. Nên** $D'=\{a\leq\varphi\leq b;r_1(\varphi)\leq r\leq r_2(\varphi)\}$**. Thì**

$$I=\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f(r\cos\varphi;r\sin\varphi).rd\varphi dr=\int_a^b d\varphi\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi;r\sin\varphi).rdr$$



VD1. Tính

$$I=\iint_D (x^2+y^2)dxdy\,;\ D: x=\sqrt{1-y^2}; y=x; y=0.$$

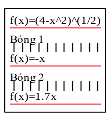
G: Vẽ $D: x=\sqrt{1-y^2}; x\ge 0 \to x^2=1-y^2 \to x^2+y^2=1 \to O(0,0); R=1; y=x; y=0: Ox.$

- Đặt $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi. \end{cases}$ **Vì** $M\in D \to \varphi=(\widehat{Ox,OM})\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ **và** $r=OM=\sqrt{x^2+y^2}\in[0,1]\to x^2+y^2=r^2$ **nên** $J=r; D'=\{0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}; 0\le r\le 1\}$. **Vậy**

$$I=\iint_D (x^2+y^2)dxdy=\iint_{D'} r^2.rd\varphi dr=\iint_{D'} 1.r^3d\varphi dr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1d\varphi.\int_0^1 r^3\,dr=\varphi|_0^{\frac{\pi}{4}}.\frac{r^4}{4}|_0^1=\cdots$$

- Chú ý: Nếu đường thẳng $d: y=kx\to k$: **hệ số góc. Gọi góc**

$$a=(\widehat{Ox,d})\to \tan a=k.$$



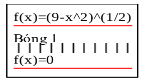
b) Tính

$$I=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy\,; D=\{y=\sqrt{4-x^2}; y=x\sqrt{3}; y=-x\}.$$

G: Vẽ miền $D: y=\sqrt{4-x^2}\to y\ge 0; y^2=4-x^2\to x^2+y^2=4\to O(0,0); R=2; d_1: y=x\sqrt{3}; d_2: y=-x$. **Đặt** $a=(\widehat{Ox,d_1})\to\tan a=k=\sqrt{3}\to a=\frac{\pi}{3};\ \ b=(\widehat{Ox,d_2})\to\tan b=k=-1\to b=\frac{3\pi}{4}$. **(dùng kết hợp hình vẽ)**

- Nên đặt $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi. \end{cases}$ **Vì** $M\in D\to\varphi=(\widehat{Ox,OM})\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right]$ **và** $r=OM=\sqrt{x^2+y^2}\in[0,2]\to x^2+y^2=r^2$ **nên** $J=r; D'=\{\frac{\pi}{3}\le\varphi\le\frac{3\pi}{4}; 0\le r\le 2\}$. **Vậy**

$$I=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy=\iint_{D'} r.\ rd\varphi dr=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi.\int_0^2 r^2dr=\varphi|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}}.\frac{r^3}{3}|_0^2=\cdots$$



VD2. C5. Tính

$$I=\iint_D ln\,(1+x^2+y^2)dxdy\,;D=\{x^2+y^2\le 9;y\ge 0\}.$$

G: Vẽ miền $D: x^2+y^2\le 9\to O(0,0);R=3;y\ge 0.$

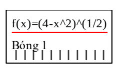
- Đặt $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}\to J=r$. **Vì** $M\in D\to\varphi=(\widehat{Ox,OM})\in[0,\pi]$ **và** $r=OM=\sqrt{x^2+y^2}\in[0,3]\to x^2+y^2=r^2;D'=\{\varphi\in[0,\pi];r\in[0,3]\}$. **Vậy**

$$I=\iint_D ln\,(1+x^2+y^2)dxdy=\iint_{D'} ln\,(1+r^2).r\,d\varphi dr=\int_0^{\pi}1d\varphi.\int_0^3 ln\,(1+r^2).rdr=\pi.J$$

với $J=\int_0^3 ln\,(r^2+1).rdr$. **Áp dụng TPTP, đặt**

$$\begin{cases}u=ln\,(r^2+1)\\ dv=rdr\end{cases}\to\begin{cases}u'=\dfrac{2r}{r^2+1}\\ v=\displaystyle\int rdr=\dfrac{r^2+c}{2}=\dfrac{r^2+1}{2}.\end{cases}$$

Nên $J=uv-\int vdu=ln\,(r^2+1).\frac{r^2+1}{2}-\int_0^3 rdr=\left[ln\,(r^2+1).\frac{r^2+1}{2}-\frac{r^2}{2}\right]|_0^3=\cdots\to I=\pi.J=\cdots$



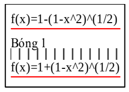
b) Tính

$$I=\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy\,;D=\{x^2+y^2\le 4;y\ge 0\}.$$

G: Vẽ miền $D=\{x^2+y^2\le 4;y\ge 0\}\to O(0,0);R=2.$

- Đặt $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}\to J=r$. **Nên** $M\in D\to\varphi=(\widehat{Ox,OM})\in[0;\pi];J=r;r=OM\in[0,2]$. **Nên**

$$I=\int_0^{\pi}d\varphi\ ...$$



VD3. Tính

$$I=\iint_D x.\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy\,;\, D=\{x^2+y^2\le 2y\}.$$

G: Có $D: x^2+y^2\le 2y \to x^2+(y-1)^2\le 1 \to I(0,1); R=1.$

- Đặt $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \to J=r$. **Vì** $M\in D \to \varphi=(\widehat{Ox,OM})\in[0;\pi]$. **Và** $r=OM=\sqrt{x^2+y^2}\to x^2+y^2=r^2$. **Thay vào PT miền** $D: x^2+y^2\le 2y \to r^2\le 2r\sin\varphi \to r\le 2\sin\varphi \to D'=\{0\le\varphi\le\pi; 0\le r\le 2\sin\varphi\}$. **Vậy**

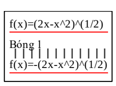
$$I=\iint_D x.\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\iint_{D'} r\cos\varphi.r.rd\varphi dr=\int_0^{\pi}\cos\varphi d\varphi\int_0^{2\sin\varphi} r^3dr=\int_0^{\pi}\cos\varphi d\varphi.\frac{r^4}{4}\Big|_{r=0}^{2\sin\varphi}$$

$$=\int_0^{\pi}\cos\varphi.4\sin^4\varphi d\varphi \;=4.\int_0^{\pi}\sin^4\varphi d(\sin\varphi)=5.\frac{\sin^5\varphi}{5}\Big|_0^{\pi}=0.$$

- Chú ý: Nếu $M\in\widehat{xOy}\to\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Nếu $M\in\widehat{xOx'}\to\varphi\in[0;\pi]$.

Nếu $M\in$ **cả 4 góc phần tư** $\to\varphi\in[0;2\pi]$.



VD4. a) Tính

$$I=\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy\,;\, D=\{(x-1)^2+y^2\le 1\}.$$

G: a) Vẽ miền $D: (x-1)^2+y^2\le 1\to I(1,0); R=1.$

- Đặt $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \to J=r$. **Nên** $M\in D\to\varphi=(\widehat{Ox,OM})$. **Nên khi** $M\in Oy'\to\varphi=(\widehat{Ox,OM})=-\frac{\pi}{2}; M\in Ox\to\varphi=(\widehat{Ox,OM})=0; M\in Oy\to\;\varphi=(\widehat{Ox,OM})=\frac{\pi}{2}$. **Nên** $\varphi=(\widehat{Ox,OM})\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. **(dựa vào hình vẽ)**

- Tìm cận của r dựa vào PT của miền D: Và thay $x^2+y^2=r^2$ **vào PT** $D: (x-1)^2+y^2\le 1\to x^2-2x+y^2\le 0\to x^2+y^2\le 2x\to r^2\le 2r\cos\varphi\to r\le 2\cos\varphi$. **Vậy miền** $D=\{-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}; 0\le r\le 2\cos\varphi\}$

$$\boldsymbol{I=\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\sqrt{4-r^2}.rdr=-\frac{1}{2}.\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\sqrt{4-r^2}.d(4-r^2)}$$

$$\boldsymbol{=-\frac{1}{2}.\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi.\frac{(4-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\,\Big|_{r=0}^{2\cos\varphi}=-\frac{1}{3}.\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(8sin^3\varphi-8)d\varphi}$$

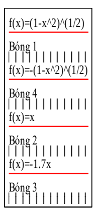
$$\boldsymbol{=-\frac{1}{3}.\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[(8(1-cos^2\varphi).sin\,\varphi-8)]d\varphi=\cdots}$$

c) Tính $\boldsymbol{I=\iint_D\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)dxdy\,;D=\{x^2+y^2\le 1;y\ge 0\}}$.

d) Tính $\boldsymbol{I=\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy\,;D=\left\{y=\sqrt{1-x^2};y=-x\sqrt{3};y=x\right\}}$.

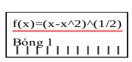
e) Tính $\boldsymbol{I=\iint_D\frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,;D=\{x^2+y^2\le 1;x\ge 0;y\ge 0\}}$.

Bài tập



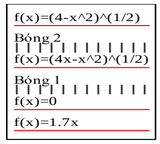
2. **C2.** $\boldsymbol{I=\iint_D\sqrt{(x^2+y^2)^3}dxdy\,;D\!:x=\sqrt{1-y^2};y=x;y=-x.\sqrt{3}}$

G: …



3. **C4.** $\boldsymbol{I=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy\,;D\!:x^2+y^2\le x;y\ge 0}$.

G: …



b)* Tính

$$I = \iint_D (2 - xy)dxdy\,; D = \{4 \le x^2 + y^2 \le 4x; y \ge 0\}.$$

G: Vẽ $D: x^2 + y^2 \ge 4 \to OM \ge 2; x^2 + y^2 \le 4x \to (x-2)^2 + y^2 \le 4 \to I(2,0); R = 2 \to IM \le 2; y \ge 0.$

- Gọi N là giao điểm của 2 đường tròn $\to \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 4x \end{cases} \to 4x = 4 \to x = 1 \to y = \sqrt{3} \to N(1, \sqrt{3}) \to r = \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \to \begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \to \varphi = (\widehat{Ox, ON}) = \frac{\pi}{3}.$

- Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \to J = r$. **Vì** $M \in D \to OM \in (\widehat{Ox, ON}) = \frac{\pi}{3} \to \varphi = (\widehat{Ox, OM}) \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$. **Và thay** $x^2 + y^2 = r^2$ **vào PT** $D: 4 \le x^2 + y^2 \le 4x \to 4 \le r^2 \le 4r\cos\varphi \to 2 \le r \le 4\cos\varphi$. **Nên** $D' = \left\{0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}; 2 \le r \le 4\cos\varphi\right\}$. **Vậy**

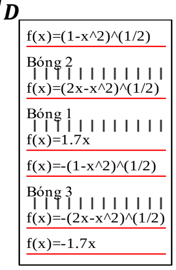
$$I = \iint_D (2 - xy)dxdy = \iint_{D'} (2 - r^2 \sin\varphi\cos\varphi)\,.\,r\,d\varphi dr = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_2^{4\cos\varphi} (2r - r^3\sin\varphi\cos\varphi)dr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi.\left(r^2 - \frac{r^4}{4}.\sin\varphi\cos\varphi\right)\Big|_{r=2}^{4\cos\varphi}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} [16\cos^2\varphi - 64\sin\varphi\cos^5\varphi - 4 + 4\sin\varphi\cos\varphi]d\varphi = \cdots$$

c) *C3. Tính

$$I = \iint_D (1 + xy)dxdy\,; D: 1 \le x^2 + y^2 \le 2x.$$



G: Vẽ $D: x^2 + y^2 \ge 1 \to OM \ge 1; x^2 + y^2 \le 2x \to (x-1)^2 + y^2 \le 1 \to I(1,0); R = 1 \to IM \le 1.$

- Gọi N, P là giao điểm của 2 đường tròn $\to \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2=2x \end{cases} \to 2x=1 \to x=\frac{1}{2} \to y=\frac{\sqrt{3}}{2} \to N\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \to$ $r=\sqrt{x^2+y^2}=1 \to \begin{cases} \cos\varphi=\frac{x}{r}=\frac{1}{2} \\ \sin\varphi=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \to \varphi_1=(\widehat{Ox,ON})=\frac{\pi}{3};\varphi_2=(\widehat{Ox,OP})=-\frac{\pi}{3}$.

- Đặt $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \to J=r$. **Vì** $M\in D;(\widehat{Ox,ON})=\frac{\pi}{3}\to\varphi=(\widehat{Ox,OM})\in\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$. **Và thay** $x^2+y^2=r^2$ **vào PT** D: $1\le x^2+y^2\le 2x \to 1\le r^2\le 2r\cos\varphi \to 1\le r\le 2\cos\varphi$. **Nên** $D'=\left\{-\frac{\pi}{3}\le\varphi\le\frac{\pi}{3};1\le r\le 2\cos\varphi\right\}$. **Vậy**

$$I=\iint_D (1+xy)dxdy=\iint_{D'}(1+r^2\sin\varphi\cos\varphi).r\,d\varphi dr=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int_1^{2\cos\varphi}(r-r^3\sin\varphi\cos\varphi)dr$$
$$=\cdots$$

*** TÍCH PHÂN TRÊN ELIP VÀ PP TỌA ĐỘ CỰC SUY RỘNG**

- ĐL: Xét $I=\iint_D f(x,y)dxdy$, **với miền** $D=\left\{(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$. **Đặt** $\begin{cases} x=ar\cos\varphi \\ y=br\sin\varphi \end{cases} \to \varphi\in[0,2\pi];r\in[0,1];J=abr$. **Nên**

x(t)=3 cos t, y(t)=2 sin t

$$I=\iint_D f(x,y)dxdy$$
$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 f(ar\cos\varphi,br\sin\varphi).abrdr$$

VD1. a) Tính

$$I=\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}}dxdy;\ D=\left\{(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}\le 1\right\}.$$

G: Đặt $\begin{cases} x=5r\cos\varphi \\ y=3r\sin\varphi \end{cases} \to \varphi=(\widehat{Ox,OM})\in[0,2\pi];r\in[0,1];J=abr=15r\to D'=\{\varphi\in[0,2\pi];r\in[0,1]\}$. **Vì** $d(1-r^2)=-2rdr$ **nên**

$$I=\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}}dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi}.15rdr$$
$$=-\frac{15}{2}.\int_0^{2\pi}d\varphi.\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,d(1-r^2)=-\frac{15}{2}.\varphi|_0^{2\pi}.\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}|_0^1=\cdots$$

b)* Tính

$$I=\iint_D(12-3x^2-12y^2+5y)dxdy;D=(E):x^2+4y^2\le 4.$$

G: Có $D=(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}\le 1\to$ **đặt** $\begin{cases} x=2r\cos\varphi \\ y=1r\sin\varphi \end{cases} \to M\in D\to\varphi=(\widehat{Ox,OM})\in[0,2\pi];r\in[0,1];J=abr=2r\to D'=\{\varphi=[0,2\pi];r\in[0,1]\}$. **Nên**

$$I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(12-12r^2cos^2\varphi-12r^2sin^2\varphi+5rsin\,\varphi).2rdr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(12-12r^2+5r\,sin\,\varphi).2rdr=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(24r-24r^3+10r^2\,sin\,\varphi)dr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi.\left(12r^2-6r^4+\frac{10}{3}r^3\,sin\,\varphi\right)|_{r=0}^{1}=\int_0^{2\pi}\left(6+\frac{10}{3}sin\,\varphi\right)d\varphi=\cdots$$

x(t)=3 cos t, y(t)=2 sin t

c) C6. Tính $I=\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}dxdy;\ D=\left\{(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1\right\}$.

G: Có miền $D=\left\{(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1\right\}$. **Chuyển sang tọa độ cực suy rộng, đặt** $\begin{cases}x=arcos\,\varphi=3rcos\,\varphi\\ y=brsin\varphi=2rsin\varphi.\end{cases}$ **Vì** $M\in D\to\varphi=(\widehat{Ox,OM})\in[0;2\pi]$.

- Tìm cận của r dựa vào PT của miền $D:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1\to r^2cos^2\varphi+r^2sin^2\varphi=r^2\le 1\to 0\le r\le 1;J=abr=6r\to D'=\{\varphi\in[0;2\pi];0\le r\le 1\}$. **Vì** $d(1-r^2)=-2rdr$ **nên**

$$I=\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2cos^2\varphi-r^2sin^2\varphi}\,.6rdr=6.\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,.rdr$$

$$=-3.\int_0^{2\pi}1d\varphi\,.\int_0^1(1-r^2)^{\frac{1}{2}}d(1-r^2)=-3.\varphi|_0^{2\pi}.\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\ |_0^1=\cdots$$

d) Tính $I=\iint_D\left(2-\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}\right)^3dxdy;\ \ D=\left\{E:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}\le 1\right\}$.

G: Có miền $D=\left\{(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}\le 1\right\}$. **Chuyển sang tọa độ cực suy rộng, đặt** $\begin{cases}x=arcos\,\varphi=5rcos\,\varphi\\ y=brsin\varphi=3rsin\varphi.\end{cases}$ **Vì** $M\in D\to\varphi=(\widehat{Ox,OM})\in[0;2\pi]$.

- Tìm cận của r dựa vào PT của miền $D:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}\le 1\to r^2cos^2\varphi+r^2sin^2\varphi=r^2\le 1\to 0\le r\le 1;J=abr=\cdots$

B. TÍCH PHÂN 3 LỚP

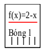
1. ĐN

- ĐN: Xét $I=\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$, **với** $V=\{(x,y)\in D;z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}\in R^3$ **thì**

$$I=\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=\iint_D dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz.$$

- HQ: Nếu $D=\{a\le x\le b;y_1(x)\le y\le y_2(x)\}\to V=\{a\le x\le b;y_1(x)\le y\le y_2(x);z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}$ **thì**

$$I=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz.$$



VD1. Tính

$$I = \iiint_V zdxdydz\,; V: \{x = 0; y = 0; z = 0; x + y + z = 2\}.$$

với V: tứ diện vuông OABC với A(2, 0, 0); B(0, 2, 0); C(0, 0, 2).

G: Thay $z = 0$ vào $x + y + z = 2 \to\ x + y = 2$.

- Có miền $D: x = 0; y = 0; x + y = 2 \to y = 2 - x$. Chiếu miền D thẳng xuống trục Ox được

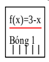
$$0 \le x \le 2; 0 \le y \le 2 - x.$$

Và $z = 0; x + y + z = 2 \to z = 2 - x - y \to 0 \le z \le 2 - x - y$. Nên

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{2-x-y} zdz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy.\frac{z^2}{2}\,|_{z=0}^{2-x-y} = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} \frac{(2-x-y)^2 - 0}{2} dy$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{2} dx \int_0^{2-x} (x + y - 2)^2 dy = \int_0^2 \frac{1}{2} dx.\frac{(x + y - 2)^3}{3}\,|_{y=0}^{2-x} = \frac{1}{6}.\int_0^2 [0 - (x-2)^3] dx$$

$$= -\frac{1}{6}.\frac{(x-2)^4}{4}\,|_0^2 = \cdots$$



VD2. a) Tính

$$I = \iiint_V xdxdydz\,; V = \{x = 0; y = 0; z = 0; z = 2; x + y = 3\}.$$

với V: lăng trụ đứng OAB. O'A'B'; O(0, 0, 0); A(3, 0, 0); B(0, 3, 0); O'(0, 0, 2).

- Oxy: $z = 0; z = 2$: // (Oxy).

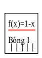
G: Có miền $D: x = 0; y = 0; x + y = 3 \to y = 3 - x$. Chiếu miền D thẳng xuống Ox thì

$$D = \{0 \le x \le 3; 0 \le y \le 3 - x\}.$$

Và $z = 0; z = 2 \to 0 \le z \le 2$. Nên

$$I = \int_0^3 xdx \int_0^{3-x} dy \int_0^2 dz = \int_0^3 xdx \int_0^{3-x} dy.z|_{z=0}^2 = \int_0^3 xdx \int_0^{2-x} 2dy = \int_0^3 2xdx.y|_{y=0}^{2-x}$$

$$= \int_0^3 2x.(2 - x - 0)dx = \int_0^3 (4x - 2x^2)dx = \cdots$$



b) Tính

$$I = \iiint_V (x^2 + 2)dxdydz\,; V = \{x + y + z = 1; x = 0; y = 0; z = 0\}.$$

G: Thay $z = 0$ vào $x + y + z = 1 \to x + y = 1$. Nên miền $D = \{x = 0; y = 0; x + y = 1\}$.

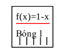
Vẽ miền $D: x = 0: Oy; y = 0: Ox; x + y = 1 \to y = 1 - x$. Chiếu thẳng miền D xuống trục Ox được $D = \{0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1 - x\}$.

- Và miền $V: x + y + z = 1 \to z = 1 - x - y; z = 0 \to 0 \le z \le 1 - x - y$. Nên

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}(x^2+2)dz=\int_0^1(x^2+2)dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}dz$$
$$=\int_0^1(x^2+2)dx\int_0^{1-x}dy.z|_{z=0}^{1-x-y}=\int_0^1(x^2+2)dx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy$$
$$=\int_0^1(x^2+2)dx.\left(y-xy-\frac{y^2}{2}\right)|_{y=0}^{1-x}=\int_0^1(x^2+2).\left(1-x-x+x^2-\frac{(1-x)^2}{2}\right)dx$$
$$=\int_0^1(x^2+2).\frac{(x-1)^2}{2}dx=\frac{1}{2}.\dots.=\cdots$$

Bài tập

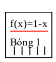
4. **B1. Tính $I=\iiint_V xdxdydz\,;V: x=0; y=0; z=0; x+y+z=1.$**



G: Thay $z=0$ vào PT $x+y+z=1\to x+y=1$. Nên miền $D=\{x=0; y=0; x+y=1\}$. Vẽ $D: x=0: Oy; y=0: Ox; x+y=1\to y=1-x$. Chiếu D thẳng xuống trục Ox → $D=\{0\le x\le 1; 0\le y\le 1-x\}$.

- Tìm cận của z dựa vào PT của miền $V: z=0; x+y+z=1\to z=1-x-y\to 0\le z\le 1-x-y\to V=\{0\le x\le 1; 0\le y\le 1-x; 0\le z\le 1-x-y\}$. Nên

$$I=\iiint_V xdxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}xdz=\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}dy\left(\int_0^{1-x-y}dz\right)=\cdots$$



5. **B2. Tính $I=\iiint_V (x+y+z)dxdydz\,;V: x=0; y=0; z=0; z=1; x+y=1.$**

G: …

2. TỌA ĐỘ TRỤ

- ĐL: Đặt $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\,; r=\sqrt{x^2+y^2}>0; \varphi\in[0,2\pi]\to J=r.\\ z=z\end{cases}$

Nếu $D'=\{a\le\varphi\le b; r_1(\varphi)\le r\le r_2(\varphi); c\le z\le d\}\to$

$$I=\int_a^b d\varphi\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)}dr\int_c^d f(\varphi,r,z).rdz$$

x(t)=2 cos t, y(t)=2 sin t

VD1. a) Tính $I = \iiint_V (x + 2z)dxdydz\,; V = \{z = x^2 + y^2; z = 4\}$.

G: Vì $V = \{z = x^2 + y^2; z = 4\} \to x^2 + y^2 = 4 \to$ **miền** $D = \{x^2 + y^2 \le 4\}$.

- Vẽ $D: x^2 + y^2 \le 4 \to O(0,0); R = 2$. **Chuyển sang tọa độ cực (trong không gian Oxyz, tọa độ cực gọi là tọa độ trụ). Đặt** $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$ **Vì** $M \in D \to \varphi = (\widehat{Ox, OM}) \in [0; 2\pi]; r = OM = \sqrt{x^2 + y^2} \in [0; 2]; J = r$.

- Và miền $V = \{z = x^2 + y^2; z = 4\}; D = \{x^2 + y^2 \le 4\} \to x^2 + y^2 = r^2 \le z \le 4$. **Nên**

$$I = \iiint_V (x + 2z)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_{r^2}^4 (r\cos\varphi + z).r dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_{r^2}^4 (r^2\cos\varphi + r.z)dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr.\left(r^2\cos\varphi.z + r.\frac{z^2}{2}\right)\Big|_{z=r^2}^4$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr.\left(4r^2\cos\varphi + 8r - r^4\cos\varphi - \frac{r^5}{2}\right)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi.\left(4.\frac{r^3}{3}.\cos\varphi + 4r^2 - \frac{r^5}{5}.\cos\varphi - \frac{r^6}{12}\right)\Big|_{r=0}^2 = \cdots$$

x(t)=2 cos t, y(t)=2 sin t

b) Tính $I = \iiint_V ydxdydz\,;\ V = \{z^2 = x^2 + y^2; z = 3\}$.

G: Có miền $V = \left\{z = \sqrt{x^2 + y^2}; z = 3\right\} \to \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \to D = \{x^2 + y^2 \le 9\} \to O(0,0); R = 3$.

- Chuyển sang tọa độ trụ (trong không gian Oxyz) Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}; M \in D \to \varphi = (\widehat{Ox, OM}) \in [0, 2\pi]; r = OM = \sqrt{x^2 + y^2} \in [0, 3] \to J = r$.

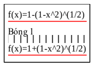
- Và miền $V = \left\{z = \sqrt{x^2 + y^2}; z = 3\right\}; D = \{x^2 + y^2 \le 9\}$. **Nên** $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 3 \to r \le z \le 3$.

Và $D' = \{0 \le \varphi \le 2\pi; 0 \le r \le 3; r \le z \le 3\}$. **Nên**

$$I = \iiint_V ydxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 dr \int_r^3 r\sin\varphi.r dz = \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^1 r^2 dr.\int_3^r dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^1 r^2 dr.z|_{z=r}^3 = \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^1 r^2 dr.(3 - r)$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi.\int_0^1 (3r^2 - r^3)dr = \cdots$$



VD3. Tính

$$I=\iint_D (x^2+y^2)dxdy\,;D=\{x^2+y^2\le 6y\}.$$

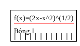
G: Có miền $D: x^2+y^2\le 6y \to x^2+(y-3)^2\le 9 \to I(0,3); R=3.$

- Đặt $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \to J=r.$ **Vì** $M\in D\in \widehat{xOx'}; (\widehat{Ox,Ox})=0; (\widehat{Ox,Ox'})=\pi \to \varphi=(\widehat{Ox,OM})\in[0;\pi].$

- Tìm cận của r dựa vào PT của miền $D: x^2+y^2\le 6y.$ **Và** $r=OM=\sqrt{x^2+y^2}\ge 0 \to x^2+y^2=r^2.$ **Thay vào PT miền** $D: x^2+y^2\le 6y \to r^2\le 6r\sin\varphi \to r\le 6\sin\varphi \to D'=\{0\le\varphi\le\pi; 0\le r\le 6\sin\varphi\}.$ **Vậy**

$$I=\iint_D (x^2+y^2)dxdy=\iint_{D'} r^2.rd\varphi dr=\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^{6\sin\varphi} r^3dr=\int_0^{\pi} d\varphi.\frac{r^4}{4}\Big|_{r=0}^{6\sin\varphi}=\int_0^{\pi} 324\sin^4\varphi d\varphi$$
$$=\cdots$$

b) Tính



$$I=\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz\,;V=\{x^2+y^2=2x; y\ge 0; z=0; z=1\}.$$

G: Có miền $D=\{x^2+y^2=2x; y\ge 0\}\to x^2+y^2-2x=0\to(x-1)^2+y^2=1\to I(1,0); R=1; y=0: Ox.$ **Chuyển sang tọa độ trụ trong kgian Oxyz, đặt** $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=z \end{cases}\to J=r.$

- Vì $M\in D\in\widehat{xOy}\to\varphi=(\widehat{Ox,OM})\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right].$ **Và dựa vào PT của miền D:** $x^2+y^2=2x\to r^2=2r\cos\varphi\to r=2\cos\varphi\to 0\le r\le 2\cos\varphi.$ **Nên** $D'=\left\{0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}; 0\le r\le 2\cos\varphi\right\}.$ **Từ PT miền** $V\to 0\le z\le 1$ **Vậy**

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{2\cos\varphi} dr\int_0^1 zr.rdz=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{2\cos\varphi} r^2dr.\int_0^1 zdz=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{2\cos\varphi} r^2dr.\frac{z^2}{2}\Big|_{z=0}^1$$
$$=\frac{1}{2}.\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{2\cos\varphi} r^2dr=\frac{1}{2}.\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi.\frac{r^3}{3}\Big|_0^{2\cos\varphi}$$
$$=\frac{4}{3}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi=\frac{4}{3}.\int_0^1(1-\sin^2\varphi)d(\sin\varphi)=\cdots$$

x(t)=2 cos t, y(t)=2 sin t

VD1. Tính

$$I = \iiint_V (x^2+y^2)dxdydz\,; V = \{x^2+y^2 = 2z;\ z = 2\}.$$

G: Có miền $D = \{x^2+y^2 = 2.2 = 4\} \to O(0,0); R = 2.$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}; r = OM = \sqrt{x^2+y^2} > 0; \varphi = (\widehat{Ox, OM}) \in [0, 2\pi] \to J = r.$

- Có $r = OM \in [0; 2]$. **Và** $x^2+y^2 = 2z \to z = \frac{x^2+y^2}{2};\ z = 2 \to \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{r^2}{2} \le z \le 2.$

Và $D' = \left\{0 \le \varphi \le 2\pi; 0 \le r \le 2; \frac{r^2}{2} \le z \le 2\right\}$. **Nên**

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_{\frac{r^2}{2}}^2 r^2.r dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 dr \int_{\frac{r^2}{2}}^2 dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 dr.z\Big|_{z=\frac{r^2}{2}}^2$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 dr.\left(2 - \frac{r^2}{2}\right) = \int_0^{2\pi} d\varphi\,.\int_0^2 \left(2r^3 - \frac{r^5}{2}\right) dr = \cdots = \frac{16\pi}{3}.$$

x(t)=2 cos t, y(t)=2 sin t

b) Tính $I = \iiint_V (x^2+y^2)dxdydz\,; V: x^2+y^2 \le 4; 0 \le z \le 3.$

G: G: Có $D = \{x^2+y^2 = 4\}.$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}; r = \sqrt{x^2+y^2} > 0; \varphi \in [0, 2\pi] \to J = r.$

Và $D' = \cdots$

e) Tính $I = \iiint_V \left(\sqrt{x^2+y^2} + x\right) dxdydz\,; V = \{x^2+y^2 \le 1; 0 \le z \le 1\}.$

Bài tập

x(t)=2 cos t, y(t)=2 sin t

6. **B3. Tính** $I = \iiint_V (z + x^2 + y^2)dxdydz\,; V: z = \sqrt{x^2+y^2}; z = 1.$

G: …

b) Tính $I = \iiint_V zdxdydz\,; V: z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}; z = \sqrt{x^2+y^2}.$

G: Có $D = \{8 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2 \to x^2 + y^2 = 4\}$

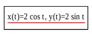
Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}; r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0; \varphi \in [0, 2\pi] \to J = r.$

Và $x^2 + y^2 \le 4 \le 8 - x^2 - y^2 \to r \le z \le \sqrt{8 - r^2}$.

Nên $D' = \left\{0 \le \varphi \le 2\pi; 0 \le r \le 2; r \le z \le \sqrt{8 - r^2}\right\}$. Vậy

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_r^{\sqrt{8-r^2}} z.rdz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 rdr \int_r^{\sqrt{8-r^2}} zdz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 rdr.\frac{z^2}{2}\Big|_{z=r}^{\sqrt{8-r^2}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\varphi \int_0^2 r.(8 - r^2 - r^2)dr = \frac{1}{2}.\int_0^{2\pi} d\varphi.\int_0^2 (8r - 2r^3)dr = \cdots$$



7. B4. Tính $I = \iiint_V z\sqrt{x^2 + y^2}dxdydz; V: z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}; z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

G: …

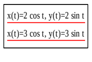
3. MIỀN LẤY TÍCH PHÂN V LÀ HÌNH CẦU VÀ PP ĐỔI BIẾN TỌA ĐỘ CẦU ($\theta = t$ê ta)

- ĐL: Xét $I = \iiint_V f(x, y, z)dxdydz$. Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}; r = OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ge 0; \varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{OM}}\right) \in [0, 2\pi]; \theta = (\widehat{\overrightarrow{Oz}; OM}) \in [0, \pi] \to |J| = r^2\sin\theta$. (Chú ý: $\varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{OM}}\right)$ là góc giữa 2 vecto nên $\varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{OM}}\right) \in [0, 2\pi]$; $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{Oz}; OM}\right)$ là góc giữa vecto Oz và đường thẳng OM nên $\theta = (\widehat{\overrightarrow{Oz}; OM}) \in [0, \pi]$) Nên

$$I = \iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{V'} f.r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr.$$

VD2. Tính

$$I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz; V: 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9.$$



G: Có miền $V: 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9 \to 4 \le OM^2 \le 9;\ M(x, y, z) \to 2 \le OM \le 3 \to V$ là phần nằm giữa 2 hình cầu cùng tâm O là cầu (O, R = 2) và cầu (O, R = 3). Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}; r = OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ge 0; \varphi \in [0, 2\pi]; \theta \in [0, \pi] \to |J| = r^2\sin\theta$. Có PT miền $V: 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9 \to 4 \le OM^2 \le 9 \to 2 \le r = OM \le 3 \to V' = \{0 \le \varphi \le 2\pi; 0 \le \theta \le \pi; 2 \le r \le 3\}$. Nên

$$I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_2^3 r.r^2\sin\theta dr = \int_0^{2\pi} 1d\varphi.\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta.\int_2^3 r^3 dr = \cdots$$
$$= \cdots$$

8. B6. Tính

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz;\ V: 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4.$$

G: Có miền $V: 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4; M(x, y, z) \to 1 \le OM^2 \le 4 \to 1 \le OM \le 2 \to M$ nằm ở giữa 2 hình cầu đồng tâm O và có các bán kính lần lượt là 1 và 2. Đặt
$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}; r = OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ge 0; \varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{OM}}\right) \in [0, 2\pi]; \theta = \left(\widehat{\overrightarrow{Oz}; \overrightarrow{OM}}\right) \in [0, \pi] \to$
$|J| = r^2\sin\theta$. Vì miền $V: 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4 \to 1 \le r^2 \le 4 \to 1 \le r \le 2 \to V' = \{\varphi \in [0, 2\pi]; \theta \in [0, \pi]; r \in [1; 2]\}$. Nên

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_1^2 r^2.r^2\sin\theta dr = \int_0^{2\pi} 1d\varphi\,.\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\,.\int_1^2 r^4 dr = \cdots$$

9. B5. Tính

$$I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz;\ V: x^2 + y^2 + z^2 \le 3z.$$

G: Miền $V: x^2 + y^2 + z^2 - 3z \le 0 \to x^2 + y^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 \le \frac{9}{4} \to I\left(0, 0, \frac{3}{2}\right); R = \frac{3}{2}$. Đặt
$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}; r = OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ge 0; \varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{OM}}\right) \in [0, 2\pi]; \theta = \left(\widehat{\overrightarrow{Oz}; \overrightarrow{OM}}\right) \in [0, \pi] \to$
$|J| = r^2\sin\theta$. Vì miền $V: 0 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 3z \to z \ge 0 \to r\cos\theta \ge 0 \to \cos\theta \ge 0;\ \cos\frac{\pi}{2} = 0 \to 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Và $V: x^2 + y^2 + z^2 \le 3z \to r^2 \le 3.r\cos\theta \to 0 \le r \le 3\cos\theta \to V' = \left\{0 \le \varphi \le 2\pi; 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}; 0 \le r \le 3\cos\theta\right\} \to$

$$I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{3\cos\theta} r.r^2\sin\theta dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta \int_0^{3\cos\theta} r^3 dr$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta\,.\frac{r^4}{4}\Big|_0^{3\cos\theta} = \frac{81}{4}.\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta.\sin\theta d\theta$$
$$= -\frac{81}{4}.\int_0^{2\pi} 1d\varphi\,.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d(\cos\theta) = -\frac{81}{4}.\varphi\Big|_0^{2\pi}.\frac{\cos^5\theta}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \cdots$$

Bài tập

10. B6. Tính $I = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz\,; V: 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$.

G: …

b)* Tính

$$I = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz\,;\ V: x^2+y^2+(z-1)^2 \le 1.$$

G: Có miền $V = x^2+y^2+(z-1)^2 \le 1 \to I(0,0,1); R = 1 \to V = \{x^2+y^2+z^2 \le 2z\}$. **Đặt**

$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}; r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \ge 0; \varphi \in [0,2\pi]; \theta \in [0,\pi] \to |J| = r^2\sin\theta.$

Vì miền $V: 0 \le x^2+y^2+z^2 \le 2z \to z \ge 0 \to r\cos\theta \ge 0 \to \cos\theta \ge 0; \cos\frac{\pi}{2} = 0 \to 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. **Và**

$V: x^2+y^2+z^2 \le 2z \to r^2 \le 2r\cos\theta \to r \le 2\cos\theta \to V' = \left\{0 \le \varphi \le 2\pi; 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}; 0 \le r \le 2\cos\theta\right\}$.

Nên

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2.r^2\sin\theta dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \left(\int_0^{2\cos\theta} r^4 dr\right) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta.\frac{r^5}{5}\Big|_{r=0}^{2\cos\theta} \\ &= \frac{32}{5}.\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta.\cos^5\theta = -\frac{32}{5}.\int_0^{2\pi} 1d\varphi.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta d(\cos\theta) \\ &= -\frac{32}{5}.\varphi\Big|_0^{2\pi}.\frac{\cos^6\varphi}{6}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \cdots \end{aligned}$$

CHƯƠNG III TÍCH PHÂN ĐƯỜNG – MẶT

Bài 1 Tích phân đường loại 1

1. ĐN

- ĐN: Xét tích phân đường loại 1

$$I = \int_L f(x,y)ds\,;$$

với L là 1 đường cong trong R^2. Nếu L: $y = y(x); x \in [a,b]; a \le b$ thì

$$I = \int_a^b f\big(x, y(x)\big).\sqrt{1 + \big(y'(x)\big)^2}dx.$$

1. **C3. Tính $I = \int_L (x^2+y^2)ds$; L là biên của tam giác OAB với $O(0,0); A(1,1); B(-1,1)$.**

Giải: Có

$$I = \int_{\widehat{OA}} fds + \int_{\widehat{AB}} fds + \int_{\widehat{OB}} fds = I_1 + I_2 + I_3.$$

- Xét $I_1 = \int_{\widehat{OA}} (x^2+y^2)ds$. Có PT $OA: y = x; x \in [0,1] \to y' = 1$. Nên

$$I_1 = \int_0^1 (x^2+x^2).\sqrt{1+1}dx = \cdots$$

- Xét $I_2 = \int_{\widehat{AB}} (x^2+y^2)ds$. Gọi PT $AB: y = ax + b \to \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \to AB: y = 1; x \in [-1,1] \to y' = 0$. Nên

$$I_2 = \int_a^b f\big(x, y(x)\big).\sqrt{1 + \big(y'(x)\big)^2}dx = \int_{-1}^1 (x^2+1).\sqrt{1+0}dx = \cdots$$

- Xét $I_3 = \int_{\widehat{OB}} fds$. Gọi PT $OB: y = -x; x \in [-1,0] \to y' = -1$.

Vậy $I_3 = \int_{-1}^0 (x^2+x^2).\sqrt{1+1}dx = \cdots$

$$\to I = I_1 + I_2 + I_3 = \cdots$$

b) Tính $I = \int_L (x^2 - y)ds$; $L: AB: A(2,6) \to B(1,3)$.

G: Có $L: AB: y = 3x; x \in [1,2] \to y' = 3$. Nên

$$I = \int_L (x^2 - y)ds = \int_a^b f\big(x, y(x)\big).\sqrt{1 + \big(y'(x)\big)^2}dx = \int_1^2 (x^2 - 3x).\sqrt{1+3^2}dx = \cdots$$

2. **C2. Tính $I = \int_{\widehat{OA}} \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$; $\widehat{OA}$ là đoạn nối gốc $O(0,0)$ với $A(1,2)$.**

Giải: Gọi PT $OA: y = ax \to a = 2 \to OA: y = 2x; x \in [0,1] \to y' = 2$. Nên

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+4}dx}{\sqrt{x^2+4x^2+4}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{4}{5}}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 + \frac{4}{5}} \right| \Big|_0^1 = \cdots$$

Bài tập

3. **C1. Tính $I = \int_{\widehat{AB}} x^2ds$; $\widehat{AB}$ là cung $y = \ln x$; $A(1,0); B(e,1)$.**

G: Có $y' = \frac{1}{x} \to I = \int_1^e x^2.\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}dx = \int_1^e x.\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}.\int_1^e \sqrt{x^2+1}\,d(x^2+1) = \cdots$

2. TC

- ĐN: *Xét tích phân đường loại 1*

$$I = \int_L f(x,y)ds\,;$$

với L là 1 đường cong trong R^2. Nếu PTTS L: $x = x(t); y = y(t); t \in [a, b]; a \le b$ *thì*

$$I = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big).\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$$

4. **Tính** $I = \int_C (2x - 3y)ds\,; C: x^2 + y^2 = 4y.$

Giải: Có $C: x^2 + (y^2 - 4y + 4) = 4 \to x^2 + (y-2)^2 = 4 \to \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2 + 2\sin t \end{cases}; t \in [0, 2\pi] \to$ $\begin{cases} x' = -2\sin t \\ y' = 2\cos t. \end{cases}$ **Nên**

$$I = \int_C (2x - 3y)ds = \int_0^{2\pi} (4cos\,t - 6 - 6sin\,t).\sqrt{4sin^2t + 4cos^2t}dt = \cdots$$

- Chú ý: Nếu $C: (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \to PTTS\ C: \begin{cases} x = a + Rcos\,t \\ y = b + Rsin\,t; \end{cases} t \in [0, 2\pi].$

5. **Tính** $I = \int_L (2x + 3y)ds\,; L: x^2 + y^2 = 6x.$

G: Có $C: (x-3)^2 + y^2 = 9 \to \begin{cases} x = 3 + 3cos\,t \\ y = 3sin\,t \end{cases};\ t \in [0, 2\pi] \to \begin{cases} x' = -3\sin t \\ y' = 3\cos t. \end{cases}$ **Nên**

$$I = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big).\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = \cdots$$

b)* Tính $I = \int_C \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right)ds\,; C: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1.$

Giải: Vì $C: \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 1 \to \begin{cases} x^{\frac{1}{3}} = \cos t \\ y^{\frac{1}{3}} = \sin t \end{cases} \to \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}; t \in [0; 2\pi] \to \begin{cases} x' = -3\cos^2 t \sin t \\ y' = 3\sin^2 t \cos t\,. \end{cases}$ **Do tính chất đối xứng nên**

$$I = 4.\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t + \sin^4 t).\sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t + 9\sin^4 t\cos^2 t}\,dt = \cdots$$

Bài tập

6. **C4. Tính** $I = \int_L (x + y)ds\,; L: x^2 + y^2 = x.$

G: G: Có $C: x^2 - x + y^2 = 0 \to \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \to \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos\,t \\ y = \frac{1}{2}sin\,t \end{cases};\ t \in [0, 2\pi] \to \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}\sin t \\ y' = \frac{1}{2}\cos t. \end{cases}$ **Nên**

$$I = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big).\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos\,t + \frac{1}{2}sin\,t\right).\sqrt{\frac{1}{4}sin^2t + \frac{1}{4}cos^2t = \cdots}$$

- Xét tích phân đường loại 1

$$I = \int_L f(x, y, z)ds\,;$$

với L là 1 đường cong trong R^3. Nếu PTTS L: $x = x(t); y = y(t); z = z(t); t \in [a, b]; a \le b$ *thì*

$$I = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)).\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt.$$

7. ***Tính*** $I = \int_L (x^2 + y^2 + z^2)ds\,; L: x = 3\cos t\,; y = 3\sin t\,; z = 4t; L: A(3; 0; 0) \to B(0; 3; 2\pi).$

G: Có $x' = -3\sin t\,; y' = 3\cos t\,; z' = 4; 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$ **Nên**

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(9+16t^2).\sqrt{9+16}\,dt=\cdots$$

Bài tập

8. ***C5. Tính*** $I=\int_L (x+y+z)ds\,;L\colon x=2\cos t\,;y=2\sin t\,;z=t;L\colon A(2;0;0)\to B(2;0;2\pi).$

G: Có $x'=-2\sin t\,;y'=2\cos t\,;z'=1;0\le t\le 2\pi$**. Nên**

$$I=\int_0^{2\pi}(2\cos t+2\sin t+t).\sqrt{4\sin^2 t+4cos^2 t+1}\,dt=\cdots$$

- ĐN: Xét tích phân đường loại 1

$$I=\int_L f(x,y)ds\,;$$

với L là 1 đường cong trong R^2***. Nếu*** $L\colon r=r(\varphi);\varphi\in[a,b];a\le b$ ***thì***

$$I=\int_a^b f(r(\varphi)cos\,\varphi;r(\varphi)sin\,\varphi).\sqrt{r^2+r'^2}d\varphi.$$

9. **Tính** $I=\int_C \sqrt{x^2+y^2}ds\,;C\colon x^2+y^2=5y.$

Giải: Đặt $x=rcos\,\varphi;y=rsin\,\varphi\to r^2=5rsin\,\varphi\to r=5\sin\varphi\ge 0\to\varphi\in[0,\pi]\to r'=5\cos\varphi$**. Nên**

$$I=\int_0^{\pi}r.5d\varphi=\int_0^{\pi}5\sin\varphi\,.5d\varphi=\cdots$$

b) Tính $I=\int_C \sqrt{x^2+y^2}ds\,;C\colon x^2+y^2=4x.$

G: Đặt $x=rcos\,\varphi;y=rsin\,\varphi\to r^2=2rcos\,\varphi\to r=2\cos\varphi\ge 0\to\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to r'=-2\sin\varphi.$

Nên

$$I=\int_a^b f(r(\varphi)cos\,\varphi;r(\varphi)sin\,\varphi).\sqrt{r^2+r'^2}d\varphi=\cdots$$

Bài tập

10. **C7. Tính** $I=\int_C \sqrt{x^2+y^2}ds\,;C\colon x^2+y^2=2y.$

    Giải: Đặt $x=rcos\,\varphi;y=rsin\,\varphi\to r^2=2rsin\,\varphi\to r=2\sin\varphi\ge 0\to\varphi\in[0,\pi]\to r'=2\cos\varphi.$
    Nên

$$I=\int_0^{\pi}r.2d\varphi=\int_0^{\pi}2\sin\varphi\,.2d\varphi=\cdots$$

Bài 2 Tích phân đường loại 2

1. ĐN

- ĐN: Xét tích phân đường loại 2

$$I=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy\,;$$

với L là 1 đường cong trong R^2***. Nếu*** $y=y(x);x\in[a,b];a\le b$ ***hoặc*** $a>b$ ***thì***

$$I=\int_a^b\left[P\big(x,y(x)\big)+Q\big(x,y(x)\big).y'(x)\right]dx.$$

11. Tính $I=\int_L |x|dx+|y|dy\,; L=\overrightarrow{AB}: A(1,0)\to B(0,2)$.

Giải: Gọi PT $AB: y=ax+b\to\begin{cases}a=-2\\ b=2\end{cases}\to y=-2x+2; x\in[1,0]\to y'=-2$. Nên

$$I=\int_L |x|dx+|y|dy=\int_1^0|x|dx+|2-2x|.(-2)dx=\int_1^0[x-2(2-2x)]dx=\cdots$$

b) Tính $I=\int_{\widehat{OAB}} xydx+(y-x)dy\,; L: y=x^3; O(0,0)\to A(-1,-1)\to B(2,8)$.

G: Có

$$I=\int_{\widehat{OAB}} xydx+(y-x)dy=\int_{\overrightarrow{OA}} xydx+(y-x)dy+\int_{\overrightarrow{AB}} xydx+(y-x)dy=I_1+I_2.$$

Có $L=\overrightarrow{OA}: y=x^3\to y'=3x^2; x\in 0\to -1$. Nên

$$I_1=\cdots$$

Và $L=\overrightarrow{AB}: y=x^3\to y'=3x^2; x: -1\to 2$. Nên

$$I_2=\cdots\to I=I_1+I_2=\cdots$$

Bài tập

12. *C1. Tính* $I=\int_L ye^{xy}dx+x^4e^{xy}dy\,; L: y=x^2: A(0,0)\to B(1,1)$.

G: Có $L: y=x^2\to y'=2x; x\in[0,1]$. Nên

$$I=\int_L ye^{xy}dx+x^4e^{xy}dy=\int_0^1 x^2e^{x.x^2}dx+x^4e^{x.x^2}.2xdx=\cdots$$

- ĐN: Xét tích phân đường loại 2

$$I=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy\,;$$

với L là 1 đường cong trong R^2. Nếu PTTS L: $x=x(t); y=y(t); t\in[a,b]; a\le b$ hoặc $a>b$ thì

$$I=\int_a^b[P.x'(t)+Q.y'(t)]dt.$$

- Chú ý: Nếu $C: (x-a)^2+(y-b)^2=R^2\to PTTS\ C: \begin{cases}x=a+R\cos t\\ y=b+R\sin t;\end{cases} t\in[0,2\pi]$.

13. C9. Tính $I=\int_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}; L: x^2+y^2=4$.

Giải: Có $\begin{cases}x=2\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}\to\begin{cases}x'=-2\sin t\\ y'=2\cos t\end{cases}; t\in[0,2\pi]$. Nên

$$I=\int_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{(2\cos t+2\sin t).(-2\sin t)dt-(2\cos t-2\sin t).2\cos tdt}{4}$$

$$=\int_0^{2\pi}-dt=-2\pi.$$

- Chú ý: Nếu $L: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\to PTTS\ L: \begin{cases}x=\mathrm{a}\cos t\\ y=b\sin t;\end{cases} t\in[0,2\pi]$.

b) Tính $I=\int_{L^+} dx+(x^2+2xy)dy\,; L: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1; y\ge 0$.

G: Đặt $\begin{cases}x=2\cos t\\ y=\sin t\ge 0;\end{cases} t\in[0,\pi]\to\begin{cases}x'=-2\sin t\\ y'=\cos t.\end{cases}$ Nên

$$I=\int_a^b[P.x'(t)+Q.y'(t)]dt=\int_0^\pi\ldots=\cdots$$

Bài tập

14. C2. Tính $I=\int_L \frac{x^2dy-y^2dx}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}}; L: x=\cos^3 t\,; y=\sin^3 t\,; 0\le t\le \frac{\pi}{2}.$

G: Có $x=\cos^3 t\,; y=\sin^3 t\,; 0\le t\le \frac{\pi}{2}\to \begin{cases} x'=-3\cos^2 t\sin t \\ y'=3\sin^2 t\cos t\,. \end{cases}$ **Nên**

$$I=\int_L \frac{x^2dy-y^2dx}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}}=\int_a^b [P.x'(t)+Q.y'(t)]dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ldots=\cdots$$

15. C4. Tính $I=\int_L (x+y)^2dx+(x-y)dy\,; L: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1.$

Giải: Có $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=1\sin t \end{cases}\to \begin{cases} x'=-2\sin t \\ y'=\cos t \end{cases}; t\in[0,2\pi]$. **Nên**

$$I=\int_L (x+y)^2dx+(x-y)dy=\int_a^b [P.x'(t)+Q.y'(t)]dt=\int_0^{2\pi} \ldots=\cdots$$

- ĐN: Xét tích phân đường loại 2

$$I=\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz\,;$$

với L là 1 đường cong trong R^3. ***Nếu PTTS*** $L: x=x(t); y=y(t); z=z(t); t\in[a,b]; a\le b$ ***hoặc*** $a>b$ ***thì***

$$I=\int_a^b [P.x'(t)+Q.y'(t)+R.z'(t)]dt.$$

16. ***Tính*** $I=\int_L (x+2y+z)dx-3xdy+2xydz\,; L$ **là đoạn nối** $A(1,2,2)\to B(2,5,7)$.

Giải: Có $L: \overrightarrow{AB}=(1,3,4)\to L: AB: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+3t \\ z=2+4t \end{cases}; A(1,2,2)\to t=0; B(2,5,7)\to t=1\to t\in[0;1]\to$

$\begin{cases} x'=1 \\ y'=2 \\ z'=2. \end{cases}$ **Nên**

$$I=\int_L (x+2y+4z)dx-3xdy+2xydz=\int_0^1 \ldots=\cdots$$

b) Tính $I=\int_L (ydx+zdy+xdz)\,; L: x=2\cos t; y=2\sin t\,; z=3t; L: A(-2;0;3\pi)\to B(2;0;0)$.

Giải: Có $L: x=2\cos t; y=2\sin t\,; z=3t; t\in \pi\to 0\to \begin{cases} x'= \\ y'= \\ z'=3. \end{cases}$ **Nên**

$$I=\int_L (ydx+zdy+xdz)=\int_a^b [P.x'(t)+Q.y'(t)+R.z'(t)]dt=\int_\pi^0 \quad \ldots$$

Bài tập

17. ***C11. Tính*** $I=\int_L (x+y+z)dx-xdy+xydz\,; L$ **là đoạn nối** $A(1,2,3)\to B(2,4,5)$.

Giải: Có $L: \overrightarrow{AB}=(1,2,2)\to L: AB: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=3+2t \end{cases}; t\in[0;1]\to \begin{cases} x'=1 \\ y'=2 \\ z'=2. \end{cases}$ **Nên**

$$I=\int_L (x+y+z)dx-xdy+xydz=\int_0^1 \ldots=\cdots$$

2. CÔNG THỨC GREEN về tích phân đường loại 2 trên đường cong kín

- Quy ước về chiều quay dương: Chiều quay dương là chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ. Tức là chiều từ Ox sang Oy.

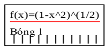
- *Công thức Green* về tích phân đường loại 2 trên đường cong kín. ***Xét tích phân đường loại 2***

$$I = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,;$$

với L là 1 đường cong kín. Thì

$$I = \iint_D \left(Q'_x - P'_y\right)dxdy\,;$$

với D là miền có biên là L.



18. C12. Tính $I = \int_{C^+}(ye^{xy} - x^2y + 3x)dx + (xe^{xy} + xy^2 + 2y)dy\,;\, C: x^2 + y^2 = 1; y \geq 0$ **đi từ** $A(1,0) \to B(-1,0) \to A$.

Giải: Đặt

$$P = ye^{xy} - x^2y + 3x; Q = xe^{xy} + xy^2 + 2y \to P'_y = e^{xy} + xye^{xy} - x^2; Q'_x = e^{xy} + xye^{xy} + y^2.$$

Vì miền lấy tích phân là 1 đường con kín nên áp dụng CT Green được

$$I = \iint_D \left(Q'_x - P'_y\right)dxdy = \iint_D (y^2 + x^2)dxdy$$

với D là miền có biên là $C = \{x^2 + y^2 = 1; y \geq 0\} \to O(0,0); R = 1$.

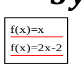
- Đổi sang tọa độ cực, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \to J = r;\ \sqrt{x^2 + y^2} = r.$

- Vì $\varphi = (\widehat{Ox, OM}) \to \varphi \in [0;\pi]$.

Và $r = OM \in [0,1] \to D' = \{0 \leq \varphi \leq \pi; 0 \leq r \leq 1\}$. **Nên**

$$I = \iint_{D'} r^2.r\,d\varphi dr = \int_0^{\pi} 1d\varphi\,.\int_0^1 r^3dr = \cdots$$

b) Tính $I = \int_{C^+}(2x + y^2)dx + (x^2 - 3ydy)\,;\, C: \Delta OAB; O(0,0); A(1,0); B(2,2)$.



G: Đặt

$$P = 2x + y^2; Q = x^2 - 3y \to P'_y = 2y; Q'_x = 2x.$$

Vì miền lấy tích phân là 1 đường con kín nên áp dụng CT Green được

$$I = \iint_D \left(Q'_x - P'_y\right)dxdy = \iint_D (2x - 2y)dxdy.$$

Gọi PT $OA: y = x; AB: y = 2x - 2.$

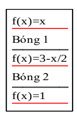
19. C8. Tính $I = \int_L (-x^2y)dx + xy^2dy\,; L: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$

Giải: Đặt $P = -x^2y; Q = xy^2 \to P'_y = -x^2; Q'_x = y^2$. Vì miền lấy tích phân là 1 đường con kín nên áp dụng CT Green được

$$I = \iint_D \left(Q'_x - P'_y\right)dxdy = \iint_D (y^2 + x^2)dxdy.$$

Chuyển sang tọa độ cực suy rộng, đặt $\begin{cases} x = ar\cos\varphi = 3r\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi = 2r\sin\varphi \end{cases} \to J = abr = 6r; \varphi = (Ox, OM) \in [0; 2\pi]; r \in [0, 1]$. Nên

$$I = \iint_{D'} f(x, y).\ 6rd\varphi dr = \cdots$$



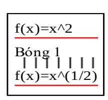
20. Tính $I = \int_{L^+}\left(e^{x^2} + xy\right)dx + (y\cos y + x^2)dy\,; L: \Delta ABC; A(1, 1); B(2, 2); C(4, 1).$

G: Đặt

$$P = e^{x^2} + xy; Q = y\cos y + x^2 \to P'_y = x; Q'_x = 2x.$$

Vì miền lấy tích phân là 1 đường con kín nên áp dụng CT Green được

$$I = \iint_D \left(Q'_x - P'_y\right)dxdy = \cdots$$



b) Tính $I = \int_L y^2dx - 2x^2dy\,; L: \{y = x^2; x = y^2\}.$

G:

21. Tính $I = \int_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ với

a) $L: (x-2)^2 + y^2 = 1$. b) $L: x^2 + y^2 = 1$.

G:

22. Tính $I = \int_{L^+} (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy\,; L: y = x^2; y = 0; x = 1$.

b) Tính $I = \int_{C^+} (2x + y^2)dx + (x^2 - 3ydy)\,; C: \Delta OAB; O(0,0); A(1,0); B(2,2)$.

c) $I = \int_{L^+} e^x(1 - \cos y)dx - e^x(y - \sin y)dy; L: \Delta OAB; O(0,0); A(1,1); B(0,2)$.

d) $I = \int_{L^+} -xy\left(x + \frac{y}{2}\right)dx + xy\left(\frac{x}{2} + y\right)dy\,; L: \Delta ABC; A(-1,0); B(1,-2); C(1,2)$.

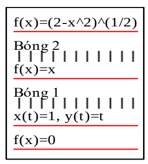
e) Tính $I = \int_{L^+} \left(e^{x^2} + xy\right)dx + (ycos\,y + x^2)dy\,; L: \Delta ABC; A(1,1); B(2,2); C(4,1)$.

f) $I = \int_C (ye^{xy} - x^2y + 3x)dx + (xe^{xy} + xy^2 + 2y)dy\,; C: y = x^2; y = 1$.

Bài tập

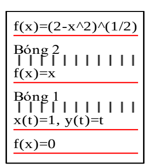
23. C3. Tính $I = \int_L |x|dx + |y|dy\,; L: A(1,0) \to B(0,2) \to C(-1,0) \to D(0,-2) \to A(1,0)$.

Giải:



24. C5. Tính $I = \int_{L^+} 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2dy\,; L$ là biên của tam giác LMN; $L(1,1); M(2,2); N(1,3)$.

Giải: Có



25. C6. Tính $I = \int_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy\,; L: x^2 + y^2 = x$.

G: ...

- Hệ quả Green. (ĐK để tích phân đường loại 2 ko phụ thuộc vào đường lấy tích phân) Xét tích phân đường loại 2

$$I = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,;$$

với L là 1 đường cong nối $A \to B$. Nếu

$$Q'_x = P'_y$$

thì tích phân I ko phụ thuộc vào đường cong L nối $A \to B$. Nên ta có thể chọn L là đường gấp khúc AMB với AM // Ox và MB // Oy.

26. C10. Tính $I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x+y)dx + (x-y)dy$.

Giải: Có

$$P = x + y; Q = x - y \to Q'_x = 1; P'_y = 1 = Q'_x.$$

Nên tích phân I ko phụ thuộc vào đường cong nối O(0, 0) đến A(1, 1). Nên theo hệ quả của Green, ta chọn L là đường gấp khúc OMA với M(0, 1); OM // Ox, MA // Oy. Nên

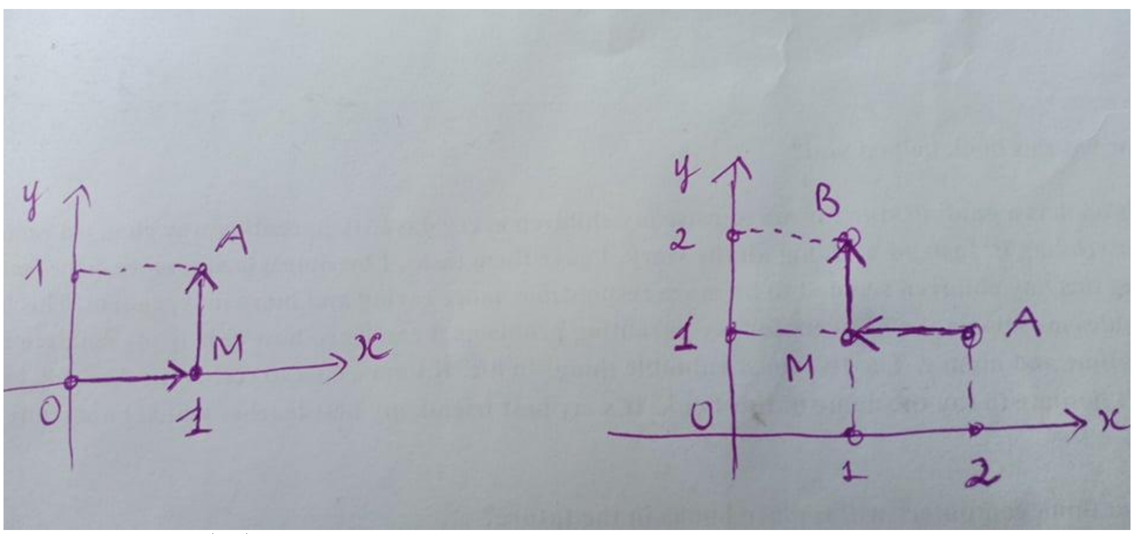
$$I = \int_{OM} (x+y)dx + (x-y)dy + \int_{MA} (x+y)dx + (x-y)dy = I_1 + I_2.$$

Xét $I_1 = \int_{OM} (x+y)dx + (x-y)dy$. Vì PT $OM = Ox: y = 0; x \in [0, 1] \to dy = 0$. Nên

$$I_1 = \int_0^1 (x)dx + 0 = \cdots$$

Xét $I_2 = \int_{MA} (x+y)dx + (x-y)dy$. Vì PT $MA: x = 1; y \in [0, 1] \to dx = 0$. Nên

$$I_2 = \int_0^1 0 + (1-y)dy = \cdots \to I = I_1 + I_2 = \cdots$$



b) Tính $I = \int_{A(2,1)}^{B(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2}$.

G: Có

$$P = \frac{y}{x^2}; Q = -\frac{x}{x^2} = -\frac{1}{x} \to P'_y = \frac{1}{x^2} = Q'_x.$$

Nên tích phân I ko phụ thuộc vào đường cong nối A(2, 1) đến B(1, 2). Nên theo hệ quả của Green, ta chọn L là đường gấp khúc AMB với M(1, 1); AM // Ox, MB // Oy. Nên

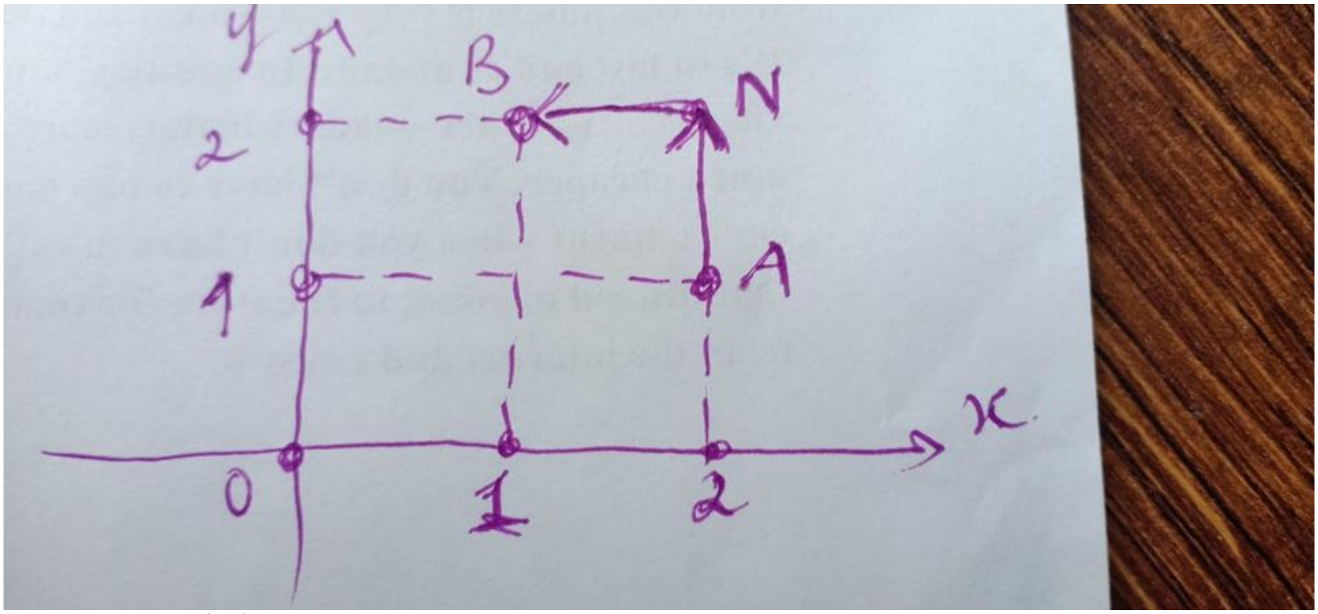
$$I = \int_{A(2,1)}^{M(1,1)} \frac{ydx - xdy}{x^2} + \int_{M(1,1)}^{B(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2} = I_1 + I_2.$$

Xét $I_1 = \int_{A(2,1)}^{M(1,1)} \frac{ydx - xdy}{x^2}$. Có $L = \overrightarrow{AM}: y = 1 \to dy = 0; x: 2 \to 1$. Nên

$$I_1 = \int_2^1 \frac{1dx - 0}{x^2} = \cdots$$

Xét $I_2 = \int_{M(1,1)}^{B(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2}$. Có $L = \overrightarrow{MB}: x = 1 \to dx = 0; y: 1 \to 2$. Nên

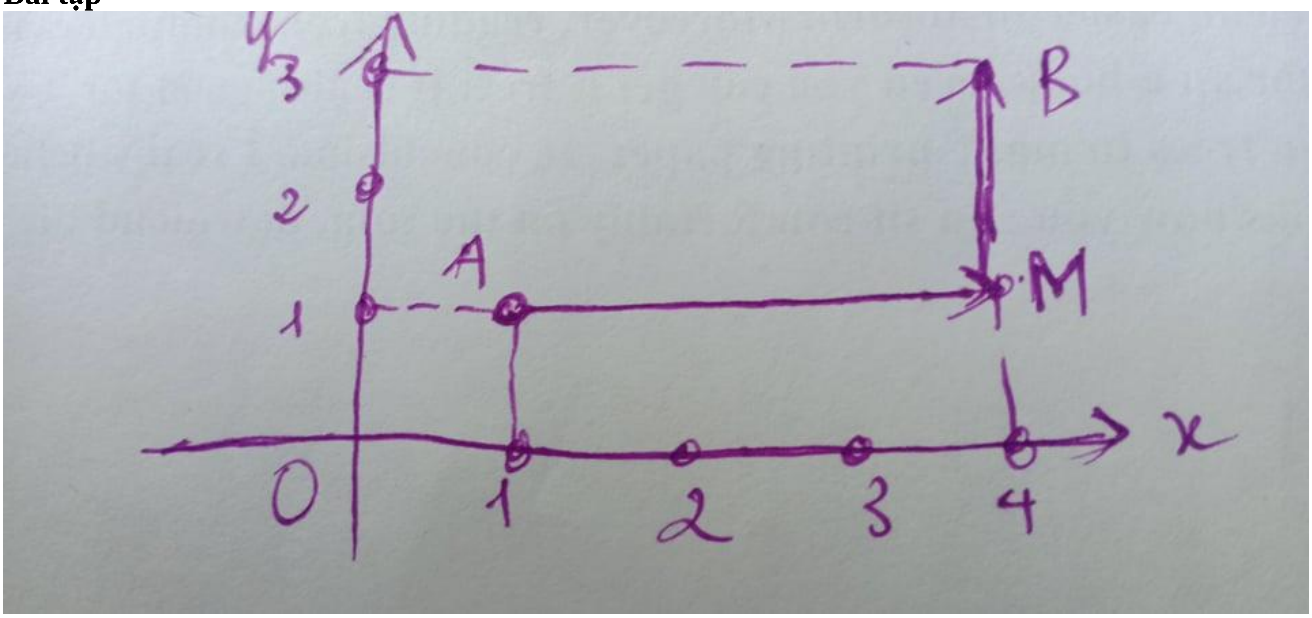
$$I_2 = \int_1^2 \frac{0 - 1dy}{1} = \cdots \to I = I_1 + I_2 = \cdots$$



c) Tính $I = \int_{A(1,3)}^{B(2,1)} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2}$.

G: ...

Bài tập



27. C7. Tính $I = \int_{(1,1)}^{(4,3)} e^{xy}(1 + xy)dx + x^2 e^{xy} dy$.

Giải: Có

$$P = e^{xy}(1 + xy); Q = x^2 e^{xy} \to P'_y = e^{xy}x(1 + xy) + e^{xy}.x = xe^{xy}(2 + xy); Q'_x = 2x.e^{xy} + x^2.e^{xy}y$$
$$= xe^{xy}(2 + xy) \to P'_y = Q'_x.$$

Nên tích phân I ko phụ thuộc vào đường cong nối A(1, 1) đến B(4, 3). Nên theo hệ quả của Green, ta chọn L là đường gấp khúc AMB với M(1, 3). Nên

$$I = I_1 + I_2 = \int_{A(1,1)}^{M(4,1)} e^{xy}(1+xy)dx + x^2e^{xy}dy + \int_{M(4,1)}^{B(4,3)} e^{xy}(1+xy)dx + x^2e^{xy}dy.$$

Xét $I_1 = \int_{A(1,1)}^{M(4,1)} e^{xy}(1+xy)dx + x^2e^{xy}dy$**. Có** $AM: y = 1; x \in (1;4) \to y' = 0 \to$

$$I_1 = \int_1^4 e^x.2dx + 0 = \cdots$$

BÀI 3 TÍCH PHÂN MẶT LOẠI 1

1. ĐN

- Xét

$$I = \iint_S f(x,y,z)dS,$$

trên mặt cong $S \in R^3: z = z(x,y); (x,y) \in D$**. Thì** $dS = \sqrt{1 + (z_x')^2 + \left(z_y'\right)^2}$ **và**

$$I = \iint_D f\big(x,y,z(x,y)\big).\sqrt{1 + (z_x')^2 + \left(z_y'\right)^2}dxdy\,.$$

28. C6. Tính $I = \iint_S \left(z + 2x + \frac{4y}{3}\right)dS\,; S: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ **với** $x, y, z \geq 0.$

G: Có $S: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1 \to z = 4\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right) \to \begin{cases} z_x' = -2 \\ z_y' = -\frac{4}{3}. \end{cases}$

Và miền $D = \left\{x \geq 0; y \geq 0; z = 4\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right) \geq 0 \to \frac{x}{2} + \frac{y}{3} \leq 1\right\} = \left\{0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 3\left(1 - \frac{x}{2}\right) = 3 - \frac{3x}{2}\right\}.$

- Vẽ miền D. Nên

$$I = \iint_D f\big(x,y,z(x,y)\big).\sqrt{1 + (z_x')^2 + \left(z_y'\right)^2}dxdy = \iint_D \left(4 - 2x - \frac{4y}{3} + 2x + \frac{4y}{3}\right).\sqrt{1 + 4 + \frac{16}{4}}dxdy$$

$$= 12\int_0^2 dx \int_0^{3-\frac{3x}{2}} dy = \cdots$$

29. C5. $I = \iint_S xyzdS\,; S: z = x^2 + y^2;\ z \leq 1.$

G: Xét mặt $S: z = x^2 + y^2 \to \begin{cases} z_x' = 2x \\ z_y' = 2y \end{cases}; D: z \leq 1 \to x^2 + y^2 \leq 1$

Nên

$$I = \iint_D f\big(x,y,z(x,y)\big).\sqrt{1 + (z_x')^2 + \left(z_y'\right)^2}dxdy = \iint_D xy(x^2 + y^2).\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dxdy.$$

Chuyển sang tọa độ cực: Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \to \begin{cases} J = r \\ x^2 + y^2 = r^2. \end{cases}$

Nên

$$I = \cdots$$

30. C4. $I = \iint_S zdS\,; S: 10z = x^2 + y^2; z = 10.$

G: Có $z=\frac{1}{10}(x^2+y^2)\to\begin{cases}z'_x=\frac{x}{5}\\ z'_y=\frac{y}{5}\end{cases}; D: z\le 10\to x^2+y^2\le 100\to O(0,0); R=10$. Nên

$$I=\iint_D \frac{1}{10}(x^2+y^2).\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{25}}dxdy.$$

Chuyển sang tọa độ cực: Đặt $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}\to\begin{cases}J=r\\ x^2+y^2=r^2.\end{cases}$

Nên

$$I=\cdots$$

b) Tính $I=\iint_S \left(z+3x+\frac{3y}{2}\right)dS$; $S: x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ với $x,y,z\ge 0$.

c) Tính $I=\iint_S (x^2+y^2)zdS$; $S: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

d) $I=\iint_S (x^2+y^2+z^2)dS$; $S: z=x^2+y^2$ với $0\le z\le 1$.

e) $I=\iint_S (z+\sqrt{x^2+y^2})dS$; $S: z=\sqrt{x^2+y^2}$ với $0\le z\le 1$.

Bài tập

31. C1. $I=\iint_S (1-z^2)dS; S: x^2+y^2+z^2=1; z\ge 0$.

G: Có $z=\sqrt{1-x^2-y^2}\to\begin{cases}z'_x=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\\ z'_y=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\end{cases}; D: 1-x^2-y^2\ge 0\to x^2+y^2\le 1$. Nên

$$I=\iint_D f(x,y,z(x,y)).\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy=\iint_D (x^2+y^2).\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{1-x^2-y^2}}dxdy.$$

Chuyển sang tọa độ cực. Đặt $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}\to\begin{cases}J=r\\ x^2+y^2=r^2.\end{cases}$

Nên

$$I=\cdots$$

32. C2. $I=\iint_S (x^2+z^2)dS$; $S: z=\sqrt{2-x^2-y^2}; z\ge 1$.

G: Có $z=\sqrt{2-x^2-y^2}\to\begin{cases}z'_x=\frac{-x}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\\ z'_y=\frac{-y}{\sqrt{2-x^2-y^2}}.\end{cases}$ Vì $z=\sqrt{2-x^2-y^2}\ge 1\to x^2+y^2\le 1\to D: x^2+y^2=1$.

Nên

$$I=\iint_D f(x,y,z(x,y)).\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy=\cdots$$

33. C3. $I=\iint_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$; $S: x+y+z=1$ với $x,y,z\ge 0$.

G: Có $z=1-x-y\to\begin{cases}z'_x=\\ z'_y=.\end{cases}$ Và $D:\begin{cases}x,y\ge 0\\ z=1-x-y\ge 0\to x+y\le 1\end{cases}\to\cdots$

BÀI 4 TÍCH PHÂN MẶT LOẠI 2

- Công thức Ostro. Xét

$$I = \iint_S Pdxdy + Qdydz + Rdxdz$$

trên mặt cong kín S là biên của miền $V \subset R^3$. Thì

$$I = \iiint_V \left(P'_z + Q'_x + R'_y\right)dxdydz.$$

34. Tính $I = \iint_S z^2ydydz + x^2ydzdx + y^2zdxdy\,; S: z^2 = x^2 + y^2; 0 \le z \le 3$.

G: Đặt $P = z^2y; Q = x^2y; R = y^2z \to P'_x = 0; Q'_y = x^2; R'_z = y^2$. Áp dụng CT Ostro, được

$$I = \iiint_V \left(P'_z + Q'_x + R'_y\right)dxdydz = \iiint_V (x^2 + y^2)dxdydz.$$

với $V = \{z^2 = x^2 + y^2; 0 \le z \le 3\}$. Đổi sang tọa độ trụ, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \to J = r$. Nên

$$I = \cdots$$

b) C5. Tính $I = \iint_S y^2dxdz + z^2dxdy\,; S: z = x^2 + y^2; z = 1$.

G: Đặt $P = y^2; Q = z^2 \to P'_y = 2y; Q'_z = 2z$. Áp dụng CT Ostro, được

$$I = \iiint_V (P'_z + Q'_x)dxdydz = \iiint_V (2y + 2z)dxdydz$$

với $V = \{z = x^2 + y^2; z = 1\}$. Đổi sang tọa độ trụ, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \to J = r$. Nên

$$I = \cdots$$

Bài tập

35. C4. Tính $I = \iint_S yzdxdy\,; S: x^2 + y^2 \le 1; 0 \le z \le 1$.

G: Đặt $P = yz \to P_z = y$. Áp dụng CT Ostro, được

$$I = \iiint_V P_zdxdydz = \iiint_V ydxdydz$$

với $V = \{x^2 + y^2 \le 1; 0 \le z \le 1\}$. Đổi sang tọa độ trụ, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \to J = r$. Nên

$$I = \cdots$$

Luyện tập

36. Tính $I = \int_C (2x - 3y)ds\,; C: x^2 + y^2 = 2y$.

37. $I = \int_C (ye^{xy} - x^2y + 3x)dx + (xe^{xy} + xy^2 + 2y)dy\,; C: y = x^2; y = 1$.

38. $I = \int_{L^+}(2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy\,; L: y = x^2; y = 0; x = 1$.

39. Tính $I = \int_{C^+}(2x + y^2)dx + (x^2 - 3ydy)\,; C: \Delta OAB; O(0,0); A(1,0); B(2,2)$.

40. $I = \int_{L^+} e^x(1 - \cos y)dx - e^x(y - \sin y)dy; L: \Delta OAB; O(0,0); A(1,1); B(0,2).$

41. $I = \int_{L^+} -xy\left(x + \frac{y}{2}\right)dx + xy\left(\frac{x}{2} + y\right)dy\,; L: \Delta ABC; A(-1,0); B(1,-2); C(1,2).$

42. $I = \int_{L^+}\left(e^{x^2} + xy\right)dx + (y\cos y + x^2)dy\,; L: \Delta ABC; A(1,1); B(2,2); C(4,1).$

43. Tính $I = \iint_S \left(z + 3x + \frac{3y}{2}\right)dS\,; S: x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ với $x, y, z \geq 0$.

44. Tính $I = \iint_S (x^2 + y^2)z dS\,; S: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$

45. $I = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2)dS\,; S: z = x^2 + y^2$ với $0 \leq z \leq 1$.

46. $I = \iint_S \left(z + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dS\,; S: z = \sqrt{x^2 + y^2}$ với $0 \leq z \leq 1$.

47. Tính $I = \iint_S z^2 y dydz + x^2 y dzdx + y^2 z dxdy\,; S: z = x^2 + y^2; z = 1.$

b) $I = \iint y^2 dxdz + z^2 dxdy\,; S: z = x^2 + y^2; z = 1.$

Luyện tập

1. Viết PT pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong $(S): 3x^2 + 2y^2 - 2z = 1; A(1,1,2).$
2. $(S): x^2 - y + 3z^2 = 1; A(1,3,-1).$
3. $(S): 3x^2 + 2y^2 = z; M(-1,1,5).$
4. Viết PT pháp tuyến và tiếp diện của đường cong $l: x = \frac{2}{t}; y = t^2 + t; z = -t^3; M(2,2,-1).$
5. $l: x = 2\cos t\,; y = 2\sin t\,; z = t; M(-2,0,-\pi).$
6. $l: x = 2\sqrt{2}t\sin t; y = 2\sqrt{2}t\cos t; z = 2t; t = \frac{\pi}{4}.$
7. $l: x = \frac{e^t \sin t}{\sqrt{2}}; y = 1; z = \frac{e^t \cos t}{\sqrt{2}}; t = \frac{\pi}{3}.$
8. Tính độ cong của đường $l: y^2 = x; A(4,2).$
9. $l: y^2 = x^3 + 1; x = 2.$
10. $l: \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}; t = \frac{\pi}{3}.$
11. $l: r = 3 - \sin\varphi.$

CHƯƠNG 5 HÌNH HỌC VI PHÂN

1. PHÁP TUYẾN VÀ TIẾP DIỆN CỦA MẶT CONG

- ĐN: Cho mặt cong $(S): f(x,y,z)=0$ và điểm $M(x_o,y_o,z_o)\in(S)$. Thì

*** PT tiếp diện tại M (tiếp: tiếp xúc, chạm vào nhau, diện: mặt, mặt phẳng $Ax+By+Cz+D=0 \to$ tiếp diện: mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại M) là**

$$(P): f'_x(M).(x-x_o)+f'_y(M).(y-y_o)+f'_z(M).(z-z_o)=0.$$

*** PT pháp tuyến tại M (pháp: vuông góc như VTPT, tuyến: tuyến tính, đường thẳng → pháp tuyến: đường thẳng vuông góc với mặt phẳng tiếp diện, ví dụ như mặt cầu, tiếp diện tại M là mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm M thuộc mặt cầu nên tiếp diện tại M thuộc mặt cầu là mặt phẳng vuông góc với bán kính OM tại M, còn pháp tuyến là đường thẳng vgoc với mặt phẳng tiếp diện tại M nên pháp tuyến của mặt cầu tại M chính là bán kính OM) là**

$$d: \frac{x-x_o}{f'_x(M)}=\frac{y-y_o}{f'_y(M)}=\frac{z-z_o}{f'_z(M)} \to d: \begin{cases} x=x_o+f'_x(M).t \\ y=y_o+f'_y(M).t \\ z=z_o+f'_z(M).t \end{cases}$$

1. **C5. Viết PT pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong $(S): z^2=x^2+y^2; M(3,4,5)\in(S)$.**

G: Có $(S): f=x^2+y^2-z^2=0 \to \begin{cases} f'_x=2x \to f'_x(M)=2.3=6 \\ f'_y=2y \to f'_y(M)=2.4=8 \\ f'_z=-2z \to f'_z(M)=-2.5=-10. \end{cases}$

Nên PT pháp tuyến tại M là

$$d: \frac{x-x_o}{f'_x(M)}=\frac{y-y_o}{f'_y(M)}=\frac{z-z_o}{f'_z(M)} \to d: \frac{x-3}{6}=\frac{y-4}{8}=\frac{x-5}{-10}.$$

và PT tiếp diện tại M là

$$(P): f'_x(M).(x-x_o)+f'_y(M).(y-y_o)+f'_z(M).(z-z_o)=0 \to 6(x-3)+8(y-4)-10(z-5)=0$$
$$\to 6x+8y-10z=0 \to 3x+4y-5z=0.$$

2. **C6. Viết PT pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong**

$$(S): x^2+2z^2=4y^2+6;\ A(2,2,3).$$

G: Có mặt cong $(S): f=x^2-4y^2+2z^2-6=0 \to \begin{cases} f'_x=2x \to f'_x(A)=2.2=4 \\ f'_y=-8y \to f'_y(A)=-8.2=-16 \\ f'_z=4z \to f'_z(A)=4.3=12. \end{cases}$

Nên PT pháp tuyến tại A là

$$d: \frac{x-x_o}{f'_x(A)}=\frac{y-y_o}{f'_y(A)}=\frac{z-z_o}{f'_z(A)} \to d: \frac{x-2}{4}=\frac{y-2}{-16}=\frac{z-3}{12}.$$

và PT tiếp diện tại A là

$$(P): f'_x(A).(x-x_o)+f'_y(A).(y-y_o)+f'_z(A).(z-z_o)=0 \to 4(x-2)-16(y-2)+12(z-3)=0$$
$$\to x-2-4(y-2)+3(z-3)=0 \to x-4y+3z-3=0.$$

Bài tập

3. **Viết PT pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong**

$$(S): 3x^2+2y^2=2z+1;\ A(1,1,2).$$

G: Có mặt cong $(S): f=3x^2+2y^2-2z-1=0 \to \begin{cases} f'_x=6x \to f'_x(A)=6.1=6 \\ f'_y=4y \to f'_y(A)=4.1=4 \\ f'_z=-2 \to f'_z(A)=-2. \end{cases}$

Nên PT pháp tuyến tại A là

$$d: \frac{x-x_o}{f'_x(A)}=\frac{y-y_o}{f'_y(A)}=\frac{z-z_o}{f'_z(A)} \to \frac{x-1}{6}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{-2}.$$

và PT tiếp diện tại A là

$$(P): f'_x(A).(x-x_o)+f'_y(A).(y-y_o)+f'_z(A).(z-z_o)=0 \to 6(x-1)+4(y-1)-2(z-2)=0$$
$$\to 3(x-1)+2(y-1)-(z-2)=0 \to 3x+2y-z-3=0.$$

4. $(S): x^2+3z^2=y+1; A(1,3,-1)$.
5. $(S): 3x^2+2y^2=z+2; M(-1,1,3)$.

2. TIẾP TUYẾN VÀ PHÁP DIỆN CỦA ĐƯỜNG CONG

- ĐN: Cho đường cong $l: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ **và điểm** $M(x_o,y_o,z_o)\in l$**. Thì PT tiếp tuyến tại M là**

$$d: \frac{x-x_o}{x'(t_o)}=\frac{y-y_o}{y'(t_o)}=\frac{z-z_o}{z'(t_o)} \to d: \begin{cases} x=x_o+x'(t_o).t \\ y=y_o+y'(t_o).t \\ z=z_o+z'(t_o).t \end{cases}$$

và PT pháp diện tại M là

$$(P): x'(t_o).(x-x_o)+y'(t_o).(y-y_o)+z'(t_o).(z-z_o)=0.$$

6. **Viết PT tiếp tuyến và pháp diện của đường cong**

$$l: x=\sin^2 t; y=\sin t\cos t; z=\cos^2 t; t_o=\frac{\pi}{3}.$$

G: Có $\begin{cases} x'=2\sin t.\cos t=\sin 2t \to x'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{1}{2}\sin 2t \to y'=\frac{1}{2}.\cos 2t.2=\cos 2t \to y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2} \\ z'=2\cos t.(-\sin t)=-2\sin t\cos t=-\sin 2t \to z'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

Thay $t=\frac{\pi}{3}$ **vào PT** $l \to M\left(\frac{3}{4};\frac{\sqrt{3}}{4};\frac{1}{4}\right)$**. Nên PT tiếp tuyến tại M là**

$$d: \frac{x-x_o}{x'(t_o)}=\frac{y-y_o}{y'(t_o)}=\frac{z-z_o}{z'(t_o)} \to \frac{x-\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{y-\frac{\sqrt{3}}{4}}{-\frac{1}{2}}=\frac{z-\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

và PT pháp diện tại M là

$$(P): x'(t_o).(x-x_o)+y'(t_o).(y-y_o)+z'(t_o).(z-z_o)=0 \to \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(y-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(z-\frac{1}{4}\right)$$
$$=0 \to \sqrt{3}\left(x-\frac{3}{4}\right)-\left(y-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\sqrt{3}\left(z-\frac{1}{4}\right)=0 \to \sqrt{3}x-y-\sqrt{3}z-\frac{\sqrt{3}}{4}=0.$$

7. $l: x=3t; y=2t^2; z=t^3; M(6,8,8)\in l$.

G: Thay $M(6,8,8)$ **vào PT đường cong** $l: \begin{cases} x=3t=6 \\ y=2t^2=8 \\ z=t^3=8 \end{cases} \to t_o=2 \to \begin{cases} x'=3 \to x'(2)=3 \\ y'=4t \to y'(2)=4.2=8 \\ z'=3t^2 \to z'(2)=3.4=12 \end{cases}$

Nên PT tiếp tuyến tại M là

$$d: \frac{x-x_o}{x'(t)}=\frac{y-y_o}{y'(t)}=\frac{z-z_o}{z'(t)} \to d: \frac{x-6}{3}=\frac{y-8}{8}=\frac{z-8}{12}.$$

và PT pháp diện tại M là

$$(P): x'(t).(x-x_o)+y'(t).(y-y_o)+z'(t).(z-z_o)=0 \to 3(x-6)+8(y-8)+12(z-8)=0$$
$$\to 3x+8y+12z-178=0.$$

8. **C3.** $l: x=\frac{e^t\sin t}{\sqrt{2}}; y=1; z=\frac{e^t\cos t}{\sqrt{2}}; M\left(0;1;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

G: Thay $M\left(0;1;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ vào PT đường cong l: $\begin{cases} x = \frac{e^t \sin t}{\sqrt{2}} = 0 \\ y = 1 \\ z = \frac{e^t \cos t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \to \begin{cases} e^t \sin t = 0 \\ e^t \cos t = 1 \end{cases} \to \begin{cases} \sin t = 0 \\ \cos t = 1 \end{cases} \to e^t = 1 \to$

$t_o = 0 \to \begin{cases} x' = (uv)' = \frac{e^t \sin t + e^t \cos t}{\sqrt{2}} \to x'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y' = 0 \to y'(0) = 0 \\ z' = \frac{e^t \cos t - e^t \sin t}{\sqrt{2}} \to z'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$

Nên PT tiếp tuyến tại M là $d: \frac{x-x_o}{x'(t)} = \frac{y-y_o}{y'(t)} = \frac{z-z_o}{z'(t)} \to d: \begin{cases} x = 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}t \\ y = 1 + 0t \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}t. \end{cases}$ **Và PT pháp diện tại M là**

$$(P): x'(t).(x-x_o) + y'(t).(y-y_o) + z'(t).(z-z_o) = 0 \to \frac{1}{\sqrt{2}}(x-0) + 0(y-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(z - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\to x + z - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$$

Bài tập

9. **Viết PT tiếp tuyến và pháp diện của đường cong** $l: x = \frac{2}{t}; y = t^2 + t; z = -t^3; M(2,2,-1)$.

G: Có $\begin{cases} x = \frac{2}{t} = 2 \\ y = t^2 + t = 2 \\ z = -t^3 = -1 \end{cases} \to t_o = 1 \to \begin{cases} x' = -\frac{2}{t^2} \to x'(1) = \cdots \\ y' = \cdots \\ z' = \cdots \end{cases}$

Nên PT tiếp tuyến tại M là

$$d: \frac{x-x_o}{x'(t)} = \frac{y-y_o}{y'(t)} = \frac{z-z_o}{z'(t)} \to d: \ldots$$

và PT pháp diện tại M là

$$(P): x'(t).(x-x_o) + y'(t).(y-y_o) + z'(t).(z-z_o) = 0 \to \cdots.$$

10. $l: x = 2\cos t; y = 2\sin t; z = t; M(-2,0,-\pi)$.

11. $l: x = 2\sqrt{2}t\sin t; y = 2\sqrt{2}t\cos t; z = 2t; t = \frac{\pi}{4}$.

12. $l: x = \frac{e^t \sin t}{\sqrt{2}}; y = \frac{e^t \cos t}{\sqrt{2}}; z = 2; t = \frac{\pi}{3}$.

3. ĐỘ CONG CỦA ĐƯỜNG CONG

- ĐN: Cho đường cong $l: y = y(x)$. **Thì độ cong** $C = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

- Nếu đường cong $PTTS\ l: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \to C = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

- Nếu đường cong $l: r = r(\varphi) \to C = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

13. **C5. Tính độ cong của đường** $l: y^3 = x; A(1,1)$.

G: Có $l: y = x^{\frac{1}{3}} \to \begin{cases} y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}; x_o = 1 \to y'(1) = \frac{1}{3} \\ y'' = \frac{1}{3}.\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} \to y''(1) = -\frac{2}{9}. \end{cases}$ **Nên độ cong**

$$C=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|-\frac{2}{9}|}{\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{3}{2}}}=\cdots.$$

14. C8. $l: y^2=(x-1)^3;\ A(2,1)$.

G: Có $l: y=(x-1)^{\frac{3}{2}} \to \begin{cases} y'=\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}; x_o=2 \to y'(2)=\frac{3}{2}.1=\frac{3}{2} \\ y''=\frac{3}{2}.\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}(x-1)^{-\frac{1}{2}} \to y''(2)=\frac{3}{4}. \end{cases}$ **Nên độ cong**

$$C=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|\frac{3}{4}|}{\left(1+\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}=\cdots.$$

15. $l: \begin{cases} x=2t^3 \\ y=t^2+1 \end{cases}; t=1.$

G: Có $\begin{cases} x'=6t^2 \\ y'=2t \\ x''=12t \\ y''=2 \end{cases} \to \begin{cases} x'(1)=6 \\ y'(1)=2 \\ x''(1)=12 \\ y''(1)=2 \end{cases} \to C=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|6.2-12.2|}{(6^2+2^2)^{\frac{3}{2}}}=\cdots$

16. C4. $l: \begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}; t=\frac{\pi}{2}.$

G: Có $\begin{cases} x'=1-\cos t \to x'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \\ y'=\sin t \to y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \\ x''=\sin t \to x''\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \\ y''=\cos t \to y''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0. \end{cases}$ **Nên độ cong** $C=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|1.0-1.1|}{(1^2+1^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$

17. C6. $l: r=1+\cos\varphi$.

G: Có $r=1+\cos\varphi \to r'=-\sin\varphi \to r''=-\cos\varphi$. **Nên độ cong**

$$C=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|(1+\cos\varphi)^2+2.\sin^2\varphi-(1+\cos\varphi)(-\cos\varphi)|}{[(1+\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{|1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+2\sin^2\varphi+\cos\varphi+\cos^2\varphi|}{[1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi]^{\frac{3}{2}}}=\frac{3+3\cos\varphi}{(2+2\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{2(1+\cos\varphi)}}=\frac{3}{2.\sqrt{2.2\cos^2\frac{\varphi}{2}}}=\frac{3}{4|\cos\frac{\varphi}{2}|}.$$

18. C7. $l: r=e^{\varphi}; \varphi=\frac{\pi}{4}.$

G: Có $r'=e^{\varphi}=r \to \begin{cases} r'\left(\frac{\pi}{4}\right)=r\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{\pi}{4}} \\ r''=e^{\varphi} \to r''\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{\pi}{4}}. \end{cases}$ **Nên độ cong**

$$C=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|e^{\frac{\pi}{2}}+2.e^{\frac{\pi}{2}}-e^{\frac{\pi}{2}}|}{\left(e^{\frac{\pi}{2}}+e^{\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2.e^{\frac{\pi}{2}}}{\left(2e^{\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2.e^{\frac{\pi}{2}}}{2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}=\frac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{\pi}{4}}}.$$

19. $l: r=e^{4\varphi}$.

G: Có $r = e^{4\varphi} \to r' = 4e^{4\varphi} \to r'' = 16e^{4\varphi}$. Nên độ cong

$$C = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|e^{8\varphi} + 32e^{8\varphi} - 16e^{8\varphi}|}{(e^{8\varphi} + 16e^{8\varphi})^{\frac{3}{2}}} = \frac{17e^{8\varphi}}{(17e^{8\varphi})^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{17}}{17e^{4\varphi}}.$$

Bài tập

20. Tính độ cong của đường $l: y^2 = x; A(4,2)$.

G: Có $l: y = x^{\frac{1}{2}} \to \cdots$ Nên độ cong $C = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \cdots$.

21. $l: y^2 = x^3 + 1; x = 2$.

22. $l: \begin{cases} x = 2t^4 \\ y = 3t^2 - t \end{cases}; t = 1$.

23. $l: \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}; t = \frac{\pi}{3}$.

G: Có ... Nên độ cong $C = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \cdots$.

24. $l: r = e^{3\varphi}$.

G: Có $r = e^{3\varphi} \to r' = \cdots$. Nên độ cong

$$C = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} = \cdots = \frac{\sqrt{10}}{10e^{3\varphi}}.$$

25. $l: r = 3 - \sin\varphi; \varphi = \frac{\pi}{2}$.

G: Có $r' = \cdots$. Nên độ cong $C = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} = \cdots$

CHƯƠNG 4 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

A. PT VI PHÂN CẤP 1

1. PT TÁCH BIẾN

- ĐN: là PT có dạng

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

với HS $y = y(x)$ là HS cần tìm.

- PP giải: Lấy tích phân 2 vế, ta được $\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$.

1. a) Giải PT

$$x(y^2 - 9)dx + y(x^2 - 9)dy = 0.$$

G: TH1. Nếu $y^2 - 9 \equiv 0 \to y = \pm 3 \to dy = 0$. Thay vào PT $0dx + 0 = 0$ (TM)

- TH2. Nếu $y^2 - 9 \neq 0 \to y \neq \pm 3$. Chia cả 2 vế của PT cho $(x^2 - 9)(y^2 - 9) \neq 0$ được

$$\frac{x}{x^2 - 9}dx + \frac{y}{y^2 - 9}dy = 0.$$

Đây là PT tách biến, lấy tích phân 2 vế được

$$\int \frac{x}{x^2 - 9}dx + \int \frac{y}{y^2 - 9}dy = C.$$

- Vì $\int \frac{f'}{f}dx = ln\,|f(x)| + c; (x^2 - 9)' = 2x; (y^2 - 9)' = 2y \to$

$$\int \frac{2x}{x^2 - 9}dx + \int \frac{2y}{y^2 - 9}dy = 2C = C_1 \to ln\,|x^2 - 9| + ln\,|y^2 - 9| = C_1.$$

b) Giải PT

$$(x-1)ydx + x(y-1)dy = 0.$$

G: TH1. Nếu $y \equiv 0 \to dy = 0$. Thay vào PT được $0 = 0$ (TM).

- TH2. Nếu $y \neq 0$. Chia 2 vế cho xy, được

$$\frac{x-1}{x}dx + \frac{y-1}{y}dy = 0.$$

Ta được PT tách biến. Tích phân 2 vế, được

$$\int \frac{x-1}{x}dx + \int \frac{y-1}{y}dy = C \to \int \left(1-\frac{1}{x}\right)dx + \int \left(1-\frac{1}{y}\right)dy = C \to (x - ln\,|x|) + (y - ln\,|y|) = C$$
$$\to x + y - ln\,|xy| = C.$$

- Chú ý: Xét PT dạng

$$y' = f(ax+by+c).$$

- PP giải: Đặt $z = z(x) = ax + by + c \to \begin{cases} y' = f(z) \\ z' = z'_x = a + by'. \end{cases}$ Thay $y' = f(z)$ vào được $z' = a + bf(z)$. Mà $z' = \frac{dz}{dx}$. Thay vào được

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z).$$

- TH1. Nếu $a + bf(z) = 0 \to f(z) = -\frac{a}{b} \to f(ax+by+c) = -\frac{a}{b}$.

- TH2. Nếu $a + bf(z) \neq 0$. Chuyển vế được $\frac{dz}{a+bf(z)} = dx$. Đây là PT tách biến và ta lấy tích phân 2 vế, được …

$$df = f'dx \to dz = z'dx \to z' = \frac{dz}{dx}.$$

2. Giải PT

$$y' = 9x^2 + 6xy + y^2 - 1.$$

G: Có $y' = (3x+y)^2 - 1$. Đặt $z = 3x + y \to \begin{cases} y' = z^2 - 1 \\ z' = z'_x = 3 + y'. \end{cases}$ Thay $y' = z^2 - 1$ vào PT được $z' = 3 + z^2 - 1 \to z' = z^2 + 2$. Thay $z' = \frac{dz}{dx} \to \frac{dz}{dx} = z^2 + 2$. Vì $z^2 + 2 \neq 0$, nên chuyển vế được

$$\frac{dz}{z^2+2} = dx.$$

- Đây là PT tách biến, lấy tích phân 2 vế được $\int \frac{dz}{z^2+2} = \int dx \to \int \frac{dz}{z^2+(\sqrt{2})^2} = x + c \to \frac{1}{\sqrt{2}} arctan \frac{z}{\sqrt{2}} = x + c$.

- Thay $z = 3x + y \to \frac{1}{\sqrt{2}}.arctan\frac{3x+y}{\sqrt{2}} = x + c \to arctan\frac{3x+y}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(x+c) \to \frac{3x+y}{\sqrt{2}} = tan\left[\sqrt{2}(x+c)\right] \to y = \sqrt{2}.tan\left[\sqrt{2}(x+c)\right] - 3x$.

3. Giải PT

$$y' = (4x - y + 1)^2.$$

G: Đặt $z = 4x - y + 1 \to z' = z'_x = 4 - y'$ và $y' = z^2$. Nên $z' = 4 - z^2$. Viết $z' = \frac{dz}{dx} \to \frac{dz}{dx} = 4 - z^2$.

- TH1. Nếu $4 - z^2 = 0 \to z = \pm 2 \to 4x - y + 1 = \pm 2$.

- TH2. Nếu $4 - z^2 \neq 0 \to z \neq \pm 2$. Chuyển vế được $\frac{dz}{4-z^2} = dx$.

Tích phân 2 vế được

$$\int \frac{dz}{4-z^2} = x + c \to \int \frac{dz}{(2-z).\ (2+z)} = x + c \to \int \frac{(2-z)+(2+z)}{(2-z).(2+z)}.\frac{dz}{4} = x + c$$
$$\to \frac{1}{4}.\int \left(\frac{1}{2+z} + \frac{1}{2-z}\right) dz = x + c \to \frac{1}{4}.\left(ln\ |2+z| + \frac{ln\ |2-z|}{-1}\right) = x + c$$
$$\to \frac{1}{4}.(ln\ |2+z| - ln\ |2-z|) = x + c \to ln\ \left|\frac{2+z}{2-z}\right| = 4(x+c).$$

- Thay

$$z = 4x - y + 1 \to ln\left|\frac{2+4x-y+1}{2-4x+y-1}\right| = ln\ \left|\frac{4x-y+3}{1-4x+y}\right| = 4(x+c).$$
$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} ln\ \left|\frac{x-a}{x-b}\right| + c \to \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\ \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c.$$

4. C4. Giải PT $y' = cos\ (x-y-1)$.

G: Đặt $z = x - y - 1 \to \begin{cases} y' = cos\ z \\ z' = z'_x = 1 - y'. \end{cases}$ Thay $y' = cos\ z$ vào được $z' = 1 - cos\ z$. Mà

$$z' = \frac{dz}{dx} \to \frac{dz}{dx} = 1 - cos\ z.$$

- TH1. Nếu $1 - cos\ z = 0 \to cos\ z = 1 \to z = k2\pi \to x - y - 1 = k2\pi\ \ (k \in Z)$.

- TH2. Nếu $1 - cos\ z \neq 0$. Chuyển vế được $\frac{dz}{dx} = 1 - cos\ z \to \frac{dz}{1-cos\ z} = dx$. Đây là PT tách biến, lấy tích phân 2 vế được

$$\int \frac{dz}{1-cos\ z} = x + C \to \int \frac{dz}{1-cos\ \left(2.\ \frac{z}{2}\right)} = \int \frac{dz}{2\ sin^2\left(\frac{z}{2}\right)} = x + C \to \int \frac{d\left(\frac{z}{2}\right)}{sin^2\left(\frac{z}{2}\right)} = x + C \to -cot\frac{z}{2}$$
$$= x + C.$$

- Thay

$$z = x - y - 1 \to -cot\frac{x-y-1}{2} = x + C.$$

c) Giải PT $y' = cos^2\ (x-y-1)$.

G: …

d) Giải PT

$$y' = (3x+y+1)^2.$$

G: Đặt $z = 3x + y + 1 \to \begin{cases} y' = z^2 \\ z' = z'_x = 3 + y'. \end{cases}$ Thay $y' = z^2$ được $z' = 3 + z^2$. Viết $z' = \frac{dz}{dx} \to \frac{dz}{dx} = 3 + z^2$.

Vì $3 + z^2 \neq 0$, chuyển vế được

$$\frac{dz}{3+z^2} = dx.$$

- Đây là PT tách biến, lấy tích phân 2 vế được

$$\int \frac{dz}{3+z^2} = \int dx \to \int \frac{dz}{z^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = x + C \to \frac{1}{\sqrt{3}} arctan\frac{z}{\sqrt{3}} = x + C.$$

Thay

$$z = 3x + y + 1 \to \frac{1}{\sqrt{3}} arctan\frac{3x+y+1}{\sqrt{3}} = x + C.$$

e) $y' = 4x^2 + 4xy + y^2 - 6$.

Bài tập

5. C1. Giải PT $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$.

G: TH1. Nếu $\sqrt{1-y^2}=0 \to y=\pm 1 \to dy=0$. Thay vào PT $\to 0=0 \to$ TM.
- TH2. Nếu $\sqrt{1-y^2}\neq 0$, chia cả 2 vế cho $\sqrt{1-y^2}.\sqrt{1-x^2}$, được $\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=0$.
- Đây là PT tách biến. Lấy tích phân 2 vế, được $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=C \to \int\frac{-2xdx}{2\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{-2ydy}{2\sqrt{1-y^2}}=-C \to$ $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=-C$. (vì $(1-x^2)'=-2x$)

6. C2. Giải PT $y'=x^2+xy+\frac{y^2}{4}-1$.

G: Có $y'=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2-1$. Đặt $z=x+\frac{y}{2} \to \begin{cases} y'=z^2-1 \\ z'=z'_x=1+\frac{y'}{2}.\end{cases}$ Thay $y'=z^2-1$ được $z'=1+\frac{z^2-1}{2} \to z'=\frac{z^2+1}{2}$. Viết $z'=\frac{dz}{dx} \to \frac{dz}{dx}=\frac{z^2+1}{2}$. Vì $z^2+1\neq 0 \to \frac{dz}{z^2+1}=\frac{dx}{2}$. Đây là PT tách biến và ta tích phân 2 vế, được

$$\int\frac{dz}{z^2+1}=\int\frac{dx}{2} \to \arctan z=\frac{x}{2}+C.$$

Thay $z=x+\frac{y}{2} \to \arctan\left(x+\frac{y}{2}\right)=\frac{x}{2}+C$.

7. C3. Giải PT $y'=(4x+y+1)^2$.

G: Đặt $z=4x+y+1 \to z'=z'_x=4+y'$ và $y'=z^2$. Thay $y'=z^2$ vào được $z'=4+z^2$. Viết $z'=\frac{dz}{dx} \to \frac{dz}{dx}=4+z^2$. Vì $4+z^2\neq 0 \to \frac{dz}{z^2+4}=dx$.
- Đây là PT tách biến, lấy tích phân 2 vế được …

2. PT ĐẲNG CẤP
- ĐN: là PT có dạng

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right).$$

VD. Xét PT

$$y'=\frac{x^2+xy-3y^2}{x^2+y^2}=\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{xy}{x^2}-3.\frac{y^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{1+\frac{y}{x}-3.\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Đây là 1 PT dạng đẳng cấp.
- PP giải: Đặt $z=\frac{y}{x} \to y=xz=uv \to y'=y'_x=z+x.z'$ và từ đề bài có $y'=f(z)$. Thay vào được $z+x.z'=f(z) \to x.z'=f(z)-z$. Vì

$$z'=\frac{dz}{dx} \to x.\frac{dz}{dx}=f(z)-z.$$

- TH1. Nếu $f(z)-z=0 \to f(z)=z \to f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{y}{x}$.
- TH2. Nếu $f(z)-z\neq 0$. Chuyển vế được $\frac{dz}{f(z)-z}=\frac{dx}{x}$. Đây là PT tách biến, ta lấy tích phân 2 vế …

8. Giải PT

$$y'=\frac{y}{x}+\sin^2\frac{y}{x}\ =f\left(\frac{y}{x}\right).$$

G: Đây là PT đẳng cấp dạng $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$. Đặt $z=\frac{y}{x} \to y=xz=uv \to y'=y'_x=z+x.z'$ và từ đề bài có $y'=z+\sin^2 z$. Nên $z+x.z'=z+\sin^2 z \to x.z'=\sin^2 z$. Thay $z'=\frac{dz}{dx}$ vào được $x.\frac{dz}{dx}=\sin^2 z$.
- TH1. Nếu $\sin^2 z=0 \to \sin z=0 \to z=k\pi \to \frac{y}{x}=k\pi \to y=k\pi.x\ \ (k\in Z)$.

- TH2. Nếu $sin^2z \neq 0 \rightarrow sin\ z \neq 0$. Chuyển vế được $\frac{dz}{sin^2z} = \frac{dx}{x}$. Đây là PT dạng tách biến, lấy tích phân 2 vế được

$$\int \frac{dz}{sin^2z} = \int \frac{dx}{x} \rightarrow -cot\ z = ln\ |x| + c \rightarrow -cot\frac{y}{x} = ln\ |x| + c.$$

9. C3. Giải PT

$$xy' - y = (x+y).ln\frac{x+y}{x}$$

G: Có

$$xy' = y + (x+y).ln\frac{x+y}{x} \rightarrow y' = \frac{y}{x} + \left(1+\frac{y}{x}\right).ln\left(1+\frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

- Đây là PT đẳng cấp. Đặt $z = \frac{y}{x} \rightarrow y = xz \rightarrow y' = y'_x = z + xz'$. Và $y' = z + (1+z).ln(1+z)$. Thay vào được

$$z + xz' = z + (1+z).ln\ (1+z) \rightarrow xz' = (1+z).ln(1+z).$$

- Thay

$$z' = \frac{dz}{dx} \rightarrow x\frac{dz}{dx} = (1+z).ln\ (1+z).\ \ (\text{Đ}K: 1+z > 0)$$

- TH1. Nếu $ln\ (1+z) = 0 \rightarrow 1+z = e^0 = 1 \rightarrow z = 0 \rightarrow \frac{y}{x} = 0 \rightarrow y = 0$.

- TH2. Nếu $ln\ (1+z) \neq 0$ thì chuyển vế được $\frac{dz}{(1+z).\ ln(1+z)} = \frac{dx}{x}$. Đây là PT tách biến. Lấy tích phân 2 vế được

$$\int \frac{dz}{(1+z).\ ln(1+z)} = ln\ |x| + C \rightarrow \int \frac{d\big(ln\ (1+z)\big)}{ln\ (1+z)} = ln\ |x| + C \rightarrow ln\ |ln\ (1+z)|$$
$$= ln\ |x| + C. \quad (\text{Đặt } u = ln\ (1+z))$$

- Thay $z = \frac{y}{x} \rightarrow ln\ \left|ln\ \left(1+\frac{y}{x}\right)\right| = ln\ |x| + C$.

- Cách 2. Xét $I = \int \frac{dz}{(1+z).\ ln(1+z)}$. Đặt $t = ln(1+z) \rightarrow dt = \frac{1}{1+z}dz$. Nên $I = \int \frac{dt}{t} = ln\ |t| = ln\ |ln\ (1+z)|$.

10. C4. Giải PT

$$y' = \frac{y}{x} + cos\frac{y}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

G: Vì $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ nên đây là PT đẳng cấp. Đặt $z = \frac{y}{x} \rightarrow y = xz \rightarrow y' = y'_x = z + xz'$. Và $y' = z + cos\ z$ nên $z + xz' = z + cos\ z \rightarrow xz' = cos\ z$. Thay

$$z' = \frac{dz}{dx} \rightarrow x.\frac{dz}{dx} = cos\ z.$$

- TH1. Nếu $cos\ z = 0 \rightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow y = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)x \quad (k \in Z)$.

- TH2. Nếu $cos\ z \neq 0 \rightarrow$ Chuyển vế được $\frac{dz}{cos\ z} = \frac{dx}{x}$. Đây là PT tách biến, tích phân 2 vế được

$$\int \frac{dz}{cos\ z} = ln\ |x| + C.$$

- Vì

$$\int \frac{dx}{sin\ x} = ln\left|tan\frac{x}{2}\right| + C; \int \frac{dx}{cos\ x} = ln\left|tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

nên thay vào được

$$ln\left|tan\left(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| = ln\ |x| + C \rightarrow ln\left|tan\left(\frac{y}{2x} + \frac{\pi}{4}\right)\right| = ln\ |x| + C.$$

11. C6. Giải PT

$$y' = \frac{x^2 - xy + y^2}{xy}.$$

G: Có

$$y' = \frac{x^2}{xy} - \frac{xy}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Đây là PT đẳng cấp và đặt $z = \frac{y}{x} \to y = xz \to y' = y'_x = z + xz'$. **Và** $y' = \frac{1}{z} - 1 + z$. **Nên**

$$z + xz' = \frac{1}{z} - 1 + z \to xz' = \frac{1}{z} - 1 \to x.\frac{dz}{dx} = \frac{1-z}{z}.$$

- TH1. Nếu $1 - z = 0 \to z = 1 \to \frac{y}{x} = 1 \to y = x$.

- TH2. Nếu $1 - z \neq 0 \to z \neq 1$. **Chuyển vế được**

$$\frac{z}{1-z}dz = \frac{dx}{x} \to \int \frac{z}{1-z}dz = \int \frac{dx}{x} \to -\int \frac{z}{z-1}dz = ln\,|x| + C \to -\int \frac{z-1+1}{z-1}dz$$

$$= -\int \left(1 + \frac{1}{z-1}\right)dz = -(z + ln\,|z-1|) = ln\,|x| + C.$$

Thay $z = \frac{y}{x} \to -\left(\frac{y}{x} + ln\,\left|\frac{y}{x} - 1\right|\right) = ln\,|x| + C.$

12. a) Giải $y' = \frac{y}{x} + sin\,\frac{y}{x}$.

b) Giải $y' = \frac{y}{x} + cos^2\frac{y}{x}$.

c) Giải $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$.

d) $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{2}.\left(\frac{y}{x}\right)^3$; $y(1) = 4$.

Bài tập

13. C1. Giải PT

$$y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \;= f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Giải: Có $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ **là PT đẳng cấp. Đặt** $z = \frac{y}{x} \to y = xz \to y' = y'_x = z + xz'$. **Mà** $y' = e^{-z} + z$.

Thay vào

$z + xz' = e^{-z} + z \to x.z' = e^{-z} \to x.\frac{dz}{dx} = \frac{1}{e^z}.$

- Vì $e^z \neq 0 \to e^z dz = \frac{dx}{x}$. **Đây là PT tách biến và lấy tích phân 2 vế được** $\int e^z dz = \int \frac{dx}{x} \to e^z = ln\,|x| + c \to e^{\frac{y}{x}} = ln\,|x| + c.$

14. C2. Giải PT $xy' - y + x\,cos\frac{y}{x} = 0$.

G: Chia 2 vế cho x, được $y' - \frac{y}{x} + cos\frac{y}{x} = 0 \to y' = \frac{y}{x} - cos\frac{y}{x} \to y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ **là PT đẳng cấp. Đặt** $z = \frac{y}{x} \to y = xz \to y' = y'_x = z + xz'$ **và** $y' = z - cos\,z$.

Thay vào, được

$$z + xz' = z - cos\,z \to xz' = -cos\,z \to x.\frac{dz}{dx} = -cos\,z.$$

- TH1. Nếu $cos\,z = 0 \to z = \frac{\pi}{2} + k\pi \to \frac{y}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi \to y = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right).x$

- TH2. Nếu $cos\,z \neq 0 \to$ **Chuyển vế** $\frac{dz}{cos\,z} = -\frac{dx}{x}$.

Đây là PT tách biến, tích phân 2 vế được $\int \frac{dz}{cos\,z} = -ln\,|x| + c.$

- Chú ý: $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C; \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

Nên $\ln\left|\tan\left(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| = -\ln|x| + c \to \ln\left|\tan\left(\frac{y}{2x} + \frac{\pi}{4}\right)\right| = -\ln|x| + c.$

15. C5. Giải $y' = \frac{3x^2 - xy - y^2}{x^2}.$

G: Có $y' = 3 - \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = f\left(\frac{y}{x}\right)$**. Đây là PT đẳng cấp, đặt** $z = \frac{y}{x} \to y = xz \to y' = y'_x = z + xz'$ **và từ đề bài** $y' = 3 - z - z^2$**. Nên** $z + xz' = 3 - z - z^2 \to xz' = 3 - 2z - z^2$**. Mà** $z' = \frac{dz}{dx} \to \frac{xdz}{dx} = 3 - 2z - z^2.$

- TH1. Nếu $3 - 2z - z^2 = 0 \to z = 1; z = -3 \to \frac{y}{x} = 1; \frac{y}{x} = -3 \to y = x; y = -3x.$

- TH2. Nếu $3 - 2z - z^2 \neq 0$**. Chuyển vế được** $\frac{dz}{3-2z-z^2} = \frac{dx}{x}.$

Đây là tách biến, lấy tích phân 2 vế được $\int \frac{dz}{3-2z-z^2} = \ln|x| + C \to -\int \frac{dz}{z^2+2z-3} = -\int \frac{dz}{(z-1).(z+3)} = \ln|x| + C \to -\int \frac{(z+3)-(z-1)}{(z-1)(z+3)}.\frac{dz}{4} = -\frac{1}{4}.\int\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+3}\right)dz = -\frac{1}{4}.(\ln|z-1| - \ln|z+3|) = \ln|x| + C.$

Thay $z = \frac{y}{x} \to \cdots$

3. PT TUYẾN TÍNH

- ĐN: là PT có dạng

$$y' + p(x).y = q(x).$$

- Công thức nghiệm:

$$y = e^{-\int p(x)dx}.\left[C + \int q(x).e^{\int p(x)dx}\,dx\right].$$

16. Giải PT

$$y' + 2x.y = 4x.$$

G: Đây là PT tuyến tính với $p(x) = 2x; q(x) = 4x$**. Thay vào công thức nghiệm, được**

$$y = e^{-\int p(x)dx}.\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}\right] = e^{-\int 2xdx}.\left[C + \int 4x.e^{\int 2xdx}\right] = e^{-x^2}.\left[C + \int 4xe^{x^2}dx\right].$$

- Xét $I = \int 4xe^{x^2}dx$**. Đổi biến đặt** $t = x^2 \to dt = 2xdx \to I = \int 2e^t dt = 2e^t = 2e^{x^2}$**. Thay vào nghiệm là**

$$y = e^{-x^2}.\left[C + 2e^{x^2}\right].$$

17. C4. Giải PT

$$x.y' = x^2 + y; y(1) = 4.$$

G: Có

$$y' = \frac{x^2 + y}{x} = x + \frac{y}{x} \to y' - \frac{1}{x}.y = x.$$

- Đây là PT tuyến tính với $p(x) = -\frac{1}{x}; q(x) = x$**. Nên công thức nghiệm**

$$y = e^{-\int p(x)dx}.\left[C + \int q(x).e^{\int p(x)dx}dx\right] = e^{\int\frac{1}{x}dx}.\left[C + \int x.e^{\int -\frac{1}{x}dx}dx\right] = e^{\ln x}.\left[C + \int x.e^{-\ln x}dx\right]$$

$$= x.\left[C + \int x.\frac{1}{x}dx\right] = x.\left[C + \int 1dx\right] = x.[C + x]. \to \textit{Nghiệm tổng quát}$$

- Vì $y(1) = 4 \to \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \to 4 = 1.[C + 1] \to C = 3 \to y = x(3 + x). \to$ ***Nghiệm riêng***

$$y' + p(x).y = q(x).$$

18. C5. Giải PT

$$y + \ln x - x.y' = 0; y(1) = 3.$$

G: Có $x.y' = y + \ln x \to y' = \frac{y}{x} + \frac{\ln x}{x} \to y' - \frac{1}{x}.y = \frac{\ln x}{x}$.

- Đây là PT tuyến tính với $p = -\frac{1}{x}$; $q = \frac{\ln x}{x}$. Nên công thức nghiệm

$$y = e^{-\int p(x)dx}.\left[C + \int q(x).e^{\int p(x)dx}\,dx\right] = e^{\int \frac{dx}{x}}.\left[C + \int \frac{\ln x}{x}.e^{\int -\frac{dx}{x}}dx\right] = e^{\ln x}.\left[C + \int \frac{\ln x}{x}.e^{-\ln x}dx\right]$$
$$= x.\left[C + \int \frac{\ln x}{x}.\frac{1}{x}dx\right] = x.\left[C + \int \frac{\ln x}{x^2}dx\right].$$

- Xét $J = \int \frac{\ln x}{x^2}dx$. TPTP đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{x^2}dx \end{cases} \to \begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}. \end{cases}$ Nên $J = uv - \int vdu = -\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$. Vậy $y = x.\left[C - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right] = Cx - \ln x - 1$.

- Thay $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \to 3 = C - 1 \to C = 4 \to y = 4x - \ln x - 1$.

b) Giải PT $y' + 2xy = 4x$.

G: Đây là PT tuyến tính với $p(x) = 2x$; $q(x) = 4x$. Thay vào công thức nghiệm, được
$y = e^{-\int p(x)dx}.\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}\right] = e^{-\int 2xdx}.\left[C + \int 4x.e^{\int 2xdx}\right] = e^{-x^2}.\left[C + \int 4xe^{x^2}dx\right]$.

- Xét $I = \int 4xe^{x^2}dx$. Đặt $t = x^2 \to dt = 2xdx \to I = \int 2e^t dt = 2e^t = 2e^{x^2}$. Thay vào nghiệm là

$$y = e^{-x^2}.\left[C + 2e^{x^2}\right].$$

c) Giải $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\sin 2x}{x^2}$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

d) C6. Giải $y'\cos y + \sin y = x$.

G: Đặt $z = \sin y \to z' = \cos y.y'$. Thay vào PT được $z' + z = x \to z' + 1.z = x$. Đây là PT tuyến tính …

Bài tập

19. C1. Giải PT $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$.

G: Đây là PT tuyến tính với $p(x) = -\frac{2}{x+1}$; $q(x) = (x+1)^3$. Thay vào công thức nghiệm, được $y = e^{-\int p(x)dx}.\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}\,dx\right] = e^{\int \frac{2}{x+1}dx}.\left[C + \int (x+1)^3.e^{-\int \frac{2}{x+1}dx}\,dx\right] = e^{2\ln(x+1)}.\left[C + \int (x+1)^3.e^{-2\ln(x+1)}dx\right] = (x+1)^2.\left[C + \int (x+1)^3.(x+1)^{-2}\,dx\right] = (x+1)^2.\left[C + \int (x+1)dx\right] = (x+1)^2.\left[C + \frac{x^2}{2} + x\right]$.

20. C2. Giải PT

$$y' + y = \frac{1}{e^x(1-x)}; y(2) = 1.$$

G: Đây là PT tuyến tính $y' + 1.y = \frac{1}{e^x(1-x)}$ với $p(x) = 1$; $q(x) = \frac{1}{e^x(1-x)}$ nên theo công thức nghiệm có

$$y = e^{-\int p(x)dx}.\left[C + \int q(x).e^{\int p(x)dx}\right] = e^{-\int 1dx}.\left[C + \int \frac{1}{e^x(1-x)}e^{\int 1dx}\right] = e^{-x}.\left[C + \int \frac{1}{e^x(1-x)}.e^x dx\right]$$
$$= e^{-x}.\left[C + \int (1-x)dx\right] = e^{-x}.\left[C + x - \frac{x^2}{2}\right].$$

- Vì $y(2) = 1$ nên $y(2) = e^{-2}.(C + 2 - 2) = e^{-2}.C = 1 \to C = e^2 \to y = e^{-x}.\left[e^2 + x - \frac{x^2}{2}\right]$.

21. C3. Giải PT $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

G: Đây là PT tuyến tính nên $y = e^{-\int p(x)dx}.\left[c + \int q(x).e^{\int p(x)dx}\right] = e^{-\int 2xdx}.\left[c + \int xe^{-x^2}.e^{\int 2xdx}\right] = e^{x^2}.\left[c + \int xe^{-x^2}.e^{x^2}dx\right] = e^{x^2}.\left[c + \int xdx\right] = e^{x^2}.\left[c + \frac{x^2}{2}\right]$.

4. PT BECNOULLI

- ĐN: là PT có dạng

$$y' + p(x).y = q(x).y^a$$

- PP giải: Đưa PT Becnoulli về dạng PT tuyến tính.

- TH1. Nếu $y = 0 \rightarrow$ thay vào PT được $0 = 0$ (TM)

- TH2. Nếu $y \neq 0$. Nên chia 2 vế cho $y^a \neq 0$, tức là nhân cả 2 vế với y^{-a} được

$$y'.y^{-a} + p(x).y^{1-a} = q(x).$$

- Đặt $z = y^{1-a} \rightarrow z' = (1-a)y^{-a}.y' \rightarrow y'.y^{-a} = \frac{z'}{1-a}$. Thay vào PT

$$\frac{z'}{1-a} + p(x).z = q(x) \rightarrow z' + (1-a)p(x).z = (1-a)q(x).$$

- Đây là PT tuyến tính đối với ẩn z.

22. Giải PT

$$x.y' = y + x^2y^2.$$

G: Chia cả 2 vế cho x được

$$y' = \frac{1}{x}.y + x.y^2 \rightarrow y' - \frac{1}{x}.y = x.y^2$$

- TH1. Nếu $y^2 = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow y' = 0$. Thay vào PT được $0 = 0$ (TM).

- TH2. Nếu $y^2 \neq 0 \rightarrow y \neq 0$. Chia cả 2 vế cho $y^2 \neq 0$ được $\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{x}.\frac{1}{y} = x$.

Đặt $z = \frac{1}{y} \rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2} \rightarrow \frac{y'}{y^2} = -z'$. Thay vào PT được

$$-z' - \frac{1}{x}.z = x \rightarrow z' + \frac{1}{x}.z = -x.$$

- Đây là PT tuyến tính đối với ẩn z với $p(x) = \frac{1}{x}$; $q(x) = -x$. Áp dụng CT nghiệm

$$z = e^{-\int p(x)dx}.\left[c + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right] = e^{-\int \frac{1}{x}dx}.\left[c + \int -xe^{\int \frac{1}{x}dx}dx\right] = e^{-\ln x}.\left[c - \int xe^{\ln x}dx\right]$$

$$= \frac{1}{x}.\left[c - \int x.xdx\right] = \frac{1}{x}.\left[c - \frac{x^3}{3}\right] = \frac{c - \frac{x^3}{3}}{x}.$$

- Thay $z = \frac{1}{y} \rightarrow \frac{1}{y} = \frac{c - \frac{x^3}{3}}{x} \rightarrow y = \frac{x}{c - \frac{x^3}{3}}$.

23. C3. Giải PT

$$y' + 2y = y^2e^x; y(0) = 2.$$

G: Đây là PT dạng Becnoulli $y' + 2.y = e^x.y^2$.

- TH1. Xét $y = 0 \rightarrow y' = 0 \rightarrow$ Thay vào PT $0 + 0 = 0$ (TM).

- TH2. Xét $y \neq 0$. Chia cả 2 vế cho $y^2 \neq 0$ được $\frac{y'}{y^2} + 2.\frac{1}{y} = e^x$.

Đặt $z = \frac{1}{y} \to z' = -\frac{y'}{y^2} \to \frac{y'}{y^2} = -z'$. Nên thay vào PT

$$-z' + 2.z = e^x \to z' - 2.z = -e^x.$$

- Đây là PT tuyến tính đối với ẩn z với $p(x) = -2; q(x) = -e^x$ nên theo công thức nghiệm

$$z = e^{-\int p(x)dx}.\left[C + \int q(x).e^{\int p(x)dx}\right] = e^{\int 2dx}.\left[c + \int -e^x.e^{\int -2dx}\right] = e^{2x}.\left[c - \int e^x.e^{-2x}dx\right]$$

$$= e^{2x}.\left[c - \int e^{-x}dx\right] = e^{2x}.\left[c - \frac{e^{-x}}{-1}\right] = e^{2x}.[c + e^{-x}].$$

- Thay $z = \frac{1}{y} = e^{2x}.[c + e^{-x}] \to y = \frac{1}{e^{2x}.[c+e^{-x}]}$.

- Nên $y(0) = \frac{1}{1.(c+1)} = \frac{1}{c+1} = 2 \to c + 1 = \frac{1}{2} \to c = -\frac{1}{2} \to y = \frac{1}{e^{2x}.\left[e^{-x} - \frac{1}{2}\right]}$.

24. C6. Giải PT

$$xy' - 2x\sqrt{y}\cos x = -2y.$$

G: Viết lại PT

$$xy' + 2y = 2x\cos x.\sqrt{y} \to y' + \frac{2}{x}.y = 2\cos x.\sqrt{y}$$

Đây là PT Becnoulli.

- TH1. Nếu $\sqrt{y} = 0 \to y = 0 \to y' = 0 \to$ thay vào PT được $0 + 0 = 0\ (TM)$

- TH2. Nếu $\sqrt{y} \neq 0 \to y \neq 0$, chia cả 2 vế cho $\sqrt{y} \neq 0$ được $\frac{y'}{\sqrt{y}} + \frac{2}{x}.\sqrt{y} = 2\cos x$.

Đặt $z = \sqrt{y} \to z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}} \to \frac{y'}{\sqrt{y}} = 2z'$. Thay vào PT được

$$2z' + \frac{2}{x}.z = 2\cos x \to z' + \frac{1}{x}.z = \cos x.$$

- Đây là PT tuyến tính đối với ẩn z với $p = \frac{1}{x};\ q = \cos x$. Thay vào công thức nghiệm

$z = e^{-\int p(x)dx}.\left[C + \int q(x).e^{\int p(x)dx}dx\right] = e^{-\int \frac{1}{x}dx}.\left[c + \int \cos x.e^{\int \frac{1}{x}dx}dx\right] = e^{-\ln x}.\left[c + \int \cos x.e^{\ln x}dx\right] = \frac{1}{x}.\left[c + \int x.\cos x\,dx\right]$.

- Đặt $I = \int x\cos x dx$. Dùng TPTP, đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \to \begin{cases} u' = 1 \\ v = \int \cos x dx = \sin x. \end{cases}$ Nên $I = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x$. Thay vào $z = \frac{1}{x}.[c + x\sin x + \cos x] = \frac{c + x\sin x + \cos x}{x}$.

- Vì $z = \sqrt{y} \to y = z^2 \to y = \left(\frac{x\sin x + \cos x + c}{x}\right)^2$.

b) Giải PT dạng Bernoulli sau: $y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2-4}$.

G: DK: $y \neq 0$. Có $y' - \frac{x}{x^2-4}.y = x.\frac{1}{y}$ Đây là PT Becnoulli.

- Nhân 2 vế với $y \neq 0$, được $y'y - \frac{x}{x^2-4}.y^2 = x$. Đặt $z = y^2 \to z' = 2yy' \to y'y = \frac{z'}{2}$. Được $\frac{z'}{2} - \frac{x}{x^2-4}.z = x \to z' - \frac{2x}{x^2-4}.z = 2x$.

- Đây là PT tuyến tính với ẩn z nên công thức nghiệm $z = e^{-\int p(x)dx}.\left[C + \int q(x).e^{\int p(x)dx}\right] = e^{\int \frac{2x}{x^2-4}dx}.\left[c + \int 2x.e^{\int -\frac{2x}{x^2-4}dx}dx\right] = 2 = e^{\ln(x^2-4)}.[c + \cdots] = \cdots$

c) C5. Giải $ydx - (x^2y^2 + x)dy = 0$.

G: Coi x là hàm của ẩn y $\to \frac{dx}{dy} = x' \to yx' - x^2y^2 - x = 0 \to y.x' - x = y^2.x^2$.

Đây là PT Becnoulli đối với ẩn y.

Bài tập

25. C1. Giải PT $y' - 2x.y = 3x^3.y^2$

G: Đây là PT Becnuolli. Xét $y = 0 \to y' = 0$. **Thay vào được** $0 = 0 \to$ **TM.**

- Xét $y \neq 0$, **chia cả 2 vế cho** y^2 **được** $\frac{y'}{y^2} - 2x.\ \frac{1}{y} = 3x^3$. **Đặt** $z = \frac{1}{y} \to z' = -\frac{1}{y^2}.y' = -\frac{y'}{y^2} \to \frac{y'}{y^2} = -z'$.

Thay vào PT được

$$-z' - 2x.\ z = 3x^3 \to z' + 2x.\ z = -3x^3.$$

- Đây là PT tuyến tính ẩn z với $p = 2x$; $q = -3x^3$. **Thay vào công thức nghiệm**

$z = e^{-\int p(x)dx}.\left[C + \int q(x).e^{\int p(x)dx}\,dx\right] = e^{-\int 2xdx}.\left[C - \int 3x^3.e^{\int 2xdx}dx\right] = e^{-x^2}.\left[C - \int 3x^3e^{x^2}\,dx\right]$.

- Xét $I = \int 3x^3e^{x^2}\,dx = \int 3x^2e^{x^2}.xdx$. **Đặt** $t = x^2 \to dt = 2xdx \to xdx = \frac{1}{2}dt$. **Nên** $I = \int 3te^t.\frac{1}{2}dt = \int \frac{3t}{2}.e^tdt$.

- TPTP đặt $\begin{cases} u = \frac{3t}{2} \\ dv = e^tdt \end{cases} \to \begin{cases} du = \frac{3}{2} \\ v = \int e^tdt = e^t. \end{cases}$ **Nên**

$I = uv - \int vdu = \frac{3t}{2}e^t - \int \frac{3}{2}e^tdt = \frac{3t}{2}e^t - \frac{3}{2}e^t = \frac{3e^t(t-1)}{2} = \frac{3e^{x^2}(x^2-1)}{2}$.

- Nên $z = e^{-x^2}.\left[C - \frac{3e^{x^2}(x^2-1)}{2}\right] = \frac{1}{y} \to y = \frac{1}{e^{-x^2}.\left[C - \frac{3e^{x^2}(x^2-1)}{2}\right]}$.

26. C2. Giải $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2-1}$.

G: DK: $y \neq 0$. **Có** $2y' - \frac{x}{x^2-1}.y = \frac{x}{y}$. **Đây là PT Becnoulli.**

- Nhân 2 vế với y, được $2y'y - \frac{x}{x^2-1}.y^2 = x$. **Đặt** $z = y^2 \to z' = 2yy' \to 2y'y = z'$. **Được**

$$z' - \frac{x}{x^2-1}.z = x.$$

- Đây là PT tuyến tính nên công thức nghiệm $z = e^{-\int p(x)dx}.\left[C + \int q(x).e^{\int p(x)dx}\right] = e^{\int \frac{x}{x^2-1}dx}.\left[c + \int x.e^{\int -\frac{x}{x^2-1}dx}\right] = e^{\frac{1}{2}ln\,(x^2-1)}.\left[c + \int x.e^{-\frac{1}{2}ln\,(x^2-1)}dx\right] = \sqrt{x^2-1}.\left[c + \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx\right] = \sqrt{x^2-1}.\left[c + \sqrt{x^2-1}\right] = y^2 \to y = \cdots$

27. C4. Giải $xy' + y = y^2ln\,x; y(1) = 1.$ (ĐK: $x > 0$)

G: Đây là PT Becnoulli. Xét $y = 0 \to y' = 0$ (L)

- Xét $y \neq 0$, **chia 2 vế cho** y^2 **được** $\frac{xy'}{y^2} + \frac{1}{y} = ln\,x \to \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}.\frac{1}{y} = \frac{ln\,x}{x}$.

Đặt $z = \frac{1}{y} \to z' = -\frac{1}{y^2}.y' \to \frac{y'}{y^2} = -z'$. **Nên** $-z' + \frac{1}{x}.z = \frac{ln\,x}{x} \to z' - \frac{1}{x}.z = -\frac{ln\,x}{x}$.

- Đây là PT tuyến tính nên nghiệm $z = e^{-\int p(x)dx}.\left[C + \int q(x).e^{\int p(x)dx}\right] = e^{\int \frac{1}{x}dx}.\left[C - \int \frac{ln\,x}{x}.e^{-\int \frac{1}{x}dx}\right] = e^{ln\,x}.\left[c - \int \frac{ln\,x}{x}.e^{-ln\,x}dx\right] = x.\left[c - \int \frac{ln\,x}{x}.\frac{1}{x}dx\right] = x.\left[c - \int \frac{ln\,x}{x^2}\,dx\right] = x.\left[c + \int ln\,x\,d\left(\frac{1}{x}\right)\right] = x.\left[c + \frac{ln\,x}{x} - \int \frac{1}{x}.\frac{1}{x}dx\right] = x.\left(c + \frac{ln\,x}{x} - \int \frac{1}{x^2}dx\right) = x\left(c + \frac{ln\,x}{x} + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{y}$.

Suy ra $y = \frac{1}{x\left(c + \frac{1+ln\,x}{x}\right)}$

Vì $y(1) = 1$ **nên** $y(1) = \frac{1}{c+1} = 1 \to c = 0 \to y = \frac{1}{1+ln\,x}$.

5. PT VI PHÂN TOÀN PHẦN (buổi 2)
- ĐN: là PT có dạng

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

trong đó $P'_y = Q'_x$.
- PP giải : Công thức nghiệm

$$u(x,y) = \int_{x_o}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_o}^{y} Q(x_o,y)dy = C, \quad (1)$$

trong đó ta hay chọn $x_o = 0 = y_o$ **nếu hàm Q phức tạp hơn P. Hoặc ngược lại nếu hàm P phức tạp hơn Q thì chọn**

$$u(x,y) = \int_{x_o}^{x} P(x,y_o)dx + \int_{y_o}^{y} Q(x,y)dy = C. \quad (2)$$

1. C4. Giải PT

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y\cos^2 x dy = 0.$$

G: Đặt

$$P = 1 + y^2 \sin 2x;\ Q = -2y\cos^2 x \to P'_y = 2y\sin 2x; Q'_x = -2y.2\cos x.(-\sin x) = 2y\sin 2x \to P'_y = Q'_x.$$

Nên đây là PTVP toàn phần. Chọn $(x_o, y_o) = (0,0)$. **Vì hàm P phức tạp hơn hàm Q nên**

$$(2)\quad u(x,y) = \int_{x_o}^{x} P(x,y_o)dx + \int_{y_o}^{y} Q(x,y)dy = \int_0^x 1dx + \int_0^y (-2y\cos^2 x)dy = x\,|_{x=0}^{x} - (\cos^2 x.y^2)\,|_{y=0}^{y}$$
$$= (x - 0) - \cos^2 x.y^2 + 0 = x - \cos^2 x.y^2 = C.$$

2. C3. Giải PT

$$\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0.$$

Giải. ĐK: $y \neq 0$.
- Đặt

$$P = \frac{2x}{y^3} = 2xy^{-3}; Q = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} \to P'_y = 2x.(-3)y^{-4} = -\frac{6x}{y^4}; Q'_x = \frac{-6x}{y^4} \to P'_y = Q'_x.$$

Nên đây là PTVP toàn phần. Chọn $(x_o, y_o) = (0,1)$ **thì vì hàm Q phức tạp hơn hàm P nên chọn**

$$(1)\quad u(x,y) = \int_{x_o}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_o}^{y} Q(x_o,y)dy = c \to \int_0^x \frac{2x}{y^3}dx + \int_1^y \frac{y^2}{y^4}dy = \int_0^x \frac{2x}{y^3}dx + \int_1^y \frac{1}{y^2}dy$$
$$= \left(\frac{x^2}{y^3}\right)|_{x=0}^{x} + \left(-\frac{1}{y}\right)|_{y=1}^{y} = \left(\frac{x^2}{y^3} - 0\right) - \frac{1}{y} + 1 = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + 1 = C.$$

3. a) Giải PT

$$e^x(2 + 2x - y^2)dx - 2ye^x dy = 0.$$

Giải: Đặt

$$P = e^x(2 + 2x - y^2);\ Q = -2ye^x.$$

Thì $P'_y = e^x.(-2y) = -2ye^x; Q'_x = -2ye^x \to P'_y = Q'_x$. **Nên đây là PTVP toàn phần.**
- Chọn $(x_o, y_o) = (0,0)$. **Vì hàm P phức tạp hơn hàm Q nên dùng công thức nghiệm**

$$(2)\quad u(x,y)=\int_{x_o}^{x}P(x,y_o)dx+\int_{y_o}^{y}Q(x,y)dy=\int_0^x e^x(2+2x)dx+\int_0^y(-2ye^x)dy=c$$

$$\rightarrow \int_0^x(2+2x)e^xdx-e^x.\int_0^y 2ydy=\int_0^x(2+2x)e^xdx-e^x.y^2|_{y=0}^{y}=I-e^xy^2+0$$

$$=I-e^xy^2=c.$$

- Xét $I=\int_0^x(2+2x)e^xdx$. **Dùng TPTP, đặt** $\begin{cases}u=2+2x\\dv=e^xdx\end{cases}\rightarrow\begin{cases}u'=2\\v=e^x.\end{cases}$ **Nên**

$$I=(2+2x)e^x-\int_0^x 2e^xdx=(2+2x)e^x-2e^x|_{x=0}^{x}=(2xe^x)|_{x=0}^{x}=2xe^x-0=2xe^x.$$

Vậy nghiệm $2xe^x-e^xy^2=c$.

b) Giải $2xydx+x^2dy=0$.

Giải: …

c) Giải $3x^2(x-\ln y)dx+\left(y^2-\frac{x^3}{y}\right)dy=0$.

d) $(\sin x+e^y)dx+(xe^y+y^2+3)dy=0$.

Bài tập

4. C1. $(x+y)dx+(x-y)dy=0;y(0)=2$. **(= 2 cách)**

G: Đặt $P=x+y;Q=x-y\rightarrow P'_y=1;Q'_x=1=P'_y$. **Nên đây là PTVP toàn phần. Chọn** $(x_o,y_o)=(0,0)$ **thì**

$$u(x,y)=\int_{x_o}^{x}P(x,y_o)dx+\int_{y_o}^{y}Q(x,y)dy=\int_0^x xdx+\int_0^y(x-y)dy=\frac{x^2}{2}+\left(xy-\frac{y^2}{2}\right)=C.$$

Vì $y(0)=2\rightarrow C=-2\rightarrow x^2+2xy-y^2=-2$.

- Cách 2. Giải $(x+y)dx+(x-y)dy=0$.

- Có $u(x,y)=\int_{x_o}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_o}^{y}Q(x_o,y)dy=\int_0^x(x+y)dx+\int_0^y(-y)dy=\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}=C$.

5. C2. Giải PT $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$.

G: ĐK: $y\neq 0$.

- Đặt $P=1+e^{\frac{x}{y}};Q=e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)\rightarrow P'_y=e^{\frac{x}{y}}.\left(-\frac{x}{y^2}\right);Q'_x=e^{\frac{x}{y}}.\frac{1}{y}\left(1-\frac{x}{y}\right)+e^{\frac{x}{y}}.\frac{1}{y}=P'_y$. **Nên đây là PTVP toàn phần. Chọn** $(x_o,y_o)=(0,1)$ **thì vì hàm Q phức tạp hơn hàm P nên chọn** $u(x,y)=\int_{x_o}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_o}^{y}Q(x_o,y)dy=\int_0^x\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\int_1^y 1dy=\left(x+\frac{e^{\frac{x}{y}}}{\frac{1}{y}}\right)|_{x=0}^{x}+(y)|_{y=1}^{y}=x+ye^{\frac{x}{y}}-y+(y-1)=x+ye^{\frac{x}{y}}-1=C$.

B. PT VI PHÂN CẤP 2

1. PT THUẦN NHẤT

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

trong đó vế phải là số 0.

- PP giải. Xét PT đặc trưng

$$ak^2 + bk + c = 0.$$

- TH1. Nếu PT đtr có 2 nghiệm p biệt $k_1 \neq k_2 \to$ nghiệm của PT thuần nhất là

$$y = c_1.e^{k_1x} + c_2.e^{k_2x}.$$

- TH2. Nếu PT đtr có 1 nghiệm kép $k_1 = k_2 \to$ nghiệm là

$$y = (c_1 + c_2.x)e^{k_1x}.$$

- TH3. Nếu PT đtr có nghiệm phức $k_{1,2} = a \pm bi \to$ nghiệm là

$$y = e^{ax}(c_1.\cos bx + c_2.\sin bx).$$

6. Giải PT $y'' + y' - 2y = 0$.

G: Xét PT đtr $k^2 + k - 2 = 0 \to k = 1$ or $k = -2$. Nên nghiệm

$$y = c_1.e^{k_1x} + c_2.e^{k_2x} = c_1e^x + c_2e^{-2x}.$$

7. Giải PT $y'' - 6y' + 9y = 0$.

G: Xét PT đtr $k^2 - 6k + 9 = 0 \to k_1 = k_2 = 3$. Nên nghiệm

$$y(c_1 + c_2.x)e^{k_1x} = (c_1 + c_2x)e^{3x}.$$

8. a) Giải PT $y'' - 6y' + 13y = 0$.

G: Xét PT đtr $k^2 - 6k + 13 = 0 \to k = 3 \pm 2i = a \pm bi \to \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$. Nên nghiệm

$$y = e^{ax}(c_1.\cos bx + c_2.\sin bx) = e^{3x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x).$$

b) Giải PT $y'' - 5y' + 6y = 0;\ y(0) = 2; y'(0) = 3$.

G: - Xét PT đặc trưng $k^2 - 5k + 6 = 0 \to k_1 = 2; k_2 = 3$. Nên nghiệm là $y = c_1.e^{2x} + c_2.e^{3x}$.

- Nên $y' = c_1.e^{2x}.2 + c_2.e^{3x}.3 = 2c_1.e^{2x} + 3c_2.e^{3x}$. Thay $x = 0 \to \begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 2 \\ y'(0) = 2c_1 + 3c_2 = 3 \end{cases} \to$

$\begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = -1. \end{cases}$

Vậy $y = 3.e^{2x} - e^{3x}$.

c) Giải PT $y'' + 4y' + 4y = 0;\ y(0) = 1; y'(0) = 2$.

Giải. Xét PT đặc trưng $k^2 + 4k + 4 = 0 \to k_1 = k_2 = -2$. Nên nghiệm $y = (c_1 + c_2x).e^{k_1x} = (c_1 + c_2x).e^{-2x}$.

- Nên $y' = u'v + uv' = c_2.e^{-2x} + (c_1 + c_2x).e^{-2x}.(-2) = e^{-2x}.(c_2 - 2c_1 - 2c_2x)$. Thay $x = 0$ vào $\begin{cases} y(0) = c_1 = 1 \\ y'(0) = c_2 - 2c_1 = 2 \end{cases} \to c_2 = 4$.

Vậy nghiệm $y = (1 + 4x).e^{-2x}$.

- VD xét PT dao động của con lắc lò xo $y'' + \omega^2 y = 0$ với $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Thì ...

2. PT VỚI HỆ SỐ HẰNG

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

trong đó vế phải là HS $f(x) \neq 0; a, b, c$ là các hằng số.

- PP giải: Bước 1. Giải PT thuần nhất tương ứng $ay'' + by' + cy = 0$. Xét PT đ trưng

$$ak^2 + bk + c = 0.$$

- TH1. Nếu PT đ trưng có 2 nghiệm p biệt $k_1 \neq k_2 \rightarrow$ nghiệm của PT thuần nhất là

$$Y = c_1.e^{k_1 x} + c_2.e^{k_2 x}.$$

- TH2. Nếu PT đ trưng có 1 nghiệm kép $k_1 = k_2 \rightarrow$ nghiệm là

$$Y = (c_1 + c_2.x)e^{k_1 x}.$$

- TH3. Nếu PT đtr có nghiệm phức $k_{1,2} = a \pm bi \rightarrow$ nghiệm của PT thuần nhất là

$$Y = e^{ax}(c_1.\cos bx + c_2.\sin bx).$$

- Bước 2. Ta đi tìm 1 nghiệm riêng của PT ban đầu.

- TH1. Nếu hệ số tự do ở VP là

$$f(x) = P_n(x).e^{ax}$$

với bậc của đa thức $P_n(x) = n$.

- Nếu $k = a$ ko là nghiệm của PT đ trưng thì nghiệm riêng

$$y^* = Q_n(x).e^{ax}$$

với bậc của đa thức $Q_n(x) = n =$ bậc $P_n(x)$.

- Nếu $k = a$ là nghiệm đơn của PT đ trưng thì nghiệm riêng

$$y^* = x.Q_n(x)e^{ax}.$$

- Nếu $k = a$ là nghiệm kép của PT đtr thì nghiệm riêng

$$y^* = x^2.Q_n(x)e^{ax}.$$

- KL: Nghiệm tổng quát của PT đầu là

$$y = Y + y^*$$

với $\begin{cases} Y \text{ là nghiệm của PT thuần nhất tương ứng} \\ \quad y^* \text{ là nghiệm riêng của PT đầu.} \end{cases}$

- Chú ý: Phân biệt nghiệm riêng với nghiệm T Quát của PT.
*** Giống nhau: Đều là nghiệm của PT, tức là thay vào đều thỏa mãn PT ban đầu.**
*** Khác nhau: Nghiệm riêng là 1 nghiệm ko chứa các hằng số C, còn nghiệm T Quát là 1 họ nghiệm có chứa các hằng số C, khi ta thay C bởi các số cụ thể như số 1, 2, 3, ... thì nghiệm T Quát trở thành nghiệm riêng của PT ban đầu.**

9. C10. Giải PT

$$y'' + y = 4xe^x.$$

G: Bước 1. Giải PT thuần nhất tương ứng $y'' + y = 0$. Xét PT đ trưng $k^2 + 1 = 0 \rightarrow k = \pm i = 0 \pm 1i = a \pm bi \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \rightarrow$ Nghiệm PT thuần nhất

$$Y = e^{ax}(c_1\cos bx + c_2\sin bx) = c_1\cos x + c_2\sin x.$$

- Bước 2. Tìm nghiệm riêng của PT đầu. Vì $f = 4xe^x = e^{1x}.4x = e^{ax}.P_n(x) \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ P_n(x) = 4x \end{cases} \rightarrow$
$\begin{cases} a = 1 \text{ ko là } n_o \text{ của PT đ trưng} \\ \text{bậc } P = 1 = \text{bậc } Q \rightarrow Q(x) = ax + b. \end{cases}$ Nên nghiệm riêng

$$y^* = e^{ax}Q_n(x) = e^x(ax + b) \rightarrow y' = e^x(ax + b) + e^x.a = e^x(ax + b + a) \rightarrow y'' = e^x(ax + b + a) + e^x.a = e^x(ax + b + 2a).$$

Thay vào PT đầu

$$y'' + y = e^x(ax + b + 2a) + e^x(ax + b) = e^x(2ax + 2a + 2b) = 4xe^x \rightarrow 2ax + 2a + 2b = 4x = 4x + 0 \rightarrow \begin{cases} 2a = 4 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2. \end{cases}$$

Nên nghiệm riêng của PT đầu

$$y^* = e^x(ax + b) = e^x(2x - 2).$$

- Vậy nghiệm T Quát của PT đầu $y = Y + y^* = c_1\cos x + c_2\sin x + e^x(2x - 2)$.

10. C12. Giải PT

$$y'' - 2y' + y = xe^x.$$

G: Bước 1. Giải PT thuần nhất tương ứng $y'' - 2y' + y = 0 \to$ **PT dtr là** $k^2 - 2k + 1 = 0 \to k_1 = k_2 = 1 \to$ **Nghiệm PT thuần nhất là**

$$Y = (c_1 + c_2 x)e^{k_1 x} = (c_1 + c_2 x)e^x.$$

- Bước 2. Tìm 1 nghiệm riêng của PT đầu. Vì $f = xe^x = e^{1x}.x = e^{ax}.P_n(x) \to \begin{cases} a = 1 \\ P_n(x) = x. \end{cases}$ **Nên**

$\begin{cases} a = 1 \text{ là } n_o \text{ kép của } PT\ đtr \\ bậc\ P = 1 = bậc\ Q \to Q_n(x) = ax + b. \end{cases}$ **Nên nghiệm riêng**

$$y^* = x^2 Q_n(x)e^{ax} = e^x.x^2(ax + b) = e^x(ax^3 + bx^2) \to y' = e^x(ax^3 + bx^2) + e^x(3ax^2 + 2bx)$$
$$= e^x(ax^3 + bx^2 + 3ax^2 + 2bx) \to y''$$
$$= e^x(ax^3 + bx^2 + 3ax^2 + 2bx) + e^x(3ax^2 + 2bx + 6ax + 2b)$$
$$= e^x(ax^3 + bx^2 + 6ax^2 + 4bx + 6ax + 2b).$$

Nên thay vào PT đầu được

$$y'' - 2y' + y = e^x(ax^3 + bx^2 + 6ax^2 + 4bx + 6ax + 2b - 2ax^3 - 2bx^2 - 6ax^2 - 4bx + ax^3 + bx^2)$$
$$= e^x(6ax + 2b) = xe^x \to 6ax + 2b = x = 1x + 0 \to \begin{cases} 6A = 1 \\ 2B = 0 \end{cases} \to \begin{cases} A = \dfrac{1}{6} \\ B = 0. \end{cases}$$

- Nên nghiệm riêng của PT đầu là $y^* = e^x(ax^3 + bx^2) = e^x.\frac{1}{6}x^3$

Vậy nghiệm tổng quát của PT đầu là $y = Y + y^* = (c_1 + c_2 x)e^x + e^x.\frac{1}{6}x^3$

11. C7. Giải PT

$$4y'' - 4y' + y = xe^{\frac{1}{2}x}.$$

G: Bước 1. Giải PT thuần nhất tương ứng $4y'' - 4y' + y = 0$**. Xét PT đtr** $4k^2 - 4k + 1 = 0 \to k_1 = k_2 = \frac{1}{2} \to$ **Nghiệm của PT thuần nhất** $Y = (c_1 + c_2 x)e^{k_1 x} = (c_1 + c_2 x)e^{\frac{1}{2}x}$.

- Bước 2. Tìm nghiệm riêng của PT đầu. Vì $f(x) = x.e^{\frac{1}{2}x} = P_n(x).e^{ax} \to \begin{cases} P_n(x) = x \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$ **nên**

$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \text{ là } n_o \text{ kép của } PT\ đtr \\ bậc\ P = 1 = bậc\ Q \to Q = ax + b \end{cases} \to$ **Nghiệm riêng**

$$y^* = x^2.Q_n(x)e^{ax} = x^2(ax + b)e^{\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x}(ax^3 + bx^2) \to y' = e^{\frac{1}{2}x}.\frac{1}{2}(ax^3 + bx^2) + e^{\frac{1}{2}x}(3ax^2 + 2bx)$$
$$= e^{\frac{1}{2}x}.\left(\frac{a}{2}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + 3ax^2 + 2bx\right) \to y''$$
$$= e^{\frac{1}{2}x}.\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + 3ax^2 + 2bx\right) + e^{\frac{1}{2}x}.\left(\frac{3a}{2}x^2 + bx + 6ax + 2b\right)$$
$$= e^{\frac{1}{2}x}.\left(\frac{a}{4}x^3 + \frac{b}{4}x^2 + 3ax^2 + 2bx + 6ax + 2b\right).$$

- Nên thay vào PT ban đầu được

$$4y'' - 4y' + y$$
$$= e^{\frac{1}{2}x}(ax^3 + bx^2 + 12ax^2 + 8bx + 24ax + 8b - 2ax^3 - 2bx^2 - 12ax^2 - 8bx + ax^3$$
$$+ bx^2) = e^{\frac{1}{2}x}.(24ax + 8b) = xe^{\frac{1}{2}x} \to 24ax^2 + 8b = x = 1x + 0 \to \begin{cases} 24a = 1 \\ 8b = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a = \dfrac{1}{24} \\ b = 0. \end{cases}$$

Nên nghiệm riêng của PT đầu $y^* = (ax^3 + bx^2)e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{24}x^3.e^{\frac{1}{2}x}$.

- Vậy nghiệm tổng quát của PT đầu là $y = Y + y^* = (c_1 + c_2 x)e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{24}x^3 e^{\frac{1}{2}x}$.

- Chú ý: Nghiệm tổng quát của PT đầu là

$$y = Y + y^*$$

với $\begin{cases} Y \text{ là nghiệm của PT thuần nhất tương ứng} \\ y^* \text{ là nghiệm riêng của PT đầu.} \end{cases}$

b) Giải $y'' + y = 4e^x;\ y(0) = 1, y'(0) = 3$.
c) $y'' + 2y' + 2y = e^x(2x + 3)$.
d) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.
e) $y'' - 2y' + y = 4e^x$
f) $y'' + 6y' + 9y = e^{-2x}$
g) $y'' + 2y' + 5y = 8e^x$.

- Chú ý: Nếu hệ số tự do ở VP

$$f(x) = P_n(x) = P_n(x)e^{0x} = P_n(x)e^{ax} \rightarrow a = 0.$$

Suy ra

- Nếu $k = 0$ **ko là nghiệm của PT đtr thì nghiệm riêng**

$$y = Q_n(x).$$

- Nếu $k = 0$ **là nghiệm đơn của PT đtr thì nghiệm riêng**

$$y = xQ_n(x).$$

- Nếu $k = 0$ **là nghiệm kép của PT đtr thì nghiệm riêng**

$$y = x^2 Q_n(x).$$

12. C5. Giải PT

$$y'' - 4y' = 4x^2 + 3x + 2;\ y(0) = 0; y'(0) = 2.$$

G: Bước 1. Giải PT thuần nhất tương ứng $y'' - 4y' = 0 \rightarrow$ **PT đ trưng là** $k^2 - 4k = 0 \rightarrow k = 0; k = 4$.
Nghiệm của PT thuần nhất

$$Y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} = c_1 + c_2 e^{4x}.$$

- Bước 2. Tìm nghiệm riêng của PT đầu. Vì $f = 4x^2 + 3x + 2 = e^{0x}.(4x^2 + 3x + 2) = e^{ax}.P_n(x) \rightarrow$
$\begin{cases} a = 0 \\ P_n(x) = 4x^2 + 3x + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ là nghiệm đơn của PT đtr} \\ \text{bậc } P = 2 = \text{bậc } Q(x) \rightarrow Q(x) = ax^2 + bx + c. \end{cases}$ **Nên nghiệm riêng**

$$y^* = xe^{ax}Q(x) = x(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx \rightarrow\ y' = 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow y'' = 6ax + 2b.$$

Nên thay vào PT đầu được

$$y'' - 4y' = 6ax + 2b - 4(3ax^2 + 2bx + c) = -12ax^2 + (6a - 8b)x + 2b - 4c = 4x^2 + 3x + 2$$

$$\rightarrow \begin{cases} -12a = 4 \\ 6a - 8b = 3 \\ 2b - 4c = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{3} \\ b = -\dfrac{5}{8} \\ c = -\dfrac{13}{16}. \end{cases} \rightarrow y^* = ax^3 + bx^2 + cx = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{8}x^2 - \frac{13}{16}x.$$

Nên nghiệm TQ của PT đầu là $y = Y + y^* = c_1 + c_2 e^{4x} - \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{8}x^2 - \frac{13}{16}x$.

- Vì $y(0)=0; y'(0)=2 \to \begin{cases} y(0)=c_1+c_2=0 \\ y'=4c_2e^{4x}-x^2-\frac{5}{4}x-\frac{13}{16} \to y'(0)=4c_2-\frac{13}{16}=2 \end{cases} \to \begin{cases} c_1+c_2=0 \\ 4c_2-\frac{13}{16}=2 \end{cases} \to$ $\begin{cases} c_1=-\frac{45}{64} \\ c_2=\frac{45}{64} \end{cases} \to y=-\frac{45}{64}+\frac{45}{64}e^{4x}-\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{8}x^2-\frac{13}{16}x.$

13. C13. Giải PT $y''+3y'=2x^2-3x+4$.
G: Bước 1. Giải PT thuần nhất $Y=c_1+c_2e^{-3x}$.
Bước 2. Tìm nghiệm riêng. Vì $f=e^{0x}.(2x^2-3x+4) \to \cdots \to y^*=x(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx \to y'=\cdots \to y''=\cdots$.
Nên

$$\begin{cases} 9a=2 \\ 6a+6b=-3 \\ 2b+3c=4 \end{cases} \to \begin{cases} a=\dfrac{2}{9} \\ b=-\dfrac{13}{18} \\ c=\dfrac{49}{27}. \end{cases}$$

Vậy $y=Y+y^*=c_1+c_2e^{-3x}+\frac{2}{9}x^3-\frac{13}{18}x^2+\frac{49}{27}x$.
b) Giải PT $y''-3y'=x^2+2x+3$.
G: …
c) Giải $y''+4y'=3x^2-2x+1; y(0)=1; y'(0)=4$.

- TH2. Nếu hệ số tự do ở VP $\left[\begin{array}{l} f(x)=e^{ax}P_n(x)\cos bx \\ f(x)=e^{ax}P_n(x)\sin bx \\ f(x)=e^{ax}[P_n(x)\cos bx+Q_n(x)\sin bx]. \end{array}\right.$
- Nếu $k=a+bi$ ko là nghiệm của PT đtr thì nghiệm riêng

$$y^*=e^{ax}[R_n(x)\cos bx+S_n(x)\sin bx]$$

với bậc của $R_n(x)=S_n(x)=n=P_n(x)$.
- Nếu $k=a+bi$ là nghiệm của PT đtr thì nghiệm riêng

$$y^*=xe^{ax}[R_n(x)\cos bx+S_n(x)\sin bx].$$

14. C11. Giải PT

$$y''+y=6\sin x.$$

G: Bước 1. Giải PT thuần nhất $y''+y=0$. Xét PT đ tr $k^2+1=0 \to k=\pm i=0\pm 1i=a\pm bi \to$ $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \to Y=e^{ax}(c_1\cos bx+c_2\sin bx)=c_1\cos x+c_2\sin x$.
- Bước 2. Tìm nghiệm riêng của PT đầu. Vì

$$f=6\sin x=e^{0x}.\sin x.6=e^{ax}.\sin bx.P_n(x) \to \begin{cases} a+bi=0+1i=i \\ P=6 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} a+bi=i \text{ là } n_o \text{ của } PT \text{ đtr} \\ \text{bậc } P=0=\text{bậc } R=S \to R=A; S=B \end{cases} \to y^*=xe^{ax}[R_n(x)\cos bx+S_n(x)\sin bx]$$
$$=x(A\cos x+B\sin x)=Ax\cos x+Bx\sin x \to y'$$
$$=A.\cos x+Ax.(-\sin x)+B.\sin x+Bx.\cos x=\cos x.(bx+a)+\sin x.(-ax+b)$$
$$\to y''=(-\sin x)(bx+a)+\cos x.b+\cos x.(-ax+b)+\sin x.(-a)$$
$$=\sin x.(-bx-2a)+\cos x.(-ax+2b).$$

Nên thay vào PT đầu $y'' + y = \sin x.(-bx - 2a) + \cos x.(-ax + 2b) + ax\cos x + bx\sin x = \sin x.(-2a) + \cos x\,.2b = 6\sin x = \sin x.0 + \cos x.0 \to \begin{cases} -2a = 6 \\ 2b = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \end{cases} \to y^* = ax\cos x + bx\sin x = -3x\cos x$.

Vậy nghiệm của PT là $y = Y + y^* = c_1\cos x + c_2\sin x - 3x\cos x$.

15. Giải PT:

$$y'' - 4y' + 5y = e^x\cos x.$$

Giải. Bước 1. Giải PT thuần nhất tương ứng $y'' - 4y' + 5y = 0$. **Xét PT đ tr là** $k^2 - 4k + 5 = 0 \to k = 2 \pm i = a \pm bi \to \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \to Y = e^{ax}(c_1\cos bx + c_2\sin bx) = e^{2x}[c_1\cos x + c_2\sin x]$.

- Bước 2. Tìm nghiệm riêng của PT đầu. Vì

$$f = e^x\cos x = e^{1x}\cos x.1 = e^{ax}\cos bx.P_n(x) \to \begin{cases} a + bi = 1 + i \\ P = 1 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} a + bi = 1 + i \text{ ko là } n_o \text{ của } PT\ d\ tr \\ \text{bậc } P = 0 = \text{bậc } R = S \to R = A; S = B \end{cases}$$

$$\to y^* = e^{ax}[R_n(x)\cos bx + S_n(x)\sin bx] = e^x(A\cos x + B\sin x) \to y'$$
$$= e^x(A\cos x + B\sin x) + e^x(-A\sin x + B\cos x) = e^x.[\cos x\,(A + B) + \sin x(B - A)]$$
$$\to y'' = e^x.[\cos x\,(A + B) + \sin x(B - A)] + e^x.[-\sin x(A + B) + \cos x(B - A)]$$
$$= e^x.[\cos x.2B + \sin x.(-2A)].$$

Nên thay vào PT đầu

$$y'' - 4y' + 5y$$
$$= e^x.[\cos x.2B + \sin x.(-2A)] - 4e^x.[\cos x\,(A + B) + \sin x(B - A)]$$
$$+ 5e^x(A\cos x + B\sin x) = e^x.[\cos x.(-6B + A) + \sin x.(2A + B)] = e^x\cos x$$
$$= e^x.[\cos x.1 + \sin x.0] \to \begin{cases} A - 6B = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \to \begin{cases} A = \frac{1}{13} \\ B = -\frac{2}{13} \end{cases} \to y^* = e^x(A\cos x + B\sin x)$$
$$= e^x\left(\frac{1}{13}\cos x - \frac{2}{13}\sin x\right).$$

Vậy nghiệm $y = Y + y^* = e^{2x}[c_1\cos x + c_2\sin x] + e^x\left(\frac{1}{13}\cos x - \frac{2}{13}\sin x\right)$.

b) $y'' - y = e^{2x}\cos x$.

c) Giải PT $y'' + y = 4\cos 2x + \sin 2x$.

d) Giải $y'' + 4y = \cos 2x$.

e) Giải $y'' - 4y = e^{2x}\sin x$.

Bài tập

16. C1. Giải PT $y'' - 2y' + y = 2e^{2x}$.

G: Bước 1. Giải PT thuần nhất $y'' - 2y' + y = 0$. **Xét PT đtr** $k^2 - 2k + 1 = 0 \to k_1 = k_2 = 1$ **nên nghiệm** $Y = (c_1 + c_2x)e^x$.

- Bước 2. Tìm nghiệm riêng của PT đầu. Vì

$f = 2e^{2x} = e^{ax}.P(x) \to \begin{cases} a = 2 \\ P = 2 \end{cases} \to \begin{cases} a = 2 \\ \text{bậc } P = 0 = \text{bậc } Q \to Q = A \end{cases}$ **nên nghiệm riêng** $y^* = Ae^{2x} \to y' = 2Ae^{2x} \to y'' = 4Ae^{2x}$.

Thay vào PT được

$$4Ae^{2x} - 4Ae^{2x} + Ae^{2x} = Ae^{2x} = 2e^{2x} \to A = 2 \to y^* = 2e^{2x}.$$

Vậy nghiệm T Quát $y = Y + y^* = (c_1 + c_2x)e^x + 2e^{2x}$.

17. C3. Giải PT $2y'' + 3y' + y = xe^{-x}$.

G: Bước1 . Giải PT thuần nhất $2y'' + 3y' + y = 0$. Xét $2k^2 + 3k + 1 = 0 \to k = -1 \quad or\ k = -\frac{1}{2}$ nên nghiệm $y_1 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}$.

- Bước 2. Tìm nghiệm riêng của PT đầu. Vì

$f = xe^{-x} = e^{-x}.x = e^{ax}.P(x) \to \begin{cases} a = -1 \\ P = x \end{cases} \to \begin{cases} a = -1 \\ bậc\ P = 1 = bậc\ Q \to Q = ax + b \end{cases}$ **nên nghiệm riêng**

$$y^* = x(ax + b)e^{-x} = e^{-x}(ax^2 + bx) \to y' = \cdots \to y'' = \cdots.$$

Nên thay vào PT được

$$2y'' + 3y' + y = \cdots = xe^{-x} \to \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \to y^* = x\left(-\dfrac{1}{2}x - 2\right)e^{-x}. \\ b = -2. \end{cases}$$

Vậy nghiệm T Quát là $y = Y + y^* = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} + x\left(-\frac{1}{2}x - 2\right)e^{-x}$.

18. C6. Giải PT $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}; y(2) = 0 = y'(2)$.

G: Bước 1. Giải PT thuần nhất $y'' + 4y' + 4y = 0$. Xét PT đtr $k^2 + 4k + 4 = 0 \to k = -2$ nên nghiệm $Y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$.

- Bước 2 . Tìm nghiệm riêng của PT đầu. Vì

$f = 3e^{-2x} = e^{-2x}.3 = e^{ax}.P(x) \to \begin{cases} a = -2 \\ P = 3 \end{cases} \to \begin{cases} a = -2\ là \ldots \\ bậc\ P = 0 = bậc\ Q \to Q = a. \end{cases}$ **Nên nghiệm riêng**

$$y^* = e^{-2x}.x^2.a = e^{-2x}.ax^2 \to y' = \cdots \to y'' = \cdots.$$

Nên thay vào PT ban đầu được

$$y'' + 4y' + 4y = \cdots = 3e^{-2x} \to 2a = 3 \to a = \frac{3}{2} \to y^* = e^{-2x}.\frac{3}{2}x^2.$$

Vậy nghiệm T Quát $y = Y + y^* = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + e^{-2x}.\frac{3}{2}x^2$.

- Và $y(2) = 0 = y'(2) \to \begin{cases} c_1 + 2c_2 + 6 = 0 \\ -2c_1 - 3c_2 - 6 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} c_1 = 6 \\ c_2 = -6 \end{cases} \to y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + e^{-2x}.\frac{3}{2}x^2 = (6 - 6x)e^{-2x} + e^{-2x}.\frac{3}{2}x^2$.

19. C4. Giải PT $y'' + 2y' + 2y = x^2 - 4x + 3$.

G: Bước 1. Giải PT thuần nhất $y'' + 2y' + 2y = 0$. Xét PT $k^2 + 2k + 2 = 0 \to k = -1 \pm 1i \to Y = e^{-x}(c_1 cos\ x + c_2 sin\ x)$.

- Bước 2. Tìm nghiệm riêng của PT đầu. Vì

$f = x^2 - 4x + 3 = e^{0x}.(x^2 - 4x + 3) \to \begin{cases} a = 0\ ko\ là \\ bậc\ P = 2 = bậc\ Q \end{cases} \to y^* = e^{0x}.Q = ax^2 + bx + c \to y' = \cdots \to y'' = \cdots.$

Nên

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 4a + 2b = -4 \\ 2a + 2b + 2c = 3 \end{cases} \to \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -3 \\ c = 4. \end{cases}$$

Vậy $y = e^{-x}(c_1 cos\ x + c_2 sin\ x) + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$.

20. C2. Giải PT $y'' - 6y' + 9y = cos\ 3x$.

G: Bước 1. Giải PT thuần nhất $\to Y = (c_1 + c_2 x)e^{3x}$.

- Bước 2. Tìm nghiệm riêng của PT đầu. Vì

$f = cos\ 3x = e^{0x} cos\ 3x.1 \to \begin{cases} a + bi = 3i \\ P = 1 \end{cases} \to \begin{cases} a + bi = 3i \\ bậc\ P = 0 = bậc\ R = S \to R = a; S = b \end{cases} \to y^* = a\ cos\ 3x + b\ sin\ 3x \to y' = \cdots \to y'' = \cdots.$

Nên thay vào PT đầu

$$y'' - 6y' + 9y = \cdots = \cos 3x \to \begin{cases} -18b = 1 \\ 18a = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a = 0 \\ b = -\dfrac{1}{18} \end{cases} \to y^* = -\frac{1}{18}\sin 3x.$$

Vậy $y = \cdots$

21. C8. Giải PT $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x$.

G: Bước 1. Xét PT thuần nhất $k^2 + 2k + 2 = 0 \to k = -1 \pm 1i \to Y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$.

- Bước 2. Tìm nghiệm riêng. Vì

$f = e^x \sin x = e^x \sin x.1 \to \begin{cases} a + bi = 1 + 1i \\ P = 1 \end{cases} \to \begin{cases} a + bi = 1 + 1i \\ bậc\ P = 0 = bậc\ R = S \to R = a; S = b \end{cases} \to y^* =$ $e^x(a\cos x + b\sin x) \to y' = \cdots \to y'' = \cdots$.

Nên

$$y'' + 2y' + 2y = \cdots = e^x \sin x \to \begin{cases} 4a + 4b = 0 \\ 4b - 4a = 1 \end{cases} \to \begin{cases} a = -\dfrac{1}{8} \\ b = \dfrac{1}{8}. \end{cases}$$

Vậy $y = \cdots$

*** PT VỚI HỆ SỐ HẰNG**

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

trong đó vế phải là HS $f(x) \neq 0$; a, b, c là các hằng số.

- PP giải: Bước 1. Giải PT thuần nhất tương ứng $ay'' + by' + cy = 0$. Xét PT đ trưng

$$ak^2 + bk + c = 0.$$

- TH1. Nếu PT đtr có 2 nghiệm p biệt $k_1 \neq k_2 \to$ nghiệm của PT thuần nhất là

$$Y = c_1.e^{k_1 x} + c_2.e^{k_2 x}.$$

- TH2. Nếu PT đtr có 1 nghiệm kép $k_1 = k_2 \to$ nghiệm là

$$Y = (c_1 + c_2.x)e^{k_1 x}.$$

- TH3. Nếu PT đtr có nghiệm phức $k_{1,2} = a \pm bi \to$ nghiệm của PT thuần nhất là

$$Y = e^{ax}(c_1.\cos bx + c_2.\sin bx).$$

- Bước 2. Ta đi tìm 1 nghiệm riêng của PT ban đầu.

- TH1. Nếu hệ số tự do ở VP có dạng

$$f(x) = P_n(x).e^{ax}$$

với bậc của đa thức $P_n(x) = n$.

- Nếu $k = a$ ko là nghiệm của PT đtr thì nghiệm riêng

$$y^* = Q_n(x).e^{ax}$$

với bậc của đa thức $Q_n(x) = n =$ bậc $P_n(x)$.

- Nếu $k = a$ là nghiệm đơn của PT đtr thì nghiệm riêng

$$y^* = x.Q_n(x)e^{ax}.$$

- Nếu $k = a$ là nghiệm kép của PT đtr thì nghiệm riêng

$$y^* = x^2.Q_n(x)e^{ax}.$$

- KL: Nghiệm tổng quát của PT đầu là $y = Y + y^*$

với $\begin{cases} Y \text{ là nghiệm của PT thuần nhất tương ứng} \\ y^* \text{ là nghiệm riêng của PT đầu.} \end{cases}$

- Chú ý: Nếu

$$f(x) = P_n(x) = P_n(x)e^{0x} = P_n(x)e^{ax} \to a = 0.$$

Suy ra

- Nếu $k = 0$ ko là nghiệm của PT đtr thì nghiệm riêng

$$y^* = Q_n(x).$$

- Nếu $k = 0$ là nghiệm đơn của PT đtr thì nghiệm riêng

$$y^* = xQ_n(x).$$

- Nếu $k = 0$ là nghiệm kép của PT đtr thì nghiệm riêng

$$y^* = x^2Q_n(x).$$

- TH2. Nếu hệ số tự do ở VP $\left[\begin{array}{l} f(x) = e^{ax}P_n(x)\cos bx \\ f(x) = e^{ax}P_n(x)\sin bx \\ f(x) = e^{ax}[P_n(x)\cos bx + Q_n(x)\sin bx]. \end{array}\right.$

- Nếu $k = a + bi$ ko là nghiệm của PT đtr thì nghiệm riêng

$$y^* = e^{ax}[R_n(x)\cos bx + S_n(x)\sin bx]$$

với bậc $R_n(x) = n = \text{bậc } P_n = \text{bậc } S_n$.

- Nếu $k = a + bi$ là nghiệm của PT đtr thì nghiệm riêng

$$y^* = xe^{ax}[R_n(x)\cos bx + S_n(x)\sin bx].$$

- TH2. Nếu hệ số tự do ở VP $\left[\begin{array}{l} f(x) = e^{ax}P_n(x)\cos bx \\ f(x) = e^{ax}P_n(x)\sin bx \\ f(x) = e^{ax}[P_n(x)\cos bx + Q_n(x)\sin bx]. \end{array}\right.$

VD1. Giải PT $y'' - y = (x^2 - 4x)\cos 3x$.

Thì $P_n(x) = x^2 - 4x \to \text{bậc } P = 2 = \text{bậc } R = S$.

VD2. Giải PT $y'' + y' = e^{3x}(2x + 3)\sin 2x$.

Thì $P_n(x) = 2x + 3 \to \text{bậc } P = 1 = \text{bậc } R = S \to R = Ax + B; S = Cx + D$.

VD3. Giải PT $y'' - 2y' = 5\cos 2x - 3\sin 2x$.

Thì $P = 5; Q = -3 \to \text{bậc } P = \text{bậc } Q = 0 = \text{bậc } R = S \to R = A; S = B$.

TH3. HS

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

*** Phương pháp CHỒNG CHẤT NGHIỆM $y^* = y_1 + y_2$.**

22. C14. Giải PT

$$y'' - 2y' = 2\cos^2 x.$$

G: Bước 1. Xét PT thuần nhất tương ứng $y'' - 2y' = 0$. Xét PT đtr $k^2 - 2k = 0 \to k = 0; 2 \to Y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x} = c_1 + c_2e^{2x}$.

- Bước 2. Có $f(x) = 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x = f_1(x) + f_2(x)$.

- Xét $f_1(x) = 1 = e^{0x}.1 \to \begin{cases} a = 0 \\ P = 1 \end{cases} \to \begin{cases} a = 0 \text{ là } n_o \text{ của PT dtr} \\ \text{bậc } P = 0 = \text{bậc } Q \to Q = A \end{cases}$ nên nghiệm riêng

$$y_1 = xQ(x)e^{ax} = x.A.$$

- Xét

$f_2(x) = \cos 2x = e^{0x}.\cos 2x.1 \to \begin{cases} a + bi = 0 + 2i = 2i \\ P = 1 \end{cases} \to \begin{cases} a + bi = 2i \text{ ko là } n_o \text{ của PT dtr} \\ \text{bậc } P = 0 = \text{bậc } R = S \to R = B; S = C \end{cases} \to$

nên nghiệm riêng

$$y_2 = e^{ax}[R_n(x)\cos bx + S_n(x)\sin bx] = B\cos 2x + C\sin 2x.$$

- Theo PP chồng chất nghiệm thì nghiệm riêng

$$Y^* = y_1 + y_2 = Ax + B\cos 2x + C\sin 2x \to y' = a - 2b\sin 2x + 2c\cos 2x \to y'' = -4b\cos 2x - 4c\sin 2x.$$

Thay vào PT $y'' - 2y' = 1 + \cos 2x \to -4b\cos 2x - 4c\sin 2x - 2(a - 2b\sin 2x + 2c\cos 2x) = -4b\cos 2x - 4c\sin 2x - 2a + 4b\sin 2x - 4c\cos 2x = -2a + \sin 2x.(4b - 4c) + \cos 2x.(-4b - 4c) = 1 + \cos 2x \to \begin{cases} -2a = 1 \\ 4b - 4c = 0 \\ -4b - 4c = 1 \end{cases} \to \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{8} \\ c = -\frac{1}{8} \end{cases} \to y^* = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x.$

Vậy nghiệm $y = Y + y^* = c_1 + c_2e^{2x} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x.$

b) Giải PT

$$y'' + 4y = \cos 2x + e^{4x}.$$

G: Bước 1. Giải PT thuần nhất tương ứng $y'' + 4y = 0$**. Xét PT đtr** $k^2 + 4 = 0 \to k = \pm 2i = a \pm bi \to \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases} \to Y = e^{ax}(c_1.\cos bx + c_2.\sin bx) = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x.$

- Bước 2. Có HS $f(x) = \cos 2x + e^{4x} = f_1(x) + f_2(x).$

- Xét

$f_1(x) = \cos 2x = e^{0x}.\cos 2x.1 \to \begin{cases} a + bi = 0 + 2i = 2i \\ P = 1 \end{cases} \to \begin{cases} a + bi = 2i \text{ là } n_o \text{ của PT đtr} \\ \text{bậc } P = 0 = \text{bậc } R = S \to R = A; S = B. \end{cases}$

Nên nghiệm riêng

$$y_1 = xe^{ax}[R_n(x)\cos bx + S_n(x)\sin bx] = x.(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

- Xét $f_2(x) = e^{4x} = e^{4x}.1 \to \begin{cases} a = 4 \\ P = 1 \end{cases} \to \begin{cases} a = 4 \text{ ko là } n_o \text{ của PT đtr} \\ \text{bậc } P = 0 = \text{bậc } Q \to Q = C \end{cases}$ **nên nghiệm riêng**

$$y_2 = Q_n(x)e^{ax} = C.e^{4x} \to Y^* = y_1 + y_2 = x.(A\cos 2x + B\sin 2x) + C.e^{4x}$$
$$= Ax\cos 2x + Bx\sin 2x + Ce^{4x} \to y'$$
$$= A\cos 2x - 2Ax\sin 2x + B\sin 2x + 2Bx\cos 2x + 4Ce^{4x}$$
$$= \cos 2x.(2Bx + A) + \sin 2x.(-2Ax + B) + 4Ce^{4x} \to y''$$
$$= -\sin 2x.2(2Bx + A) + \cos 2x.2B + \cos 2x.2(-2Ax + B) + \sin 2x.(-2A) + 16Ce^{4x}$$
$$= \cos 2x.(-4Ax + 4B) + \sin 2x.(-4Bx - 4A) + 16Ce^{4x}.$$

Thay vào PT đầu

$$y'' + 4y = \cos 2x + e^{4x}$$
$$\to \cos 2x.(-4Ax + 4B) + \sin 2x.(-4Bx - 4A) + 16Ce^{4x} + 4.(Ax\cos 2x + Bx\sin 2x + Ce^{4x}) = \cos 2x.(4B) + \sin 2x.(-4A) + 20Ce^{4x}$$
$$= \cos 2x + e^{4x} \to \begin{cases} 4B = 1 \\ -4A = 0 \\ 20C = 1 \end{cases} \to \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{1}{4} \\ C = \frac{1}{20} \end{cases} \to y^* = Ax\cos 2x + Bx\sin 2x + Ce^{4x}$$
$$= \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{20}e^{4x}.$$

Vậy nghiệm $y = Y + y^* = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{20}e^{4x}.$

c) Giải PT $y'' - 4y = \sin 3x + e^{2x}.$

G: ...

Bài tập

23. C9. Giải PT $y'' + 9y = \cos 3x + e^x.$

G: Xét PT đtr $k^2+9=0 \to k=\pm 3i \to Y=\cdots$
- Có $f(x)=cos\ 3x+e^x$.
- Xét $f_1(x)=cos\ 3x=e^{0x}.cos\ 3x.1 \to \begin{cases} a+bi=3i \\ P=1 \end{cases}$ nên nghiệm riêng

$$y_1=x.(Acos\ 3x+B\ sin\ 3x).$$

- Xét $f_2(x)=e^x=e^{1x}.1 \to \begin{cases} a=1 \\ P=1 \end{cases}$ nên nghiệm riêng

$$y_2=C.e^x \to Y^*=y_1+y_2=x.(Acos\ 3x+B\ sin\ 3x)+C.e^x \to \begin{cases} 6B=1 \\ -6C=0 \\ 10A=1 \end{cases} \to \begin{cases} A=0 \\ B=\frac{1}{6} \\ C=\frac{1}{10} \end{cases}$$

Vậy nghiệm $y=\cdots$