

ĐỀ SỐ: 1

Đề thi gồm có 04 câu; 02 trang
Đề thi **không** được sử dụng tài liệu

Học phần: Tối ưu hóa

Mã học phần:

Ngày thi:

Giờ thi:

Thời gian làm bài: 90 phút
(Không kể thời gian giao đề)

Họ và tên sinh viên: Số báo danh:.....

Câu 1: (2 điểm): Tìm cực trị địa phương của hàm số $f(x_1, x_2) = e^{-2x_1 - 3x_2} x_1 x_2$.

Câu 2: (3 điểm): Cho bài toán:

$$\begin{aligned} \min \quad & 5x_1^2 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1^2 + 3x_2^2 \leq 9, \\ & x_1 + x_2 \geq 1, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

a. **(1.5 điểm)** Chứng minh rằng bài toán trên là bài toán là tối ưu lồi.

b. **(1.5 điểm)** Tìm giá trị tối ưu của bài toán sử dụng điều kiện KKT.

Câu 3: (3 điểm): Một nhà máy tiểu thủ công nghiệp sản xuất 3 loại thiết bị máy móc kí hiệu là A, B, C, sử dụng thép và đồng thau. Biết rằng số lượng thép, đồng thau, và số tuần cần thiết để sản xuất được một đơn vị sản phẩm mỗi loại được cho trong bảng dưới đây.

	A	B	C	Giới hạn
Thép	5	5	3	100 kg
Đồng thau	3	4	9	75 kg
Số tuần	1	2	1	20 tuần

Cho biết lợi nhuận thu được từ mỗi sản phẩm loại A, B, C tương ứng là 6, 4, 7. Xác định số lượng sản phẩm mỗi loại nên sản xuất để tối đa hóa lợi nhuận, với yêu cầu rằng tổng khối lượng thép và đồng thau tương ứng không vượt quá 100kg và 75g, và số tuần làm việc tối đa là 20.

a. **(1 điểm)** Viết mô hình quy hoạch tuyến tính của bài toán trên

b. **(2 điểm)** Sử dụng thuật toán đơn hình tìm lời giải tối ưu

Câu 4: (2 điểm):

Bài toán phân lớp nhị phân (*binary classification*) là quá trình phân lớp 1 đối tượng dữ liệu vào 2 lớp cho trước nhờ 1 mô hình phân lớp (*model*) nào đó. Ví dụ, Gmail xác định xem một email có phải là spam hay không; hay các ngân hàng xác định xem một khách hàng có khả năng thanh toán nợ hay không. Mô hình phân lớp được xây dựng dựa trên 1 tập dữ liệu được xây dựng trước đó có gán nhãn (hay còn gọi là tập huấn luyện). Quá trình phân lớp là quá trình gán nhãn cho đối tượng dữ liệu. Xét mô hình phân lớp hồi qui Logistic (*Logistic regression*) trong phân lớp nhị phân của học có giám sát (*supervised learning*). Trong mô hình này, cho biết các điểm dữ liệu đầu vào $\{(\mathbf{x}_i, y_i) : i = 1, \dots, n\}$,

- $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$ biểu diễn thuộc tính của dữ liệu thứ i , và
- $y_i \in \{0, 1\}$ là nhãn của dữ liệu tương ứng.

Yêu cầu là tìm một vector tham số $\theta \in \mathbb{R}^d$ sao cho hàm số sau đây đạt giá trị nhỏ nhất.

$$L(\theta) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \log\left(\sigma\left(\theta^T \mathbf{x}_i\right)\right) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - y_i) \log\left(1 - \sigma\left(\theta^T \mathbf{x}_i\right)\right),$$

trong đó hàm sigmoid $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ được định nghĩa như sau:

$$\sigma(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}.$$

Hàm $L(\theta)$ được gọi là hàm loss (hay hàm *Cross Entropy*).

- a. **(1 điểm)** Chứng minh rằng hàm $L(\theta)$ là hàm lồi
- b. **(1 điểm)** Biểu diễn $L(\theta)$ trong trường hợp $d = n = 1$ và tìm $\theta \in \mathbb{R}$ để hàm $L(\theta)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Tổng: 04 câu

Ghi chú: - Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Trưởng Khoa/Bộ môn

Giảng viên ra đề

PGS. TS. Nguyễn Trung Thành

Học phần: Tối ưu hóa

Mã học phần:

ĐỀ SỐ: 1

Đáp án gồm có 04 trang

Câu	Nội dung trả lời	Điểm	Chuẩn đầu ra học phần																								
Câu 1		2 điểm																									
	<p>Tính các đạo hàm riêng:</p> $f'_{x_1} = e^{-2x_1^2 - 3x_2^2} (1 - 4x_1^2)x_2; \quad f'_{x_2} = e^{-2x_1^2 - 3x_2^2} (1 - 6x_2^2)x_1$ $f''_{x_1^2} = 4e^{-2x_1^2 - 3x_2^2} (4x_1^2 - 3)x_1x_2; \quad f''_{x_2^2} = 18e^{-2x_1^2 - 3x_2^2} (2x_2^2 - 1)x_1x_2$ $f''_{x_1x_2} = e^{-2x_1^2 - 3x_2^2} (4x_1^2 - 1)(6x_2^2 - 1)$	0.5																									
	<p>Giải hệ $f'_{x_1} = f'_{x_2} = 0$ được 5 điểm dừng</p> $(0,0); (1/2, 1/\sqrt{6}); (-1/2, 1/\sqrt{6}); (1/2, -1/\sqrt{6}); (-1/2, -1/\sqrt{6})$	0.5																									
	<p>Ma trận Hess:</p> $H = e^{-2x_1^2 - 3x_2^2} \begin{bmatrix} 4(4x_1^2 - 3)x_1x_2 & (4x_1^2 - 1)(6x_2^2 - 1) \\ (4x_1^2 - 1)(6x_2^2 - 1) & 18(2x_2^2 - 1)x_1x_2 \end{bmatrix} = e^{-2x_1^2 - 3x_2^2} .H'$	0.25																									
	<p>Xét điều kiện:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Điểm dừng</th><th>$\det(H')$</th><th>$f''_{x_1^2}$</th><th>Kết luận</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$(0,0)$</td><td>$-1 < 0$</td><td></td><td>Không là cực trị</td></tr> <tr> <td>$(1/2, 1/\sqrt{6})$</td><td>$4 > 0$</td><td>< 0</td><td>Cực đại</td></tr> <tr> <td>$(-1/2, 1/\sqrt{6})$</td><td>$4 > 0$</td><td>> 0</td><td>Cực tiểu</td></tr> <tr> <td>$(1/2, -1/\sqrt{6})$</td><td>$4 > 0$</td><td>> 0</td><td>Cực tiểu</td></tr> <tr> <td>$(-1/2, -1/\sqrt{6})$</td><td>$4 > 0$</td><td>< 0</td><td>Cực đại</td></tr> </tbody> </table>	Điểm dừng	$\det(H')$	$f''_{x_1^2}$	Kết luận	$(0,0)$	$-1 < 0$		Không là cực trị	$(1/2, 1/\sqrt{6})$	$4 > 0$	< 0	Cực đại	$(-1/2, 1/\sqrt{6})$	$4 > 0$	> 0	Cực tiểu	$(1/2, -1/\sqrt{6})$	$4 > 0$	> 0	Cực tiểu	$(-1/2, -1/\sqrt{6})$	$4 > 0$	< 0	Cực đại	0.75	
Điểm dừng	$\det(H')$	$f''_{x_1^2}$	Kết luận																								
$(0,0)$	$-1 < 0$		Không là cực trị																								
$(1/2, 1/\sqrt{6})$	$4 > 0$	< 0	Cực đại																								
$(-1/2, 1/\sqrt{6})$	$4 > 0$	> 0	Cực tiểu																								
$(1/2, -1/\sqrt{6})$	$4 > 0$	> 0	Cực tiểu																								
$(-1/2, -1/\sqrt{6})$	$4 > 0$	< 0	Cực đại																								
Câu 2		3 điểm																									
a.	Hàm mục tiêu $5x_1^2 + x_2$ là hàm lồi vì ma trận Hess là PSD	0.5																									
	Sử dụng định nghĩa tập lồi để chỉ ra rằng miền ràng buộc là tập lồi	0.5																									

b.	<p>Hàm Lagrange:</p> $L = 5x_1^2 + x_2 + \lambda(2x_1^2 + 3x_2^2 - 9) - \mu_1(x_1 + x_2 - 1) - \mu_2x_1 - \mu_3x_2$ <p>Điều kiện KKT:</p> $\begin{cases} L'_{x_1} = 10x_1 + 4\lambda x_1 - \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ L'_{x_2} = 1 + 6\lambda x_2 - \mu_1 - \mu_3 = 0 \\ \lambda(2x_1^2 + 3x_2^2 - 9) = 0 \\ \mu_1(x_1 + x_2 - 1) = 0 \\ \mu_2x_1 = 0 \\ \mu_3x_2 = 0 \\ 2x_1^2 + 3x_2^2 \leq 9 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ \lambda, \mu_1, \mu_2 \geq 0 \end{cases}$	1	
	<p>Xét $\lambda \neq 0$: suy ra $2x_1^2 + 3x_2^2 = 9$</p> <ul style="list-style-type: none"> $\mu_1 \neq 0$: suy ra $x_1 + x_2 = 1$ suy ra không tồn tại đồng thời $x_1, x_2 \geq 0$ $\mu_1 = 0$: suy ra $\mu_3 \neq 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mu_3 = 1, \mu_2 = 0, \lambda < 0$ 	0.25	
	<p>Xét $\lambda = 0$: suy ra $\begin{cases} 10x_1 - \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ 1 - \mu_1 - \mu_3 = 0 \end{cases}$</p> <ul style="list-style-type: none"> $\mu_1 \neq 0$: suy ra $x_1 + x_2 = 1$. <ul style="list-style-type: none"> $\mu_2 = \mu_3 = 0 \Rightarrow \mu_1 = 1, x_1 = 1/10, x_2 = 9/10$ $\mu_2 = 0, \mu_3 \neq 0 \Rightarrow x_2 = 0, x_1 = 1, \mu_1 = 10, \mu_3 < 0$ $\mu_3 = 0, \mu_2 \neq 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, \mu_2 < 0$ $\mu_3, \mu_2 \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$ $\mu_1 = 0$: suy ra $\mu_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ 	0.5	
	KL: Vậy hệ có nghiệm duy nhất (1/10, 9/10) và là điểm tối ưu của bài toán.	0.25	
Câu 3		3 điểm	
a.	<p>Đặt x_1, x_2, x_3 lần lượt là số lượng sản phẩm loại A, B, C tương ứng cần sản xuất để tối đa hóa lợi nhuận. Khi đó ta có bài toán QHTT sau:</p> $\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 100, \\ & 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 \leq 75, \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$	1	

b.	<table><tr><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td><td>S_1</td><td>S_2</td><td>S_3</td><td>const.</td></tr><tr><td>5</td><td>5</td><td>3</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>100</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>9</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>75</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>20</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>7</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>F - 0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3/5</td><td>1/5</td><td>0</td><td>0</td><td>20</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>9</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>75</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>20</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>7</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>F - 0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3/5</td><td>1/5</td><td>0</td><td>0</td><td>20</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>36/5</td><td>-3/5</td><td>1</td><td>0</td><td>15</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>2/5</td><td>-1/5</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>-2</td><td>17/5</td><td>-6/5</td><td>0</td><td>0</td><td>F - 120</td></tr></table>	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	const.	5	5	3	1	0	0	100	3	4	9	0	1	0	75	1	2	1	0	0	1	20	6	4	7	0	0	0	F - 0	1	1	3/5	1/5	0	0	20	3	4	9	0	1	0	75	1	2	1	0	0	1	20	6	4	7	0	0	0	F - 0	1	1	3/5	1/5	0	0	20	0	1	36/5	-3/5	1	0	15	0	1	2/5	-1/5	0	1	0	0	-2	17/5	-6/5	0	0	F - 120	0.5	
x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	const.																																																																																								
5	5	3	1	0	0	100																																																																																								
3	4	9	0	1	0	75																																																																																								
1	2	1	0	0	1	20																																																																																								
6	4	7	0	0	0	F - 0																																																																																								
1	1	3/5	1/5	0	0	20																																																																																								
3	4	9	0	1	0	75																																																																																								
1	2	1	0	0	1	20																																																																																								
6	4	7	0	0	0	F - 0																																																																																								
1	1	3/5	1/5	0	0	20																																																																																								
0	1	36/5	-3/5	1	0	15																																																																																								
0	1	2/5	-1/5	0	1	0																																																																																								
0	-2	17/5	-6/5	0	0	F - 120																																																																																								
	<table><tr><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td><td>S_1</td><td>S_2</td><td>S_3</td><td>const.</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3/5</td><td>1/5</td><td>0</td><td>0</td><td>20</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>36/5</td><td>-3/5</td><td>1</td><td>0</td><td>15</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>2/5</td><td>-1/5</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>-2</td><td>17/5</td><td>-6/5</td><td>0</td><td>0</td><td>F - 120</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3/5</td><td>1/5</td><td>0</td><td>0</td><td>20</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>36/5</td><td>-3/5</td><td>1</td><td>0</td><td>15</td></tr><tr><td>0</td><td>5/2</td><td>1</td><td>-1/2</td><td>0</td><td>5/2</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>-2</td><td>17/5</td><td>-6/5</td><td>0</td><td>0</td><td>F - 120</td></tr><tr><td>1</td><td>-1/2</td><td>0</td><td>1/2</td><td>0</td><td>-3/2</td><td>20</td></tr><tr><td>0</td><td>-17</td><td>0</td><td>3</td><td>1</td><td>-18</td><td>15</td></tr><tr><td>0</td><td>5/2</td><td>1</td><td>-1/2</td><td>0</td><td>5/2</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>-21/2</td><td>0</td><td>1/2</td><td>0</td><td>-17/2</td><td>F - 120</td></tr></table>	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	const.	1	1	3/5	1/5	0	0	20	0	1	36/5	-3/5	1	0	15	0	1	2/5	-1/5	0	1	0	0	-2	17/5	-6/5	0	0	F - 120	1	1	3/5	1/5	0	0	20	0	1	36/5	-3/5	1	0	15	0	5/2	1	-1/2	0	5/2	0	0	-2	17/5	-6/5	0	0	F - 120	1	-1/2	0	1/2	0	-3/2	20	0	-17	0	3	1	-18	15	0	5/2	1	-1/2	0	5/2	0	0	-21/2	0	1/2	0	-17/2	F - 120	0.5	
x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	const.																																																																																								
1	1	3/5	1/5	0	0	20																																																																																								
0	1	36/5	-3/5	1	0	15																																																																																								
0	1	2/5	-1/5	0	1	0																																																																																								
0	-2	17/5	-6/5	0	0	F - 120																																																																																								
1	1	3/5	1/5	0	0	20																																																																																								
0	1	36/5	-3/5	1	0	15																																																																																								
0	5/2	1	-1/2	0	5/2	0																																																																																								
0	-2	17/5	-6/5	0	0	F - 120																																																																																								
1	-1/2	0	1/2	0	-3/2	20																																																																																								
0	-17	0	3	1	-18	15																																																																																								
0	5/2	1	-1/2	0	5/2	0																																																																																								
0	-21/2	0	1/2	0	-17/2	F - 120																																																																																								
	<table><tr><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td><td>S_1</td><td>S_2</td><td>S_3</td><td>const.</td></tr><tr><td>1</td><td>-1/2</td><td>0</td><td>1/2</td><td>0</td><td>-3/2</td><td>20</td></tr><tr><td>0</td><td>-17</td><td>0</td><td>3</td><td>1</td><td>-18</td><td>15</td></tr><tr><td>0</td><td>5/2</td><td>1</td><td>-1/2</td><td>0</td><td>5/2</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>-21/2</td><td>0</td><td>1/2</td><td>0</td><td>-17/2</td><td>F - 120</td></tr><tr><td>1</td><td>-1/2</td><td>0</td><td>1/2</td><td>0</td><td>-3/2</td><td>20</td></tr><tr><td>0</td><td>-17/3</td><td>0</td><td>1</td><td>1/3</td><td>-6</td><td>5</td></tr><tr><td>0</td><td>5/2</td><td>1</td><td>-1/2</td><td>0</td><td>5/2</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>-21/2</td><td>0</td><td>1/2</td><td>0</td><td>-17/2</td><td>F - 120</td></tr><tr><td>1</td><td>7/3</td><td>0</td><td>0</td><td>-1/6</td><td>3/2</td><td>35/2</td></tr><tr><td>0</td><td>-17/3</td><td>0</td><td>1</td><td>1/3</td><td>-6</td><td>5</td></tr><tr><td>0</td><td>-1/3</td><td>1</td><td>0</td><td>1/6</td><td>-1/2</td><td>5/2</td></tr><tr><td>0</td><td>-23/3</td><td>0</td><td>0</td><td>-1/6</td><td>-11/2</td><td>F - 245/2</td></tr></table>	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	const.	1	-1/2	0	1/2	0	-3/2	20	0	-17	0	3	1	-18	15	0	5/2	1	-1/2	0	5/2	0	0	-21/2	0	1/2	0	-17/2	F - 120	1	-1/2	0	1/2	0	-3/2	20	0	-17/3	0	1	1/3	-6	5	0	5/2	1	-1/2	0	5/2	0	0	-21/2	0	1/2	0	-17/2	F - 120	1	7/3	0	0	-1/6	3/2	35/2	0	-17/3	0	1	1/3	-6	5	0	-1/3	1	0	1/6	-1/2	5/2	0	-23/3	0	0	-1/6	-11/2	F - 245/2	0.5	
x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	const.																																																																																								
1	-1/2	0	1/2	0	-3/2	20																																																																																								
0	-17	0	3	1	-18	15																																																																																								
0	5/2	1	-1/2	0	5/2	0																																																																																								
0	-21/2	0	1/2	0	-17/2	F - 120																																																																																								
1	-1/2	0	1/2	0	-3/2	20																																																																																								
0	-17/3	0	1	1/3	-6	5																																																																																								
0	5/2	1	-1/2	0	5/2	0																																																																																								
0	-21/2	0	1/2	0	-17/2	F - 120																																																																																								
1	7/3	0	0	-1/6	3/2	35/2																																																																																								
0	-17/3	0	1	1/3	-6	5																																																																																								
0	-1/3	1	0	1/6	-1/2	5/2																																																																																								
0	-23/3	0	0	-1/6	-11/2	F - 245/2																																																																																								
	$x_1 = 35/2 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 5/2$ $F_{\max} = 245/2$	0.5																																																																																												
Câu 5		2 điểm																																																																																												
a.	Hàm $f_1(t) = -\log(\sigma(t))$ là hàm lồi do $f_1'(t) = -1 + \sigma(t)$ là hàm đơn điệu tăng.	0.25																																																																																												
	Hàm $f_2(t) = -\log(1 - \sigma(t))$ là hàm lồi do $f_2'(t) = 1 + f_1'(t)$ là hàm đơn điệu tăng.	0.25																																																																																												
	Xét $g(y) = f(Ay)$. Ta có $\nabla_y^2 g(y) = A^T \nabla_x^2 f(Ay) A$. Do đó	0.5																																																																																												

	$z^T \nabla_y^2 g(y) z = z^T A^T \nabla_{x^*}^2 f(Ay) Az = (Az)^T f(Ay) (Az) \geq 0$ <p>với mọi z. Suy ra $\nabla_y^2 g(y)$ là ma trận PSD với mọi y.</p> <p>Vậy $-\log(\sigma(\theta^T \mathbf{x}_i)), -\log(1 - \sigma(\theta^T \mathbf{x}_i))$ là các hàm lồi, và hàm L là hàm lồi vì là tổng của các hàm lồi.</p>		
b.	<p>Biểu diễn $L(\theta)$ trong trường hợp $d = n = 1$:</p> $L(\theta) = -y \log(\sigma(\theta x)) - (1 - y) \log(1 - \sigma(\theta x))$	0.5	
	<p>Đạo hàm $L'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - y}{y} = e^{-\theta x}$. Nếu $x \neq 0$ thì $\theta = -\frac{\log \frac{1 - y}{y}}{x}$.</p>	0.5	

Trưởng Khoa/Bộ môn

Giảng viên làm đáp án

PGS. TS. Nguyễn Trung Thành