BÀI TẬP

XÁC SUẤT THỐNG KÊ

CHƯƠNG 1: XÁC SUẤT

1.1.

Một hộp có 100 tấm thẻ như nhau được ghi các số từ 1 đến 100, Rút ngẫu nhiên hai thẻ rồi đặt theo thứ tự từ trái qua phải. Tính xác suất đển

a/ Rút được hai thẻ lập nên một số có hai chữ số.

b/ Rút được hai thẻ lập nên một số chia hết cho 5.

Giải

a/ A :"Hai thẻ rút được lập nên một số có hai chữ số"

$$P(A)=\frac{A_9^2}{A_{100}^2}=\frac{9.8}{100.99}\approx 0,0073$$

b/ B : "Hai thẻ rút được lập nên một số chia hết cho 5"

Số chia hết cho 5 tận cùng phải là 0 hoặc 5. Để có biến cố B thích hợp với ta rút thẻ thứ hai một cách tùy ý trong 20 thẻ mang các số 5;10;15;20;…;95;100, và rút 1 trong 99 thẻ còn lại đặt vào vị trí đâu. Do đó số trường hợp thuận lợi cho là 99.20

$$P(B)=\frac{99.20}{A_{100}^2}=0,20$$

1.2.

Một hộp có chứa 7 quả cầu trắng và 3 quả cầu đen cùng kích thước. Rút ngẫu nhiên cùng một lúc 4 quả cầu. Tính xác suất để trong 4 quả cầu rút được có

a/ Hai quả cầu đen.

b/ Ít nhất 2 cầu đen

c/ Toàn cầu trắng

Giải

Rút ngẫu nhiên cùng 1 lúc 4 trong 10 quả cầu nên số trường hợp đồng khả năng là C_{10}^4

a/ A :"trong 4 quả cầu rút có 2 quả cầu đen"

$$P(A)=\frac{C_3^2.C_7^2}{C_{10}^4}=0,30$$

b/ B :"trong 4 quả cầu được rút có ít nhất 2 quả cầu đen"

$$P(B)=\frac{C_3^2.C_7^2+C_3^3.C_7^1}{C_{10}^4}=\frac{1}{3}$$

c/ C :"trong 4 quả cầu được chọn có toàn cầu trắng"

$$P(C)=\frac{C_7^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{6}$$

1.3.

Một hộp thuốc có 5 ống thuốc tốt và 3 ống kém chất lượng. Chọn ngẫu nhiên lần lượt không trả lại 2 ống. Tính xác suất để:

a/ Cả hai ống được chọn đều tốt.

b/ Chỉ ống được chọn ra đầu tiên là tốt.

c/ trong hai ống có ít nhất một ống thuốc tốt.

Giải

Chọn ngẫu nhiên lần lượt không trả lại 2 trong 8 ống nên các trường hợp đồng khả năng là A_8^2.

a/ A:" Cả hai ống được chọn đều tốt" $P(A)=\frac{A_5^2}{A_8^2}\approx 0,357$

b/ B:" Chỉ ống được chọn ra đầu tiên là tốt" $P(B)=\frac{C_3^1.C_5^1}{A_8^2}\approx 0,268$

c/ C:" trong hai ống có ít nhất một ống thuốc tốt" $P(C)=1-\frac{A_3^2}{A_8^2}\approx 0,893$

1.4.

Một hộp đựng 15 quả bóng bàn trong đó có 9 quả mới. Lần đầu người ta lấy ngẫu nhiên 3 quả để thi đấu, sau đó lại trả vào hộp. Lần thứ hai lấy ngẫu nhiên 3 quả. Tính xác suất để cả 3 quả lấy ra lần sau đều mới.

Giải

Đặt A :" cả 3 quả lấy ra lần sau đều mới"

B_i :" Trong 3 quả lấy ra để thi đấu có i quả mới" $i\in\{0;1;2;3\}$

Ta thấy các $\{B_0;\, B_1;\, B_2;\, B_3\}$ lập thành nhóm đầy đủ các biến cố, theo công thức xác suất toàn phần

$$P(A)=P(B_0)P(A\mid B_0)+P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)+P(B_3)P(A\mid B_3)$$

$$=(20.84+135.56+216.35+84.20)\frac{1}{207025}\approx 0,089$$

1.5.

Từ một lớp có 8 nữ sinh viên và 12 nam sinh viên, người ta chọn ngẫu nhiên 5 sinh viên để lập Ban cán bộ lớp (BCB). Tính xác suất để

a/ BCB gồm 3 nữ và 2 nam,
b/ BCB có ít nhất một nữ,
c/ BCB có ít nhất hai nam và hai nữ.

Giải

Đặt A_k : "BCB có k nam sinh viên" ($k \in \{0,1,2,3,4,5\}$),
chúng ta có:

$$P(A_k) = \frac{C_{12}^{k} . C_8^{5-k}}{C_{20}^5}$$

a/ BCB gồm 3 nữ và 2 nam.
Xác suất phải tính:

$$P(A_2) = \frac{C_{12}^{2} . C_8^{3}}{C_{20}^5} = \frac{77}{323}$$

b/ Đặt N: "BCB có ít nhất một nữ", thì $N = \overline{A}_5$.
Do đó,

$$P(N) = P(\overline{A}_5) = 1 - P(A_5)$$

$$= - \frac{C_{12}^{5} . C_8^{0}}{C_{20}^5} = 1 - \frac{33}{646} = \frac{613}{646}$$

c/ Đặt H: "BCB có ít nhất hai nam và hai nữ".
Do đó,

$$P(H) = P(A_2) + P(A_3)$$

$$= \frac{77}{323} + \frac{C_{12}^{3} . C_8^{2}}{C_{20}^5} = \frac{616}{969}$$

1.6.

Từ một hộp chứa 8 viên bi đỏ và 5 viên bi trắng người ta lấy ngẫu nhiên 2 lần, mỗi lần 1 viên bi, không hoàn lại. Tính xác suất để lấy được

a/ 2 viên bi đỏ;

b/ hai viên bi khác màu;

c/ viên bi thứ hai là bi trắng.

Giải

Với $i \in \{1, 2\}$, đăt:
T_i : "viên bi lấy ra lần thứ i là bi trắng",
D_i : "viên bi lấy ra lần thứ i là bi đỏ".

a/ Đặt A :"lấy được 2 viên bi đỏ", chúng ta có:

$$P(A) = P(D_1 D_2) = P(D_1).P(D_2 / D_1) = \frac{8}{13} . \frac{7}{12} = \frac{14}{39}$$

b/ Đặt B : "lấy được hai viên bi khác màu", chúng ta có:

$$P(B) = P(T_1D_2 + D_1T_2) = P(T_1D_2) + P(D_1T_2)$$
$$= P(T_1).P(D_2/T_1) + P(D_1).P(T_2/D_1)$$

Suy ra: $P(B) = \frac{5}{13}\frac{8}{12} + \frac{8}{13}\frac{5}{12} = \frac{20}{39}$

c/ $T_2 = T_1T_2 + D_1T_2$, nên xác suất phải tính là:

$$P(T_2) = P(T_1T_2) + P(D_1T_2)$$
$$= P(T_1).P(T_2/T_1) + P(D_1).P(D_2/T_1)$$

suy ra $P(T_2) = \frac{5}{13}\frac{4}{12} + \frac{8}{13}\frac{5}{12} = \frac{5}{13}$

1.7.

Một công ty cần tuyển 4 nhân viên. Có 8 người, gồm 5 nam và 3 nữ nạp đơn xin dự tuyển, và mỗi người đều có cơ hội được tuyển như nhau. Tính xác suất để trong 4 người được tuyển,

a) có duy nhất một nam;
b) có ít nhất một nữ.

Giải

Đặt A_k: "Có k nam được tuyển trong 4 nhân viên" $k \in \{1,2,3,4\}$

Gọi A: "có duy nhất 1 nam" $P(A) = P(A_1) = \frac{C_5^1.C_3^3}{C_8^4} = \frac{5}{70}$

a) Gọi B: "có ít nhất 1 nữ"

$$P(B) = 1 - P(A_4) = 1 - \frac{C_5^4}{C_8^4} = \frac{13}{14}$$

1.8.

Một công ty cần tuyển 4 nhân viên. Có 8 người, gồm 5 nam và 3 nữ nạp đơn xin dự tuyển, và mỗi người đều có cơ hội được tuyển như nhau. Tính xác suất để trong 4 người được tuyển,

a/ có không quá hai nam;
b/ có ba nữ, biết rằng có ít nhất một nữ đã được tuyển.

Giải

Đặt A_k: "Có k nam được tuyển trong 4 nhân viên" $k \in \{1,2,3,4\}$

C: "có không quá 2 nam"

$$P(C) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{C_5^1.C_3^3 + C_5^2.C_3^2}{C_8^4} = \frac{1}{2}$$

D: "chọn ra 3 nữ, biết rằng có ít nhất 1 nữ được tuyển".

Gọi B: "Có ít nhất một nữ được chọn".

Ta có $P(B)=1-P(A_4)=1-\frac{C_5^4}{C_8^4}=\frac{13}{14}$

$$P(D)=P(A_1 \mid B)=\frac{P(A_1)}{P(B)}=\frac{1}{13}$$

1.9.

Một cửa hàng sách ước lượng rằng: Trong tổng số các khách hàng đến cửa hàng, có 30% khách cần hỏi nhân viên bán hàng, 20% khách mua sách và 15% khách thực hiện cả hai điều trên. Gặp ngẫu nhiên một khách trong nhà sách. Tính xác suất để người này

a/ không thực hiện cả hai điều trên;

b/ không mua sách, biết rằng người này đã hỏi nhân viên bán hàng.

Giải

Đặt A: "khách hàng cần tư vấn"

B: "khách hàng cần mua sách"

Theo đề ta có: $P(A)=0,3; P(B)=0,2; P(AB)=0,15$

a/ Xác suất khách hàng không cần mua sách cũng không cần tư vấn là:

$$P(\overline{A}.\overline{B})=P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{AB})=1-\frac{3}{10}+1-\frac{2}{10}-\left(1-\frac{15}{100}\right)=\frac{13}{20}$$

b/ không mua sách, biết rằng người này đã hỏi nhân viên bán hàng.

$$P(\overline{B}/A)=\frac{P(A\overline{B})}{P(A)}=\frac{P(A)-P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{10}-\frac{15}{100}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{2}$$

1.10.

Một cuộc điều tra cho thấy, ở một thành phố, có 20,7% dân số dùng loại sản phẩm X, 50% dùng loại sản phẩm Y và trong số những người dùng Y, có 36,5% dùng X. Phỏng vấn ngẫu nhiên một người dân trong thành phố đó, tính xác suất để người ấy

a/ Dùng cả X và Y;

b/ Không dùng X, cũng không dùng Y.

Giải

Đặt A: " người dân trong thành phố dùng sản phẩm X "

B: " người dân trong thành phố dùng sản phẩm Y "

Theo đề bài ta có: $P(A)=0,207; P(B)=0,5; P(A \mid B)=0,365$

a) Xác suất người dân đó dùng cả X và Y là

$$P(AB)=P(B).P(A/B)=0,5.0,365=0,1825$$

b) Xác suất người dân đó không dùng cả X và Y là

$$P(\overline{A}.\overline{B})=P(\overline{A}.)+P(\overline{B})-P(\overline{AB})=0,4755$$

1.11.

Một cuộc điều tra cho thấy, ở một thành phố, có 20,7% dân số dùng loại sản phẩm X, 50% dùng loại sản phẩm Y và trong số những người dùng Y, có 36,5% dùng X. Phỏng vấn ngẫu nhiên một người dân trong thành phố đó, tính xác suất để người ấy

a/ Dùng cả X và Y;

b/ Dùng Y, biết rằng người ấy không dùng X.

Giải

Đặt A: " người dân trong thành phố dùng sản phẩm X"

B: " người dân trong thành phố dùng sản phẩm Y"

Theo đề bài ta có: $P(A)=0,207; P(B)=0,5; P(A/B)=0,365$

a/ Xác suất người dân đó dùng cả X và Y là

$$P(AB)=P(B).P(A/B)=0,5.0,365=0,1825$$

b/ Xác suất người dân đó dùng Y, biết rằng không dùng X là

$$P(B/\overline{A})=\frac{P(\overline{A}.B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{P(\overline{A})}=\frac{0,5-0,1852}{1-0,207}=0,404$$

1.12.

Theo một cuộc điều tra thì xác suất để một hộ gia đình có máy vi tính nếu thu nhập hàng năm trên 20 triệu (VNĐ) là 0,75. Trong số các hộ được điều tra thì 60% có thu nhập trên 20 triệu và 52% có máy vi tính. Tính xác suất để một hộ gia đình được chọn ngẫu nhiên

a/ có máy vi tính và có thu nhập hàng năm trên 20 triệu;

b/ có máy vi tính, nhưng không có thu nhập trên 20 triệu.

Giải

Đặt A: "Hộ gia đình được chọn ngẫu nhiên có máy vi tính"

B: "Hộ gia đình được chọn ngẫu nhiên có thu nhập hàng năm trên 20 triệu"

Theo đề bài ta có: $P(A)=0,52; P(B)=0,6; P(A/B)=0,75$

a/ Xác suất để hộ gia đình được chọn có máy vi tính và có thu nhập hàng năm trên 20 triệu là:

$$P(AB)=P(B).P(A/B)=0,6.0,75=0,45$$

b/ Xác suất để hộ gia đình được chọn có máy vi tính nhưng thu nhập ít hơn 20 triệu là:

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0,52-0,45=0,07$$

1.13.

Theo một cuộc điều tra thì xác suất để một hộ gia đình có máy vi tính nếu thu nhập hàng năm trên 20 triệu (VNĐ) là 0,75. Trong số các hộ được điều tra thì 60% có thu nhập trên 20 triệu và 52% có máy vi tính. Tính xác suất để một hộ gia đình được chọn ngẫu nhiên

a/ Có máy vi tính và có thu nhập hàng năm trên 20 triệu;

b/ Có thu nhập hàng năm trên 20 triệu, biết rằng hộ đó không có máy vi tính.

Giải

Đặt A: "Hộ gia đình được chọn ngẫu nhiên có máy vi tính"

B: "Hộ gia đình được chọn ngẫu nhiên có thu nhập hàng năm trên 20 triệu"

Theo đề bài ta có: $P(A)=0,52; P(B)=0,6; P(A/B)=0,75$

a/ Xác suất để hộ gia đình được chọn có máy vi tính và có thu nhập hàng năm trên 20 triệu là:

$$P(AB)=P(B).P(A/B)=0,6.0,75=0,45$$

b/ Xác suất để hộ gia đình được chọn có thu nhập hàng năm trên 20 triệu nhưng không có máy vi tính là:

$$P(B/\overline{A})=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{P(\overline{A})}=\frac{0,6-0,45}{1-0,52}=0,3125$$

1.14.

Trong một đội tuyển có hai vận động viên A và B thi đấu. A thi đấu trước và có hy vọng 80% thắng trận. Do ảnh hưởng tinh thần, nếu A thắng trận thì có 60% khả năng B thắng trận, còn nếu A thua thì khả năng này của B chỉ còn 30%. Tính xác suất của các biến cố sau:

a/ Đội tuyển thắng hai trận;

b/ Đội tuyển thắng ít nhất một trận.

Giải

Đặt M_i: "vận động viên i thắng" với $i\in\{A,B\}$

Theo đề bài ta có: $P(M_A)=0,8; P(M_B/M_A)=0,6; P(M_B/\overline{M}_A)=0,3$

a/ Xác suất đội tuyển thắng 2 trận là

$$P(M_AM_B)=P(M_A).P(M_B/M_A)=0,8.0,6=0,48$$

b/ Đội tuyển thắng ít nhất một trận nghĩa là có ít nhất một trong hai vận động viên A, hoặc B thắng. Xác suất cần tính là:

$$\begin{aligned}P(M_A\cup M_B)&=P(M_B)+P(M_A)-P(M_A.M_B)\\&=0,54+0,8-0,48=0,86\end{aligned}$$

1.15.

Trong một đội tuyển có hai vận động viên A và B thi đấu. A thi đấu trước và có hy vọng 80% thắng trận. Do ảnh hưởng tinh thần, nếu A thắng trận thì có 60% khả năng B thắng trận, còn nếu A thua thì khả năng này của B chỉ còn 30%. Tính xác suất của các biến cố sau:

a/ B thắng trận;

b/ Đội tuyển chỉ thắng có một trận.

Giải

Đặt M_i: "vận động viên i thắng" với $i\in\{A,B\}$

Theo đề bài ta có: $P(M_A)=0,8; P(M_B/M_A)=0,6; P(M_B/\overline{M}_A)=0,3$

a/ Xác suất B thắng trận là:

$$P(M_B)=P(M_A)P(M_B\mid M_A.)+P(\overline{M_A}).P(M_B\mid\overline{M_A})=0,54$$

b/ Đặt D: "đội tuyển chỉ thắng 1 trận"
Xác suất đội tuyển chỉ thắng 1 trận là:

$$P(D)=P(M_A.\overline{M}_B)+P(\overline{M}_A.M_B)=P(M_A)-P(M_A.M_B)+P(M_B)-P(M_A.M_B)$$

$$=P(M_A)+P(M_B)-2.P(M_A.M_B)=0,8+0,54-2.0,48=0,38$$

1.16.

Để thành lập đội tuyển quốc gia về một môn học, người ta tổ chức một cuộc thi tuyển gồm 3 vòng. Vòng thứ nhất lấy 80% thí sinh; vòng thứ hai lấy 70% thí sinh đã qua vòng thứ nhất và vòng thứ ba lấy 45% thí sinh đã qua vòng thứ hai. Để vào được đội tuyển, thí sinh phải vượt qua được cả 3 vòng thi. Tính xác suất để một thí sinh bất kỳ

a/ Được vào đội tuyển;

b/ Bị loại ở vòng thứ ba.

Giải

Đặt A_i: "thí sinh được chọn ở vòng i" với $i\in\{1,2,3\}$

Theo đề bài ta có:

$P(A_1)=0,8;P(A_2\mid A_1)=0,7;P(A_3\mid A_1A_2)=0,45$

a/ Xác suất để thí sinh đó được vào đội tuyển là

$P(A_1A_2A_3)=P(A_1).P(A_2\mid A_1).P(A_3\mid A_1A_2)=0,8.0,7.0,45=0,252$

b/ Xác suất để thí sinh đó bị loại ở vòng thứ III là

$$P(A_1A_2\overline{A}_3)=P(A_1).P(A_2/A_1).P(\overline{A}_3/A_1A_2)$$

$$=P(A_1).P(A_2\mid A_1).(1-P(A_3\mid A_1A_2))=0,8.0,7.0,55=0,308$$

1.17.

Để thành lập đội tuyển quốc gia về một môn học, người ta tổ chức một cuộc thi tuyển gồm 3 vòng. Vòng thứ nhất lấy 80% thí sinh; vòng thứ hai lấy 70% thí sinh đã qua vòng thứ nhất và vòng thứ ba lấy 45% thí sinh đã qua vòng thứ hai. Để vào được đội tuyển, thí sinh phải vượt qua được cả 3 vòng thi Tính xác suất để một thí sinh bất kỳ

a/ Được vào đội tuyển;

b/ Bị loại ở vòng thứ hai, biết rằng thí sinh này bị loại.

Giải

Đặt A_i: "thí sinh được chọn ở vòng i" với $i\in\{1,2,3\}$

Theo đề bài ta có:

$P(A_1)=0,8;P(A_2\mid A_1)=0,7;P(A_3\mid A_1A_2)=0,45$

a/ Xác suất để thí sinh đó được vào đội tuyển là

$P(A_1A_2A_3)=P(A_1).P(A_2\mid A_1).P(A_3\mid A_1A_2)=0,8.0,7.0,45=0,252$

b/ Đặt K: "Thí sinh đó bị loại"

$$P(K)=P(\overline{A}_1)+P(A_1\overline{A}_2)+P(A_1A_2\overline{A}_3)=1-P(A_1)+P(A_1)-P(A_1A_2)+P(A_1A_2\overline{A}_3)$$

$$= 1 - P(A_1).P(A_2 / A_1) + P(A_1 A_2 \overline{A}_3) = 1 - 0,8.0,7 + 0,308 = 0,748$$

Vậy, xác suất để thí sinh đó bị loại ở vòng II, biết rằng thí sinh đó bị loại là:

$$P(\overline{A}_2 \mid K) = \frac{P(\overline{A}_2.K)}{P(K)} = \frac{P(A_1.\overline{A}_2)}{P(K)} = \frac{P(A_1).P(\overline{A}_2 \mid A_1)}{P(K)} = \frac{0,8(1-0,7)}{0,748} = 0,3209$$

1.18.

Một lô hàng có 9 sản phẩm giống nhau. Mỗi lần kiểm tra, người ta chọn ngẫu nhiên 3 sản phẩm; kiểm tra xong trả sản phẩm lại lô hàng. Tính xác suất để sau 3 lần kiểm tra, 9 sản phẩm đều được kiểm tra.

Giải

Chia 9 sản phẩm thành 3 nhóm. Gọi A_i: "Kiểm tra nhóm i" $i \in \{1,2,3\}$

Đặt A:"Sau 3 lần kiểm tra, 9 sản phẩm đều được kiểm tra"

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 A_2) = 1.\frac{C_6^3}{C_9^3}.\frac{C_3^3}{C_9^3} = \frac{5}{1764}$$

1.19.

Một lớp học của Trường Đại học AG có 2/3 là nam sinh viên và 1/3 là nữ sinh viên. Số sinh viên quê ở An Giang chiếm tỉ lệ 40% trong nữ sinh viên, và chiếm tỉ lệ 60% trong nam sinh viên.

a) Chọn ngẫu nhiên một sinh viên của lớp. Tính xác suất để chọn được một sinh viên quê ở An Giang. Nếu biết rằng sinh viên vừa chọn quê ở An Giang thì xác suất để sinh viên đó là nam bằng bao nhiêu?

b) Chọn ngẫu nhiên không hoàn lại hai sinh viên của lớp. Tính xác suất để có ít nhất một sinh viên quê ở An Giang, biết rằng lớp học có 60 sinh viên.

Giải

a) Đặt :

A: "Chọn được sinh viên nam" $P(A) = \frac{2}{3}$

B: "Chọn được sinh viên nữ" $P(B) = \frac{1}{3}$

C: "Chọn được sinh viên quê ở An Giang"

$$P(C) = P(AC) + P(BC) = P(A)P(C \mid A) + P(B)P(C \mid B) = \frac{8}{15}$$

Do đó, $P(A \mid C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{P(A)P(C \mid A)}{P(C)} = \frac{3}{4}$

b) Lớp có 60 sinh viên suy ra có 40 sinh viên nam và 20 sinh viên nữ

Số sinh viên Nam quê ở An Giang: 24

Số sinh viên Nữ quê ở An Giang: 8

Nên tổng số sinh viên quê ở An Giang là 32 sinh viên

F: "ít nhất một sinh viên quê ở An Giang"

$$P(F) = 1 - P(F) = 1 - \frac{C_{28}^2}{C_{60}^2} = \frac{232}{295}$$

1.20.

Có ba hộp A, B và C đựng các lọ thuốc. Hộp A có 10 lọ tốt và 5 lọ hỏng, hộp B có 6 lọ tốt và 4 lọ hỏng, hộp C có 5 lọ tốt và 5 lọ hỏng

a/ Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra một lọ thuốc, tính xác suất để được 3 lọ cùng loại.

b/ Lấy ngẫu nhiên một hộp rồi từ hộp đó lấy ra 3 lọ thuốc thì được 1 lọ tốt và 2 lọ hỏng. Tính xác suất để hộp A đã được chọn.

Giải

a/ và A_i:"lọ lấy ra từ hộp thứ i là tốt" $i \in \{1,2,3\}$

Nên, xác suất để được 3 lọ cùng loại

$$P(A_1.A_2.A_3 + \overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})$$
$$= \frac{10}{15}.\frac{6}{10}.\frac{5}{10} + \frac{5}{15}.\frac{4}{10}.\frac{5}{10} = \frac{4}{15}$$

b/ Đặt H_i:"Lấy được hộp thứ i" $i \in \{A,B,C\}$; X:"Lấy được 2 lọ hỏng và 1 lọ tốt"

$$P(X) = P(H_A)P(X \mid H_A) + P(H_B)P(X \mid H_B) + P(H_C)P(X \mid H_C)$$
$$= \frac{1}{3}\frac{C_5^2C_{10}^1}{C_{15}^3} + \frac{1}{3}\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3} + \frac{1}{3}\frac{C_5^2C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{5113}{16380}$$

Khi đó xác suất để hộp A được chọn

$$P(H_A \mid X) = \frac{P(XH_A)}{P(X)} = \frac{P(H_A)P(X \mid H_A)}{P(X)} = \frac{1200}{5113} = 0,2347$$

1.21.

Có hai hộp B và C đựng các lọ thuốc. Hộp B có 6 lọ tốt và 4 lọ hỏng, hộp C có 5 lọ tốt và 5 lọ hỏng. Lấy ngẫu nhiên hai lọ thuốc từ hộp B bỏ vào hộp C, rồi tiếp theo lấy ngẫu nhiên một lọ thuốc từ hộp C thì được lọ hỏng. Tính xác suất để

a/ Lọ hỏng đó là của hộp B bỏ sang;

b/ Hai lọ thuốc bỏ từ hộp B vào hộp C đều là lọ hỏng.

Giải

Gọi C_k: "Hai lọ thuốc lấy từ hộp B bỏ vào hộp C có k lọ hỏng" $k \in \{0,1,2\}$

và đặt D: "lọ thuốc lấy từ hộp C (sau khi đã bỏ 2 lọ từ B bỏ sang) bị hỏng"

$$P(D) = P(C_0)P(D \mid C_0) + P(C_1)P(D \mid C_1) + P(C_2)P(D \mid C_2) = \frac{29}{60}$$

a/ lọ hỏng đó là của hộp B bỏ sang

$$P(H_2 \mid D) = \frac{P(H_2D)}{P(D)} = \frac{P(C_1)P(D \mid C_1) + P(C_2)P(D \mid C_2)}{P(D)}$$
$$= \left[\frac{C_6^1C_4^1}{C_{10}^2}.\frac{1}{12} + \frac{C_4^2}{C_{10}^2}.\frac{2}{12}\right]\frac{60}{29} = \frac{4}{29}$$

b/ hai lọ thuốc bỏ từ hộp B vào hộp C đều là lọ hỏng

$$P(C_2 \mid D) = \frac{P(C_2D)}{P(D)} = \frac{P\left(C_2\right)P\left(D \mid C_2\right)}{P\left(D\right)} = \left[\frac{C_4^2}{C_{10}^2}.\frac{C_7^1}{C_{12}^1}\right]\frac{60}{29} = \frac{42}{261}$$

1.22.

Trong một đội tuyển có 3 vận động viên A, B và C thi đấu với xác suất chiến thắng lần lượt là 0,6; 0,7 và 0,8. Giả sử mỗi người thi đấu một trận độc lập nhau.Tính xác suất để:

a/ đội tuyển thắng ít nhất một trận,

b/ đội tuyển thắng 2 trận.

Giải

Đặt :

A: "vận động viên A chiến thắng" $P\left(A\right) = 0,6$

B: "vận động viên B chiến thắng" $P\left(A\right) = 0,7$

C: "vận động viên C chiến thắng" $P\left(A\right) = 0,8$

a/ Gọi K: " đội tuyển thắng ít nhất 1 trận"

$$P(K) = 1 - P\left(\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}\right) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = 0,976$$

b/ Gọi E: " đội tuyển thắng 2 trận"

$$P(E) = P\left(A.B.\overline{C}\right) + P\left(A.\overline{B}.C\right) + P\left(\overline{A}.B.C\right) = 0,452$$

1.23.

Trong một đội tuyển có 3 vận động viên A, B và C thi đấu với xác suất chiến thắng lần lượt là 0,6; 0,7 và 0,8. Giả sử mỗi người thi đấu một trận độc lập nhau.Tính xác suất để:

a/ Đội tuyển thắng ít nhất một trận,

b/ A thua trong trường hợp đội tuyển thắng 2 trận.

Giải

Đặt :

A: "vận động viên A chiến thắng" $P\left(A\right) = 0,6$

B: "vận động viên B chiến thắng" $P\left(A\right) = 0,7$

C: "vận động viên C chiến thắng" $P\left(A\right) = 0,8$

a/ Gọi K: " đội tuyển thắng ít nhất 1 trận"

$$P(K) = 1 - P\left(\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}\right) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = 0,976$$

b/ A thua trong trường hợp đội tuyển thắng 2 trận

Gọi E: " đội tuyển thắng 2 trận"

$$P(E) = P\left(A.B.\overline{C}\right) + P\left(A.\overline{B}.C\right) + P\left(\overline{A}.B.C\right) = 0,452$$

$$P\left(\overline{A} \mid E\right) = \frac{P(\overline{A}.E)}{P(E)} = \frac{P(\ \overline{A}BC)}{P(E)} = \frac{56}{113} \approx 0,4956$$

1.24.

Trong năm học vừa qua, ở trường đại học XYZ, tỉ lệ sinh viên thi trượt môn Toán là 34%, thi trượt môn Tâm lý là 20,5%, và trong số các sinh viên trượt môn Toán, có 50% sinh viên trượt môn Tâm lý. Gặp ngẫu nhiên một sinh viên của trường XYZ.

a/ Tính xác suất để anh ta trượt cả hai môn Toán và Tâm lý; đậu cả hai môn Toán và Tâm lý.

b/ Nếu biết rằng sinh viên này trượt môn Tâm lý thì xác suất để anh ta đậu môn Toán là bao nhiêu?

Giải

T: "sinh viên thi trượt môn Toán" $P\left(T\right) = 0,34$

và L: "sinh viên thi trượt môn Tâm Lý" $P\left(L\right) = 0,205$

khi đó $P(L \mid T) = 0,5$

a/ Xác suất sinh viên trượt môn cả môn Toán và Tâm Lý

$$P(T.L) = P\left(T\right)P\left(L \mid T\right) = 0,34.0,5 = 0,17$$

Xác suất sinh viên đậu cả môn Toán và Tâm Lý

$$P\left(\overline{T}.\overline{L}\right) = 1 - P(T \cup L) = 1 - P\left(T\right) - P\left(L\right) + P\left(T.L\right) = 0,625$$

b/ Xác suất sinh viên đậu môn Toán, biết rằng trượt môn Tâm Lý:

$$P\left(\overline{T} \mid L\right) = \frac{P\left(\overline{T}L\right)}{P\left(L\right)} = \frac{P\left(L\right) - P\left(TL\right)}{P\left(L\right)} = \frac{7}{41}.$$

1.25.

Trong năm học vừa qua, ở trường đại học XYZ, tỉ lệ sinh viên thi trượt môn Toán là 34%, thi trượt môn Tâm lý là 20,5%, và trong số các sinh viên trượt môn Toán, có 50% sinh viên trượt môn Tâm lý. Chọn ngẫu nhiên 12 sinh viên của trường XYZ. Nhiều khả năng nhất là sẽ có bao nhiêu sinh viên thi trượt cả hai môn Toán và Tâm lý. Tính xác suất tương ứng.

Đáp số

Gọi T: "sinh viên thi trượt môn Toán" $P\left(T\right) = 0,34$

và L: "sinh viên thi trượt môn Tâm Lý" $P\left(L\right) = 0,205$ khi đó $P(L \mid T) = 0,5$

Xác suất sinh viên trượt môn cả môn Toán và Tâm Lý

$$P(T.L) = P\left(T\right)P\left(L \mid T\right) = 0,34.0,5 = 0,17$$

Nên, Sinh viên trượt cả Toán và Tâm lý với xác suất không đổi $p = 0,17$.

Do đó, chọn 12 sinh viên nghĩa là thực hiện 12 phép thử Bernoulli với xác suất thành công (trượt cả Toán và Tâm lý) không đổi $p = 0,17$ .số sinh viên nhiều khả năng trượt cả hai môn $\left[\left(n+1\right)p\right] = \left[13.0,17\right] = 2$.

Xác suất tương ứng là $P_{12}\left(2\right) = C_{12}^{2}\left(0,17\right)^{2}.\left(1 - 0,17\right)^{10} = 0,296$.

1.26.

Trong năm học vừa qua, ở trường đại học XYZ, tỉ lệ sinh viên thi trượt môn Toán là 34%, thi trượt môn Tâm lý là 20,5%, và trong số các sinh viên trượt môn Toán, có 50% sinh viên trượt môn Tâm lý. Phải chọn bao nhiêu sinh viên của trường XYZ sao cho, với xác suất không bé hơn 99%, trong số đó có ít nhất một sinh viên đậu cả hai môn Toán và Tâm lý.

Giải

T: "sinh viên thi trượt môn Toán" $P\left(T\right) = 0,34$

và L: "sinh viên thi trượt môn Tâm Lý" $P\left(L\right) = 0,205$

khi đó $P(L \mid T) = 0,5$

Xác suất sinh viên đậu cả môn Toán và Tâm Lý

$$P\left(\overline{T}.\overline{L}\right) = 1 - P(T \cup L) = 1 - P\left(T\right) - P\left(L\right) + P\left(T.L\right) = 0,625$$

Gọi n là số sinh viên cần chọn. Xác suất để sinh viên đậu cả hai môn Toán và Tâm Lý không đổi $p = 0,625$ nên ta có quá trình Bernoulli $B\left(n,p\right)$.

Đặt E: " ít nhất một sinh viên đậu cả hai môn Toán và Tâm Lý ".

Theo yêu cầu bài toán ta được

$$P(E) = 1 - P_n(0) = 1 - (1 - 0,625)^n \geq 0,99$$

$$\Leftrightarrow 0,01 \geq \left(0,375\right)^n \Leftrightarrow \ln 0,01 \geq \ln\left(0,375\right)^n \Leftrightarrow n \geq 4,69$$

Vậy, chọn ít nhất 5 sinh viên.

1.27.

Ba máy 1, 2 và 3 của một xí nghiệp sản xuất, theo thứ tự, 60%, 30% và 10% tổng số sản phẩm của một xí nghiệp. Tỉ lệ sản xuất ra phế phẩm của các máy trên, theo thứ tự, là 2%, 3% và 4%. Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm từ lô hàng của xí nghiệp, trong đó để lẫn lộn các sản phẩm do 3 máy sản xuất.

a/ Tính xác suất để sản phẩm lấy ra là sản phẩm tốt. Ý nghĩa của xác suất đó đối với lô hàng là gì?

b/ Nếu sản phẩm lấy được là phế phẩm, thì nhiều khả năng nhất là do máy nào sản xuất?

Giải

Đặt M_i: "sản phẩm lấy ra do máy i sản xuất" với $i \in \{1,2,3\}$

$P\left(M_1\right) = 0,6; P\left(M_2\right) = 0,3; P\left(M_3\right) = 0,1$

Và T:"sản phẩm lấy ra là phế phẩm"

$$P\left(T \mid M_1\right) = 0,98; P\left(T \mid M_2\right) = 0,97; P\left(T \mid M_3\right) = 0,96$$

a/ T :"sản phẩm lấy ra là sản phẩm tốt"

$$P\left(T\right)=P\left(M_1\right)P\left(T\mid M_1\right)+P\left(M_2\right)P\left(T\mid M_2\right)+P\left(M_3\right)P\left(T\mid M_3\right)=0,975$$

Ý nghĩa, xác suất thể hiện tỉ lệ sản phẩm tốt của lô hàng.
b/ Xác suất lấy ra sản phẩm là phế phẩm

$$P\left(\overline{T}\right)=1-P\left(T\right)=0,025$$

Theo công thức Bayes

$$P\left(M_1\mid\overline{T}\right)=\frac{P\left(M_1.\overline{T}\right)}{P\left(\overline{T}\right)}=\frac{P\left(M_1\right)P\left(\overline{T}\mid M_1\right)}{P\left(\overline{T}\right)}=\frac{0,6.0,02}{0,025}=0,48$$

$$P\left(M_2\mid\overline{T}\right)=\frac{P\left(M_2.\overline{T}\right)}{P\left(\overline{T}\right)}=\frac{P\left(M_2\right)P\left(\overline{T}\mid M_2\right)}{P\left(\overline{T}\right)}=\frac{0,3.0,03}{0,025}=0,36$$

$$P\left(M_3\mid\overline{T}\right)=\frac{P\left(M_3.\overline{T}\right)}{P\left(\overline{T}\right)}=\frac{P\left(M_3\right)P\left(\overline{T}\mid M_3\right)}{P\left(\overline{T}\right)}=\frac{0,1.0,04}{0,025}=0,16$$

Do đó, sản phẩm do máy 1 sản xuất ra phế phẩm nhiều nhất.

1.28.

Chia ngẫu nhiên 9 tấm vé số, trong đó có 3 vé trúng thưởng, đều cho 3 người (mỗi người 3 tấm). Tính xác suất để cả 3 người đều được trúng thưởng.

Giải

Đặt A_i: "Người mua vé thứ i được vé trúng thưởng" với $i\in\{1,2,3\}$

$$P\left(A_1A_2A_3\right)=P\left(A_1\right)P\left(A_2\mid A_1\right)P\left(A_3\mid A_1A_2\right)=\frac{C_3^1C_6^2}{C_9^3}.\frac{C_2^1C_4^2}{C_6^3}.\frac{C_1^1C_2^2}{C_3^3}=\frac{9}{28}$$

1.29.

Trong số các bệnh nhân đang được điều trị tại một bệnh viện, có 50% điều trị bệnh A, 30% điều trị bệnh B và 20% điều trị bệnh C. Tại bệnh viện này, xác suất để chữa khỏi các bệnh A, B và C, theo thứ tự, là 0,7; 0,8 và 0,9. Hãy tính tỉ lệ bệnh nhân được chữa khỏi bệnh A trong tổng số bệnh nhân đã được chữa khỏi bệnh trong bệnh viện.

Giải

Đặt T_i: "bệnh nhân điều trị bệnh i" với $i\in\{A,B,C\}$

K : "bệnh nhân được khỏi bệnh"

Theo đề bài ta có: $P\left(T_A\right)=0,5;P\left(T_B\right)=0,3;P\left(T_C\right)=0,2$

và $P\left(K/T_A\right)=0,7;P\left(K/T_B\right)=0,8;P\left(K/T_C\right)=0,9$

Xác suất để bệnh nhân khỏi bệnh là

$$P(K)=\sum_{i=A}^{C}P(T_i).P(K/T_i)=0,5.0,7+0,3.0,8+0,2.0,9=0,77$$

Xác suất để bệnh nhân trị khỏi bệnh A là

$$P(T_A \mid K)=\frac{P(T_A).P(K \mid T_A)}{P(K)}=\frac{0,5.0,7}{0,77}=45,45\%$$

1.30.

Có hai bình như sau: Bình A chứa 5 bi đỏ, 3 bi trắng và 8 bi xanh; bình B chứa 3 bi đỏ và 5 bi trắng. Gieo một con xúc xắc vô tư: Nếu mặt 3 hoặc mặt 5 xuất hiện thì chọn ngẫu nhiên một bi từ bình B; các trường hợp khác thì chọn ngẫu nhiên một bi từ bình A. Tính xác suất để chọn được viên bi đỏ. Nếu viên bi trắng được chọn, tính xác suất để mặt 5 của con xúc xắc xuất hiện.

Giải

Đặt X : "Gieo con xúc xắc được mặt 3 hoặc mặt 5", $P(X)=\dfrac{1}{3}$

D : "Lấy từ bình ra một bi là bi đỏ". Ta có

$$P(D)=P(X)P(D \mid X)+P(\overline{X})P(D \mid \overline{X})=\frac{1}{3}.\frac{C_3^1}{C_8^1}+\frac{2}{3}.\frac{C_5^1}{C_{16}^1}=\frac{1}{3}$$

Gọi T : "một viên bi được chọn là bi trắng"

$$P(T)=P(X)P(T \mid X)+P(\overline{X})P(T \mid \overline{X})=\frac{1}{3}.\frac{C_5^1}{C_8^1}+\frac{2}{3}.\frac{C_3^1}{C_{16}^1}=\frac{1}{3}$$

Đặt E : "gieo con xúc xắc được mặt 5".

Xác suất mặt 5 xuất hiện, biết rằng bi được chọn là bi trắng là

$$P(E \mid T)=\frac{1}{2}\frac{P(XT)}{P(T)}=\frac{1}{2}\frac{P(X)P(T \mid X)}{P(T)}=\frac{1}{2}.3.\frac{1}{3}.\frac{5}{8}=\frac{5}{16}$$

1.31.

Có hai bình như sau: Bình A chứa 5 bi đỏ, 3 bi trắng và 8 bi xanh; bình B chứa 3 bi đỏ và 5 bi trắng.

Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ bình A bỏ vào bình B, rồi từ bình B lấy ngẫu nhiên 1 viên bi thì được bi đỏ. Theo ý bạn, viên bi đó vốn thuộc bình nào?

Giải

Gọi A_k : " có k bi đỏ trong 3 viên bi lấy từ bình A bỏ vào bình B" với $k \in \{0,1,2,3\}$

Đặt F : "Lấy một bi từ bình B ra là bi đỏ".

$$P(F)=\sum_{k=0}^{3}P(A_k)P(F \mid A_k)=\frac{C_{11}^3}{C_{16}^3}.\frac{3}{11}+\frac{C_5^1C_{11}^2}{C_{16}^3}.\frac{4}{11}+$$
$$+\frac{C_5^2C_{11}^1}{C_{16}^3}.\frac{5}{11}+\frac{C_5^3}{C_{16}^3}.\frac{6}{11}=\frac{63}{176}$$

Đặt G : "bi đỏ sau cùng lấy từ bình B".

$$P(G)=\frac{C_3^1}{C_{11}^1}=\frac{3}{11}$$

Do đó $P(G\mid F)=\dfrac{P\left(GF\right)}{P\left(F\right)}=\dfrac{P\left(G\right)}{P\left(F\right)}=\dfrac{3}{11}.\dfrac{176}{63}=\dfrac{16}{21}>\dfrac{1}{2}$.

Vậy, bi đỏ sau cùng nhiều khả năng nhất là của bình B.

1.32.

Có hai chuồng nuôi thỏ. Chuồng thứ nhất có 1 con thỏ trắng và 5 con thỏ nâu; chuồng thứ hai có 9 con thỏ trắng và 1 con thỏ nâu. Từ mỗi chuồng bắt ngẫu nhiên ra một con để nghiên cứu. Các con thỏ còn lại được dồn vào một chuồng thứ ba. Từ chuồng thứ ba này lại bắt ngẫu nhiên ra một con thỏ. Tính xác suất để con thỏ bắt ra sau cùng là một con thỏ nâu.

Giải

Đặt A: "Thỏ bắt ở chuồng 1 ra nghiên cứu là thỏ nâu" $P(A)=\dfrac{5}{6}$

B: "Thỏ bắt ở chuồng 2 ra nghiên cứu là thỏ nâu" $P(B)=\dfrac{1}{10}$

Gọi N: "Thỏ bắt ở chuồng 3 ra nghiên cứu là thỏ nâu"

$$P(N)=P\left(A.B.N\right)+P\left(\overline{A}.\overline{B}.N\right)+P\left(\overline{A}.B.N\right)+P\left(A.\overline{B}.N\right)$$

$$=P\left(A.B\right)P\left(N\mid A.B\right)+P\left(\overline{A}.\overline{B}\right)P\left(N\mid \overline{A}.\overline{B}\right)+$$
$$+P\left(\overline{A}.B\right)P\left(N\mid \overline{A}.B\right)+P\left(A.\overline{B}\right)P\left(N\mid A.\overline{B}\right)$$

$$=P\left(A\right)P\left(B\right)P\left(N\mid A.B\right)+P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right)P\left(N\mid \overline{A}.\overline{B}\right)+$$
$$+P\left(\overline{A}\right)P\left(B\right)P\left(N\mid \overline{A}.B\right)+P\left(A\right)P\left(\overline{B}\right)P\left(N\mid A.\overline{B}\right)$$

$$=P\left(A\right)P\left(B\right)\frac{4}{14}+P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right)\frac{6}{14}+P\left(\overline{A}\right)P\left(B\right)\frac{5}{14}+P\left(A\right)P\left(\overline{B}\right)\frac{5}{14}=\frac{38}{105}$$

1.33.

Ban giám đốc một công ty liên doanh với nước ngoài đang xem xét khả năng đình công của công nhân để đòi tăng lương ở hai nhà máy A và B. Kinh nghiệm cho họ biết cuộc đình công ở nhà máy A và B xảy ra lần lượt với xác suất 0,75 và 0,65. Ngoài ra, họ cũng biết rằng nếu công nhân ở nhà máy B đình công thì có 90% khả năng để công nhân ở nhà máy A đình công ủng hộ.

a/ Tính xác suất để công nhân ở cả hai nhà máy đình công.

b/ Nếu công nhân ở nhà máy A đình công thì xác suất để công nhân ở nhà máy B đình công để ủng hộ bằng bao nhiêu?

Giải

Đặt : A : " Công nhân đình công ở nhà máy A" $P(A)=0,75$

B : "Công nhân đình công ở nhà máy B" $P(B)=0,69; P\left(A \mid B\right)=0,9$

a/ Xác suất công nhân đình công ở 2 nhà máy là

$P(AB)=P(A).P(A\mid B)=0,65.0,9=0,585$

b/ Nếu công nhân ở nhà máy A đình công thì xác suất để công nhân ở nhà máy B đình công là

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0,585}{0,75}=0,78$$

1.34.

Một nhân viên kiểm toán nhận thấy 15% các bản cân đối thu chi chứa các sai lầm. Trong các bản chứa sai lầm, 60% được xem là các giá trị bất thường so với các số xuất phát từ gốc. Trong tất cả các bản cân đối thu chi thì 20% là những giá trị bất thường. Nếu một con số ở một bảng cân đối tỏ ra bất thường thì xác suất để số ấy là một sai lầm là bao nhiêu?

Giải

Đặt A: "bản cân đối thu chi chứa sai lầm" $P(A)=0,15$

B: "bản cân đối thu chi chứa giá trị bất thường"

$P(B)=0,2; P\left(B \mid A\right)=0,6$

Xác suất 1 con số ở 1 bảng cân đối tỏ ra bất thường là 1 sai lầm:

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A).P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{0,15.0,6}{0,2}=0,45$$

1.35.

Một hãng sản xuất một loại tủ lạnh X ước tính rằng khoảng 80% số người dùng tủ lạnh có đọc quảng cáo tủ lạnh do hãng ấy sản xuất. Trong số những người đọc quảng cáo, có 30% mua loại tủ lạnh X; 10% không đọc quảng cáo cũng mua loại tủ lạnh X. Tính xác suất để một người tiêu dùng đã mua loại tủ lạnh X mà có đọc quảng cáo.

Giải

Đặt A: "người đó đọc quảng cáo" $P(A)=0,8$

B: "người đó mua tủ lạnh X" $P(B/A)=0,3; P\left(B/\overline{A}\right)=0,1$

Trước tiên tính xác suất để người mua tủ lạnh X

$P(B)=P(AB)+P\left(\overline{A}B\right)=P(A).P(B/A)+P\left(\overline{A}\right).P\left(B/\overline{A}\right)=0,26$

Xác suất để 1 người tiêu dùng đã mua loại tủ lạnh X mà có đọc quảng cáo:

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A).P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{0,8.0,3}{0,26}=\frac{12}{13}$$

1.36.

Trên một bảng quảng cáo, người ta mắc hai hệ thống bóng đèn độc lập. Hệ thống I gồm 4 bóng mắc nối tiếp, hệ thống II gồm 3 bóng mắc song song. Khả năng bị hỏng của mỗi bóng trong 18 giờ thắp sáng liên tục là 0,1. Việc hỏng của mỗi bóng của mỗi hệ thống được xem như độc lập. Tính xác suất để

a/ Hệ thống I bị hỏng;

b/ Hệ thống II không bị hỏng.

Giải

a/ Đặt A_i:"bóng đèn thứ i trong hệ thống I bi hỏng" $i \in \{1,2,3,4\}$.

Xác suất hệ thống I bị hỏng

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = 1 - P\left(\overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}.\overline{A_4}\right) = 1 - 0,9^4 = 0,3439$$

b/ Đặt B_j:"bóng đèn thứ j trong hệ thống II bi hỏng" $j \in \{1,2,3\}$.

Xác suất hệ thống II không bị hỏng

$$P(\overline{B_1} + \overline{B_2} + \overline{B_3}) = 1 - P(B_1.B_2.B_3) = 1 - 0,1.0,1.0,1 = 0,999$$

1.37.

Trên một bảng quảng cáo, người ta mắc hai hệ thống bóng đèn độc lập. Hệ thống I gồm 4 bóng mắc nối tiếp, hệ thống II gồm 3 bóng mắc song song. Khả năng bị hỏng của mỗi bóng trong 18 giờ thắp sáng liên tục là 0,1. Việc hỏng của mỗi bóng của mỗi hệ thống được xem như độc lập. Tính xác suất để

a/ Cả hai hệ thống bị hỏng;

b/ Chỉ có một hệ thống bị hỏng.

Giải

a/ Đặt A_i: "bóng đèn thứ i trong hệ thống I bi hỏng" $i \in \{1,2,3,4\}$.

và B_j:"bóng đèn thứ j trong hệ thống II bi hỏng" $j \in \{1,2,3\}$.

Xác suất hệ thống I bị hỏng

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = 1 - P\left(\overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}.\overline{A_4}\right) = 1 - 4.0,9 = 0,3439$$

Xác suất hệ thống II bị hỏng là: $P\left(B\right) = P(B_1.B_2.B_3) = 0,001$

Nên, xác suất cả hai hệ thống bị hỏng là

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0,3439.0,001 = 0,0003439$$

b/ Xác suất chỉ có một hệ thống bị hỏng

$$P(\overline{A}B + A\overline{B}) = P(\overline{A})P(B) + P(A)P(\overline{B}) = 0,34212$$

1.38.

Một lô hàng gồm rất nhiều bóng đèn, trong đó có 8% bóng đèn xấu. Một người đến mua hàng với qui định: Chọn ngẫu nhiên 10 bóng đèn đem kiểm tra và nếu có nhiều hơn một bóng đèn xấu thì không nhận lô hàng. Tính xác suất để lô hàng được chấp nhận.

Giải

Việc kiểm tra 10 bóng đèn, nghĩa là thực hiện 10 phép thử Bernoulli, với xác suất "thành công" gặp bóng xấu $p = 0,08$ (không đổi).

Khi đó $P_{10}\left(k;0,08\right) = C_n^k 0,08^k.0,92^{10-k}$, $k = 0,1,2,...,10$

(k :số lần thành công trong 10 phép thử)

Đặt A: "nhận lô hàng"

$P\left(A\right)=P_{10}\left(0;0,08\right)+P_{10}\left(1;0,08\right)=\left(0,92\right)^{10}-C_{10}^{1}0,88.\left(0,92\right)^{9}=0,812$

1.39.

Một nhóm nghiên cứu đang nghiên cứu về nguy cơ một sự cố tại một nhà máy điện nguyên tử sẽ gây ra sự rò rỉ phóng xạ. Nhóm nghiên cứu nhận thấy các loại sự cố chỉ có thể là: hoả hoạn, sự gãy đổ của vật liệu hoặc sai lầm của con người, và 2 hay nhiều hơn 2 sự cố không bao giờ cùng xảy ra.

Nếu có hỏa hoạn thì sự rò rỉ phóng xạ xảy ra khoảng 20% số lần. Nếu có sự gãy đổ của vật liệu thì sự rò rỉ phóng xạ xảy ra khoảng 50% số lần, và nếu có sự sai lầm của con người thì sự rò rỉ sẽ xảy ra khoảng 10% số lần. Nhóm nghiên cứu cũng tìm được xác suất để: Hoả hoạn và sự rò rỉ phóng xạ cùng xảy ra là 0,0010, gãy đổ vật liệu và sự rò rỉ phóng xạ cùng xảy ra là 0,0015, sai lầm của con người và sự rò rỉ phóng xạ cùng xảy ra là 0,0012. Tìm xác suất để

a/ có hoả hoạn; có gãy đổ vật liệu và có sai lầm của con người;

b/ có một sự rò rỉ phóng xạ;

c/ một sự rò rỉ phóng xạ được gây ra bởi sự sai lầm của con người.

Giải

Đặt A: "xảy ra hỏa hoạn"

B: "xảy ra gãy đổ"

C: "xảy ra sai lầm của con người"

D: "sự rò rỉ phóng xạ"

Ta có

$P\left(D\mid A\right)=0,2;P\left(D\mid B\right)=0,5;P\left(D\mid C\right)=0,1$

$P\left(DA\right)=0,001;P\left(DB\right)=0,0015;P\left(DC\right)=0,0012$

a/ Xác suất có hoả hoạn là

$$P(A)=\frac{P(AD)}{P(D\mid A)}=0,005$$

Xác suất có gãy đổ vật liệu là

$$P(B)=\frac{P(BD)}{P(D\mid B)}=0,003$$

và xác suất sai lầm của con người

$$P(C)=\frac{P(CD)}{P(D\mid C)}=0,0012$$

b/ Xác suất có sự rò rỉ phóng xạ xảy ra:

$P(D)=P(AD)+P(BD)+P(CD)=0,001+0,0015+0,0012=0,0037$

c/ Xác suất một sự rò rỉ phóng xạ được gây ra bởi sự sai lầm của con người là

$$P(C\mid D)=\frac{P\left(CD\right)}{P\left(D\right)}=\frac{0,0012}{0,0037}=\frac{12}{37}$$

1.40.

Một địa phương có tỉ lệ người dân nghiện thuốc lá là 30%. Biết rằng tỉ lệ người bị viêm họng trong số người nghiện thuốc lá là 60%, còn tỉ lệ đó trong số người không nghiện thuốc lá là 40%. Chọn ngẫu nhiên một người từ địa phương trên.

a/ Nếu người đó bị viêm họng, tính xác suất để người đó nghiện thuốc lá.

b/ Nếu người đó không bị viêm họng, tính xác suất để người đó nghiện thuốc lá.

Giải

Đặt A: "người dân nghiện thuốc lá" $P(A)=0,3$

B: "người dân bị viêm họng" $P(B\mid A)=0,6; P(B\mid \overline{A})=0,4$

a/ Trước tiên ta tính xác suất người này viêm họng

$$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=P(\overline{A}).P(B\mid \overline{A})+P(A).P(B\mid A)=0,46$$

Xác suất để người nghiện thuốc lá nếu bị viêm họng là

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A).P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{0,3.0,6}{0,46}=\frac{9}{23}$$

b/ Xác suất để người nghiện thuốc lá nếu không bị viêm họng là

$$P(A\mid \overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(A).P(B\mid A)}{1-P(B)}=\frac{2}{9}$$

1.41.

Một nhà xuất bản gửi bản giới thiệu sách mới đến 80% giảng viên của một trường đại học. Sau một thời gian, nhà xuất bản nhận thấy: Có 30% giảng viên mua sách trong số những người nhận được bản giới thiệu, và trong số những giảng viên không nhận được bản giới thiệu, có 10% mua sách . Tìm tỉ lệ những giảng viên nhận được bản giới thiệu trong số những người mua sách.

Giải

Đặt A: "giảng viên nhận được bản giới thiệu sách mới" $P(A)=0,8$

B: "giảng viên mua sách" $P(B\mid A)=0,3; P(B\mid \overline{A})=0,1$

Trước hết ta tính xác suất để giảng viên mua sách

$$P(B)=P(\overline{A}B)+P(AB)=P(\overline{A}).P(B\mid \overline{A})+P(A).P(B\mid A)=0,26$$

Nên, xác suất để giảng viên nhận được bản giới thiệu trong số những người mua sách:

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A).P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{0,8.0,3}{0,26}=\frac{12}{13}$$

1.42.

Nhà trường muốn chọn một số học sinh từ một tổ gồm 7 nam sinh và 6 nữ.sinh. Lần đầu chọn ngẫu nhiên 2 học sinh; sau đó, chọn tiếp 1 học sinh nữa.

a/ Tính xác suất để học sinh được chọn lần sau là nam sinh.

b/ Biết rằng học sinh được chọn lần sau là nữ sinh, tính xác suất để cả hai học sinh được chọn lần đầu đều là nam sinh.

Giải

a/ Gọi A_k : "chọn k học sinh nam trong 2 học sinh lần đầu" $k \in \{0,1,2\}$

$$P(A_0) = \frac{C_6^2}{C_{13}^2}; P(A_1) = \frac{C_7^1 C_6^1}{C_{13}^2}; P(A_2) = \frac{C_7^2}{C_{13}^2}$$

A :"học sinh được chọn sau cùng là nam"

$$P\left(A\right) = P(A_0)P(A \mid A_0) + P(A_1)P(A \mid A_1) + P(A_2)P(A \mid A_2)$$
$$= \frac{C_6^2}{C_{13}^2}.\frac{7}{11} + \frac{C_7^1 C_6^1}{C_{13}^2}.\frac{6}{11} + \frac{C_7^2}{C_{13}^2}.\frac{5}{11} = \frac{7}{13}$$

b/ Xác suất học sinh chọn lần sau cùng là nữ là $P(\overline{A}) = 1 - P\left(A\right) = \frac{6}{13}$

nên xác suất để 2 học sinh được chọn lần đầu là nam:

$$P(A_2 \mid \overline{A}) = \frac{P(A_2).P\left(\overline{A} \mid A_2\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{\frac{C_7^2}{C_{13}^2}.\frac{C_6^1}{C_{11}^1}}{\frac{6}{13}} = \frac{7}{22}$$

1.43.

Số liệu thống kê về bệnh lao phổi tại một địa phương cho biết: Có 15% số người làm nghề đục đá (LNĐĐ) và bị lao phổi; có 50% số người không LNĐĐ và không bị lao phổi; có 25% số người LNĐĐ nhưng không bị lao phổi. Ngoài ra, tỉ lệ những người không LNĐĐ nhưng bị lao phổi là 10%. Chúng ta có thể kết luận gì về mối quan hệ giữa nghề đục đá và bệnh lao phổi?

Giải

Đặt D : "làm nghề đục đá"

L : "bị lao phổi"

Theo số liệu đề bài ta có: $P\left(DL\right) = 0,15; P(\overline{D}.\overline{L}) = 0,5; P(D.\overline{L}) = 0,25; P(\overline{D}.L) = 0,1$

Khi đó,

$$P(D) = P(D.\overline{L}) + P\left(DL\right) = 0,25 + 0,15 = 0,4$$

và

$$P(L) = P(L.\overline{D}) + P\left(DL\right) = 0,1 + 0,15 = 0,25$$

Dễ thấy $P\left(DL\right) = 0,15 \neq 0,4.0,25 = P\left(D\right)P(L)$ do đó bệnh lao phổi có liên quan đến nghề đục đá. Xét

$$P\left(L \mid D\right) = \frac{P\left(LD\right)}{P\left(D\right)} = 0,375;\ P\left(L \mid \overline{D}\right) = \frac{P\left(L\overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = 0,2$$

Ta thấy $P\left(L \mid D\right) \approx 2P\left(L \mid \overline{D}\right)$. Chứng tỏ rằng, xác suất người bị lao phổi khi người đó làm nghề đục đá cao gần gấp hai lần xác suất người bị lao phổi nhưng người đó không làm nghề đục đá.

1.44.

Giả sử một xét nghiệm X cho kết quả dương tính (+) đối với những người nhiễm HIV với xác suất 95% và cho kết quả (+) đối với những người không nhiễm HIV với xác suất 1%. Một người đến từ địa phương có tỉ lệ nhiễm HIV là 1% được làm xét nghiệm X và cho kết quả (+). Tính xác suất để người này thực sự nhiễm HIV.

Giải

Đặt A: "Người bị nhiễm HIV đến từ địa phương" $P\left(A\right) = 0,01$

B : "người đến từ địa phương làm xét nghiệm X cho kết quả dương tính với HIV"

$$P\left(B\right) = P\left(A\right).P\left(B \mid A\right) + P\left(\overline{A}\right).P\left(B \mid \overline{A}\right) = 0,01.0,95 + 0,99.0,01 = 0,0194$$

Xác suất để người đến từ địa phương có tỉ lệ 1% được xét nghiệm và cho kết quả dương tính là

$$P(A \mid B) = \frac{P(A).P(B \mid A)}{P(B)} = \frac{0,95.0,01}{0,0194} = \frac{95}{194}$$

1.45.

Một hộp chứa 15 lọ thuốc, trong đó có 6 lọ hỏng. Lấy lần lượt từng lọ không hoàn lại để kiểm tra, cho đến khi gặp 3 lọ hỏng thì dừng.

a/ Tính xác suất để việc kiểm tra dừng lại ở lọ thứ ba; ở lọ thứ sáu

b/ Nếu việc kiểm tra dừng lại ở lọ thứ sáu, tính xác suất để lọ được kiểm ra đầu tiên là lọ hỏng.

Giải

Đặt A_i:" lần kiểm tra thứ i được lọ hỏng"

a/ Xác suất để việc kiểm tra dừng lại ở lọ thứ ba $P\left(A_1A_2A_3\right) = \frac{6}{15}.\frac{5}{14}.\frac{4}{13} = \frac{4}{91}$

Đặt A:" kiểm tra liên tiếp 5 lần được 2 lọ hỏng và 3 tốt"

$$P(A) = \frac{C_9^3C_6^2}{C_{15}^5} = \frac{1260}{3003}; P(A_6) = \frac{C_4^1}{C_{10}^1} = \frac{4}{10}$$

C :"kiểm tra dừng lại ở lọ thứ sáu" $P(C) = P\left(AA_6\right) = P(A)P(A_6) = \frac{24}{143}$

b/ Việc kiểm tra dừng lại ở lọ thứ sáu, xác suất để lọ được kiểm ra đầu tiên là lọ hỏng.

$$P\left(A_1 \mid C\right) = \frac{P\left(A_1\right)P\left(C \mid A_1\right)}{P\left(C\right)} = \frac{P\left(A_1\right)P\left(D\right)P\left(A_6\right)}{P\left(C\right)}$$

$$=\frac{\frac{6}{15}.\frac{C_5^1C_9^3}{C_{14}^4}.\frac{4}{10}}{\frac{24}{143}}=\frac{71}{225}\approx 0,4$$

1.46.

Từ một lô hàng có rất nhiều quyển vở với tỉ lệ vở hỏng là 5%, người ta chọn ngẫu nhiên từng quyển vở để kiểm tra.

a/ Hỏi phải kiểm tra ít nhất bao nhiêu quyển vở để xác suất có ít nhất một quyển vở hỏng không bé hơn 90% ?

b/ Giả sử việc kiểm tra sẽ dừng lại khi phát hiện 3 quyển vở hỏng. Tính xác suất để việc kiểm tra dừng lại ở lần kiểm tra thứ 10,

Giải

Gọi p là xác suất vở hỏng trong mỗi lô hàng. $p=0,05$ và gọi n là số quyển vở cần kiểm tra. Ta có dãy phép thử Bernoulli với xác suất thành công (vở hỏng) là 0,05. Do đó, $P_n\left(k;0,05\right)$

a/ Đặt A: "ít nhất một quyển vở hỏng"

$$P(A)=1-P_n\left(0;0,05\right)=1-\left(0,95\right)^n\geq 0,9\Leftrightarrow n\geq 44,98$$

Nên phải kiểm tra ít nhất 45 quyển vở.

b/ Việc kiểm tra phát hiện 3 quyển vở hỏng suy ra 9 lần kiểm tra đầu phát hiện 2 quyển vở hỏng và lần thứ 10 phải là vở hỏng.

Đặt B :"kiểm tra dừng lại lần thứ 10"

$$P\left(B\right)=P_9\left(2;0,05\right).0,05=\left(C_9^2 0,05^2 0,95^7\right).0,05=0,003143.$$

1.47.

Hộp thứ nhất có 8 sản phẩm loại A và 2 sản phẩm loại B; hộp thứ hai có 5 sản phẩm loại A và 3 sản phẩm loại B. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 2 sản phẩm.

a/ Tính xác suất để được 3 sản phẩm loại A;

b/ Giả sử lấy được một sản phẩm loại B và 3 sản phẩm loại A. Nhiều khả năng là sản phẩm loại B thuộc hộp nào? Tại sao?

Giải

Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 2 sp với $i\in\left\{0;1;2\right\}$ và $j\in\left\{0;1;2\right\}$

Đặt A_i :" lấy được i sp loại A từ hộp thứ nhất"

B_j :" lấy được j sp loại A từ hộp thứ hai"

a/ C: "lấy được 3 sp loại A và 1 sp loại B"

$$P\left(C\right)=P\left(A_2B_1\right)+P\left(A_1B_2\right)=\frac{C_8^2}{C_{10}^2}.\frac{C_5^1.C_3^1}{C_8^2}+\frac{C_8^1.C_2^1}{C_{10}^2}.\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{29}{63}$$

b/ Gọi $P\left(H_1\right),P\left(H_2\right)$ lần lượt là xác suất để sp loại B thuộc hộp thứ nhất và hộp thứ hai

Ta có $P\left(H_1\right)=\dfrac{P\left(A_1B_2\right)}{P\left(C\right)}=\dfrac{\dfrac{C_8^1.C_2^1}{C_{10}^2}.\dfrac{C_5^2}{C_8^2}}{\dfrac{29}{63}}=\dfrac{8}{29}$

$$P\left(H_2\right)=\frac{P\left(A_2B_1\right)}{P\left(C\right)}=\frac{\dfrac{C_8^2}{C_{10}^2}.\dfrac{C_5^1.C_3^1}{C_8^2}}{\dfrac{29}{63}}=\frac{21}{29}$$

Ta thấy $P\left(H_1\right)<P\left(H_2\right)$ nên sp loại B nhiều khả năng thuộc hộp thứ hai.

1.48.

Hộp thứ nhất có 8 sản phẩm loại A và 2 sản phẩm loại B; hộp thứ hai có 5 sản phẩm loại A và 3 sản phẩm loại B. Lấy ngẫu nhiên một hộp, rồi lấy ngẫu nhiên từ đó ra 4 sản phẩm.

a/ Tính xác suất để được 3 sản phẩm loại A;

b/ Giả sử lấy được một sản phẩm loại B và 3 sản phẩm loại A. Nhiều khả năng là sản phẩm loại B thuộc hộp nào? Tại sao?

Giải

a/ Lấy ngẫu nhiên ra 1 hộp, rồi lấy ngẫu nhiên từ đó ra 4 sp

Đặt M_i:" lấy được hộp thứ i", $i\in\left\{1,2\right\}$ suy ra $P\left(M_1\right)=P\left(M_2\right)=\dfrac{1}{2}$

gọi C:" lấy được 3 sp loại A và 1 sp loại B"

$$\begin{aligned}P\left(C\right)&=P\left(M_1\right).P\left(C\mid M_1\right)+P\left(M_2\right).P\left(C\mid M_2\right)\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{C_8^3.C_2^1}{C_{10}^4}+\frac{C_5^3.C_3^1}{C_8^4}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{8}{15}+\frac{3}{7}\right]=\frac{101}{210}\end{aligned}$$

b/ Gọi $P\left(H_1\right),P\left(H_2\right)$ lần lượt là xác suất để sp loại B thuộc hộp thứ nhất và hộp thứ hai

Ta có $P\left(H_1\right)=\dfrac{P\left(M_1\right).P\left(C\mid M_1\right)}{P\left(C\right)}=\dfrac{\dfrac{1}{2}.\dfrac{C_8^3.C_2^1}{C_{10}^4}}{\dfrac{101}{210}}=\dfrac{56}{101}$

$$P\left(H_2\right)=\frac{P\left(M_2\right).P\left(C\mid M_2\right)}{P\left(C\right)}=\frac{\dfrac{1}{2}.\dfrac{C_5^3.C_3^1}{C_8^4}}{\dfrac{101}{210}}=\frac{45}{101}$$

Thấy $P\left(H_1\right)>P\left(H_2\right)$ nên sp loại B nhiều khả năng thuộc hộp thứ nhất.

1.49.

Một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử với 96% sản phẩm có chất lượng cao. Một qui trình kiểm tra chất lượng sản phẩm có đặc điểm: 2% sản phẩm có chất lượng cao lại không được công nhận và 5% sản phẩm không có chất lượng cao lại được công nhận. Hãy tính xác suất để sau khi kiểm tra, một sản phẩm được công nhận có chất lượng cao đúng là sản phẩm có chất lượng cao.

Giải

Gọi A: "sp chất lượng cao" và B: "sp được công nhận"

$P\left(A\right) = 0,96$, $P\left(\overline{B} \mid A\right) = 0,02$ và $P\left(B \mid \overline{A}\right) = 0,05$

Ta có $P\left(\overline{B} \mid A\right) = \dfrac{P\left(A\overline{B}\right)}{P\left(A\right)} = \dfrac{P\left(A\right) - P\left(AB\right)}{P\left(A\right)} = 0,02$

suy ra $P\left(AB\right) = 0,9408$.

Lại có $P\left(B \mid \overline{A}\right) = \dfrac{P\left(\overline{A}B\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \dfrac{P\left(B\right) - P\left(AB\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = 0,05$

suy ra $P\left(B\right) = 0,9428$

Xs để 1 sp đó được công nhận chất lượng cao đúng là sp chất lượng cao là

$$P\left(A \mid B\right) = \frac{P\left(AB\right)}{P\left(B\right)} = \frac{0,9408}{0,9428} = 0,9978$$

1.50.

Giả sử bạn đem giao một lô hàng, rất nhiều sản phẩm, mà bạn biết rằng nó có tỉ lệ phế phẩm là 10%. Người nhận hàng đề nghị lấy ngẫu nhiên 6 sản phẩm để kiểm tra, và nếu có quá k phế phẩm thì không nhận lô hàng. Bạn đề nghị k bằng bao nhiêu để vừa thuyết phục được người nhận, vừa hy vọng khả năng lô hàng không bị từ chối ít nhất là 95%?

Giải

Tỉ lệ phế phẩm là $p = 0,1$

Việc lấy ngẫu nhiên 6 sp để kiểm tra nghĩa là thực hiện 6 phép thử Bernoulli với xs thành công (gặp phế phẩm) $p = 0,1$ (không đổi). Ta được

$$P_6\left(k;0,1\right) = C_6^k.0,1^k.0,9^{6-k}$$

Nhận xét:

$P_6\left(0;0,1\right) + P_6\left(1;0,1\right) < 0,95$

và $P_6\left(0;0,1\right) + P_6\left(1;0,1\right) + P_6\left(2;0,1\right) = 0,9842 > 0,95$

nên theo yêu cầu bài toán $k = 2$.

1.51.

Một khu dân cư A có tỉ lệ mắc bệnh B là 30%.

a/ Trong một đợt điều tra, người ta chọn ngẫu nhiên 10 người. Tính xác suất trong đó có nhiều nhất ba người mắc bệnh B.

b/ Được biết trong khu vực đó có 60% dân số có chích ngừa bệnh B. Tỷ lệ người kháng bệnh B đối với người được chích ngừa là 95%. Còn tỷ lệ kháng bệnh B đối với người không chích ngừa là 20%. Chọn ngẫu nhiên một người thấy người này không mắc bệnh B. Tính xác suất người này có chích ngừa.

Giải

Gọi B: "Người được chọn mắc bệnh B" $P(B) = 0,3$.

Chọn ngẫu nhiên 10 người là thực hiện 10 phép thử Bernuolli với xác suất thành công (mắc bệnh B) $P(B) = 0,3$ (không đổi). Ta có $P_{10}(k;0,3) = C_{10}^k.0,3^k.0,7^{10-k}$.

a/ Xác suất trong đó có nhiều nhất ba người mắc bệnh B

$$P_{10}(0;0,3) + P_{10}(1;0,3) + P_{10}(2;0,3) + P_{10}(3;0,3) =$$
$$= 0,0282 + 0,1211 + 0,2335 + 0,2668 = 0,6496$$

b/ A:" chích ngừa bệnh B" $P(A) = 0,6$

$$P(\overline{B} \mid A) = 0,95 \text{ và } P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0,2$$

Xác suất chọn ngẫu nhiên một người thấy người này không mắc bệnh B:

$$P(\overline{B}) = P(A)P(\overline{B} \mid A) + P(\overline{A})P(B \mid \overline{A}) = 0,65$$

xác suất người này có chích ngừa:

$$P(\overline{A} \mid \overline{B}) = \frac{P(\overline{A}.\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A}).P(\overline{B} \mid \overline{A})}{P(\overline{B})} = \frac{8}{65}.$$

1.52.

Tỉ lệ sản xuất ra phế phẩm của một máy là 8%. Khảo sát một lô hàng gồm 75 sản phẩm do máy đó sản xuất ra.

a/ Tính xác suất để trong lô hàng, có 10 phế phẩm

b/ Trong lô hàng, nhiều khả năng nhất là có bao nhiêu phế phẩm? Tính xác suất tương ứng.

Giải

Nếu xem việc máy sản xuất ra một sản phẩm là một phép thử Bernoulli, với xác suất cho "thành công" là $p = 0,08$, thì khi máy đó sản xuất 75 sản phẩm, nó đã

thực hiện quá trình $P_{75}(k;0,08)$

a/ Xác suất phải tính:

$$P_{75}(10) = C_{75}^{10}(0,08)^{10}.(0,92)^{65} = 0,03941$$

b/ Số phế phẩm nhiều khả năng nhất trong lô hàng là:

$$[(75+1).0,08] = 6$$

với xác suất tương ứng:

$$P_{75}(6) = C_{75}^{6}(0,08)^{6}.(0,92)^{69} = 0,16745$$

1.53.

Người ta muốn lấy ngẫu nhiên một số hạt giống từ một lô hạt giống có tỉ lệ hạt lép là 3% để nghiên cứu. Hỏi phải lấy ít nhất bao nhiêu hạt sao cho xác suất để có ít nhất một hạt lép không bé hơn 95% ?.

Giải

Gọi n là số hạt phải lấy, chúng ta có $P_n(k;0,03)$. Xác suất để có ít nhất một hạt lép là $1-(1-0,03)^n = 1-(0,97)^n$.

Theo giả thiết, chúng ta có:

$$1-(0,97)^n \geq 0,95 \Leftrightarrow (0,97)^n \leq 0,05 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,97} = 98,3523$$

Vậy, phải lấy ít nhất 99 hạt giống.

CHƯƠNG 2: BIẾN NGẪU NHIÊN

2.1.

Có ba hộp A, B và C đựng các lọ thuốc. Hộp A có 10 lọ tốt và 5 lọ hỏng, hộp B có 6 lọ tốt và 4 lọ hỏng, hộp C có 5 lọ tốt và 7 lọ hỏng. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra một lọ thuốc.

a/ Tìm luật phân phối xác suất cho số lọ thuốc tốt trong 3 lọ lấy ra.

b/ Tìm xác suất để được ít nhất 2 lọ tốt; được 3 lọ cùng loại.

Giải

Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số lọ thuốc tốt trong 3 lọ lấy ra

$\operatorname{Im} X = \{0, 1, 2, 3\}$.

a) A_i: " lọ thuốc lấy ra từ hộp thứ i là lọ tốt".

$$P(X = 0) = P(\overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}) = P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}).P(\overline{A_3}) = \frac{7}{90}$$

$$P(X = 1) = P(A_1.\overline{A_2}.\overline{A_3} + \overline{A_1}.A_2.\overline{A_3} + \overline{A_1}.\overline{A_2}.A_3) = \frac{59}{180}$$

$$P(X = 2) = P(A_1.A_2.\overline{A_3} + \overline{A_1}.A_2.A_3 + A_1.\overline{A_2}.A_3) = \frac{77}{180}$$

$$P(X = 3) = P(A_1.A_2.A_3) = P(A_1).P(A_2).P(A_3) = \frac{1}{6}$$

Bảng phân phối xác suất của X

X	0	1	2	3
$P(X)$	$\frac{7}{90}$	$\frac{59}{180}$	$\frac{77}{180}$	$\frac{1}{6}$

b) Xác suất để được ít nhất 2 lọ tốt

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{107}{180}$$

Xác suất được 3 lọ cùng loại

$$P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{11}{45}$$

2.2.

Trong một đội tuyển, 3 vận động viên A, B và C thi đấu với xác xuất thắng trận của mỗi người lần lượt là 0,6; 0,7 và 0,8. Trong một đợt thi đấu, mỗi vận động viên thi đấu một trận độc lập nhau.

a/ Tìm luật phân phối xác suất cho số trân thắng của đội tuyển.

b/ Tính xác suất để đội tuyển thua nhiều nhất một trận. Tính xác suất để đội tuyển thắng ít nhất một trận.

Giải

a/ Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số trận thắng của đội tuyển.

$$\operatorname{Im} X = \{0,1,2,3\}.$$

Gọi A: "Vận động viên A thắng"
B : "Vận động viên B thắng"
C : "Vận động viên C thắng"
Ta có

$$P(X=0) = P(\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}) = P(\overline{A}).P(\overline{B}).P(\overline{C}) = 0,4.0,3.0,2 = 0,024.$$

$$P(X=1) = P(A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C} + A.\overline{B}.\overline{C}) = 0,188.$$

$$P(X=2) = P(A.B.\overline{C} + \overline{A}.B.C + \overline{A}.B.C) = 0,452.$$

$$P(X=3) = P(A.B.C) = P(A).P(B).P(C) = 0,336.$$

Bảng phân phối xác suất X :

X	0	1	2	3
$P(X)$	0,024	0,188	0,452	0,336

b/ Xác suất để đội tuyển thua nhiều nhất một trận:

$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = 0,788$$

Xác suất để đội tuyển thắng ít nhất một trận :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 0,976$$

2.3.

Trong một đội tuyển, 3 vận động viên A, B và C thi đấu với xác xuất thắng trận của mỗi người lần lượt là 0,6; 0,7 và 0,8. Trong một đợt thi đấu, mỗi vận động viên thi đấu một trận độc lập nhau.

a/ Tìm luật phân phối xác suất cho số trân thắng của đội tuyển.

b/ Sau đợt thi đấu, đội tuyển có hai trận thắng; tính xác suất để A thua trận.

Giải

a/ Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số trận thắng của đội tuyển.

$$\operatorname{Im} X = \{0,1,2,3\}.$$

Gọi A: "Vận động viên A thắng";
B : "Vận động viên B thắng";
C : "Vận động viên C thắng"

Ta có

$$P(X=0) = P(\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}) = P(\overline{A}).P(\overline{B}).P(\overline{C}) = 0,4.0,3.0,2 = 0,024.$$

$$P(X=1) = P(A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C} + A.\overline{B}.\overline{C}) = 0,188.$$

$$P(X=2) = P(A.B.\overline{C} + \overline{A}.B.C + \overline{A}.B.C) = 0,452.$$

$$P(X=3) = P(A.B.C) = P(A).P(B).P(C) = 0,336.$$

Bảng phân phối xác suất X :

X	0	1	2	3
$P\left(X\right)$	$0,024$	$0,188$	$0,452$	$0,336$

b/ Xác suất để A thua trận, biết rằng đội tuyển có hai trận thắng

$$P\left(\overline{A} \mid X=2\right)=\frac{P\left(\overline{A}.\left\{X=2\right\}\right)}{P\left(X=2\right)}=\frac{P\left(\overline{A}.B.C\right)}{P\left(X=2\right)}=\frac{0,4.0,7.0,8}{0,452}=\frac{56}{113}$$

2.4.

Trong một đội tuyển, 3 vận động viên A, B và C thi đấu với xác xuất thắng trận của mỗi người lần lượt là 0,6; 0,7 và 0,8. Trong một đợt thi đấu, mỗi vận động viên thi đấu một trận độc lập nhau.

a/ Tìm luật phân phối xác suất cho số trân thắng của đội tuyển.

b/ Tính số trận thắng trung bình và phương sai của số trận thắng của đội tuyển.

Giải

a/ Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số trận thắng của đội tuyển.

$$\operatorname{Im} X=\left\{0,1,2,3\right\}.$$

Gọi A: "Vận động viên A thắng";

B : "Vận động viên B thắng";

C : "Vận động viên C thắng"

Ta có

$$P\left(X=0\right)=P(\overline{A}.\overline{B}.\overline{C})=P\left(\overline{A}\right).P(\overline{B}).P(\overline{C})=0,4.0,3.0,2=0,024.$$

$$P\left(X=1\right)=P(A.\overline{B}.\overline{C}+\overline{A}.B.\overline{C}+A.\overline{B}.\overline{C})=0,188.$$

$$P\left(X=2\right)=P(A.B.\overline{C}+\overline{A}.B.C+\overline{A}.B.C)=0,452.$$

$$P\left(X=3\right)=P(A.B.C)=P\left(A\right).P(B).P(C)=0,336.$$

Bảng phân phối xác suất X :

X	0	1	2	3
$P\left(X\right)$	$0,024$	$0,188$	$0,452$	$0,336$

b/ Số trận thắng trung bình

$$E(X)=0.0,024+1.0,188+2.0,452+3.0,336=2,1$$

và phương sai của số trận thắng của đội tuyển

$$D\left(X\right)=E\left(X^2\right)-E\left(X\right)^2=0,61$$

Trong đó, $E\left(X^2\right)=0^2.0,024+1^2.0,188+2^2.0,452+3^2.0,336=5,02$.

2.5.

Một cơ sở sản xuất các bao kẹo. Số kẹo trong mỗi bao là một biến ngẫu nhiên có phân phối xác suất như sau:

Số kẹo trong bao	18	19	20	21	22
Xác suất	0,14	0,24	0,32	0,21	0,09

a/ Tìm trung bình và phương sai của số viên kẹo trong mỗi bao.

b/ Chi phí sản xuất của mỗ bao kẹo là 3X + 16, trong đó X là biến ngẫu nhiên chỉ số kẹo trong bao. Tiền bán mỗi bao kẹo là 100$. Không phân biệt số kẹo trong bao. Tìm lợi nhuận trung bình và độ lệch chuẩn của lợi nhuận cho mỗi bao kẹo.

Giải

Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số kẹo trong bao.

a/ Trung bình và phương sai của số viên kẹo trong mỗi bao :

$$E\left(X\right) = \sum_{i=18}^{22} i.P\left(X = i\right) = 19,87$$

và phương sai của số viên kẹo trong mỗi bao:

$$D\left(X\right) = E\left(X^2\right) - E\left(X\right)^2 = 1,3531$$

b/ Gọi Y là biến ngẫu nhiên chỉ lợi nhuận cho mỗi bao kẹo. Ta có:

$$Y = 84 - 3X$$

lợi nhuận trung bình

$$E\left(Y\right) = E\left(84 - 3X\right) = 84 - 3E\left(X\right) = 24,39$$

và độ lệch chuẩn của lợi nhuận cho mỗi bao kẹo

$$\sigma\left(Y\right) = \sqrt{D\left(Y\right)} = \sqrt{D\left(84 - 3X\right)} = 3\sqrt{D\left(X\right)} = 3,48969$$

2.6.

Một cơ sở sản xuất các bao kẹo. Số kẹo trong mỗi bao là một biến ngẫu nhiên có phân phối xác suất như sau:

Số kẹo trong bao	18	19	20	21	22
Xác suất	0,14	0,24	0,32	0,21	0,09

a/ Tìm xác suất để một bao kẹo được chọn ngẫu nhiên sẽ chứa từ 19 đến 21 viên kẹo.

b/ Hai bao kẹo được chọn ngẫu nhiên. Tính xác suất để ít nhất một trong hai bao chứa ít nhất 20 viên kẹo.

Giải

Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số kẹo trong bao.

a/ Xác suất để bao được chọn ngẫu nhiên có từ 19 đến 21 viên kẹo:

$$P(19 \le X \le 21) = P\left(X = 19\right) + P\left(X = 20\right) + P\left(X = 21\right) = 0,77.$$

b/ Đặt A: "Bao chứa ít nhất 20 viên kẹo" $P\left(A\right) = 0,32 + 0,21 + 0,09 = 0,62$

Xác suất để ít nhất một trong hai bao chứa ít nhất 20 viên kẹo:

$$P\left(A+\overline{A}A\right)=P\left(A\right)+P\left(\overline{A}A\right)=P\left(A\right)+P\left(\overline{A}\right)P\left(A\right)=0,8556$$

2.7.

Một hộp đựng 5 sản phẩm, trong đó có hai phế phẩm. Người ta lần lượt kiểm tra từng sản phẩm (không hoàn lại) cho đến khi gặp hai phế phẩm thì dừng lại. Tìm luật phân phối xác suất cho số sản phẩm được kiểm tra. Tính số lần kiểm tra trung bình.

Giải

Goi X là BNN chỉ số số sản phẩm kiểm tra.

$$\operatorname{Im} X=\left\{2,3,4,5\right\}.$$

A_i:“ lần kiểm tra lần thứ i được phế phẩm”.($i=1,2,3,4,5$)

$$P\left(X=2\right)=P\left(A_1.A_2\right)=P\left(A_1\right)P\left(A_2\mid A_1\right)=\frac{2}{20}$$

$$P\left(X=3\right)=P\left(A_1.\overline{A_2}.A_3\right)+P\left(\overline{A_1}.A_2.A_3\right)$$

$$=P\left(A_1\right)P\left(\overline{A_2}\mid A_1\right).P\left(A_3\mid A_1.\overline{A_2}\right)+P\left(\overline{A_1}\right)P\left(A_2\mid\overline{A_1}\right).P\left(A_3\mid\overline{A_1}.A_2\right)=\frac{4}{20}$$

Tương tự

$$P\left(X=4\right)=\frac{6}{20};P\left(X=5\right)=\frac{8}{20}$$

Bảng phân phối xác suất X :

X	2	3	4	5
$P\left(X\right)$	$\frac{2}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{8}{20}$

Số lần kiểm tra trung bình: $E\left(X\right)=\sum_{i=2}^{5}i.P\left(X=i\right)=4$

2.8.

Một người điều khiển 3 máy tự động hoạt đông độc lập với nhau. Xác suất bị hỏng trong một ca sản xuất của máy 1,2 và 3 lần lượt là 0,1; 0,2 và 0,3.

a/ Lập bảng phân phối xác suất cho số máy hoạt động tốt trong một ca sản xuất.

b/ Sau sản xuất, người điều khiển báo rằng suốt ca chỉ có một máy hoạt động tốt. Tính xác suất để máy hoạt động tốt đó là máy một.

Giải

a/ Gọi X là BNN chỉ số máy hoạt động tốt trong 1 ca sản xuất.

$$\operatorname{Im} X=\left\{0,1,2,3\right\}.$$

Đặt A_i “ máy thứ i bị hỏng trong 1 ca”. Suy ra,

$$P\left(A_1\right)=0,9;P\left(A_2\right)=0,8;P\left(A_3\right)=0,7$$

$$P\left(X=0\right)=P\left(\overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}\right)=P\left(\overline{A_1}\right).P\left(\overline{A_2}\right).P\left(\overline{A_3}\right)=0,1.0,2.0,3=0,006.$$

$$P(X=1)=P(A_1).P(\overline{A_2}).P(\overline{A_3})+$$
$$+P(\overline{A_1}).P(A_2).P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}).P(A_3)=0,092.$$
$$P(X=2)=P(A_1).P(A_2).P(\overline{A_3})+$$
$$+P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}).P(A_3)+P(\overline{A_1}).P(A_2).P(A_3)=0,398.$$
$$P(X=3)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1).P(A_2).P(A_3)=0,504.$$

Bảng phân phối xác suất của X:

X	0	1	2	3
$P(X)$	0,006	0,092	0,398	0,504

b/ Xác suất để máy hoạt động tốt đó là máy một, biết rằng suốt ca chỉ có một máy hoạt động tốt.

$$P(A_1 \mid X=1)=\frac{P(A_1.\{X=1\})}{P(X=1)}=\frac{P(A_1.\overline{A_2}.\overline{A_3})}{P(X=1)}=\frac{0,9.0,2.0,3}{0,092}=\frac{27}{46}$$

2.9.

Một người điều khiển 3 máy tự động hoạt đông độc lập với nhau. Xác suất bị hỏng trong một ca sản xuất của máy 1,2 và 3 lần lượt là 0,1; 0,2 và 0,3.

a/ Lập bảng phân phối xác suất cho số máy hoạt động tốt trong một ca sản xuất.

b/ Trung bình, trong một ca, có bao nhiêu máy hoạt động tốt? Tính độ lệch chuẩn của số máy hoạt động tốt trong một ca sản xuất.

Giải

a/ Gọi X là BNN chỉ số máy hoạt động tốt trong 1 ca sản xuất.

$$\operatorname{Im} X=\{0,1,2,3\}.$$

Đặt A_i “ máy thứ i bị hỏng trong 1 ca”. Suy ra,

$$P(A_1)=0,9;P(A_2)=0,8;P(A_3)=0,7$$
$$P(X=0)=P(\overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3})=P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}).P(\overline{A_3})=0,1.0,2.0,3=0,006.$$
$$P(X=1)=P(A_1).P(\overline{A_2}).P(\overline{A_3})+$$
$$+P(\overline{A_1}).P(A_2).P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}).P(A_3)=0,092.$$
$$P(X=2)=P(A_1).P(A_2).P(\overline{A_3})+$$
$$+P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}).P(A_3)+P(\overline{A_1}).P(A_2).P(A_3)=0,398.$$
$$P(X=3)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1).P(A_2).P(A_3)=0,504.$$

Bảng phân phối xác suất của X:

X	0	1	2	3
$P(X)$	0,006	0,092	0,398	0,504

b/ Trung bình số máy hoạt động tốt trong một ca: $E\left(X\right) = 2,4$
và độ lệch chuẩn của số máy hoạt động tốt trong một ca sản xuất

$$\sigma\left(X\right) = 0,6782 .$$

2.10.

Một công ty có 3 tổng đại lý. Gọi X, Y và Z theo thứ tự là khối lượng hàng bán được trong một này của 3 tổng đại lý trên (tính bằng tấn). Biết phân phối xác suất của các BNN X, Y và Z như sau:

x_i	5	6	7	8
$P\left(X = x_i\right)$	0,1	0,3	0,4	0,2

y_j	4	5	6	7	8
$P\left(Y = y_j\right)$	0,15	0,2	0,4	0,1	0,15

z_k	7	8	9	10
$P\left(Z = z_k\right)$	0,2	0,3	0,4	0,1

Tính khối lượng hàng hóa bán được trung bình trong một tháng (30 ngày) của công ty trên.

Giải

Trung bình khối lượng hàng hóa C bán được trong 1 tháng.

$$E\left(X\right) = 30.\sum_{x_i=5}^{8} x_i.P\left(X = x_i\right) = 201$$

Trung bình khối lượng hàng hóa Y bán được trong 1 tháng.

$$E\left(Y\right) = 30.\sum_{y_j=4}^{8} y_j.P\left(Y = y_j\right) = 177$$

Trung bình khối lượng hàng hóa Z bán được trong 1 tháng.

$$E\left(Z\right) = 30.\sum_{z_k=7}^{10} z_k.P\left(X = z_k\right) = 252$$

Nên khối lượng hàng hóa bán được trung bình trong 1 tháng của công ty là

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{X}\right) + E\left(Y\right) + E\left(Z\right) = 630$$

2.11.

Tiến hành khảo sát số khách trên một chuyến xe buýt (SK/1C) tại một chuyến giao thông, người ta thu được số liêu sau:

SK/1C	25	30	35	40	45
Xác suất	0,15	0,2	0,3	0,25	0,1

a/ Tính kỳ vọng và độ lệch chuẩn của SK/1C.

b/ Giả sử chi phí cho mỗi chuyến xe buýt là 200 ngàn đồng, không phụ thuộc vào số khách đi trên xe, th công ty phải quy định giá vé là bao nhiêu để có thể thu được số tiền lời trung bình cho mỗi chuyến xe là 100 ngàn đồng?

Giải

Gọi X là BNN chỉ số khách trên một chuyến xe. $\operatorname{Im} X = \{25; 30; 35; 40; 45\}$.

a/ Kỳ vọng của SK/1C: $E(X) = 34,75$

Độ lệch chuẩn của SK/1C.: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2} = 6,0156$

b/ Gọi Y là BNN chỉ số tiền lời cho mỗi chuyến xe.

$$Y = n.X - 200$$

trong đó, n (đồng) là số tiền quy định giá vé.

Yêu cầu bài toán, $E(Y) = E(n.X - 200) = 100 \Leftrightarrow nE(X) = 300 \Leftrightarrow n \approx 8,6$.

Vậy, công ty phải quy định giá vé là 8,6 đồng.

2.12.

Một người tham gia trò chơi gieo 3 đồng tiền vô tư. Anh ta được 500đ nếu xuất hiện 3 mặt sấp, 300đ nếu xuất hiện 2 mặt sấp, và 100đ nếu chỉ có một mặt sấp xuất hiện. Mặc khác, anh ta mất 900đ nếu xuất hiện 3 mặt ngữa. Trò chơi này có công băng với người này không? (Trò chơi được gọi là công bằng đối với người chơi nếu tham gia chơi nhiều lần thì trung bình anh ta hòa vốn).

Giải

Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số tiền nhận được khi tham gia trò chơi

$$\operatorname{Im} X = \{-900;\ 100;300;500\}.$$

Đặt A_i:"Gieo lần thứ i xuất hiện mặt sấp" $i \in \{1;2;3\}$

$$P(X = -900) = P(\overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}).P(\overline{A_3}) = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 100) = P(A_1.\overline{A_2}.\overline{A_3}) + P(.\overline{A_1}A_2.\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}.\overline{A_2}.A_3) = 3.\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Tương tự, $P(X = 300) = \frac{3}{8}; P(X = 500) = \frac{1}{8}$

Bảng phân phối xác suất của X

X	-900	100	300	500
$P(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Và $E(X) = 100$

nên mỗi lần chơi anh ta thắng được 100đ. Vậy trò chơi không công bằng.

2.13.

Một người tham gia trò chơi sau: Gieo một con xúc xắc vô tư ba lần độc lập nhau. Nếu xuất hiên " mặt 1" cả 3 lần thì được thưởng 6 ngàn đồng; nếu xuất hiện " mặt 1" 2 lần thì được thưởng 4 ngàn đồng; xuất hiện "mặt 1" 1 lần thì được thưởn 2 ngàn đồng; khi không có "mặt 1" nào xuất hiện thì không được thưởng. Mỗi lần tham gia trò chơi, người chơi phải đóng M ngàn đồng. Hãy định M để trò chơi công bằng.

Giải
Gọi X là BNN chỉ số tiền còn lại sau mỗi lần tham gia trò chơi.

$$\operatorname{Im} X = \left\{M-6; M-4; M-2; M\right\}$$

Ta có

$$P(X=M-6)=\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}=\frac{1}{6^3};\ P(X=M-4)=3.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}.\frac{1}{6}=3.\frac{5}{6^3}$$

$$P(X=M-2)=3.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6}=3.\frac{5^2}{6^3};\ P(X=M)=\frac{5^3}{6^3}$$

Bảng phân phối xác suất của X

X	$M-6$	$M-4$	$M-2$	M
$P(X)$	$\frac{1}{6^3}$	$3.\frac{5}{6^3}$	$3.\frac{5^2}{6^3}$	$\frac{5^3}{6^3}$

và $E(X)=\frac{216}{6^3}(M-1)$.

Trò chơi công bằng $E(X)=0 \Leftrightarrow M-1=0 \Leftrightarrow M=1$.

Vậy, mỗi lần chơi người tham gia đóng 1 ngàn đồng thì trò chơi công bằng.

2.14.

Theo thống kê dân số, xác suất để một người ở độ tuổi 40 sẽ sống thêm 1 năm nữa là 0,995. Một công ty bảo hiểm nhân thọ bán bảo hiểm một năm cho những người ở độ tuổi đó là 10 ngàn, và trong trường hợp người mua bảo hiểm bị chết thì số tiền bồi thường là 1 triệu. Hỏi lợi nhuận trung bình của công ty khi bán mỗi thẻ bảo hiểm là boa nhiêu?

Giải
Gọi X là BNN chỉ lợi nhuận của công ty khi bán mỗi thẻ bảo hiểm.

$$\operatorname{Im} X = \left\{-990; 10\right\}$$

Bảng phân phối xác suất của X

X	-990	10
$P(X)$	$0,995$	$0,005$

và $E(X)=5$.

Vậy, trung bình công ty lời 5 ngàn đồng khi bán 1 thẻ bảo hiểm.

2.15.

Số lượng xe ô tô mà một đại lý bán được trong một tuần là một BNN có phân phối xác suất như sau:

Số xe bán được	0	1	2	3	4	5
Xác suất tương ứng	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1

a/ Tính xác suất để đại lý đó bán được nhiều nhất 3 xe trong một tuần. Tính kỳ vọng và phương sai của số xe mà đại lý bán được trong một năm.

b/ Giả sử chi phí cho hoạt động của đại lý bằng căn bậc hai của số xe bán được vợi 5 (triệu đồng). Tìm chi phí cho hoạt động trung bình cho hoạt động của đại lý trong một tuần.

Gọi X là BNN số xe bán ra trong 1 tuần.

a/ Xác suất để đại lý đó bán được nhiều nhất 3 xe trong một tuần

$$P(X \le 3) = 1 - P(X = 4) - P(X = 5) = 0,6$$

Kỳ vọng và phương sai của số xe mà đại lý bán được trong một năm.

$$E(X) = 2,8; D(X) = 2,16$$

b/ Gọi là chi phí cho hoạt động của đại lý trong 1 tuần

$$Y = \sqrt{X} + 5$$

Nên chi phí cho hoạt động trung bình cho hoạt động của đại lý trong một tuần

$$E(Y) = E\left(\sqrt{X}\right) + 5 = 6,55$$

2.16.

Cho hàm $f(x) = \begin{cases} 2x & , x \in [0;1] \\ 0 & , x \notin [0;1] \end{cases}$

a/ Chứng tỏ $f(x)$ là hàm mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên liên tục X.

b/ Tìm hàm phân phối xác suất $F(x)$ của X

c/ Tính xác suất $P\left(0 < X < \frac{1}{2}\right)$.

Giải

a/ $f(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 2xdx = x^2 \Big|_0^1 = 1$. Do đó, $f(x)$ là hàm mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên liên tục X.

b/ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & , x \le 0 \\ x^2 & , 0 < x \le 1 \\ 1 & , x > 1 \end{cases}$

c/ $P\left(0 < X < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} 2xdx = \frac{1}{4}$.

2.17.

Cho hàm $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & , x > 1 \\ 0 & , x \le 1 \end{cases}$

a/ Chứng tỏ $f(x)$ là hàm mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên liên tục X

b/ Tìm hàm phân phối xác suất $F(x)$ của X.

c/ Tính xác suất $P(0 < X < 3)$

Giải

a/ $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{2}{x^3}dx = -2\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2x^2}\Big|_1^b\right) = 1$. Do đó, $f(x)$ là hàm mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên liên tục X .

b/ $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & , x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & , 1 < x < +\infty \\ 1 & , x = +\infty \end{cases}$

c/ $P(0 < X < 3) = \int\limits_{0}^{3} f(x)dx = \frac{8}{9}$.

2.18.

Cho hàm $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^3} & , x > 1 \\ 0 & , x \leq 1 \end{cases}$ (a là hằng số)

a/ Tìm a để $f(x)$ là hàm mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên liên tục X

b/ Tìm hàm phân phối xác suất $F(x)$ của X .

Giải

a/ $\forall x \in R,\ f(x) \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$ và

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{a}{x^3}dx = -a\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2x^2}\Big|_1^b\right) = \frac{a}{2}$. Do đó, $f(x)$ là hàm mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên liên tục X khi và chỉ khi $\begin{cases} a \geq 0 \\ \frac{a}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2$.

b/ $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & , x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & , 1 < x < +\infty \\ 1 & , x = +\infty \end{cases}$

2.19.

Cho X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , x \in [0;1] \\ 0 & , x \notin [0;1] \end{cases}$$

Tìm kỳ vọng và phương sai của X .

Giải

$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int\limits_{0}^{1} 2x^2dx = \frac{2}{3}$

$E(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx = \int\limits_{0}^{1} 2x^3dx = \frac{1}{2}$

do đó,

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$

2.20.

Cho X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ

$$f(x)=\begin{cases}3x^2 & ,x\in[0;1]\\ 0 & ,x\notin[0;1]\end{cases}$$

Tìm kỳ vọng và phương sai của X.

Giải

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 3x^2dx=\frac{3}{4}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^1 3x^4dx=\frac{3}{5}$$

do đó,

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{3}{5}-\frac{9}{16}=\frac{3}{80}\ .$$

Chương 3: MỘT SỐ PHÂN PHỐI THƯỜNG DÙNG

3.1.

Một kiện hàng có 10 sản phẩm, trong đó có 8 sản phẩm loại A. Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm. Đặt X là biến ngẫu nhiên chỉ số sản phẩm loại A có trong các sản phẩm lấy ra. Tìm luật phân phối xác suất của X. Tính $E(X), D(X)$.

Giải

Gọi X là BNN chỉ số sản phẩm loại A trong các sản phẩm lấy ra lần thứ nhất.

$$\operatorname{Im} X = \{0;1;2\}$$

Ta có $X \sim H(10;8;2)$ ta có $P(X=k) = \dfrac{C_8^k.C_2^{k-2}}{C_{10}^2}$; $p = \dfrac{M}{N} = 0,8$

Nên $E(X) = np = 1,6; D(X) = np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1} = \dfrac{64}{225}$.

3.2.

Có 2 kiện hàng, kiện thứ nhất và kiện thứ 2. Biết rằng, kiện thứ hai có 8 sản phẩm, trong đó có 5 sản phẩm loại A. Lần đầu, lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm ở kiện thứ nhất bỏ vào kiện thứ hai, sau đó lấy ngẫu nhiên từ kiện thứ hai ra 2 sản phẩm. Đặt X và Y lần lượt là biến ngẫu nhiên chỉ số sản phẩm loại A có trong các sản phẩm lấy ra ở lần thứ nhất và lần thứ hai. Biết rằng bảng phân phối xác suất của X

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

Tìm luật phân phối xác suất của Y; tính $E(Y)$ và $D(Y)$.

Bài giải

Gọi Y là BNN chỉ số sản phẩm loại A trong các sản phẩm lấy ra lần thứ hai.

$$\operatorname{Im} Y = \{0;1;2\}$$

Ta thấy $P(X=0) = \dfrac{1}{45}; P(X=1) = \dfrac{16}{45}; P(X=2) = \dfrac{28}{45}$

Trong đó,

$$P(Y=0 \mid X=0) = \frac{C_5^0.C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{10}{45}; P(Y=0 \mid X=1) = \frac{6}{45}; P(Y=0 \mid X=2) = \frac{3}{45}$$

Mặt khác

$$P(Y=0)=P(X=0).P(Y=0\,|\,X=0)+P(X=1).P(Y=0\,|\,X=1)$$
$$+P(X=2).P(Y=0\,|\,X=2)=\frac{190}{2025}$$

Tương tự $P(Y=1)=\frac{997}{2025}; P(Y=2)=\frac{838}{2025}$.

Bảng phân phối xác suất của Y

Y	0	1	2
$P(Y)$	$\frac{190}{2025}$	$\frac{997}{2025}$	$\frac{838}{2025}$

Nên $E(Y)=\frac{2673}{2025}=1,32; D(X)=0,40525.$

3.3.

Một kiện hàng chứa 8 sản phẩm, trong đó có 3 sản phẩm xấu và 5 sản phẩm tốt. Lấy ngẫu nhiên từ kiện hàng ra 4 sản phẩm (không hoàn lại).

a/ Hãy lập bảng phân phối xác suất cho số sản phẩm xấu có trong 4 sản phẩm lấy ra, và tính xác suất để trong đó có ít nhất 2 sản phẩm tốt.

b/ Đem 4 sản phẩm vừa lấy ra đi bán. Biết rằng bán một sản phẩm tốt được lời 50 ngàn đồng, và bán một sản phẩm xấu bị lỗ 15 ngàn đồng. Tính lợi nhuận thu được trung bình và độ lệch chuẩn của lợi nhuận khi bán 4 sản phẩm trên.

Giải

a/ Gọi X là BNN chỉ số sản phẩm xấu có trong 4 sản phẩm lấy ra.

$$\operatorname{Im} X=\{0;1;2;3\}$$

$$P(X=0)=\frac{C_3^0.C_5^4}{C_8^4}=\frac{1}{14}; P(X=1)=\frac{C_3^1.C_5^3}{C_8^4}=\frac{6}{14}; P(X=2)=\frac{C_3^2.C_5^2}{C_8^4}=\frac{6}{14};$$
$$P(X=3)=\frac{C_3^3.C_5^1}{C_8^4}=\frac{1}{14}$$

Bảng phân phối xác suất của X

X	0	1	2	3
$P(X)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{1}{14}$

Xác suất để có ít nhất 2 sản phẩm tốt: $P(X\le 2)=1-P(X=3)=\frac{13}{14}$.

b/ Gọi Y là BNN chỉ lợi nhuận thu được khi bán 4 sản phẩm. $Y=200-65X$

khi đó $E(X)=\frac{6}{14}+2.\frac{6}{14}+3.\frac{1}{14}=1,5; D(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{15}{28}$

$E(Y)=E(200-65X)=200-65E(X)=102,5$

và

$\sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}=\sqrt{D(200-65X)}=65\sqrt{D(X)}=47,5735$

3.4.

Một lô hàng có rất nhiều sản phẩm, với tỉ lệ hàng giả là 30%.

a/ Lấy ngẫu nhiên từ lô hàng ra 10 sản phẩm, tính xác suất để có nhiều nhất 2 sản phẩm giả.

b/ Người ta lấy ngẫu nhiên ra từng sản phẩm một để kiểm tra cho đến khi nào gặp sản phẩm giả thì dừng. Tìm luật phân phối xác suất và tính kỳ vọng của số sản phẩm thật đã kiểm tra

Giải

Gọi p là xác suất chỉ hàng giả trong 1 lô hàng nên $p=0,3$.

a/ Gọi X là BNN chỉ số sản phẩm giả. $X \sim B(10;0,3)$

Xác suất để có nhiều nhất 2 sản phẩm giả

$$P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$$
$$=0,7^{10}+0,3.0,7^{9}+0,3^{2}.0,7^{8}=0,0455$$

b/ Gọi Y_1 là BNN chỉ số sản phẩm thật đã kiểm tra.

Ta có $\operatorname{Im}Y_1=\{0;1;2;...\}$ Ta thấy $P(Y_1=0)=0,3;P(Y_1=1)=0,7.0,3$ theo quy nạp $P(Y_1=n)=0,7^{n}.0,3$.

Nên kỳ vọng của số sản phẩm thật đã kiểm tra:

$$E(Y_1)=\sum_{n=0}^{+\infty}n.P(Y_1=n)=0,7.0,3\sum_{n=1}^{+\infty}n.0,7^{n-1}=0,21.\frac{1}{(1-0,7)^2}=\frac{7}{3}$$

3.5.

Một lô hàng có rất nhiều sản phẩm, với tỉ lệ hàng giả là 30%.

a/ Lấy ngẫu nhiên từ lô hàng ra 10 sản phẩm, tính xác suất để có nhiều nhất 2 sản phẩm giả.

b/ Người ta lấy ngẫu nhiên ra từng sản phẩm một để kiểm tra cho đến khi nào gặp sản phẩm giả thì dừng. Tìm luật phân phối xác suất và tính kỳ vọng của số sản phẩm đã kiểm tra.

Giải

Gọi p là xác suất chỉ hàng giả trong 1 lô hàng nên $p=0,3$.

a/ Gọi X là BNN chỉ số sản phẩm giả. $X \sim B(10;0,3)$

Xác suất để có nhiều nhất 2 sản phẩm giả

$$P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$
$$= 0,7^{10} + 0,3.0,7^9 + 0,3^2.0,7^8 = 0,0455$$

b/ Gọi Y_2 là BNN chỉ số sản phẩm đã kiểm tra.

Ta có $\operatorname{Im} Y_2 = \{1;2;3;...\}$

$P(Y_2 = 1) = 0,3; P(Y_2 = 2) = 0,7.0,3$ theo quy nạp $P(Y_2 = n) = 0,7^{n-1}.0,3$.

Nên kỳ vọng của số sản phẩm đã kiểm tra:

$$E(Y_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} n.P(Y_2 = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n.0,7^{n-1}.0,3 = 0,3.\frac{1}{(1-0,7)^2} = \frac{10}{3}$$

3.6.

Một khách hàng mua xe tại một đại lý, nếu xe có sự cố kỹ thuật thì được quyền trả xe trong vòng 3 ngày sau khi mua và được lấy lại nguyên số tiền mau xe. Mỗi chiếc xe bị trả lại như thế làm thiệt hại cho đại lý 250 ngàn VNĐ. Có 50 xe được bán ra. Xác suất để một xe bị trả lại là 0,1.

a/ Tìm kỳ vong và phương sai của số xe bị trả. Tính xác xuất để có nhiều nhất 2 xe bị trả lại.

b/ Tìm kỳ vọng và độ lệch chuẩn của tổng thiệt hại mà tổng đại lý phải chịu do việc trả lại xe.

Giải

Gọi p là xác suất để một xe bị trả lại. Nên $p = 0,1$.

Gọi X là BNN chỉ số xe bị trả lại. $X \sim B(50;0,1)$

ta thấy ($n = 50 > 30; n.p = 5 \le 5; npq = 4,5 \le 5$) nên $X \sim Po(5)$

Suy ra $E(X) = np = 5; D(X) = np(1-p) = 4,5.$

Xác suất nhiều nhất 2 xe bị trả lại:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \le 2) = Po_{(0)}(5) + Po_{(1)}(5) + Po_{(2)}(5) = 0,1246$$

b/ Gọi Y là BNN chỉ tổng thiệt hại của đại lý phải chịu do việc trả lại xe.

$Y = 250X$

suy ra $E(Y) = E(250X) = 250E(X) = 1250$

và

$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{D(250X)} = 250\sqrt{D(X)} = 530,330$

3.7.

Một thí sinh tên M tham dự một kỳ thi môn XSTK . M phải làm một đề thi trắc nghiệm khách quan gồm 10 câu; mỗi câu có 4 lời **Giải** khác nhau, trong đó chỉ có một lời **Giải** đúng. M sẽ được chấm đậu nếu trả lời đúng ít nhất 6 câu.

(a) Giả sử M không học bài, mà chỉ chọn ngẫu nhiên lời **Giải** trong cả 10 câu. Tính xác suất để M thi đậu.

*(b) Giả sử M chắc chắn trả lời đúng được 2 câu; còn các câu khác, M chọn ngẫu nhiên một trong 4 lời **Giải** của mỗi câu. Tính xác suất để M thi rớt.*

Giải

Gọi p *là xác suất để M trả lời đúng một câu hỏi. Nên* $p = 0,25$.

Gọi X *là BNN chỉ số câu trả lời đúng trong 10 câu.* $X \sim B(10;0,25)$.

Đặt A*:"M thi đậu"*

$$P(A) = P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) +$$
$$+ P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = 0,0197$$

b/ M chắc chắn trả lời dung 2 câu, mà các câu được độc lập nhau và xác suất trả lời dung mỗi câu là 0,25.

Do đó, Xác suất để M rớt trong trường hợp trả lời đúng 2 câu có nghĩa là ta tính xác suất để M rớt tro

Gọi Y *là BNN chỉ số câu trả lời đúng trong 8 câu.* $Y \sim B(8;0,25)$.

Đặt R*:" M thi rớt"*

$$P(R) = P(Y \leq 3) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3)$$
$$= C_8^0 0,25^0 0,75^8 + \ldots + C_8^3 0,25^3 0,75^5 = 0,8862.$$

3.8.

Một thí sinh M tham dự một kỳ . M phải làm một đề thi trắc nghiệm khách quan gồm 10 câu; mỗi câu có 4 lời **Giải** khác nhau, trong đó chỉ có một lời **Giải** đúng. M sẽ được chấm đậu nếu trả lời đúng ít nhất 6 câu.

a/ Giả sử M không học bài, mà chỉ chọn ngẫu nhiên lời **Giải** trong cả 10 câu. Tính xác suất để M thi đậu.

b/ Hỏi M phải dự thi ít nhất mấy lần để xác suất có ít nhất một lần thi đậu không nhỏ hơn 97%?

Giải

a/ Gọi p *là xác suất để M trả lời đúng một câu hỏi. Nên* $p = 0,25$.

Gọi X *là BNN chỉ số câu trả lời đúng trong 10 câu.* $X \sim B(10;0,25)$.

Đặt A*:"M thi đậu"*

$$P(A) = P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) +$$
$$+ P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = 0,0197$$

b/ Gọi n là số lần dự thi của M. Và B:"ít nhất một lần đậu"

$$P(B) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0,0197)^n \geq 0,97 \Leftrightarrow n \geq 176,238$$

Vậy, M phải thi thử 177 lần.

3.9.

Nhà máy dệt muốn tuyển dụng người biết rành về một loại sợi. Nhà máy thử thách người dự tuyển 7 lần. Mỗi lần nhà máy đem ra 4 sợi giống nhau, trong đó chỉ có một sợi thật và yêu cầu người này chọn ra sợi thật. Nếu chọn đúng ít nhất 6 lần thì được tuyển dụng. Một người đến xin tuyển dụng nói: "Chỉ cần nhìn qua là có thể phân biệt sợi thật hay giả với xác suất 80% ".

a/ Nếu người này nói đúng khả năng của mình thì xác suất được tuyển dụng là bao nhiêu?

b/ Tính xác suất để được tuyển dụng trong trường hợp, thật ra, người này không biết gì về sợi cả.

Giải

a/ Gọi B:" năng lực nhận ra sợi thật của người dự tuyển" suy ra $P(B)=0,8$.

Gọi X là BNN chỉ số sợi thật trong 7 lần thử. $X \sim B(7;0,8)$.

Đặt A:"Người này được chọn"

$$P(A)=P(X=6)+P(X=7)=C_7^6.0,8^6.0,2+C_7^7.0,8^7=0,5767$$

b/ Gọi p là xác suất chọn được sợi thật trong một lần thử (không biết gì về sợi). $p=0,25$.

Khi đó $X \sim B(7;0,25)$

Đặt A:"Người này được chọn"

$P(A)=P(X=6)+P(X=7)=C_7^6.0,25^6.0,75+C_7^7.0,25^7=0,0014$.

3.10. Tỉ lệ thuốc hỏng ở lô A là $P_A=0,1$ ở lô B là $P_B=0,08$ và ở lô C là $P_C=0,15$. Giả sử mỗi lô có rất nhiều chai thuốc.

a/ Lấy 3 chai ở lô A. Tìm luật phân phối xác suất của số chai hỏng có trong 3 chai. Tính xác suất để có 2 chai hỏng; có ít nhất 1 chai hỏng.

b/ Phải lấy bao nhiêu chai (ở lô A) để xác suất có ít nhất một chai hỏng không nhỏ hơn 94% ?

Giải

a/ Gọi X là BNN chỉ số chai hỏng có trong 3 chai lấy ra ở lô A. $\operatorname{Im} X=\{0;1;2;3\}$

Và $X \sim B(3;0,1)$ với $P(X=k)=C_3^k 0,1^k.0,9^{3-k} \quad (k\in\{0,1,2,3\})$

Bảng phân phối xác suất của X :

X	0	1	2	3
$P(X)$	0,729	0,243	0,027	0,001

Xác suất để có 2 chai hỏng: $P(X=2)=0,027$

và xác suất có ít nhất 1 chai hỏng $P(X\ge 1)=1-P(X=0)=0,271$.

b/ Gọi n là số chai lấy ra. Ta có $X \sim B(n;0,1)$

$$1-P(X=0)\ge 0,94 \Leftrightarrow 0,06\ge 0,9^n \Leftrightarrow n\ge 26,7$$

Do đó, ít nhất lấy 27 chai.

3.11. Tỉ lệ thuốc hỏng ở lô A là $P_A = 0,1$ ở lô B là $P_B = 0,08$ và ở lô C là $P_C = 0,15$. Giả sử mỗi lô có rất nhiều chai thuốc.

a/ Lấy 3 chai ở lô A. Tìm luật phân phối xác suất của số chai hỏng có trong 3 chai. Tính xác suất để có 2 chai hỏng; có ít nhất 1 chai hỏng.

b/ Chọn ngẫu nhiên 1 trong 3 lô rồi lấy từ lô đó ra 3 chai. Tính xác suất để có ít nhất 1 chai hỏng.

Giải

a/ Gọi X là BNN chỉ số chai hỏng có trong 3 chai lấy ra ở lô A. $\operatorname{Im} X = \{0;1;2;3\}$

Và $X \sim B(3;0,1)$ với $P(X = k) = C_3^k 0,1^k.0,9^{3-k}\quad (k \in \{0,1,2,3\})$

Bảng phân phối xác suất của X :

X	0	1	2	3
$P(X)$	$0,729$	$0,243$	$0,027$	$0,001$

Xác suất để có 2 chai hỏng: $P(X = 2) = 0,027$

và xác suất có ít nhất 1 chai hỏng $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0,271$.

b/ Ta có X_i là BNN chỉ số chai hỏng có trong 3 chai lấy ra ở lô i với $i \in \{1;2;3\}$

Đặt H_i:"lô i được chọn" $i \in \{1;2;3\} \Rightarrow P(H_i) = \dfrac{1}{3}$. và

Đặt H :" ít nhất 1 chai hỏng trong 3 chai lấy ra"

$$P(H) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i).P(H \mid H_i) = \frac{1}{3}\left[P(X_1 \geq 1) + P(X_2 \geq 1) + P(X_3 \geq 1)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[3 - P(X_1 = 0) - P(X_2 = 0) + P(X_3 = 0)\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{3}\left(0,9^3 + 0,92^3 + 0,85^3\right) = 0,2927$$

3.12. Tỉ lệ thuốc hỏng ở lô A là $P_A = 0,1$ ở lô B là $P_B = 0,08$ và ở lô C là $P_C = 0,15$. Giả sử mỗi lô có rất nhiều chai thuốc. Lấy ở mỗi lô một chai. Tìm phân phối xác suất rồi tính kỳ vọng và phương sai của số chai hỏng trong 3 chai lấy ra.

Giải

Gọi Y là BNN chỉ số chai hỏng có trong 3 chai lấy ra.

$$\operatorname{Im} X = \{0;1;2;3\}$$

$P(Y=0)=P(X_1=0).P(X_2=0).P(X_3=0)=0,7038$

$P(Y=1)=P(X_1=0).P(X_2=0).P(X_3=1)+$

$+P(X_1=0).P(X_2=1).P(X_3=0)+P(X_1=1).P(X_2=0).P(X_3=0)=0,2636$

Tương tự $P(Y=2)=0,0314; P(Y=3)=0,0012$

Y	0	1	2	3
$P(Y)$	$0,7038$	$0,2636$	$0,0314$	$0,0012$

Suy ra $E(Y)=0,2636+2.0,0314+3.0,0012=0,33$

và $D(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=(0,2636+4.0,0314+9.0,0012)-0,33^2=0,2911.$

3.13. Tỉ lệ thuốc hỏng ở lô A là $P_A=0,1$ ở lô B là $P_B=0,08$ và ở lô C là $P_C=0,15$. Giả sử mỗi lô có rất nhiều chai thuốc.

a/ Lấy ở mỗi lô một chai. Tìm phân phối xác suất của số chai hỏng trong 3 chai lấy ra.

b/ Một cửa hàng nhận về 500 chai ở lô A, 300 chai ở lô B và 200 chai ở lô C rồi để lẫn lộn. Một người đến mua 1 chai về dùng. Tính xác suất để được chai tốt.

Giải

a/ Gọi Y là BNN chỉ số chai hỏng có trong 3 chai lấy ra.

$$\operatorname{Im} X = \{0;1;2;3\}$$

$P(Y=0)=P(X_1=0).P(X_2=0).P(X_3=0)=0,7038$

$P(Y=1)=P(X_1=0).P(X_2=0).P(X_3=1)+$

$+P(X_1=0).P(X_2=1).P(X_3=0)+P(X_1=1).P(X_2=0).P(X_3=0)=0,2636$

Tương tự $P(Y=2)=0,0314; P(Y=3)=0,0012$

Y	0	1	2	3
$P(Y)$	$0,7038$	$0,2636$	$0,0314$	$0,0012$

b/ Đặt A:" Chọn 1 chai hỏng"

$$P(A)=P(H_1)P(A\mid H_1)+P(H_2)P(A\mid H_2)+P(H_3)P(A\mid H_3)=$$

$$=\frac{500}{1000}.C_{500}^{1}.0,1.0,9^{499}+\frac{300}{1000}.C_{300}^{1}.0,08.0,92^{299}+\frac{200}{1000}.C_{200}^{1}.0,15.0,85^{199}=0,104$$

Do đó xác suất được 1 chai tốt:

$$P(\overline{A})=1-P(A)=0,896$$

3.14. Tỉ lệ thuốc hỏng ở lô A là $P_A = 0,1$ ở lô B là $P_B = 0,08$ và ở lô C là $P_C = 0,15$. Giả sử mỗi lô có rất nhiều chai thuốc.

a/ Chọn ngẫu nhiên 1 trong 3 lô rồi lấy từ lô đó ra 3 chai. Tính xác suất để có ít nhất 1 chai hỏng.

b/ Một cửa hàng nhận về 500 chai ở lô A, 300 chai ở lô B và 200 chai ở lô C rồi để lẫn lộn. Một người đến mua 1 chai về dùng. Tính xác suất để được chai tốt.

Giải

a/ Đặt H_i:"lô i được chọn" $i \in \{1;2;3\} \Rightarrow P(H_i) = \dfrac{1}{3}$. và

Đặt H :" ít nhất 1 chai hỏng trong 3 chai lấy ra"

$$P(H) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i).P(H \mid H_i) = \frac{1}{3}\left[P(X_1 \geq 1) + P(X_2 \geq 1) + P(X_3 \geq 1)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[3 - P(X_1 = 0) - P(X_2 = 0) + P(X_3 = 0)\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{3}\left(0,9^3 + 0,92^3 + 0,85^3\right) = 0,2927$$

Trong đó X_i là BNN chỉ số chai hỏng có trong 3 chai lấy ra ở lô i với $i \in \{1;2;3\}$

b/ Đặt A:" Chọn 1 chai hỏng"

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) + P(H_3)P(A \mid H_3)$$

$$= \frac{500}{1000}.C_{500}^{1}.0,1.0,9^{499} + \frac{300}{1000}.C_{300}^{1}.0,08.0,92^{299} + \frac{200}{1000}.C_{200}^{1}.0,15.0,85^{199}$$

$$= 0,104$$

Do đó xác suất được 1 chai tốt:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,896$$

3.15. Tỉ lệ thuốc hỏng ở lô A là $P_A = 0,1$ ở lô B là $P_B = 0,08$ và ở lô C là $P_C = 0,15$. Giả sử mỗi lô có rất nhiều chai thuốc.

a/ Lấy 3 chai ở lô A. Tìm luật phân phối xác suất của số chai hỏng có trong 3 chai. Tính xác suất để có 2 chai hỏng; có ít nhất 1 chai hỏng.

Phải lấy bao nhiêu chai (ở lô A) để xác suất có ít nhất một chai hỏng không nhỏ hơn 94% ?

b/ Một cửa hàng nhận về 500 chai ở lô A, 300 chai ở lô B và 200 chai ở lô C rồi để lẫn lộn. Một người đến mua 1 chai về dùng. Tính xác suất để được chai tốt.

Giải

a/ Gọi X là BNN chỉ số chai hỏng có trong 3 chai lấy ra ở lô A. $\operatorname{Im} X=\{0;1;2;3\}$

Và $X \sim B(3;0,1)$ với $P(X=k)=C_3^k 0,1^k.0,9^{3-k} \quad (k\in\{0,1,2,3\})$

Bảng phân phối xác suất của X :

X	0	1	2	3
$P(X)$	$0,729$	$0,243$	$0,027$	$0,001$

Xác suất để có 2 chai hỏng: $P(X=2)=0,027$

và xác suất có ít nhất 1 chai hỏng $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=0,271$.

Gọi n là số chai lấy ra. Ta có $X \sim B(n;0,1)$

$$1-P(X=0)\geq 0,94 \Leftrightarrow 0,06\geq 0,9^n \Leftrightarrow n\geq 26,7$$

Do đó, ít nhất lấy 27 chai.

b/ Đặt A:" Chọn 1 chai hỏng"

$$\begin{aligned}P(A)&=P(H_1)P(A\mid H_1)+P(H_2)P(A\mid H_2)+P(H_3)P(A\mid H_3)\\ &=\frac{500}{1000}.C_{500}^1.0,1.0,9^{499}+\frac{300}{1000}.C_{300}^1.0,08.0,92^{299}+\frac{200}{1000}.C_{200}^1.0,15.0,85^{199}\\ &=0,104\end{aligned}$$

Do đó xác suất được 1 chai tốt:

$$P(\overline{A})=1-P(A)=0,896$$

3.16. Tỉ lệ thuốc hỏng ở lô A là $P_A=0,1$ ở lô B là $P_B=0,08$ và ở lô C là $P_C=0,15$. Giả sử mỗi lô có rất nhiều chai thuốc.

a/ Lấy 3 chai ở lô A. Tìm luật phân phối xác suất của số chai hỏng có trong 3 chai. Tính xác suất để có 2 chai hỏng; có ít nhất 1 chai hỏng.

b/ Lấy ở mỗi lô một chai. Tìm phân phối xác suất của số chai hỏng trong 3 chai lấy ra.

c/ Một cửa hàng nhận về 500 chai ở lô A, 300 chai ở lô B và 200 chai ở lô C rồi để lẫn lộn. Một người đến mua 1 chai về dùng. Tính xác suất để được chai tốt.

Giải

a/ Gọi X là BNN chỉ số chai hỏng có trong 3 chai lấy ra ở lô A. $\operatorname{Im} X=\{0;1;2;3\}$

Và $X \sim B(3;0,1)$ với $P(X=k)=C_3^k 0,1^k.0,9^{3-k} \quad (k\in\{0,1,2,3\})$

Bảng phân phối xác suất của X :

X	0	1	2	3
$P(X)$	$0,729$	$0,243$	$0,027$	$0,001$

Xác suất để có 2 chai hỏng: $P(X=2)=0,027$

và xác suất có ít nhất 1 chai hỏng $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=0,271$.

b/ Gọi Y là BNN chỉ số chai hỏng có trong 3 chai lấy ra.

$$\operatorname{Im} X=\{0;1;2;3\}$$

$$P(Y=0)=P(X_1=0).P(X_2=0).P(X_3=0)=0,7038$$

$$P(Y=1)=P(X_1=0).P(X_2=0).P(X_3=1)+$$
$$+P(X_1=0).P(X_2=1).P(X_3=0)+P(X_1=1).P(X_2=0).P(X_3=0)=0,2636$$

Tương tự $P(Y=2)=0,0314; P(Y=3)=0,0012$

Y	0	1	2	3
$P(Y)$	$0,7038$	$0,2636$	$0,0314$	$0,0012$

c/ Đặt A:" Chọn 1 chai hỏng"

$$P(A)=P(H_1)P(A\mid H_1)+P(H_2)P(A\mid H_2)+P(H_3)P(A\mid H_3)$$
$$=\frac{500}{1000}.C_{500}^{1}.0,1.0,9^{499}+\frac{300}{1000}.C_{300}^{1}.0,08.0,92^{299}+\frac{200}{1000}.C_{200}^{1}.0,15.0,85^{199}$$
$$=0,104$$

Do đó xác suất được 1 chai tốt:

$$P(\overline{A})=1-P(A)=0,896$$

3.17. **G**iả sử ngày sinh của người dân trong một thành phố lớn có thể rơi ngẫu nhiên vào một ngày bất kỳ trong một năm (365) ngày. Chọn ngẫu nhiên 1095 người trong thành phố đó. Tính xác suất để :

a/ Có hai người có cùng ngày sinh đã cho.
b/ Có không quá 7 người có cùng ngày sinh đã cho.

Giải

Gọi X là BNN chỉ số người có cùng ngày sinh trong 1095 người .

$$X \sim B\left(1095;\ \frac{1}{365}\right)$$

a/ Xác suất để có 2 người có cùng ngày sinh đã cho:

$$P(X=2)=C_{1095}^{2}\left(\frac{1}{365}\right)^{2}\left(\frac{364}{365}\right)^{1093}\approx Po_2\left(1095.\frac{1}{365}\right)=Po_2(3)=0,2565$$

b/ Xác suất để có không quá 7 người có cùng ngày sinh đã cho:

$$P(X\le 7)=Po_0(3)+Po_1(3)+Po_2(3)+Po_3(3)+Po_4(3)+Po_5(3)$$
$$+Po_6(3)+Po_7(3)=0,988$$

3.18. Một trạm bưu điện chuyển điện trong khoảng thời gian 10^{-5} giây. Trong quá trình tránh điện có các tiếng ồn ngẫu nhiên. Số tín hiệu ồn ngẫu nhiên trong 1 giây là 10^4 . nếu trong thời gian truyền tín hiệu có dù cjir một tín hiệu ồn ngẫu nhiên thì trạm sẽ ngừng làm việc. tính xác suất để cho việc truyền tính hiệu bị gián đoạn. biết rằng số tín hiệu ồn ngẫu nhiên rơi vào trong khoảng thời gian truyền tín hiệu là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối poison.

Giải

Gọi X là BNN chỉ số các tín hiệu ồn trong khoảng thời gian 10^{-5} truyền tin.

$$X \sim Po\left(10^4.10^{-5}\right)\Leftrightarrow X\sim Po(0,1)$$

Trong đó,

số tín hiệu ồn trong khoảng thời gian 10^{-5} giây truyền tin là $10^4.10^{-5}=0,1$.

Do đó, xác suất việc truyền tin bị gián đoạn

$$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-e^{-0,1}\frac{(0,1)^0}{0!}=0,0952$$

3.19. Số lỗi trên 1 mét vuông vải là một biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối poison. Kiểm tra lô vải, người ta thấy 98% có lỗi. Vậy trung bình mỗi mét vuông vải có bao nhiêu lỗi?

Giải

Gọi X là BNN chỉ số lỗi trên 1mét vuông vải

$$X \sim Po(\lambda)$$

Lô vải thấy có 98% lỗi

$$P(X\ge 1)=0,98\Leftrightarrow 1-P(X=0)=0,98\Leftrightarrow e^{-\lambda}=0,02\Leftrightarrow \lambda\approx 3,9 \qquad (1,5đ)$$

Vậy, trung bình mỗi mét vuông vải có 3,9 lỗi.

3.20. Một công nhân quản lý 12 máy dệt. Các máy dệt hoạt động độc lập nhau, và xác suất để mỗi máy, trong ca làm việc, cần sự chăm sóc của công nhân (viết tắt là CCN) là 0,3.

a/ Tính xác suất để, trong ca làm việc, có

a_1/ 4 máy CCN

a_2/ từ 3 đến 7 máy CCN

b/ Trung bình, trong ca làm việc, có bao nhiêu máy CCN?

c/ Trong ca làm việc, tìm số máy CCN nhiều khả năng nhất; tính xác suất tương ứng.

Giải.

a/ Gọi X là BNN chỉ số máy CCN trong ca làm việc thì $X \sim B(12;0,3)$

$$\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{C}_{12}^{k}(0,3)^{k}(0,7)^{12-k},\ k \in \{0,1,2,\ldots,12\},\quad k \in \{0,1,2,\ldots,12\}$$

a_1/ Xác suất phải tính:

$$\mathrm{P}(X = 4) = \mathrm{C}_{12}^{4}(0,3)^{4}(0,7)^{8} = 0,2311$$

b_2/ Xác suất phải tính:

$$\mathrm{P}(3 \le X \le 7) = \sum_{k=3}^{7}\mathrm{P}(X = k)$$

$$= 0,2397 + 0,2311 + 0,1585 + 0,0792 + 0,0291$$

$$= 0,7376.$$

b/ Số máy CCN trung bình:

$$E(X) = 12 \times 0,3 = 3,6$$

c/ Số máy CCN nhiều khả năng nhất:

$$Mod(X) = [13 \times 0,3] = 3.$$

Xác suất tương ứng: $P(X = 3) = 0,2397$.

3.21. Người ta muốn lấy một số hạt lúa từ một kho lúa có tỉ lệ hạt lép là 0,2 để kiểm tra. Biết rằng kho lúa có rất nhiều hạt.

a/ Phải lấy ít nhất bao nhiêu hạt lúa để xác suất có ít nhất một hạt lép không bé hơn 95% ?

b/ Lấy ngẫu nhiên 100 hạt lúa, tính xác suất để trong đó có 25 hạt lép; có từ 10 đến 40 hạt lép.

Giải.

a/ Gọi n là số hạt lúa cần lấy. Vì số hạt lúa trong kho rất lớn, nên các lần lấy xem như độc lập. Xác suất để trong n hạt lúa lấy ra, không có hạt lép nào là $(0,8)^n$.

Theo giả thiết:

$$1-(0,8)^n \geq 0,95 \Leftrightarrow (0,8)^n \leq 0,05 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,8)}$$

Vậy, phải lấy ít nhất 14 hạt lúa.

b/ Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số hạt lép trong mẫu thì $X \sim B(n,p)$, với $n=100$ và $p=0,2$. Vì $n>30; n.p=20>5$ và $n.(1-p)=80>5$ nên chúng ta có thể áp dụng các công thức gần đúng DeMoivre – Laplace.

(i) Xác suất để có 25 hạt lép:

$$\mathrm{P}(X=25) = \mathrm{C}_{100}^{25}(0,2)^{25}(0,8)^{75} = 0,04388$$

(ii) Xác suất để có từ 10 đến 40 hạt lép:

$$P(10 \leq X \leq 40) \approx \Phi\left(\frac{40-100\times 0,2}{\sqrt{100\times 0,2\times 0,8}}\right) - \Phi\left(\frac{10-100\times 0,2}{\sqrt{100\times 0,2\times 0,8}}\right)$$

$$= \Phi(5) - \Phi(-2,5) = 1-(1-\Phi(2,5)) = \Phi(2,5)$$

$$\Rightarrow P(10 \leq X \leq 40) \approx 0,9938$$

3.22. Cần xét nghiệm máu cho 5000 người để tìm dấu hiệu một loại bệnh B tại một địa phương có tỉ lệ người mắc bệnh B theo thống kê là 10%. Có 2 phương pháp:

a/ Xét nghiệm từng người một.

b/ Mỗi lần lấy máu một nhóm 10 người trộn lẫn vào nhau rồi xét nghiệm. Nếu kết quả âm tính thì thông qua, nếu dương tính thì phải làm thêm 10 xét nghiệm để xét nghiệm lại từng người một trong nhóm.

Hỏi phương pháp nào có lợi hơn, biết rằng mỗi xét nghiệm đều tốn kém như nhau và khả năng mắc bệnh của mỗi người độc lập nhau?

Giải.

a/ Nếu dùng phương pháp (1) thì phải thực hiện 5000 xét nghiệm.

b/ Bây giờ chúng ta xem phương pháp (2):

Đặt X chỉ số nhóm có kết quả dương tính thì $X \sim B(500;\ 1-(0,9)^{10})$

Đặt Y chỉ số xét nghiệm theo phương pháp (2) thì $Y = 500+10X$

Số xét nghiệm trung bình theo phương pháp (2) là:

$$E(Y) = 500+10E(X) = 500+5000(1-(0,9)^{10}) \approx 3757.$$

Vậy, áp dụng theo phương pháp (2) có lợi hơn.

3.23. Một cơ sở sản xuất, trung bình trong một tuần, nhận được 4 đơn đặt hàng. Biết rằng số đơn đặt hàng X mà cơ sở nhận được trong một tuần là một BNN có phân phối Poisson. Tính xác suất để cơ sở đó

a/ Nhận được hơn 5 đơn đặt hàng trong một tuần

b/ Nhận được 6 đơn đặt hàng trong hai tuần liên tiếp

Giải.

a/ $X \sim Po(4)$. Xác suất phải tính:

$$P(X>5)=1-P(X\le 5)$$

$$= 1-\sum_{k=0}^{5}\frac{4^k}{k!}e^{-4}=1-0,7851=0,2149$$

b/ Gọi Y là BNN chỉ số đơn đặt hàng của cơ sở trong hai tuần liên tiếp thì $Y \sim Po(8)$. Xác suất phải tính:

$$P(Y=6)=\frac{8^6}{6!}e^{-8}=0,1221$$

3.24. Một xe tải vận chuyển 1000 chai rượu vào kho. Xác suất để mỗi chai bị vỡ trong khi vận chuyển là 0,0035. Tính xác suất để sau khi vận chuyển, có 6 chai rượu bị vỡ; có từ 2 đến 8 chai rượu bị vỡ. (giả sử rằng sự kiện các chai rượu bị vỡ là độc lập nhau, do chất lượng riêng của mỗi chai)

Giải.

Gọi X là BNN chỉ số chai rượu bị vỡ sau khi vận chuyển, thì

$$X \sim B(1000;0,0035).$$

Xác suất để có 6 chai rượu bị vỡ:

$$P(X=6)=C_{1000}^{6}(0,0035)^6(0,9965)^{994}=0,07709$$

Tính gần đúng:

Vì $n=1000$ và $n.p=3,5<5$, nên có thể xem: $X \sim Po(3,5)$. Do đó:

$$P(X=6)\approx\frac{(3,5)^6}{6!}e^{-3,5}=0,0771$$

Xác suất để có từ 2 đến 8 chai rượu bị vỡ

$$P(2\le X\le 8)\approx\sum_{k=2}^{8}\frac{(3,5)^k}{k!}e^{-3,5}=0,8543$$

3.25. Thời gian để sản xuất một sản phẩm loại A là một BNN tuân theo luật phân phối chuẩn với các tham số $\mu = 10$ và $\sigma = 1$ (đơn vị là phút)

a/ Tính xác suất để một sản phẩm loại A nào đó được sản xuất trong khoảng thời gian từ 9 phút đến 12 phút.

b/ Tính thời gian cần thiết để sản xuất một sản phẩm loại A bất kỳ.

Giải.

Gọi X là BNN chỉ thời gian để sản xuất một sản phẩm loại A, $X \sim N(10;1)$.

a/ Xác suất phải tính:

$$P(9 \le X \le 12) = \Phi\left(\frac{12-10}{1}\right) - \Phi\left(\frac{9-10}{1}\right)$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) - 1$$

$$= 0{,}9772 + 0{,}8413 - 1 = 0{,}88185.$$

b/ Theo qui tắc 3σ, hầu như chắc chắn X lấy giá trị trong khoảng:

$$[10 - 3\times 1;\ 10 + 3\times 1] = [7;\ 13]$$

Vậy, thời gian cần thiết để sản xuất một sản phẩm loại A bất kỳ là từ 7 phút đến 13 phút (hầu như chắc chắn).

3.26. Cho biến ngẫu nhiên X tuân theo luật phân phối $N(\mu, \sigma^2)$. Biết rằng X lấy giá trị nhỏ hơn 60 với xác suất 0,1003 và lấy giá trị lớn hơn 90 với xác suất 0,0516, hãy tính μ và σ.

Giải.

Theo giả thiết,

$$\begin{cases} P(X < 60) = 0{,}1003 \\ P(X > 90) = 0{,}0516 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi\left(\dfrac{60-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}1003 \\ 1 - \Phi\left(\dfrac{90-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}0516 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Phi\left(\dfrac{\mu-60}{\sigma}\right) = 0{,}8997 \\ \Phi\left(\dfrac{90-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}9484 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mu-60}{\sigma} = 1{,}28 \\ \dfrac{90-\mu}{\sigma} = 1{,}64 \end{cases}$$

Vậy, $\mu = 73{,}15$ và $\sigma = 10{,}27$.

3.27. Đường kính của một loại chi tiết do một máy sản xuất có phân phối chuẩn, kỳ vọng 20mm, phương sai $(0,2)^2$ mm. Tính xác suất lấy ngẫu nhiên một chi tiết

a/ Có đường kính trong khoảng 19,9mm đến 20,3mm.

b/ Có đường kính sai khác với kỳ vọng không quá 0,3mm.

Giải

Gọi X là BNN chỉ đường kính của một chi tiết, ta có

$$X \sim N\left(20;(0,2)^2\right)$$

a/ Có đường kính trong khoảng 19,9mm đến 20,3mm

$$P(19,9 < X < 20,3) = \Phi\left(\frac{20,3-20}{0,2}\right) - \Phi\left(\frac{19,9-20}{0,2}\right)$$

$$= \Phi(1,5) + \Phi(0,5) = 0,6247$$

b/ Có đường kính sai khác với kỳ vọng không quá 0,3mm

$$P\left(|X-20| < 0,3\right) = 2\Phi\left(\frac{0,3}{0,2}\right) - 1 = 0,8664$$

CHƯƠNG 7: LÝ THUYẾT MẪU

4. 1.

Để nghiên cứu về số con trong một gia đình (SCTMGĐ) ở địa phương A, người ta điều tra số con của mỗi gia đình trong 30 gia đình được chọn ngẫu nhiên ở địa phương A. Kết quả được ghi lại như sau:

0	2	5	3	7	4	3	3	1	4
2	4	3	1	6	1	0	2	4	1
1	2	3	2	0	5	5	1	3	2

a) Hãy lập bảng phân phối tần số và tần suất tích luỹ cho dữ liệu trên mẫu.

b) Trên mẫu vừa nêu, tính SCTMGĐ trung bình độ lệch chuẩn của SCTMGĐ.

Giải:

a) Gọi X là BNN chỉ số con trong một gia đình. Bảng phân bố tần số, tần suất và tần suất tích lũy cho X từ dữ liệu trên.

X	0	1	2	3	4	5	6	7
Tần số n_i	3	6	6	6	4	3	1	1
Tần suất f_i	0,100	0,200	0,200	0,200	0,133	0,100	0,033	0,033
Tần suất tích lũy	0,100	0,300	0,500	0,700	0,833	0,933	0,967	1,000

b) Giá trị trung bình mẫu là:
$\overline{x} = 2,67$

Giá trị phương sai mẫu: $s^2 = 3,2644$

Độ lệch chuẩn: $s = 1,81$.

4. 2.

Để nghiên cứu về thâm niên công tác (tính tròn năm) của nhân viên ở một công ty lớn, người ta khảo sát thâm niên của 100 nhân viên được chọn ngẫu nhiên trong công ty. Kết quả như sau:

Thâm niên	5 - 7	8 - 10	11 - 13	14 - 16	17 -19
Số nhân viên	8	21	36	25	10

a) Hãy tính giá trị trung bình mẫu và giá trị độ lệch chuẩn mẫu.

b) Giả sử thâm niên công tác của nhân viên của công ty trên là BNN X có kỳ vọng là 12 năm và độ lệch chuẩn là 3 năm. Tính xác suất để trung bình mẫu nhận giá trị lớn hơn 12,5 năm.

Giải

Gọi X là BNN chỉ thâm niên công tác của nhân viên của công ty trên.

a) Từ dữ liệu ta tính được:

- Giá trị trung bình mẫu: $\overline{x} = 12.24$

- Giá trị độ lệch chuẩn mẫu: $s = 3,27$.

b) Theo định lý giới hạn trung tâm ta có:

$$U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

Do đó xác suất để trung bình mẫu nhận giá trị lớn hơn 12,5 là:

$$P(\overline{X} > 12,5) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} > \frac{12,5 - \mu}{\sigma}\sqrt{n}\right) = P(U > 1,67) = 1 - P(U \le 1,67) = 0,0478$$

4. 3.

Để nghiên cứu chiều cao của thanh niên lứa tuổi từ 18 đến 22 tuổi ở thành phố LX, người ta đo trên một mẫu gồm một số thanh niên được chọn ngẫu nhiên ở thành phố LX. Kết quả như sau (đơn vị cm):

Chiều cao (cm)	Số thanh niên
[154, 158)	10
[158, 162)	16
[162, 166)	29
[166, 170)	37
[170, 174)	15
[174, 178)	10
[178, 182)	4

a) Tính giá trị trung bình mẫu và giá trị độ lệch chuẩn mẫu.

b) Theo tài liệu khảo sát trước đó chiều cao của những thanh niên lứa tuổi trên tuân theo luật phân phối chuẩn với kỳ vọng là $\mu = 166$ cm và độ lệch chuẩn là $\sigma = 7$ cm. Hãy tính xác suất để trung bình mẫu có giá trị lớn 167 cm.

Giải:

Gọi X là BNN chỉ chiều cao của thanh niên lứa tuổi từ 18 đến 22 tuổi ở thành phố LX.

a) Từ dữ liệu ta tính được:

- Giá trị trung bình mẫu: $\overline{x} = 166,55$ cm
- Giá trị độ lệch chuẩn mẫu: $s = 5,865$ cm.

b) Theo định lý giới hạn trung tâm ta có:

$$U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

Do đó xác suất để trung bình mẫu nhận giá trị lớn hơn 12,5 là:

$$P(\overline{X} > 167) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} > \frac{167 - \mu}{\sigma}\sqrt{n}\right) = P(U > 1,57) = 1 - P(U \le 1,57) = 0,058$$

.

4. 4.

Giả sử độ tăng theo phần trăm lương hàng năm của mỗi công nhân viên chức trong công ty Alpha tuân theo luật phân phối chuẩn với trung bình 12,2% và độ lệch chuẩn 3,6%. Một mẫu ngẫu nhiên gồm 9 phần tử được chọn từ tổng thể ấy. Tìm xác suất để trung bình mẫu nhỏ hơn 10%.

Giải:

Gọi X là BNN chỉ độ tăng lương theo phần trăm. Ta có $X \sim N\left(12,2;\, 3,6^2\right)$ và

$$U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

$$P\left(\overline{X} < 10\right) = P\left(\frac{\overline{X} - 12,2}{3,6}\sqrt{9} < \frac{10 - 12,2}{3,6}\sqrt{9}\right) = \Phi\left(\frac{10 - 12,2}{3,6}\sqrt{9}\right) = 0,0334\,.$$

4. 5.

Để nghiên cứu tuổi thọ của một loại bóng đèn, người ta thắp thử 100 bóng đèn trước cải tiến kỹ thuật. Sau khi cải tiến kỹ thuật, người ta thắp lại 100 bóng. Số liệu có được cho trong bảng sau:

Mẫu 1: Trước cải tiến	
Tuổi thọ (giờ)	Số bóng đèn
< 1030	2
[1030, 1050)	3
[1050, 1070)	8
[1070, 1090)	13
[1090, 1110)	25
[1110, 1130)	20
[1130, 1150)	12
[1150, 1170)	10
[1170, 1200]	5
> 1200	2

Mẫu 2: Sau cải tiến	
Tuổi thọ (giờ)	Số bóng đèn
1150	10
1160	15
1170	20
1180	30
1190	15
1200	10

a) Tính giá trị đại diện cho mỗi lớp ở mẫu 1 và lập bảng tần số, tần suất cho mẫu 1.

b) Hãy so sánh giá trị trung bình và giá trị độ lệch chuẩn của hai mẫu trên.

Giải:

a) (1 đ)

Trước cải tiến			
Tuổi thọ (giờ)	Giá trị đại diện	Tần số	Tần suất
< 1030	1020	2	0,02
[1030, 1050)	1040	3	0,03
[1050, 1070)	1060	8	0,08
[1070, 1090)	1080	13	0,13
[1090, 1110)	1100	25	0,25
[1110, 1130)	1120	20	0,20
[1130, 1150)	1140	12	0,12
[1150, 1170)	1160	10	0,10
[1170, 1200]	1185	5	0,05
> 1200	1215	2	0,02
Tổng số		**100**	**1**

b) Gọi X và Y lần lượt là các BNN chỉ tuổi thọ của bóng đèn trước và sau cải tiến kỹ thuật. Ta có $\overline{x} = 1112{,}15$; $\overline{y} = 1175{,}5$; $s_X = 39{,}26$ và $s_Y = 14{,}38$

Như vậy, trung bình mẫu 1 bé hơn trung bình mẫu 2 và độ lệch chuẩn mẫu 1 lớn hơn độ lệch chuẩn mẫu 2.

4. 6.

Theo Hội sinh viên ở thành phố LX thì có 60% sinh viên hiện đang theo học đại học muốn tìm việc làm ngoài giờ học. Một mẫu gồm 205 sinh viên được chọn ngẫu nhiên. Tìm xác suất để trong số đó có hơn 135 sinh viên muốn tìm việc làm ngoài giờ học.

Giải:

Gọi p là tỉ lệ sinh viên hiện đang theo học đại học muốn tìm việc làm ngoài giờ học, $p = 0{,}6$.

Tỉ lệ sinh viên muốn tìm việc làm ngoài giờ trên mẫu là $\overline{P} = \dfrac{m}{205}$.

Xác suất có hơn 135 sinh viên muốn tìm việc làm ngoài giờ:

$$P(m>135)=P\left(\frac{m}{205}>\frac{135}{205}\right)=P\left(\overline{P}>\frac{27}{41}\right)$$

Vì $\dfrac{\overline{P}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

Do đó

$$P(m>135)=P\left(\frac{\overline{P}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}>\frac{\frac{27}{41}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}\right)$$

$$=1-\Phi\left(\frac{\frac{27}{41}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}\right)=1-\Phi\left(\frac{\frac{27}{41}-0,6}{\sqrt{0,6(1-0,6)}}\sqrt{205}\right)$$

$$=1-\Phi(1,71)=1-0,9564=0,0436$$

4. 7.

Một mẫu kích thước *n* được thành lập từ tổng thể tuân theo phân phối chuẩn với kỳ vọng μ và độ lệch chuẩn là 8. Hãy xác định *n* sao cho, với xác suất bằng 0,9524, trung bình mẫu nằm trong khoảng từ μ - 4 đến μ + 4.

Giải:

Ta có

$$P(\mu-4\le\overline{X}\le\mu+4)=0,9524$$

$$\Leftrightarrow P(|\overline{X}-\mu|\le 4)=0,9524$$ (1 đ)

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{|\overline{X}-\mu|}{\sigma}\sqrt{n}\le\frac{4\sqrt{n}}{\sigma}\right)=0,9524$$

$$\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)-1=0,9524$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0,9762$$ (1 đ)

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{2}=1,98$$

$$\Rightarrow n=16$$

4. 8.

Số liệu thống kê cho biết có 40% các hộ gia đình ở thành phố A có thu nhập hàng năm nằm trong khảng từ 1200 USD đến 2000 USD. Vậy, phải điều tra một mẫu gồm bao nhiêu hộ gia đình để, với xác suất 0,95, tỉ lệ các gia đình có thu nhập trong khoảng nói trên, sai lệch so với tỉ lệ chung của thành phố không quá 4%?

Giải:

Ta có tỉ lệ hộ gia đình ở thành phố A có thu nhập hàng năm nằm trong khảng từ 1200 USD đến 2000 USD là $p = 0,4$. Gọi $\overline{P}$ là tỉ lệ mẫu:

$$P\left(\left|\overline{P} - 0,4\right| < 0,04\right) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow P\left(\left|\frac{\overline{P} - 0,4}{\sqrt{0,4(1-0,4)}}\sqrt{n}\right| < \frac{0,04}{\sqrt{0,4(1-0,4)}}\sqrt{n}\right) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{0,04}{\sqrt{0,4(1-0,4)}}\sqrt{n}\right) - 1 = 0,95$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{0,04}{\sqrt{0,4(1-0,4)}}\sqrt{n}\right) = 0,975$$

$$\Leftrightarrow \frac{0,04}{\sqrt{0,4(1-0,4)}}\sqrt{n} = 1,96$$

$$\Leftrightarrow n \approx 576,24 \Rightarrow n = 577$$

4. 9.

Một lô hàng đạt tiêu chuẩn xuất khẩu nếu tỉ lệ phế phẩm không quá 5%. Nếu kiểm tra ngẫu nhiên 100 sản phẩm thì với tỉ lệ phế phẩm thực tế tối đa là bao nhiêu, chúng ta có thể cho phép lô hàng được xuất khẩu mà khả năng không mắc sai lầm là 95%?

Giải:

Gọi p_0 là tỷ lệ phế phẩm thực tế tối đa.

Lô hàng được phép xuất khẩu mà không mắc sai lầm khi $\overline{P} < p_0$. Theo đề bài:

$$P\left(\overline{P} < p_0\right) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\overline{P} - 0,05}{\sqrt{0,05(1-0,05)}}\sqrt{100} < \frac{p_0 - 0,05}{\sqrt{0,05(1-0,05)}}\sqrt{100}\right) = 0.95$$

Vì $\dfrac{\overline{P} - 0,05}{\sqrt{0,05(1-0,05)}}\sqrt{100} \sim N(0,1)$ nên đẳng thức trên tương đương:

$$\Phi\left(\frac{p_0-0,05}{\sqrt{0,05(1-0,05)}}\sqrt{100}\right)=0,95$$

$$\Rightarrow \frac{p_0-0,05}{\sqrt{0,05(1-0,05)}}\sqrt{100}=u_{0,95}=1,65$$

$$\Leftrightarrow p_0=\frac{1,65\sqrt{0,05(1-0,05)}}{\sqrt{100}}+0,05 \Leftrightarrow p_0=0,086$$

4. 10.

Chiều cao (đơn vị cm) của một thanh niên ở thành phố lớn A là BNN tuân theo luật phân phối N(165; 100). Người ta đo ngẫu nhiên chiều cao của 100 thanh niên ở thành phố A (TP.A).

c) Xác suất để chiều cao trung bình của 100 thanh niên đó lệch so với chiều cao trung bình của thanh niên TP.A không vượt quá 2cm là bao nhiêu?

d) Nếu muốn chều cao trung bình đo được sai lệch so với chiều cao trung bình của tổng thể không vượt quá 1cm với xác suất không dưới 99% thì chúng ta phải tiến hành đo chiều cao của bao nhiêu thanh niên?

Giải:

a) Gọi X là BNN chỉ chiều cao của mỗi thanh niên ở thành phố A. Ta có $X \sim N(165;100)$.

Do đó $\overline{X} \sim N(165;1)$ và $\overline{X}-165 \sim N(0,1)$

$$\Rightarrow P\left(\left|\overline{X}-165\right|<2\right)=2\Phi(2)-1=0,9545$$

b) Gọi n là số thanh niên cần đo chiều cao. Khi đó, $\dfrac{\overline{X}-165}{10}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

Theo đề bài ta có: $P\left(\left|\overline{X}-165\right|<1\right)\geq 0,99$

$$\Leftrightarrow P\left(\left|\frac{\overline{X}-165}{10}\sqrt{n}\right|<\frac{\sqrt{n}}{10}\right)\geq 0,99$$

$$\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{10}\right)-1\geq 0,99$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{10}\right)\geq \frac{1,99}{2}=0,995$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{10} \geq \Phi^{-1}(0,995) = 2,5758$$

$$\Rightarrow n \geq 663,47$$

CHƯƠNG 5: ƯỚC LƯỢNG THAM SỐ

5. 1.

a) Hãy thiết lập công thức tìm khoảng tin cậy γ cho trung bình tổng thể trong trường hợp tổng thể có phân phối chuẩn đã biết độ lệch chuẩn.

b) Tìm khoảng tin cậy 95% cho trung bình tổng thể X biết $X \sim (\mu, \sigma^2)$ với $\sigma = 3$ và mẫu đặc trưng X có kích thước $n = 25$ trung bình mẫu $\overline{x} = 10$.

Giải

a) Với độ tin cậy γ cho trước ta tìm khoảng $(\overline{x} - e; \overline{x} + e)$ sao cho $P(\overline{X} - e < \mu < \overline{X} + e) = \gamma$

$$\Leftrightarrow P(|\overline{X} - \mu| < e) = \gamma$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{|X - \mu|}{\sigma}\sqrt{n} < e\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \gamma$$

$$\Leftrightarrow P\left(|U| < e\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \gamma$$

Vì $U \sim N(0,1)$ nên ta có $2\Phi(a) - 1 = \gamma,\ a = e\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}$

$$\Leftrightarrow \Phi(a) = \frac{1+\gamma}{2} \Rightarrow a = u_{\frac{1+\gamma}{2}}$$

Suy ra: $u_{\frac{1+\gamma}{2}} = e\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma} \Rightarrow e = u_{\frac{1+\gamma}{2}}.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Vậy, khoảng tin cậy γ cho μ là $(\overline{x} - e; \overline{x} + e)$ với $e = u_{\frac{1+\gamma}{2}}.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

b) Áp dụng công thức trên, khoảng tin cậy 95% cho trung bình của X là: $(\overline{x} - e; \overline{x} + e)$

$$e = u_{\frac{1+\gamma}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = u_{\frac{1+0,95}{2}}.\frac{3}{\sqrt{25}} = u_{0,975}.\frac{3}{5} = 1,176$$

Vậy khoảng tin cậy cần tìm là: $(8,824;11,176)$.

5. 2.

a) Giả sử rằng tuổi thọ của một loại bóng đèn hình TV có độ lệch chuẩn bằng 500, nhưng chưa biết trung bình. Ngoài ra, tuổi thọ của loại bóng đèn đó tuân theo luật phân phối chuẩn. Khảo sát trên một mẫu ngẫu nhiên gồm 15 bóng loại trên, người ta tính được tuổi thọ trung bình là 8900 giờ. Hãy tìm khoảng tin cậy 95% cho tuổi thọ trung bình của loại bóng đèn hình nói trên.

a) Một tổng thể *X* có phân phối chuẩn. Quan sát một mẫu ngẫu nhiên kích thước 25 người ta tính được trung bình là 15 và độ lệch chuẩn là 3. Hãy ước lượng kỳ vọng của X bằng khoảng tin cậy 95%.

Giải

a) Khoảng tin cậy 95% cho tuổi thọ trung bình của bóng đèn hình:

$(\overline{x}-e;\overline{x}+e)$

Với $\overline{x}=8900$, và $e=u_{\frac{1+\gamma}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=u_{0,975}.\frac{500}{\sqrt{15}}=1,96.\frac{500}{\sqrt{15}}=253$

Do đó $(8647;9153)$

b) Khoảng tin cậy cho kỳ vọng của X là: $(\overline{x}-e;\overline{x}+e)$ với $\overline{x}=15$

Vì X có phân phối chuẩn chưa biết độ lệch chuẩn nên:

$$e=t^{(24)}_{\frac{1+\gamma}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n}}=t^{(24)}_{\frac{1+0,95}{2}}.\frac{3}{\sqrt{25}}=2,0639.\frac{3}{5}=1,24$$

Vậy, khoảng tin cậy cần tìm là $(13,76;16,24)$

5. 3.

Giả sử rằng tuổi thọ của một loại bóng đèn hình TV có độ lệch chuẩn bằng 500, nhưng chưa biết trung bình. Tuy nhiên, trung bình mẫu bằng 8900 được tính trên mẫu cỡ $n=35$.

a) Hãy tìm khoảng tin cậy 95% cho tuổi thọ trung bình của loại bóng đèn hình đang khảo sát.

b) Giả sử rằng tuổi thọ của một loại bóng đèn hình TV trên có phân phối chuẩn. Hãy tìm khoảng tin cậy 90% cho trung bình tổng thể.

Giải

a) Khoảng tin cậy 95% cho tuổi thọ trung bình của bóng đèn hình:

$(\overline{x}-e;\overline{x}+e)$, với $\overline{x}=8900$ và

$$e=u_{\frac{1+\gamma}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=u_{0,975}.\frac{500}{\sqrt{35}}=1,96.\frac{500}{\sqrt{35}}=165,65$$

Vậy, khoảng tin cậy cần tìm là: (8734; 9066) (giờ).

b) Khoảng tin cậy 90% cho tuổi thọ trung bình của bóng đèn hình:

$\left(\overline{x}-e;\overline{x}+e\right)$, với $\overline{x}=8900$.

Do X có phân phối chuẩn chưa biết độ lệch chuẩn nên:

$$e=t^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n}}=t^{(34)}_{\frac{1+0,9}{2}}.\frac{500}{\sqrt{35}}=1,6909.\frac{500}{\sqrt{35}}=142,9$$

Vậy, khoảng tin cậy cần tìm: (8757; 9043) (giờ).

5. 4.

a) Kiểm tra tuổi thọ của một loại bóng đèn hình TV trên một mẫu ngẫu nhiên gồm 100 bóng đèn tính được giá trị trung bình mẫu là 8900 giờ và độ lệch chuẩn mẫu bằng 500 giờ. Hãy tìm khoảng tin cậy 95% cho trung bình tổng thể.

b) Độ tin cậy sẽ là bao nhiêu nếu cùng mẫu trên sai số ước lượng bằng 130 giờ.

Giải

a) Khoảng tin cậy 95% cho tuổi thọ trung bình của bóng đèn hình:

$\left(\overline{x}-e;\overline{x}+e\right)$, với $\overline{x}=8900$.

$$e=u_{\frac{1+\gamma}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n}}=u_{\frac{1+0,95}{2}}.\frac{500}{\sqrt{100}}=1,96.\frac{500}{\sqrt{100}}=98$$

Khoảng tin cậy cần tìm: (8802; 8998) (giờ).

b) Giả sử γ là độ tin cậy, khi sai số ước lượng

$$e=u_{\frac{1+\gamma}{2}}.\frac{500}{\sqrt{100}}=130\Rightarrow u_{\frac{1+\gamma}{2}}=130.\frac{\sqrt{100}}{500}=2,6$$

Tra bảng 4 ta tìm được $\frac{1+\gamma}{2}=0,9953\Leftrightarrow\gamma=0,9906$.

$\left(\frac{1+\gamma}{2}=P\left(X<u_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)=P\left(X<2,6\right)\right.$ với $X\sim N\left(0,1\right)$)

Vậy, độ tin cậy $\gamma=99,06\%$.

5. 5.

Khối lượng X của một sản phẩm do một nhà máy sản xuất tuân theo luật phân phối chuẩn. Lấy một mẫu ngẫu nhiên (không hoàn lại) gồm 10% của một lô hàng gồm 300 sản phẩm của nhà máy đó, người ta tính được $\overline{x}$ = 148,50 gam và s = 35,75 gam.

a) Hãy xây dựng công thức tìm khoảng tin cậy γ cho trung bình tổng thể hữu hạn trong trường hợp lấy mẫu không hoàn lại.

b) Tìm khoảng tin cậy 95% cho khối lượng trung bình của mỗi sản phẩm trong lô hàng nói trên.

Giải

a) Gọi N là kích thước tổng thể, n là kích thước mẫu.

Vì lấy mẫu có hoàn lại thì $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

Theo định lý giới hạn trung tâm, $U = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_X}\sqrt{n}\sqrt{\frac{N-1}{N-n}} \sim N(0,1)$

Và $T = \frac{U}{\sqrt{Y/\sqrt{n-1}}} = \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n}\sqrt{\frac{N-1}{N-n}} \sim t(n-1)$

Ở đây $Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(n-1)$

Do đó với độ tin cậy γ cho trước ta tìm e sao cho $P\left(\left|\overline{X}-\mu\right| < e\right) = \gamma$

Từ đó $P\left(\left|T\right| < a\right) = \gamma$ với $a = \frac{e}{s}\sqrt{n}\sqrt{\frac{N-1}{N-n}}$

Suy ra $P(T < a) = \frac{1+\gamma}{2}$ với T là BNN có phân phối student $n-1$ bậc tự do.

Suy ra $a = t^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}$

Vậy ta tính được $e = t^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

b) Theo đề bài ta có $n = 30;\ s = 35,75;\ N = 300;\ \overline{x} = 148,5;\ \gamma = 0,95$

Ta tính được $e = t^{(29)}_{\frac{1+0,95}{2}}.\frac{35,75}{\sqrt{30}}\sqrt{\frac{270}{299}} = 12,685$

Khoảng tin cậy 95% cho khối lượng trung bình là $(135,815;161,185)$

5. 6.

Một lô bút bi của xí nghiệp A sản xuất ra gồm 1000 hộp, mỗi hộp 10 cây. Kiểm tra ngẫu nhiên 50 hộp, thấy có 45 cây bút bị hỏng.

a) Tìm khoảng tin cậy 95% cho tỉ lệ bút bị hỏng và số bút bị hỏng của lô hàng.

b) Với mẫu trên, nếu muốn ước lượng tỉ lệ bút hỏng với độ chính xác 1,5% thì độ tin cậy đạt được là bao nhiêu?

Giải

a) Gọi p là tỉ lệ bút hỏng của lô bút.

Tỷ lệ bút hỏng trên mẫu $\overline{p}=\dfrac{45}{500}=0,09$

Khoảng tin cậy 95% cho tỷ lệ bút hỏng của mẫu:

$$\left(\overline{p}-e;\overline{p}+e\right) \text{ với } e=u_{\frac{1+0,95}{2}}\sqrt{\frac{\overline{p}\left(1-\overline{p}\right)}{n}}=1,96.\sqrt{\frac{0,09\left(1-0,09\right)}{500}}=0,025$$

Khoảng tin cậy 95% cho tỷ lệ bút hỏng cần tìm là: $\left(0,065;0,115\right)$ và cho số bút hỏng là $\left(650;1150\right)$ (cây).

b) Giả sử $e=0,015$, ta có

$$u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\overline{p}\left(1-\overline{p}\right)}{n}}=0,015\Rightarrow u_{\frac{1+\gamma}{2}}=0,015\sqrt{\frac{n}{\overline{p}\left(1-\overline{p}\right)}}=1,172$$

$$\Rightarrow\frac{1+\gamma}{2}=0,8794\Rightarrow\gamma=1,7588-1=0,7588=75,88\%.$$

5. 7.

Quan sát ở một mẫu, người ta có kết quả về chiều cao X(m) của loại cây công nghiệp ở một nông trường như sau:

x_i	3	4	5	6	7	8
số cây	2	8	23	32	23	12

a) Hãy ước lượng chiều cao trung bình của loại cây đó bằng khoảng tin cậy 90%.

b) Để ước lượng chiều cao trung bình của loại cây đó ở độ tin cậy 95%, với sai số không quá 2 dm thì cần phải quan sát thêm bao nhiêu cây nữa?

Giải

a) Từ số liệu đã cho ta tính được $\overline{x}=6,02$ và độ lệch chuẩn mẫu $s=1,206$.

Khoảng tin cậy 90% cho chiều cao trung bình của loại cây đó là:

$$\left(\overline{x}-e;x+e\right),\ e=u_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{s}{\sqrt{100}}=u_{0,95}.\frac{1,206}{10}=1,65.\frac{1,206}{10}=0,2$$

Do đó $\left(5,82;6,22\right)$

b) Giả sử n_1 là số cây cần quan sát với độ tin cậy 95% và sai số không quá 0,2 (m) ta có:

$$u_{0,975}\frac{1,45}{\sqrt{n_1}}\leq 0,2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n_1} \geq u_{0,975}\frac{1,206}{0,2} \Leftrightarrow n_1 \geq \left(1,96.\frac{1,206}{0,2}\right)^2 = 139,6 \Rightarrow n_1 = 140$$

Vậy ta cần quan sát thêm ít nhất 140 – 100 = 40 (cây) nữa.

5. 8.

Quan sát ở một mẫu, người ta có kết quả về chiều cao X(m) của loại cây công nghiệp ở một nông trường như sau:

x_i	3	4	5	6	7	8
số cây	2	8	23	32	23	12

a) Hãy ước lượng chiều cao trung bình của loại cây đó bằng khoảng tin cậy 90%.

b) Những cây cao từ 7 m trở lên gọi là cây loại A. Hãy tìm khoảng tin cậy 95,44% cho tỉ lệ cây loại A của nông trường.

Giải

a) Từ số liệu đã cho ta tính được $\overline{x} = 6,02$ và phương sai mẫu $s^2 = 1,45$

Khoảng tin cậy 90% cho chiều cao trung bình của loại cây đó là:

$(\overline{x} - e; x + e)$,

$$e = u_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{s}{\sqrt{100}} = u_{0,95}.\frac{1,2059}{10} = 1,65.\frac{1,2059}{10} = 0,2$$

Do đó $K = (5,82;6,22)$

b) Tỷ lệ cây loại A trên mẫu là:

$$\overline{p} = \frac{35}{100} = 0,35$$

Khoảng tin cậy 95,44% cho tỷ lệ cây loại A của nông trường là:

$(\overline{p} - e; \overline{p} + e)$

với $e = u_{\frac{1+0,9544}{2}}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}} = u_{0,9772}\sqrt{\frac{0,35.0,65}{100}} = 2.\frac{\sqrt{0,35.0,65}}{10} = 0,0954$

Khoảng tin cậy cần tìm là: $(0,2546;0,4454)$.

5. 9.

Độ sâu của biển được xác định bằng một máy đo có sai số hệ thống bằng 0, còn sai số ngẫu nhiên của nó tuân theo luật phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn 20m.

a) Cần phải tiến hành bao nhiêu lần đo để xác định được độ sâu của biển với sai số cho phép không quá 15m ở độ tin cậy 90% ?

b) Tìm khoảng tin cậy 95% cho sai số ngẫu nhiên trung bình. Biết rằng khi tiến hành đo ở một địa điểm xác định 25 lần người ta tính được sai số ngẫu nhiên trung bình mẫu là 100m.

Giải

a) Gọi n là số lần đo cần thiết.

Ta có $e = u_{\frac{1+\gamma}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 15 \Leftrightarrow n \ge \dfrac{\sigma^2}{15^2}u^2_{\frac{1+\gamma}{2}} = \dfrac{20^2}{225}.1,65^2 = 4,84$

Vậy cần đo ít nhất 5 lần.

b) Khoảng tin cậy 95% cho sai số trung bình ngẫu nhiên là:

$(\overline{x} - e; \overline{x} + e)$ với $e = u_{\frac{1+0,95}{2}}.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = u_{0,975}.\dfrac{20}{\sqrt{25}} = 1,96.\dfrac{20}{5} = 7,8$

Vậy khoảng tin cậy cần tìm là:

$(92,2;107,8)$.

5. 10.

Người ta muốn ước lượng tỉ lệ viên thuốc bị sứt mẻ trong một lô thuốc rất nhiều viên.

a) Nếu muốn sai số cho phép không quá 1% ở độ tin cậy 95% thì phải quan sát ít nhất mấy viên?

b) Quan sát ngẫu nhiên 200 viên, thấy có 20 viên bị sứt mẻ. Hãy tìm khoảng tin cậy 95% cho tỉ lệ tổng thể. Nếu muốn sai số cho phép không quá 1% ở độ tin cậy 95% thì phải quan sát ít nhất mấy viên?

Giải

a) Theo đề bài ta có:

$$e \le \varepsilon = 0,01; \Leftrightarrow n \ge \left(\frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{2.0,01}\right)^2 = \left(\frac{u_{\frac{1+0,95}{2}}}{0,02}\right)^2 = 9603,65$$

Vậy, phải quan sát ít nhất 9604 viên.

b) Gọi p là tỉ lệ viên thuốc bị sứt mẻ. Khoảng tin cậy 95% cho p:

$$(\overline{p} - e; \overline{p} + e)$$

$$e = u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}} = u_{\frac{1+0,95}{2}}\sqrt{\frac{0,1(0,9)}{200}} = 1,96.\sqrt{\frac{0,09}{200}} = 0,0416$$

Vậy khoảng tin cậy 95% cho tỉ lệ viên thuốc bị sứt mẻ là: $(0,0584; 0,1416)$

Nếu sai số không quá 1% ở độ tin cậy 95% ta cần quan sát bao nhiêu:

$$n \geq \left(\frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\varepsilon}\right)^2 .\overline{p}\left(1-\overline{p}\right) = \left(\frac{u_{\frac{1+0,95}{2}}}{0,01}\right)^2 .0,1.0,9 = 3457,3129$$

Vậy, phải quan sát ít nhất 3458.

5. 11.

Để nghiên cứu sản lượng sữa hàng ngày (SLSHN) của một đàn bò, người ta điều tra ngẫu nhiên trên 100 con bò của nông trường và có kết quả sau:

SLSHN (kg)	9	10	12	14	15
Số con bò	10	24	42	16	8

a) Ước lượng sản lượng sữa trung bình mỗi ngày của một con bò bằng khoảng tin cậy 97%.

b) Với độ tin cậy 97%, có thể nói sản lượng sữa trung bình hàng ngày của một con bò nhiều nhất bằng bao nhiêu?

Giải

a) Từ số liệu đã cho ta tính được $\overline{x} = 11,78$, $s = 1,79$

Khoảng tin cậy 97% cho SLSHN trung bình: $\left(\overline{x} - e; \overline{x} + e\right)$

Với $e = u_{\frac{1+0,97}{2}} . \frac{s}{\sqrt{n}} = u_{0,985} . \frac{1,79}{\sqrt{100}} = 2,1707 . \frac{1,79}{10} = 0,39$

Vậy, khoảng tin cậy cần tìm là: (11,39; 12,17) (kg)

b) Ta tìm khoảng tin cậy một bên: $\left(-\infty; \overline{x} + e\right)$:

với $e = u_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = u_{0,97} \frac{1,79}{\sqrt{100}} = 1,88 . \frac{1,79}{10} = 0,337$

Từ đó suy ra sản lượng sữa trung bình hàng ngày nhiều nhất:

$11,78 + 0,337 = 12,117$ (kg)

5. 12.

Để nghiên cứu sản lượng sữa hàng ngày (SLSHN) của một đàn bò, người ta điều tra ngẫu nhiên trên 100 con bò của nông trường và có kết quả sau:

SLSHN (kg)	9	10	12	14	15
Số con bò	10	24	42	16	8

a) Tìm khoảng tin cậy 90% cho tỉ lệ bò cho SLSHN trên 11kg.

b) Muốn sai số khi ước lượng sản lượng sữa trung bình mỗi ngày không vượt quá 0,5kg và sai số khi ước lượng tỉ lệ bò cho SLSHN trên 11kg không vượt quá 12%, với cùng độ tin cậy 98%, thì cần điều tra bao nhiêu con bò?

Giải

a) Từ số liệu đã cho ta tính được $\overline{x} = 11,78$, $s = 1,79$

Gọi p là tỉ lệ bò cho SLSHN trên 11 kg.

Tỉ lệ này trên mẫu khảo sát là: $\overline{p} = \dfrac{66}{100} = 0,66$

Khoảng tin cậy 90% cho p: $(\overline{p} - e; \overline{p} + e)$

Với

$$e = u_{\frac{1+0,9}{2}}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}} = u_{0,95}.\sqrt{\frac{0,66(1-0,66)}{100}} = 1,6449.\sqrt{\frac{0,66(1-0,66)}{100}} = 0,0779$$

Vậy, tỉ lệ bò cho SLSHN trên 11 kg từ 58,21% đến 73,79%.

b) Gọi n_1 là số bò cần điều tra. Ta phải có:

$$\begin{cases} n_1 \geq u^2_{\frac{1+0,98}{2}}.\dfrac{s^2}{0,5^2} \\ n_1 \geq u^2_{\frac{1+0,98}{2}}.\dfrac{\overline{p}(1-\overline{p})}{0,12^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_1 \geq 2,3263^2.\dfrac{1,79^2}{0,5^2} = 69,4 \\ n_1 \geq 2,3263^2.\dfrac{0,66.0,34}{0,12^2} = 84,33 \end{cases}$$

Chọn $n_1 = 85$. Vậy cần điều tra 85 con bò.

5. 13.

Độ dài của một loại chi tiết máy được đo 25 lần bằng một máy đo có sai số hệ thống bằng 0. Biết rằng sai số ngẫu nhiên của việc đo có phân phối chuẩn với phương sai 100cm^2 và độ dài trung bình trong 25 lần đo là 100cm.

a) Hãy tìm khoảng tin cậy 99% cho độ dài của loại chi tiết máy trên.

b) Phải tiến hành bao nhiêu lần đo để bề rộng khoảng tin cậy 99% cho độ dài của loại chi tiết máy trên không quá 8 cm.

Giải

a) Khoảng tin cậy 99% cho độ dài chi tiết máy nói trên: $(\overline{x} - e; \overline{x} + e)$.

Với $e = u_{\frac{1+\gamma}{2}}.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = u_{0,995}.\dfrac{10}{\sqrt{25}} = 2,5758.\dfrac{10}{5} = 5,15$

Đáp số: (94,85; 105,15).

b) Gọi n_1 là số lần đo. Ta cần có:

$2e \leq 8 \Leftrightarrow e \leq 4$

$\Leftrightarrow u_{\frac{1+\gamma}{2}}.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_1}} \leq 4$

$\Leftrightarrow n_1 \geq \left(u_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)^2.\dfrac{\sigma^2}{4^2} = (u_{0,995})^2.\dfrac{\sigma^2}{16} = 2,5758^2.\dfrac{100}{16} = 41,47$

Suy ra, $n_1 = 42$.

Vậy, cần tiến hành đo ít nhất 42 lần.

5. 14.

Giả sử đường kính của một loại sản phẩm là biến ngẫu nhiên có phân phối N(μ, σ2). Đo 10 sản phẩm, người ta có bảng số liệu:

4,1; 3,9; 4,7; 5,0; 4,4; 4,4; 4,2; 3,8; 4,4; 4,0

Tìm khoảng tin cậy 95% cho μ và khoảng tin cậy 99% cho μ và σ^2.

Giải

Từ số liệu đã cho ta tính được:

$\overline{x} = 4{,}2900;\ s = 0{,}3695$

♣ Khoảng tin cậy 95% cho đường kính trung bình:

$$e = t^{n-1}_{\frac{1+0,95}{2}} \frac{s}{\sqrt{10}} = t^{9}_{0,975} \frac{0{,}3695}{\sqrt{10}} = 0{,}2643$$

$$(4{,}0257;\ 4{,}5543)$$

♣ Khoảng tin cậy 99% cho đường kính trung bình:

$$(3{,}9102;\ 4{,}6698)$$

♣ Khoảng tin cậy 99% cho phương sai là:

$$\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) = \chi^2_{\frac{1+0,99}{2}}(9) = \chi^2_{0,995}(9) = 23{,}589$$

$$\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) = \chi^2_{\frac{1-0,99}{2}}(9) = \chi^2_{0,005}(9) = 1{,}735$$

$$(n-1)s^2 = 9.0{,}1366 = 1{,}229$$

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}; \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \right) = (0{,}0521; 0{,}7084)$$

5. 15.

Nghiên cứu về độ bền *X* (kg/mm2) của một loại thép, người tiến hành một số quan sát một số tấm thép trên mẫu và có kết quả cho trong bảng sau:

Độ bền (kg/mm2)	Số tấm thép
(95, 115]	15
(115,135]	19
(135,155]	23
(155,175]	31

(175,195]	29
(195,215]	21
> 215	6

a) Tìm khoảng tin cậy 97% cho độ bền trung bình của loại thép trên.

b) Sẽ đạt độ tin cậy bao nhiêu nếu muốn ước lượng độ bền trung bình của loại thép trên bằng khoảng tin cậy có độ dài bằng 6?

Giải

a) Từ số liệu trên ta tính được: $\overline{x} = 162,6389; s = 33,4076$

Khoảng tin cậy 97% cho trung bình độ bền: $\left(\overline{x} - e; \overline{x} + e\right)$

$$e = u_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} = u_{0,985} \frac{33,2914}{\sqrt{144}} = 2,17.\frac{33,4076}{12} = 6,0412$$

$$\left(\overline{x} - e; \overline{x} + e\right) = \left(156,6; 168,7\right)$$

b) Gọi γ là độ tin cậy cần tìm

Ta có: $e = u_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} = 3 \Rightarrow u_{\frac{1+\gamma}{2}} = 3.\frac{\sqrt{n}}{s} = 3.\frac{\sqrt{144}}{33,0476} = 1,0814$

$$\Rightarrow \frac{1+\gamma}{2} = 0,86 \Rightarrow \gamma = 72\%$$

5. 16.

Nghiên cứu về độ bền *X* (kg/mm^2) của một loại thép, người tiến hành một số quan sát một số tấm thép trên mẫu và có kết quả cho trong bảng sau:

Độ bền (kg/mm^2)	Số tấm thép
(95, 115]	15
(115,135]	19
(135,155]	23
(155,175]	31
(175,195]	29
(195,215]	21
> 215	6

a) Tìm khoảng tin cậy 97% cho độ bền trung bình của loại thép trên.

b) Thép có độ bền trên 195kg/mm^2 được gọi là thép loại A. Tìm khoảng tin cậy 98% cho tỉ lệ thép loại A.

Giải

a) Từ số liệu trên ta tính được: $\overline{x}=162,6389; s=33,4076$

Khoảng tin cậy 97% cho trung bình độ bền:

$$e=u_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}=u_{0,985}\frac{33,2914}{\sqrt{144}}=2,17.\frac{33,4076}{12}=6,0412$$

$$(\overline{x}-e;\overline{x}+e)=(156,6;168,7)$$

b) Gọi p là tỷ lệ thép loại A. Tỉ lệ mẫu: $\overline{p}=\dfrac{27}{144}=0,1875$.

Khoảng tin cậy 98% cho p: $(\overline{p}-e;\overline{p}+e)$

$$e=u_{\frac{1+0,98}{2}}.\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}=u_{0,99}.\sqrt{\frac{0,1875(1-0,1875)}{144}}$$

$$=2,3263.\sqrt{\frac{0,1875(1-0,1875)}{144}}=0,0106$$

Vậy, khoảng tin cậy cần tìm: $(0,1769;\ 0,1981)$.

5. 17.

Mức tiêu hao nguyên liệu cho một đơn vị sản phẩm là một biến ngẫu nhiên X tuân theo qui luật chuẩn. Quan sát 28 sản phẩm được chọn ngẫu nhiên, người ta thu được kết quả cho trong bảng sau:

x (gam)	19	19,5	20	20,5
số sản phẩm	5	6	14	3

Hãy xây dựng khoảng tin cậy 90% cho phương sai tổng thể trong hai trường hợp:

a) biết E(X) = 20g;

b) chưa biết E(X).

Giải

a) Khoảng tin cậy γ cho phương sai tổng thể: $\left(\dfrac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n)};\dfrac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n)}\right)$

$$\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n)=\chi^2_{\frac{1+0,9}{2}}(28)=\chi^2_{0,95}(28)=41,337$$

$$\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n)=\chi^2_{\frac{1-0,9}{2}}(28)=\chi^2_{0,05}(28)=16,928$$

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2=7,25$$

Khoảng tin cậy cần tìm:

$$\left(\frac{7,25}{41,337};\frac{7,25}{16,928}\right)=(0,175;0,428)$$

b) Khoảng tin cậy γ cho phương sai tổng thể: $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)};\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)}\right)$

$$\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)=\chi^2_{\frac{1+0,9}{2}}(27)=\chi^2_{0,95}(27)=40,113$$

$$\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)=\chi^2_{\frac{1-0,9}{2}}(27)=\chi^2_{0,05}(27)=16,151$$

$$(n-1)s^2=5,74$$

Khoảng tin cậy cần tìm: $\left(\frac{5,74}{40,113};\frac{5,74}{16,151}\right)=(0,143;0,355)$.

5. 18.

X (đơn vị tính bằng %) là chỉ tiêu của một loại sản phẩm. Điều tra ở một số sản phẩm (s.ph), người ta có số liệu:

X_i	Số sản phẩm
[5,7)	2
[7,9)	8
[9,11)	14
[11,13)	19
[13,15)	22
[15,17)	20
[17,19)	10
[19,21)	5

a) Để ước lượng trung bình chỉ tiêu *X* với độ tin cậy 95% và độ chính xác 0,3% thì cần điều tra thêm bao nhiêu sản phẩm nữa?

b) Người ta xem các sản phẩm có chỉ tiêu *X* dưới một mức qui định là loại 2. Từ số liệu trên, bằng phương pháp ước lượng khoảng tỉ lệ (loại 2), người ta tính được khoảng tin cậy là (4%, 16%). Tìm độ tin cậy của ước lượng này.

Giải

a) Từ số liệu đã cho ta tính được: $\overline{x}=13,52$; $s=3,35$.

Để ước lượng trung bình chỉ tiêu X với độ tin cậy 95% và sai số 0,3 ta cần:

$$n_1 \geq \left(\frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{0,3}\right)^2 .s^2 = \left(\frac{u_{0,975}}{0,3}\right)^2 .s^2 = 5,836\times 11,2420 = 382,841$$

Vậy cần điều tra thêm 283 sản phẩm nữa.

b) Gọi $\overline{p}$ là tỉ lệ sản phẩm loại 2 ở mẫu từ khoảng tin cậy γ của tỷ lệ sản phẩm loại 2 ta có:

$$\begin{cases} \overline{p} - e = 0,04 \\ \overline{p} + e = 0,16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{p} = 0,1 \\ e = 0,06 \end{cases}$$

Mặt khác,

$$e = u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\overline{p}\left(1-\overline{p}\right)}{n}}$$

$$\Rightarrow u_{\frac{1+\gamma}{2}} = e/\sqrt{\frac{\overline{p}\left(1-\overline{p}\right)}{n}} = \frac{0,06}{\sqrt{0,1\times 0,9}}\sqrt{100} = \frac{0,06}{0,3}10 = 2$$

$$\frac{1+\gamma}{2} = 0,9772 \Leftrightarrow \gamma = 0,9545$$

5. 19.

Viện thống kê muốn ước lượng tỉ lệ p người dân không đồng ý về một điều luật mới được đề nghị.

a) Nếu muốn sai số cho phép không quá 2% ở độ tin cậy 90% thì phải hỏi ý kiến ít nhất mấy người?

b) Trên một mẫu ngẫu nhiên 344 người được hỏi ý kiến, có 83 người không đồng ý. Hãy tìm khoảng tin cậy 90% cho p. Dựa vào số liệu của mẫu này, hãy giải lại câu a).

Giải

a) Gọi n là số người cần hỏi ý kiến. Ta phải có:

$$n \geq \left(u_{\frac{1+0,9}{2}}\cdot\frac{1}{2\varepsilon}\right)^2 = \left(u_{\frac{1+0,9}{2}}\cdot\frac{1}{2.0,02}\right)^2 = 1691,1$$

Vậy, phải hỏi ý kiến ít nhất 1692 người.

b) Tỉ lệ mẫu: $\overline{p} = \frac{83}{344} = 0,241$. Khoảng tin cậy 90% cho p: $\left(\overline{p} - e; \overline{p} + e\right)$

$$e = u_{\frac{1+0,9}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\overline{p}\left(1-\overline{p}\right)}{n}} = 1,6449.\sqrt{\frac{0,241(1-0,241)}{344}} = 0,0379$$

Vậy, khoảng tin cậy cần tìm là: $(0,2031; 0,2789)$ tức là từ 20,31% đến 27,89%.

Giải lại câu a), trên cơ sở có mẫu thăm dò, kích thước mẫu cần tìm:

$$n_1 \geq u^2_{\frac{1+0,9}{2}} \cdot \frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{\varepsilon^2} = 1,6449^2 . \frac{0,241(1-0,241)}{0,02^2} = 752,2$$

Vậy, cần hỏi ý kiến ít nhất 753 người.

5. 20.

Để nghiên cứu đường kính *X* (mm) của một loại sản phẩm do một xí nghiệp sản xuất, người ta đo ngẫu nhiên 100 sản phẩm của xí nghiệp và có kết quả cho trong bảng sau:

x_i	9,85	9,90	9,95	10,00	10,05	10,10	10,15
Tần số	8	12	20	30	14	10	6

Theo qui định, những sản phẩm có đường kính từ 9,9 mm đến 10,1 mm là những sản phẩm đạt tiêu chuẩn kỹ thuật. Tìm khoảng tin cậy 95% cho tỉ lệ và đường kính trung bình của những sản phẩm đạt tiêu chuẩn kỹ thuật.

Giải

Bảng số liệu cho các sản phẩm đạt tckt:

x_i	9,90	9,95	10,00	10,05	10,10
Tần số	12	20	30	14	10

♣ Gọi p là tỉ lệ sản phẩm đạt tckt, tỉ lệ này trên mẫu là: $\overline{p} = \frac{86}{100} = 0,86$

Khoảng tin cậy 95% cho p: $(\overline{p}-e; \overline{p}+e)$

$$e = u_{\frac{1+0,95}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}} = 1,96 . \sqrt{\frac{0,86(1-0,86)}{100}} = 0,068$$

Vậy, khoảng tin cậy cho p là: $(0,792; 92,8)$ nghĩa là từ 79,2% đến 92,8%.

♣ Gọi X_1 là BNN chỉ đường kính của những sản phẩm đạt tckt. Từ số liệu ta có:

$\overline{x}_1 = 9,994;\ s_1 = 0,06$.

Khoảng tin cậy 95% cho đường kính trung bình những sản phẩm đạt tckt:

$(\overline{x}_1 - e; \overline{x}_1 + e)$

$$e = u_{\frac{1+0,95}{2}} \cdot \frac{s_1}{\sqrt{n_1}} = 1,96 . \frac{0,06}{\sqrt{86}} = 0,012$$

Khoảng tin cậy cần tìm: $(9,982; 10,006)$ (mm).

5. 21.

X (tính bằng %) và Y (tính bằng cm) là 2 chỉ tiêu của một loại sản phẩm. Kiểm tra ngẫu nhiên ở một số sản phẩm, người ta có kết quả sau:

y_k \ x_i	1	2	x_3	x_4
(90, 95]	5	13	2	
(95, 100]	19	23	15	8
(100, 105]	12	10	7	
(105, 110]			5	2

a) Để ước lượng trung bình của chỉ tiêu Y với sai số cho phép 0,5 cm và độ tin cậy 90% thì cần điều tra thêm bao nhiêu sản phẩm nữa?

b) Cho biết khoảng tin cậy 96% của chỉ tiêu X là (1,59%; 2,61%). Hãy tính giá trị trung bình và độ lệch chuẩn mẫu của chỉ tiêu X.

Giải

a) Bảng phân bố tần số chỉ tiêu Y:

y_k	(90, 95]	(95, 100]	(100, 105]	(105, 110]
n_k	20	65	29	7

Từ đó: $\overline{y} = 98,4504;\ s_y = 3,89$

Gọi n_1 là số sản phẩm cần điều tra:

$$n_1 \geq \left(u_{\frac{1+0,9}{2}}\right)^2 \cdot \frac{s_Y^2}{\varepsilon^2} = 1,6449^2 \cdot \frac{3,89^2}{0,5^2} = 163,8$$

$$\Rightarrow n_1 = 164$$

Vậy, cần điều tra thêm 43 sản phẩm nữa.

b) Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases} \overline{x} - e = 1,59 \\ \overline{x} + e = 2,61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{x} = 2,1 \\ e = 0,51 \end{cases}$$

Mặt khác, $e = u_{\frac{1+0,96}{2}} \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}} \Rightarrow s = \dfrac{e\sqrt{n}}{u_{\frac{1+0,96}{2}}} = \dfrac{0,51.\sqrt{121}}{2,0537} = 2,732$

5. 22.

X (tính bằng %) và Y (tính bằng cm) là 2 chỉ tiêu của một loại sản phẩm. Kiểm tra ngẫu nhiên ở một số sản phẩm, người ta có kết quả sau:

y_k \ x_i	1	2	x_3	x_4
(90, 95]	5	13	2	
(95, 100]	19	23	15	8
(100, 105]	12	10	7	
(105, 110]			5	2

a) Cho biết khoảng tin cậy 96% của chỉ tiêu X là (1,59%; 2,61%). Hãy tính giá trị trung bình và độ lệch chuẩn của chỉ tiêu X.

b) Hãy tìm các giá trị x_3 và x_4.

Giải

a) Bảng dữ liệu chỉ tiêu X:

Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases} \overline{x} - e = 1,59 \\ \overline{x} + e = 2,61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{x} = 2,1 \\ e = 0,51 \end{cases}$$

Mặt khác, $e = u_{\frac{1+0,96}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \Rightarrow s = \frac{e\sqrt{n}}{u_{\frac{1+0,96}{2}}} = \frac{0,51.\sqrt{121}}{2,0537} = 2,732$

b) Bảng dữ liệu chỉ tiêu X:

x_i	1	2	x_3	x_4
n_i	36	46	29	10

Ta có $n\overline{x} = 36.1 + 46.2 + 29.x_3 + 10.x_4 \Rightarrow 29x_3 + 10x_4 = 126,1$ (1)

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{4} n_i x_i^2 - n\overline{x}^2\right]$$

$$\Rightarrow (n-1)s^2 = n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + n_3x_3^2 + n_4x_4^2 - n\overline{x}^2$$

$$\Leftrightarrow n_3x_3^2 + n_4x_4^2 = (n-1)s^2 - n_1x_1^2 - n_2x_2^2 + n\overline{x}^2$$

$$\Leftrightarrow 29x_3^2 + 10x_4^2 = 120.2,732^2 - 36 - 46.4 + 121.2,1^2$$

$$\Leftrightarrow 29x_3^2 + 10x_4^2 = 120.2,732^2 - 36 - 46.4 + 121.2,1^2 = 1209,27$$

$$\Leftrightarrow 29x_3^2 + 10x_4^2 = 1209,27 \qquad (2)$$

Từ (1) suy ra: $10x_4 = 126,1 - 29x_3$

Thay vào (2) ta được:

$$\Leftrightarrow 29x_3^2 + \frac{1}{10}\left(126{,}1 - 29x_3\right)^2 = 1209{,}27$$

$$\Leftrightarrow 290x_3^2 + \left(126{,}1 - 29x_3\right)^2 = 12092{,}7$$

$$\Leftrightarrow 1131x_3^2 - 7313{,}8x_3 + 3808{,}51 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3 = 5{,}9 \\ x_3 = 0{,}57 \end{array}\right.$$

Với $x_3 = 5{,}9$ suy ra $x_4 = \dfrac{126{,}1 - 29.5{,}9}{10} = -4{,}5$ (loại)

Với $x_3 = 0{,}57$ suy ra $x_4 = \dfrac{126{,}1 - 29.0{,}57}{10} = 10{,}957$ (nhận).

Vậy, $x_3 = 0{,}57$ và $x_4 = 10{,}957$.

5. 23.

Một giống lúa mới được gieo trong 10 miếng đất thí nghiệm có các điều kiện giống nhau, cho các sản lượng tính theo cùng một đơn vị như sau:

25,4; 28,0; 20,1; 27,4; 25,6; 23,9; 24,8; 26,4; 27,0; 25,4.

Biết rằng sản lượng lúa là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn N(μ, σ^2). Hãy tìm khoảng tin cậy 90% cho μ và σ^2.

Giải

Từ số liệu ta tính được:

Giá trị trung bình mẫu: $\overline{x} = 25{,}4$

Giá trị độ lệch chuẩn mẫu: $s = 2{,}24$

Khoảng tin cậy 90% cho sản lượng trung bình μ: $\left(\overline{x} - e; \overline{x} + e\right)$

Với $e = t^{(9)}_{\frac{1+0{,}9}{2}} . \dfrac{s}{\sqrt{n}} = 1{,}8331 . \dfrac{2{,}24}{\sqrt{10}} = 1{,}3$

Vậy, Khoảng tin cậy 90% cho μ: (24,1; 26,7)

Khoảng tin cậy 90% cho σ^2:

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{1+0{,}9}{2}}}; \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{1-0{,}9}{2}}}\right)$$

$$= \left(\frac{9.2{,}24^2}{\chi^2_{0{,}95}}; \frac{9.2{,}24^2}{\chi^2_{0{,}05}}\right) = \left(\frac{45{,}1584}{16{,}919}; \frac{45{,}1584}{3{,}325}\right) = \left(2{,}67; 13{,}58\right)$$

5. 24.

Để đánh giá trữ lượng cá trong một hồ lớn, người ta đánh bắt 2000 con cá từ hồ đó, đánh dấu rồi thả lại xuống hồ. Vài ngày sau, họ đánh bắt lại 400 con thì thấy có 80 con có đánh dấu.

a) Hãy ước lượng trữ lượng cá trong hồ bằng khoảng tin cậy 95%.

b) Nếu muốn sai số của ước lượng giảm đi một nửa thì lần sau phải đánh bắt bao nhiêu con cá?

Giải

a) Gọi p là tỉ lệ cá dược đánh dấu trong hồ.

Khi đó, $p=\dfrac{2000}{N}$ với N là trữ lượng cá trong hồ.

Khoảng tin cậy 95% cho tỉ lệ cá được đánh dấu trong hồ: $\left(\overline{p}-e;\overline{p}+e\right)$.

Với $\overline{p}=\dfrac{80}{400}$ và $e=u_{\frac{1+0,95}{2}}.\sqrt{\dfrac{\overline{p}\left(1-\overline{p}\right)}{n}}=u_{0,975}.\sqrt{\dfrac{0,2.\left(1-0,2\right)}{400}}=0,0392$

Vậy khoảng tin cậy cho p : $\left(0,1608;0,2392\right)$ tức là từ 16,08% đến 23,92%.

Do đó, lượng cá trong hồ ước lượng khoảng từ 8361 đến 12438 con.

b) Gọi n_1 là số cá cần đánh bắt. Ta có:

$$n_1\geq u^2_{\frac{1+0,95}{2}}.\frac{\overline{p}\left(1-\overline{p}\right)}{\left(e/2\right)^2}=1,96^2.\frac{0,2\left(1-0,2\right)}{\left(0,0392/2\right)^2}=1600$$

Vậy, lần sau cần bắt 1600 con.

5. 25.

Một máy sản xuất tự động có tỉ lệ sản xuất ra sản phẩm loại A lúc đầu là 48%. Máy được cải tiến và sau một thời gian áp dụng, người ta kiểm tra 40 hộp, mỗi hộp gồm 10 sản phẩm và ghi lại số sản phẩm loại A trong mỗi hộp (SSPLA/h) như sau :

SSPLA/h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Số hộp	2	0	4	6	8	10	4	5	1	0

Hãy ước lượng tỉ lệ sản phẩm loại A sau khi máy được cải tiến bằng khoảng tin cậy 95%

Giải

Tổng số sản phẩm loại A trong 40 hộp là 215. Tỉ lệ sản phẩm loại A trên mẫu khảo sát:

$$\overline{p}=\frac{215}{400}=\frac{43}{80}$$

Khoảng tin cậy 95% cho tỉ lệ sản phẩm loại A: $(\overline{p}-e;\overline{p}+e)$

Với $e = u_{\frac{1+0,95}{2}}.\sqrt{\dfrac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}} = u_{0,975}.\sqrt{\dfrac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$

$$=1,96\sqrt{\frac{\frac{43}{80}\left(1-\frac{43}{80}\right)}{400}}=0,0489$$

Vậy, tỉ lệ sản phẩm loại A từ 48,86% đến 58,64%

5. 26.

Để nghiên cứu sự phát triển của một loại cây trồng, người ta quan tâm đến đường kính X (cm) và chiều cao Y (m) của loại cây đó. Đo chiều cao và đường kính của 100 cây cùng độ tuổi được chọn ngẫu nhiên, kết quả thu được cho trong bảng sau:

x_i \ y_k	3	4	5	6	7
(20, 22]	5				
(22, 24]		19	25	10	
(24, 26]		5	17	8	
(26, 28]				7	4

a) Tìm khoảng tin cậy 95% cho đường kính trung bình của loại cây này.

b) Để ước lượng đường kính trung bình của loại cây này với độ chính xác đạt được ở câu (a) và độ tin cậy 99% thì cần đo thêm bao nhiêu cây nữa?

Giải

a) Bảng phân bố tần số cho đường kính trung bình của cây:

x_i	(20, 22]	(22, 24]	(24, 26]	(26, 28]
n_i	5	54	30	11

Từ đó giá trị trung bình mẫu: $\overline{x}=23,94$ và độ lệch chuẩn mẫu: $s_X=1,52$.

Khoảng tin cậy 95% cho đường kính trung bình của cây: $(\overline{x}-e;\overline{x}+e)$

$$e=u_{\frac{1+0,95}{2}}.\frac{s_X}{\sqrt{n}}=1,96.\frac{1,52}{\sqrt{100}}=0,298$$

Khoảng tin cậy cần tìm: $(23,64;24,24)$.

b) Giả sử n_1 là số cây cần đo, ta phải có:

$$n_1 \geq \left(u_{\frac{1+0,99}{2}}\right)^2 . \frac{s_X^2}{e^2} = 2,5758^2 . \frac{1,52^2}{0,298^2} = 172,6$$

Suy ra, $n_1 = 173$

Vậy, số cây cần đo thêm là $n_t = 73$ cây.

5. 27.

Để nghiên cứu sự phát triển của một loại cây trồng, người ta quan tâm đến đường kính X (cm) và chiều cao Y (m) của loại cây đó. Đo chiều cao và đường kính của 100 cây cùng độ tuổi được chọn ngẫu nhiên, kết quả thu được cho trong bảng sau:

x_i \ y_k	3	4	5	6	7
(20, 22]	5				
(22, 24]		19	25	10	
(24, 26]		5	17	8	
(26, 28]				7	4

Những cây cao từ 6m trở lên là cây loại A. Hãy ước lượng tỉ lệ và đường kính trung bình của cây loại A bằng khoảng tin cậy 99% (giả thiết đường kính cây loại A là biến ngẫu nhiên phân phối theo qui luật chuẩn).

Giải

Số cây loại A trên mẫu: 29. Giá trị tỉ lệ cây loại mẫu $\overline{p} = 0,29$.

Khoảng tin cậy 99% cho tỉ lệ cây loại A: $(\overline{p} - e; \overline{p} + e)$

$$e = u_{\frac{1+0,99}{2}} \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}} = 2,5758 . \sqrt{\frac{0,29(1-0,29)}{100}} = 0,117$$

Khoảng tin cậy 99% cho tỷ lệ cây loại A là: $(0,173; 0,407)$ tức là từ 17,3% đến 40,7%.

Số liệu cho cây loại A:

x_i	(22, 24]	(24, 26]	(26, 28]
n_i	10	8	11

Gọi X_1 là đường kính cây loại A, μ_1 là đường kính trung bình của cây loại A. Giá trị trung bình mẫu: $\overline{x}_1 = 25,07$, $s_1 = 1.73$.

Khoảng tin cậy 99% cho đường kính trung bình của cây loại A: $(\overline{x}_1 - e; \overline{x}_1 + e)$

$$e = t^{(28)}_{\frac{1+0,99}{2}} \frac{s_1}{\sqrt{n_1}} = 2,7633 \frac{1,73}{\sqrt{29}} = 0,89$$

Vậy, khoảng tin cậy 99% cho đường kính trung bình của cây loại A: (24,18; 25,96) (cm).

5. 28.

Để khảo sát mức tiêu hao nguyên liệu (tính bằng gam) để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm của một nhà máy, người ta quan sát mức tiêu hao nguyên liệu trên một mẫu, và thu được kết quả sau: (đơn vị gam)

x_i	18	19	20	21	22
n_i	13	21	27	21	18

a) Tìm khoảng tin cậy 98% cho số tiền trung bình được dùng để mua nguyên liệu để sản xuất trong mỗi quí của nhà máy. Biết rằng giá loại nguyên liệu này là 800 ngàn đ/kg và sản lượng của nhà máy trong một quí là 40.000 sản phẩm.

b) Nếu muốn ước lượng số tiền trung bình để mua nguyên liệu trong mỗi quí của nhà máy bằng khoảng tin cậy 99% và sai số không quá 8 triệu đồng thì phải lấy mẫu với kích thước là bao nhiêu?

Giải

a) Từ số liệu ban đầu ta xây dựng được bảng sau: $\overline{x} = 20,1 \quad s = 1,29$

Khoảng tin cậy 98% cho mức tiêu hao nguyên liệu trung bình của mỗi sản phẩm:

$$\left(\overline{x} - e; \overline{x} + e\right)$$

$$e = u_{\frac{1+0,98}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} = u_{0,99}.\frac{1,29}{\sqrt{100}} = 2,3263.\frac{1,29}{10} = 0,3$$

Do đó $\left(\overline{x} - e; \overline{x} + e\right) = (19,8; 20,4)$

Từ đó suy ra khoảng tin cậy 98% cho số tiền trung bình cho mỗi quý:

$\left(19,8 \times 4 \times 8 \times 10^3; 20,4 \times 4 \times 8 \times 10^3\right) = (633600; 652800)$ (ngàn đồng)

b) Nếu sai số ước lượng số tiền trung bình mỗi quý là 8 triệu đồng thì sai số ước lượng mức tiêu hao nguyên liệu là $\varepsilon = \dfrac{8.10^6}{40000.800} = 0,25$ (g)

Khi đó kích thước mẫu quy định:

$$n_1 \geq \left(u_{\frac{1+0,99}{2}}.\frac{s}{\varepsilon}\right)^2 = 176,65$$

Chọn $n_1 = 177$.

5. 29.

Để nghiên cứu lãi suất ngân hàng giữa hai nhóm nước công nghiệp phát triển và đang phát triển, người ta điều tra lãi suất ngân hàng trong một năm của 7 nước phát triển và 11 nước đang phát triển được chọn ngẫu nhiên.

Với các nước phát triển, lãi suất trung bình là 17,5% và độ lệch chuẩn là 3,2%; còn đối với các nước đang phát triển, lãi suất trung bình là 15,3% và độ lệch chuẩn là 2,9%. Với độ tin cậy 95%, hãy ước lượng sự chênh lệch về lãi suất trung bình giữa hai nhóm nước trên. Biết rằng lãi suất ngân hàng của của hai nhóm nước trên là các BNN tuân theo qui luật chuẩn có cùng phương sai.

Giải

Gọi X, Y lần lượt là các biến ngẫu nhiên chỉ lãi suất ngân hàng của hai nhóm nước phát triển và đang phát triển. X, Y tuân theo luật phân phối chuẩn với cùng phương sai.

Theo bài ta có $\overline{x} = 17,5\%,\ s_X = 3,2\%;\ n = 7;\ \overline{y} = 15,3\%,\ s_Y = 2,9\%;\ m = 11$

$\overline{x} - \overline{y} = 2,2$

Ta tính được $s^2 = \dfrac{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}{n+m-2} = \dfrac{6.3,2^2 + 10.2,9^2}{16} = 9,0963$

$$e = t^{16}_{\frac{1+0,95}{2}}\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)} = 2,1199\sqrt{9,0963\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{11}\right)} = 3,0912$$

Khoảng tin cậy 95% cho sự chênh lệch lãi suất ngân hàng trung bình giữa hai nhóm nước trên là: $(-0,8912\%; 5,2912\%)$

5. 30.

Để nghiên cứu lượng tiền gửi tiết kiệm vào ngân hàng của hai thành phố, người ta điều tra ngẫu nhiên 23 ngân hàng ở thành phố A và tìm được lượng tiền gửi trung bình của mỗi khách là 1,317 triệu đồng. Ở thành phố B, nghiên cứu 32 ngân hàng, tìm được lượng tiền gửi trung bình của mỗi khách là 1,512 triệu đồng. Hãy ước lượng sự chênh lệch trung bình giữa lượng tiền gửi tiết kiệm trung bình của dân hai thành phố A và B bằng khoảng tin cậy 95%. Biết rằng tiền tiết kiệm của người dân hai thành phố A và B là các BNN tuân theo luận phân phối chuẩn, với độ lệch chuẩn theo thứ tự, là 0,517 triệu và 0,485 triệu.

Giải

Gọi X, Y lần lượt là biến ngẫu nhiên chỉ tiền gửi của người dân thành phố A, B. Ta có $\overline{x} = 1,317$, $n = 23$, $\sigma_X = 0,517$; $\overline{y} = 1,512$; $m = 32$; $\sigma_Y = 0,485$.

Khoảng tin cậy 95% cho hiệu trung bình tiền gửi tiết kiệm của dân hai thành phố A, B là:

$(\overline{x} - \overline{y} - e; \overline{x} - \overline{y} + e)$ từ mẫu và độ tin cậy ta tính được $\overline{x} - \overline{y} = 1,317 - 1,512 = 0,195$

$$e = u_{\frac{1+\gamma}{2}}.\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_Y^2}{m}} = u_{0,975}\sqrt{\frac{0,517^2}{23}+\frac{0,485}{32}}$$

Do đó $\left(\overline{x}-\overline{y}-e;\overline{x}-\overline{y}+e\right)=\left(\text{-0,465; 0,075}\right)$

5. 31.

Một kỹ sư lâm nghiệp nghiên cứu chiều cao của một loại cây với giả thiết là nó có phân phối chuẩn. Trên một mẫu có kích thước n = 10, anh ta tính được chiều cao trung bình của mỗi cây là 13,78 và khoảng tin cậy 90% của trung bình tổng thể là (13,063; 14,497). Không may, bộ số liệu của mẫu bị thất lạc, anh ta chỉ còn nhớ các số sau:

12,2; 15; 13; 13,5; 12,8; 15,2; 12; 15,2.

Bạn có thể giúp anh ta tìm lại được các số liệu bị thất lạc không?

Giải

Giả sử hai số liệu thất lạc là x và y ta có:

$$\overline{x} = \frac{108,9+x+y}{10} = 13,78$$

Suy ra $x+y = 137,8-108,9 = 28,9$

Mặt khác từ khoảng tin cậy và trung bình mẫu ta tính được $e = 0,717$

Mà $e = t_{\frac{1+0,9}{2}}^{(9)}\frac{s}{\sqrt{10}} = t_{0,95}^{(9)}\frac{s}{\sqrt{10}} = \frac{1,8331}{\sqrt{10}}s = 0,5797s$ suy ra

$$s = \frac{e}{0,5797} = \frac{0,717}{0,5797} = 1,2368$$

Suy ra $s^2 = 1,5298$

Mặt khác $s^2 = \frac{1}{9}\left(1495,01+x^2+y^2-10.13,78^2\right) = \frac{1}{9}\left(x^2+y^2-403,874\right)$

Như vậy ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y = 28,9 \\ x^2+y^2 = 417,6422 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $x = 14,59; y = 14,31$.

5. 32.

Công ty ABC muốn nghiên cứu nhu cầu tiêu dùng về loại hàng của công ty ở một khu vực có 4000 hộ gia đình, họ tiến hành điều tra về nhu cầu của mặt hàng đó ở 400 hộ gia đình, được chọn ngẫu nhiên ở khu vực đó. Kết quả điều tra như sau:

Nhu cầu (kg/tháng)	Số gia đình
< 1	10

[1, 2)	35
[2,3)	86
[3,4)	132
[4,5)	78
[5,6)	34
[6,8)	15
> 8	10

a) Hãy ước lượng nhu cầu trung bình về mặt hàng này của toàn khu vực trong một năm bằng khoảng tin cậy 95%.

b) Với mẫu trên, khi ước lượng nhu cầu trung bình về mặt hàng này của toàn khu vực trong một năm, nếu muốn sai số ước lượng là 5,7 tấn, thì đạt được độ tin cậy bằng bao nhiêu?

Giải

a) Từ số liệu ta tính được: $n = 400$; $\overline{x} = 3,6688$ (kg/tháng); $s = 1,5870$

Khoảng tin cậy cho nhu cầu trung bình của mỗi hộ là:

$(\overline{x} - e; \overline{x} + e)$ với $e = u_{0,975}\dfrac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}} = 1,96.\dfrac{1,5870}{20}\sqrt{\dfrac{3600}{3999}} = 0,1476$

Vậy $(\overline{x} - e; \overline{x} + e) = (3,5212;\ 3,8164)$.

Khoảng tin cậy cho nhu cầu trung bình của toàn khu vực:

$(3,5212 \times 4000 \times 12;\ 3,8164 \times 4000 \times 12) = (169017; 183187)$

b) Khoảng tin cậy cho nhu cầu trung bình của mỗi hộ: $(\overline{x} - e; \overline{x} + e)$

Do đó khoảng tin cậy cho nhu cầu trung bình của toàn khu vực là:

$(\overline{x} - e; \overline{x} + e) \times 4000 \times 12$. Như vậy sai số ước lượng nhu cầu trung bình cho toàn khu vực là $4000 \times 12 \times e$. Theo đề bài $4000 \times 12e = 5700 \Rightarrow e = \dfrac{5,7}{4 \times 12} = 0,1188$

Từ đó ta có: $u_{\frac{1+\gamma}{2}}.\dfrac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}} = 0,1188 \Rightarrow u_{\frac{1+\gamma}{2}} = \dfrac{\sqrt{n}}{s}.\sqrt{\dfrac{N-1}{N-n}}.0,1188 = 1,578$

$\Rightarrow \dfrac{1+\gamma}{2} = 0,9427 \Leftrightarrow \gamma = 0,8854$

Vậy, độ tin cậy cần tìm là 88,54%.

5. 33.

Một lô trái cây của một cửa hàng đựng trong các sọt, mỗi sọt 100 trái. Người ta tiến hành kiểm tra ngẫu nhiên 50 sọt, thì thấy có 450 trái không đạt tiêu chuẩn.

a) Tìm khoảng tin cậy 96% cho tỉ lệ trái cây không đạt tiêu chuẩn của lô hàng.

b) Nếu muốn ước lượng tỉ lệ trái cây không đạt tiêu chuẩn của lô hàng, với sai số bằng 0,5% thì độ tin cậy đạt được là bao nhiêu?

Giải

a) Gọi p là tỉ lệ trái cây không đạt tiêu chuẩn của lô hàng.

Giá trị tỉ lệ mẫu: $\overline{p}=\dfrac{450}{5000}=0,09$

Khoảng tin cậy 96% cho $p:\left(\overline{p}-e;\overline{p}+e\right)$

$$e=u_{\frac{1+0,96}{2}}.\sqrt{\frac{\overline{p}\left(1-\overline{p}\right)}{n}}=u_{0,98}\sqrt{\frac{0,09\left(1-0,09\right)}{5000}}$$

$$=2,0537.\sqrt{\frac{0,09\left(1-0,09\right)}{5000}}=0,008$$

Khoảng tin cậy cho p: $\left(0,082;0,098\right)$ tức là từ 8,2% đến 9,8%.

b) Giả sử γ là độ tin cậy cầm tìm. Theo đề bài:

$$e=u_{\frac{1+\gamma}{2}}.\sqrt{\frac{\overline{p}\left(1-\overline{p}\right)}{n}}=0,005\Leftrightarrow u_{\frac{1+\gamma}{2}}=0,005.\sqrt{\frac{n}{\overline{p}\left(1-\overline{p}\right)}}=1,2354$$

$$\Rightarrow\frac{1+\gamma}{2}=0,8917\Leftrightarrow\gamma=0,7833$$

Do đó độ tin cậy là: $78,33\%$.

5. 34.

Một lô trái cây của một cửa hàng đựng trong các sọt, mỗi sọt 100 trái. Người ta tiến hành kiểm tra ngẫu nhiên 50 sọt, thì thấy có 450 trái không đạt tiêu chuẩn.

a) Tìm khoảng tin cậy 96% cho tỉ lệ trái cây không đạt tiêu chuẩn của lô hàng.

b) Nếu muốn ước lượng tỉ lệ trái cây không đạt tiêu chuẩn của lô hàng, với độ tin cậy 99% và sai số không lớn hơn 1%, thì cần kiểm tra bao nhiêu sọt?

Giải

a) Gọi p là tỉ lệ trái cây không đạt tiêu chuẩn của lô hàng.

Giá trị tỉ lệ mẫu: $\overline{p}=\dfrac{450}{5000}=0,09$

Khoảng tin cậy 96% cho $p: \left(\overline{p}-e; \overline{p}+e\right)$

$$e = u_{\frac{1+0,96}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\overline{p}\left(1-\overline{p}\right)}{n}} = u_{0,98}\sqrt{\frac{0,09\left(1-0,09\right)}{5000}}$$

$$= 2,0537.\sqrt{\frac{0,09\left(1-0,09\right)}{5000}} = 0,008$$

Khoảng tin cậy cho p: $\left(0,082; 0,098\right)$ tức là từ 8,2% đến 9,8%.

b) Gọi n_1 là số trái cây cần kiểm tra. Khi đó:

$$n_1 \geq u^2_{\frac{1+0,99}{2}} \cdot \frac{\overline{p}\left(1-\overline{p}\right)}{\varepsilon^2} = 2,5758^2 . \frac{0,09\left(1-0,09\right)}{0,01^2} = 5433,9$$

Do đó, $n_1 = 5434$ trái, do đó số sọt cần kiểm tra là: $S = \left[5434/100\right] + 1 = 55$ (sọt)

5. 35.

Một công ty sản xuất bột giặt muốn thăm dò mức độ tiêu thụ sản phẩm này trong thành phố H. Công ty tiến hành điều tra 500 hộ gia đình và có kết quả sau:

Nhu cầu (kg/tháng)	< 1	[1; 1,5)	[1,5; 2)	[2; 2,5)	[2,5; 3)	[3; 3,5)	≥ 3,5
Số hộ gia đình	21	147	192	78	34	16	12

Giả sử thành phố H có 10.000 hộ gia đình.

a) Hãy ước lượng nhu cầu bột giặt trung bình lớn nhất của toàn thành phố H trong một năm với độ tin cậy 96%

b) Để ước lượng nhu cầu bột giặt trung bình của một hộ trong một tháng với sai số ước lượng không quá 50 gam và độ tin cậy 95% thì cần điều tra thêm bao nhiêu hộ gia đình nữa?

Giải

a) Từ dữ liệu đã cho ta tính được:

Giá trị trung bình mẫu: $\overline{x} = 1,803$

Giá trị độ lệch chuẩn mẫu: $s = 0,6233$

Sai số ước lượng cho khoảng tin cậy 96% là: $e = u_{0,96}\dfrac{s}{\sqrt{n}} = \dfrac{s}{\sqrt{n}} = 1,7507.\dfrac{0,6233}{\sqrt{500}} = 0,0488$

Do đó nhu cầu bột giặc trung bình của một hộ lớn nhất là:

$\overline{x} + e = 1,803 + 0,0488 = 1,8518$ (kg)

Vậy nhu cầu lớn nhất của thành phố trong một năm là:

$1,8518 \times 10.000 \times 12 = 222.216\ (\text{kg})$.

b) Ta có $u_{0,975}\dfrac{s}{\sqrt{n}} \le 0,05 \Rightarrow n \ge \left(\dfrac{u_{0,975}}{0,05}.s\right)^2 = \left(\dfrac{1,96.0,6233}{0,05}\right)^2 = 596,9134$

Suy ra, $n_1 = 597$

Vậy cần điều tra thêm ít nhất 97 hộ nữa.

5. 36.

Một công ty sản xuất bột giặt muốn thăm dò mức độ tiêu thụ sản phẩm này trong thành phố H. Công ty tiến hành điều tra 500 hộ gia đình và có kết quả sau:

Nhu cầu (kg/tháng)	< 1	[1; 1,5)	[1,5; 2)	[2; 2,5)	[2,5; 3)	[3; 3,5)	$\ge 3,5$
Số hộ gia đình	21	147	192	78	34	16	12

Giả sử thành phố H có 10.000 hộ gia đình.

a) Những hộ có nhu cầu trên 2 kg trong một tháng được gọi là những hộ có nhu cầu sao. Tìm khoảng tin cậy 95% cho tỉ lệ những hộ có nhu cầu cao ở thành phố H.

b) Để ước lượng nhu cầu bột giặt trung bình của một hộ trong một tháng với sai số ước lượng không quá 50 gam và độ tin cậy 95% thì cần điều tra thêm bao nhiêu hộ gia đình nữa?

Giải

a) Từ dữ liệu đã cho ta tính được:

Giá trị trung bình mẫu: $\overline{x} = 1,803$

Giá trị độ lệch chuẩn mẫu: $s = 0,6233$

Giá trị tỉ lệ mẫu: $\overline{p} = \dfrac{140}{500} = 0,28$

Khoảng tin cậy 95% cho tỷ lệ những hộ có nhu cầu cao: $(\overline{x} - e; \overline{x} + e)$

sai số $e = u_{\frac{1+\gamma}{2}}.\sqrt{\dfrac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}} = u_{0,975}.0,0201 = 0,0394$

Khoảng tin cậy 95%: $(0,2406; 0,3194)$

b) Ta có $u_{0,975}\dfrac{s}{\sqrt{n}} \le 0,05 \Rightarrow n \ge \left(\dfrac{u_{0,975}}{0,05}.s\right)^2 = \left(\dfrac{1,96.0,6233}{0,05}\right)^2 = 596,9134$

Suy ra $n_1 = 597$

Vậy cần điều tra thêm ít nhất 97 hộ nữa.

5. 37.

Để đánh giá mức tiêu hao nhiên liệu của một loại xe ô tô, người ta theo dõi lượng tiêu hao nhiên liệu (lít/100 km) của 100 chuyến xe và có kết quả sau:

Lượng tiêu hao	[35; 40)	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)	[55; 60)
Số chuyến xe	14	20	36	22	8

a) Tìm khoảng tin cậy 95% cho lượng tiêu hao nhiên liệu trung bình của loại xe nói trên

b) Xe cần đưa vào kiểm tra kỹ thuật là xe có mức tiêu hao nhiên liệu từ 55 lít/100 km trở lên. Hãy ước lượng tỉ lệ xe cần đưa vào kiểm tra kỹ thuật **tối thiểu** ở độ tin cậy 95%.

Giải

a) Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ mức tiêu hao nguyên liệu cho mỗi chuyến xe. Từ số liệu trên ta xây dựng được bảng sau:

$\overline{x} = 47$

$$s^2 = \frac{1}{99}\left(\sum_{i=1}^{5} n_i x_i^2 - n\overline{x}^2\right) = 32,5758$$

$$e = u_{\frac{1+\gamma}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = u_{\frac{1+0,95}{2}} \cdot \frac{5,7075}{\sqrt{100}} = 1,96.\frac{5,7075}{\sqrt{100}} = 1,12$$

Do đó khoảng tin cậy 95% cho lượng tiêu hao nguyên liệu trung bình:

$$(45,88; 48,12)$$

b) Tỷ lệ xe cần kiểm tra kỹ thuật của mẫu: $\overline{p} = \frac{8}{100} = 0,08$

Tỉ lệ xe cần đưa vào kiểm tra kỹ thuật **tối thiểu** ở độ tin cậy 95% là $p \geq \overline{p} - e$

với $e = u_\gamma \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}} = u_{0,95}\frac{\sqrt{0,08.0,92}}{10} = 0,045$

Suy ra $p \geq 0,08 - 0,045 = 0,035$.

CHƯƠNG 6: KIỂM ĐỊNH GIẢ THIẾT

6. 1.

Trong một cuộc điều tra về nhịp mạch của 64 thanh niên làm nghề A, kết quả là nhịp mạch trung bình 74 lần/phút và độ lệch chuẩn bằng 9 lần/phút. Hãy kiểm định xem đặc điểm nghề A có làm cho nhịp mạch của thanh niên tăng quá mức bình thường không, biết rằng nhịp mạch bình thường của thanh niên là 72 lần / phút. (kết luận với mức $\alpha = 1\%$).

Giải:

Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ nhịp mạch của thanh niên làm nghề A. Ta cần kiểm định giả thiết:

$H_0 : \mu = 72;\ H_1 : \mu > 72$, ở mức $\alpha = 1\%$.

Nếu H_0 đúng thì biến ngẫu nhiên $U = \dfrac{\overline{X} - 72}{s}\sqrt{64} \sim N(0,1)$.

Với $\alpha = 1\%$, $gtth = u_{1-\alpha} = u_{0,99} = 2,5758$.

Với mẫu cụ thể ta có $u = \dfrac{74-72}{9}.8 = \dfrac{16}{9} = 1,778 < gtth$.

Vậy, ta chấp nhận giả thiết H_0 nghĩa nghề A không làm tăng nhịp đập của thanh niên.

6. 2. Điều tra Cholesterol toàn phần trong huyết thanh của 25 bệnh nhân bị một loại bệnh B, ta có trung bình cộng của lượng Cholesterol là 172 mg% và độ lệch chuẩn bằng 40 mg%. Theo tài liệu về hằng số sinh hoá bình thường của người Việt Nam thì lượng Cholesterol trung bình toàn phần trong huyết thanh là 156 mg% và tuân theo luật phân phối chuẩn.

Hỏi lượng Cholesterol của các bệnh nhân mắc bệnh B có cao hơn bình thường không? (kết luận ở mức $\alpha = 5\%$) .

Giải:

Kiểm định giả thiết

$H_0 : \mu = 156(mg\%);\ H_1 : \mu > 156\ (mg)$ ở mức $\alpha = 5\%$.

Nếu H_0 thì biến ngẫu nhiên $T = \dfrac{\overline{X} - 156}{S}\sqrt{25} \sim t(24)$

Với mức $\alpha = 0,05$ ta có $t^{(24)}_{1-0,05} = t^{(24)}_{0,95} = 1,7109$

Với mẫu cụ thể ta tính được:

$t = \dfrac{172-156}{40}5 = 2 > t^{24}_{0,95}$. Vậy H_0 bị bác bỏ nghĩa là lượng Cholesterol của bệnh nhân mắc bệnh B cao hơn bình thường.

6. 3. Một công ty bào chế một loại thuốc chữa dị ứng tuyên bố rằng thuốc của họ có hiệu quả không dưới 90% trong việc làm giảm cơn dị ứng trong vòng 8 giờ. Một mẫu gồm 200 người bị dị ứng sử dụng loại thuốc trên, có 160 người giảm cơn dị ứng. Hãy xác định xem lời tuyên bố của công ty có giá trị không? (ở mức ý nghĩa $\alpha = 0,07$).

Giải:

Gọi p là tỉ lệ người giảm dị ứng khi dùng thuốc của công ty trong vòng 8 giờ. Ta cần xác định xem p có bằng 90% trở lên hay không. Muốn vậy ta kiểm định giả thiết:

$H_0 : p = p_0 = 90\%$; $H_1 : p < p_0 = 90\%$ ở mức ý nghĩa $\alpha = 0{,}07$.

Nếu H_0 đúng thì biến ngẫu nhiên $U = \dfrac{P - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

Với mức $\alpha = 0{,}07$ ta có $gtth = -u_{1-\alpha} = -u_{0,93} = -1{,}4758$.

Với mẫu cụ thể ta có: $u = \dfrac{160/200 - 0{,}9}{\sqrt{0{,}9.0{,}1}}\sqrt{200} = -4{,}714 < gtth = -1{,}4758$.

Vậy ta bác bỏ giả thiết H_0 nghĩa là tuyên bố của công ty không có giá trị. Kết luận ở mức ý nghĩa 0,07.

6. 4. (3 điểm) Trước đây, Nhà máy Alpha sản xuất ra một loại sản phẩm với tỉ lệ phế phẩm 5%. Năm nay, sau đợt cải tiến kỹ thuật, để kiểm tra hiệu quả, người ta lấy ra ra một mẫu gồm 800 sản phẩm để kiểm tra thì thấy có 24 phế phẩm.

a) Với mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$, hãy kiểm định xem đợt cải tiến kỹ thuật có thực sự làm giảm tỉ lệ phế phẩm không?.

b) Sau đợt cải tiến kỹ thuật, nếu nhà máy báo cáo tỉ lệ phế phẩm là 2% thì có chấp nhận được không? (ở mức ý nghĩa $\alpha = 3\%$).

Giải:

a) Gọi p là tỷ lệ phế phẩm sau đợt cải tiến kĩ thuật, tỉ lệ mẫu . Ta cần kiểm định giả thiết sau:

$H_0 : p = p_0 = 5\%$; đối thiết $H_1 : p < p_0$ ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$.

Nếu H_0 đúng thì $U = \dfrac{\overline{P} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

Với mức $\alpha = 5\%$ ta có $gtth = -u_{1-\alpha} = -u_{0,95} = -1{,}65$.

Với mẫu cụ thể ta tính được

$$u = \frac{\overline{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} = \frac{0{,}03 - 0{,}05}{\sqrt{0{,}05.0{,}95}}\sqrt{800} = -2{,}6 < gtth$$

Vậy, ta bác bỏ H_0 nghĩa là đợt cải tiến kĩ thuật thật sự làm giảm tỷ lệ phế phẩm.

b) Ta kiểm định giả thiết $H_0 : p = p_0 = 2\%$; đối thiết $H_1 : p \neq p_0$ ở mức $\alpha = 3\%$.

Nếu H_0 đúng thì $U = \dfrac{\overline{P} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} \sim N(0,1)$.

Vơi s mức $\alpha = 3\%$ ta có $gtth = u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,985} = 2,17$.

Từ mẫu cụ thể ta tính được.

$$|u| = \frac{|\overline{p} - p_0|}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} = \frac{0,03-0,02}{\sqrt{0,02.0,98}}\sqrt{800} = 2,02 < gtth$$

Vậy ta chấp nhận H_0 nghĩa là chấp nhận lời tuyên bố của công ty.

6. 5. Tiền lương hàng tuần trung bình trên một mẫu gồm 30 công nhân trong một xí nghiệp lớn là 180 (ngàn đồng) với với độ lệch chuẩn 14 (ngàn đồng). Trong một xí nghiệp lớn khác, một mẫu gồm 40 công nhân được chọn ngẫu nhiên có tiền lương hàng tuần trung bình là 170 (ngàn đồng) với độ lệch chuẩn 10 (ngàn đồng). Tiền lương hàng tuần trung bình ở hai xí nghiệp trên có khác nhau không? (ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$). Giả sử tiền lương hàng tuần của hai xí nghiệp là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn có cùng phương sai.

Giải: Gọi X, Y là tiền lương hàng tuần của mỗi công nhân của hai xí nghiệp trên tương ứng. Kiểm định giả thiết $H_0 : \mu_X = \mu_Y ; H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ ở mức $\alpha = 5\%$.

Nếu H_0 đúng thì $T = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} \sim t(n+m-2)$

với $S^2 = \dfrac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}$

với mức $\alpha = 5\%$ ta có $gtth = t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n+m-2)} = t_{0,975}^{(68)} = 1,9955$

Với mẫu cụ thể ta tính được $s^2 = \dfrac{29.14^2 + 39.10^2}{78} = 140,94$

Do đó $|t_{tn}| = \left|\dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}}\right| = \dfrac{180-170}{\sqrt{140,94\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{40}\right)}} = 3,4876 > gtth$

Vậy ta bác bỏ H_0 nghĩa là tiền lương hàng tuần trung bình ở hai xí nghiệp trên là khác nhau.

6. 6. Gọi X và Y lần lượt là biến ngẫu nhiên chỉ khối lượng của trẻ sơ sinh trai và trẻ sơ sinh gái. Cho biết X và Y tuân theo luật phân phối chuẩn có cùng phương sai. Khảo sát ngẫu nhiên 20 trẻ sơ sinh trai, người ta tính được $\overline{x}$ = 3200 g, s_X = 400 g và 17 trẻ sơ sinh gái, người ta tính được $\overline{y}$ = 3000 g, s_Y = 380 g. Phải chăng khối lượng của trẻ sơ sinh trai lớn hơn khối lượng của trẻ sơ sinh gái? (kết luận với mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$)

Giải:

Kiểm định giả thiết $H_0 : \mu_X = \mu_Y ; H_1 : \mu_X > \mu_Y$ ở mức $\alpha = 5\%$.

Nếu H_0 đúng thì $T = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} \sim t(n+m-2)$

với $S^2 = \dfrac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}$; $n = 20; m = 17$.

Giá trị tới hạn $gtth = t_{1-\alpha}^{(n+m-2)} = t_{0,95}^{35} = 1,6896$

Với mẫu cụ thể ta có $s^2 = \dfrac{19.400^2 + 16.380^2}{35} = 152868,57$

$$t_{tn} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} = \frac{3200 - 3000}{\sqrt{152868,57\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{17}\right)}} = 1,55 < gtth$$

Ta chấp nhận H_0 nghĩa là trọng lượng của trẻ sơ sinh trai không lớn hơn trọng lượng của trẻ sơ sinh gái ($\alpha = 5\%$).

6. 7. Khối lượng của một loại sản phẩm do một nhà máy sản xuất là một biến ngẫu nhiên tuân luật phân phối chuẩn N(500; (8,5)^2). Sau một thời gian sản xuất, ban lãnh đạo nhà máy nghi ngờ rằng khối lượng của loại sản phẩm này có xu hướng giảm, nên tiến hành cân thử 25 sản phẩm và thu được kết quả sau:

Khối lượng (g)	480	485	490	495	500	510
Số sản phẩm	2	3	8	5	3	4

Với mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$, hãy cho kết luận về điều nghi ngờ trên.

Giải:

Từ số liệu ta tính được $\overline{x} = 494$; $s = 8,9$ $n = 25$.

Ta kiểm định giả thiết $H_0 : \mu = \mu_0 = 500; H_1 : \mu < \mu_0$ ở mức $\alpha = 5\%$.

Nếu H_0 đúng thì BNN $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$ với $n = 25; \sigma = 8,5; \mu_0 = 500$

Với mức $\alpha = 5\%$ ta có $gtth = -u_{1-\alpha} = -u_{0,95} = -1,65$

Với mẫu cụ thể giá trị của U là $u = \dfrac{494 - 500}{8,5}.5 = -3,53 < gtth$ nên H_0 bị bác bỏ nghĩa là điều nghi ngờ trên là đúng.

6. 8. Một công ty muốn đánh giá về hiệu quả của một đợt quảng cáo đối với số sản phẩm bán ra của công ty. 10 cửa hàng bán sản phẩm của công ty được chọn ngẫu nhiên để theo dõi số lượng sản phẩm bán ra trong một tuần trước đợt quảng cáo (TĐQC) và một tuần sau đợt quảng cáo (SĐQC).

Cửa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

hàng										
TĐQC	53	114	81	86	34	66	89	113	88	111
SĐQC	137	135	83	125	47	46	114	157	57	144

Hãy cho kết luận về hiệu quả của đợt quảng cáo (ở mức $\alpha = 5\%$).

Giải:

Gọi D là hiệu số giữa số sản phẩm bán ra sau quảng cáo và trước quảng cáo của mỗi của hàng. Bảng hiệu số:

D	84	21	2	39	13	-20	25	44	-31	33

Từ đó ta tính được $\overline{d} = 21; s_D = 32{,}98$.

Ta cần kiểm định giả thiết sau ở mức $\alpha = 5\%$.

$H_0 : \mu_D = 0;\ H_1 : \mu_D > 0$

Nếu H_0 đúng thì $T = \dfrac{\overline{D}\sqrt{n}}{S_D} \sim t(n-1)$

Với $\alpha = 5\%$ $\quad gtth = t_{1-\alpha}^{(9)} = 1{,}8331$

Với mẫu cụ thể ta có $t = \dfrac{21\sqrt{10}}{32{,}98} = 2{,}01 > gtth$

Nên H_0 bị bác bỏ.

Vậy, đợt quảng cáo thật sự làm tăng số lượng sản phẩm bán ra.

6. 9. Một máy sản xuất tự động có tỉ lệ sản xuất ra sản phẩm loại A lúc đầu là 48%. Máy được cải tiến và sau một thời gian áp dụng, người ta kiểm tra 40 hộp, mỗi hộp gồm 10 sản phẩm và ghi lại số sản phẩm loại A trong mỗi hộp (SSPLA/h) như sau :

SSPLA/h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Số hộp	2	0	4	6	8	10	4	5	1	0

Hãy cho kết luận về hiệu quả của việc cải tiến máy ở mức ý nghĩa $\alpha = 0{,}05$.

Giải:

Gọi p là tỉ lệ sản phẩm lạo A sau đợt cải tiến kỹ thuật.

Tỉ lệ sản phẩm loại A trên mẫu khảo sát:

$$\overline{p} = \frac{215}{400} = \frac{43}{80}$$

Kiểm định giả thiết:

$H_0 : p = p_0 = 48\%;\ H_1 : p > p_0$ ở mức $\alpha = 5\%$.

Nếu H_0 đúng thì BNN

$$U = \frac{\overline{P} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$ giá trị tới hạn bằng: $u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1,6449$

Với mẫu cụ thể, ta tính được:

$$u = \frac{\overline{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} = \frac{\frac{43}{80} - 0,48}{\sqrt{0,48(1-0,48)}}\sqrt{400} = 2,3018$$

Vì $u > gtth$ nên H_0 bị bác bỏ nghĩa là việc cải tiến kỹ thuật thất sự mang lại hiệu quả.

6. 10. Khối lượng trung bình khi xuất chuồng ở một trại chăn nuôi gà công nghiệp năm trước là 3,3 kg/con. Năm nay người ta sử dụng loại thức ăn mới. Sau một thời gian, cân thử 15 con khi xuất chuồng, có các số liệu sau: (đơn vị kg)

3,25; 2,50; 4,00; 3,75; 3,80; 3,90; 4,02;

3,60; 3,80; 3,20; 3,82; 3,40; 3,75; 4,00; 3,50,

Giả thiết khối lượng gà là biến ngẫu nhiên phân phối theo qui luật chuẩn với phương sai 0,04.

Với mức ý nghĩa α = 0,05, hãy cho kết luận về tác dụng của loại thức ăn mới.

Giải:

Gọi X là BNN chỉ khối lượng gà khi xuất chuồng. Theo giả thiết $X \sim N(\mu; 0,2^2)$. Từ số liệu đã cho ta tính được: $\overline{x} = 3,62$; $s = 0,405$.

Nếu thức ăn mới có tác dụng tốt thì khối lượng trung bình của gà xuất chuồng năm nay sẽ cao hơn. Muốn kết luận về điều đó ta kiểm định giả thiết sau:

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 3,3(\text{kg});\ H_1 : \mu > \mu_0 \text{ ở mức ý nghĩa } \alpha = 5\%.$$

Nếu H_0 đúng thì BNN $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$ $gtth = u_{1-\alpha} = u_{1=0,05} = u_{0,95} = 1,6449$

Với mẫu cụ thể ta tính được:

$$u = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{3,62 - 3,3}{0,2}\sqrt{15} = 6,2$$

Vì $u > gtth$ nên H_0 bị bác bỏ.

Vậy, khối lượng trung bình của gà xuất chuồng năm nay cao hơn năm trước, nghĩa là thức ăn mới có tác dụng tăng trọng lượng gà.

6. 11. Để điều tra khối lượng gà xuất chuồng ở một trại chăn nuôi gà công nghiệp năm nay. Người ta cân thử 15 con khi xuất chuồng, có các số liệu sau: (đơn vị kg)

3,25; 2,50; 4,00; 3,75; 3,80; 3,90; 4,02;

3,60; 3,80; 3,20; 3,82; 3,40; 3,75; 4,00; 3,50,

Giả thiết khối lượng gà là biến ngẫu nhiên phân phối theo qui luật chuẩn với phương sai 0,04.

Có nên báo cáo khối lượng trung bình của gà xuất chuồng năm nay là 3,7 kg/con hay không? (ở mức ý nghĩa $\alpha = 0{,}05$).

Giải:

Gọi X là BNN chỉ khối lượng gà xuất chuồng năm nay.

Kiểm định giả thiết

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 3{,}7\ (kg);\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \text{ ở mức } \alpha = 5\%.$$

Nếu H_0 đúng thì BNN $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

Với mức ý nghĩa $\alpha = 0{,}05$ $gtth = u_{1-\alpha/2} = u_{1=0{,}025} = u_{0{,}975} = 1{,}96$

Với mẫu cụ thể ta tính được:

$$u = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{3{,}62 - 3{,}7}{0{,}2}\sqrt{15} = -1{,}55$$

Vì $|u| < gtth$ nên H_0 không bị bác bỏ.

Vậy, ở mức ý nghĩa 5% ta công nhận báo cáo của trại chăn nuôi.

6. 12. Một cuộc điều tra của Hội phụ nữ để đánh giá về một dư luận xã hội cho rằng lương của phụ nữ thấp hơn lương của nam giới. Một mẫu nhiên gồm 4 đàn ông có lương trung bình là 78,0 (ngàn đồng), với độ lệch chuẩn mẫu là 24,4; một mẫu ngẫu nhiên khác độc lập với mẫu trên gồm 4 phụ nữ có lương trung bình là 63,5 (ngàn đồng), với độ lệch chuẩn là 20,2. Giả sử rằng lương của cả nam và nữ giới đều là các biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn có cùng phương sai. Hãy cho kết luận về cuộc điều tra trên ở mức ý nghĩa 10%.

Giải:

Gọi X, Y theo thứ tự là lương của đàn ông và phụ nữ. Ta kiểm định giả thiết: $H_0 : \mu_X = \mu_Y; H_1 : \mu_X > \mu_Y$ ở mức $\alpha = 10\%$.

Nếu H_0 đúng thì BNN $U = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{S^2\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}\right)}} \sim t(n+m-2)$

Vơi $S^2 = \dfrac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}$

Với mức ý nghĩa $\alpha = 10\%$, $gtth = t_{1-\alpha}^{(n+m-2)} = t_{0{,}9}^{(6)} = 1{,}4398$

Với mẫu cụ thể: $s^2 = 22{,}4^2$

Và $t = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{s^2\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}\right)}} = \dfrac{78 - 63{,}5}{\sqrt{22{,}4^2\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\right)}} = 0{,}915$

Vì $t < gtth$ nên H_0 không bị bác bỏ.

Vậy, kết luận của cuộc điều tra chưa đúng.

6. 13. Người ta muốn nghiên cứu tác dụng của việc cho sinh viên đi thực tế xem sự tiếp thu kiến thức có tốt hơn không bằng cách so sánh điểm thi của nhóm sinh viên không đi thực tế (SVKĐTT) với nhóm sinh viên có đi thực tế (SVCĐTT). Kết quả như sau:

Điểm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
SVCĐTT	0	0	3	9	7	5	17	10	11	4	1
SVKĐTT	3	3	6	11	7	13	10	12	4	1	3

Gọi X và Y lần lượt là biến ngẫu nhiên biểu thị điểm số của sinh viên có đi thực tế và sinh viên không đi thực tế.

Điểm thi của nhóm sinh viên có đi thực tế có thực sự tốt hơn không? (kết luận ở mức ý nghĩa $\alpha = 0,01$)

Giải:

Kiểm định giả thiết $H_0 : \mu_X = \mu_Y ; H_1 : \mu_X > \mu_Y$ ở mức ý nghĩa $\alpha = 0,01$

Nếu H_0 đúng thì BNN $U = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{s_X^2}{n} + \dfrac{s_Y^2}{m}}} \sim N(0,1)$

Với $\alpha = 0,01$ ta có $gtth = u_{1-\alpha} = u_{1-0,01} = u_{0,99} = 2,3263$

Với mẫu cụ thể ta tính được

Từ bảng số liệu ta có: $n = 67$ $\overline{x} = 5,85$; $s_X = 2$; $m = 73$; $\overline{y} = 4,88$; $s_Y = 2,39$.

$$u_{tn} = \frac{5,85 - 4,88}{\sqrt{\dfrac{2^2}{67} + \dfrac{2,39^2}{73}}} = 2,6116 > gtth$$

Nên H_0 bị bác bỏ nghĩa là SVCĐTT có điểm cao hơn SVKĐTT.

6. 14. Một công ty vận tải, muốn đánh giá tác dụng của một loại chất phụ gia pha vào xăng, đã chọn 10 chiếc xe. Cho mỗi chiếc chạy hai lần với cùng điều kiện như nhau; nhưng lần đầu với xăng không có chất phụ gia (KPG), lần sau, với cùng một lượng xăng như lần đầu, có chất phụ gia (CPG). Người ta ghi lại số dặm đã đi được của 10 chiếc xe trên trong hai lần như sau:

Xe	KPG	CPG		Xe	KPG	CPG

1	26,2	26,7	6	15,8	15,7
2	25,7	25,8	7	13,9	14,2
2	22,3	21,9	8	12,0	12,6
4	19,6	19,3	9	11,5	11,9
5	18,1	18,4	10	10,0	10,3

Có sự khác nhau giữa số dặm trung bình đi được với xăng không có chất phụ gia và có chất phụ gia không? (kết luận ở mức ý nghĩa 5%)

Giải:

Gọi X, Y lần lượt là các BNN chỉ số dăm đi được của xe KPG và xe CPG. Đặt $D = X - Y$. Bảng số liệu cho D:

Xe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_i	-0,5	-0,1	0,4	0,3	-0,3	0,1	-0,3	-0,6	-0,4	-0,3

Từ đó ta tính được: $\bar{d} = -0,17, s_D = 0,3368$

Để xét xem khác nhau về số dặm trung bình giữa xe KPG và xe CPG ta kiểm định giả thiết sau:

$H_0 : \mu_D = 0; \mu_D \neq 0$ ở mức $\alpha = 5\%$.

Nếu H_0 đúng thì BNN $T = \dfrac{\bar{D}}{S_D}\sqrt{10} \sim t(9)$

Với $\alpha = 5\% = 0,05$: $gtth = t^{(9)}_{1-\frac{0,05}{2}} = t^{(9)}_{0,975} = 2,2622$

Với mẫu cụ thể ta có: $|t| = \left|\dfrac{-0,17}{0,3368}\sqrt{10}\right| = 1,596$

Vì $|t| < gtth$ nên H_0 được chấp nhận.

Vậy, ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$ không có sự khác nhau giữa số dặm trung bình đi được với xăng không có chất phụ gia và có chất phụ gia.

6. 15. Khối lượng bao gạo (KLBG) là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn $N(50;0,01)$. Có nhiều ý kiến của khách hàng phản ánh là khối lượng bị thiếu. Một nhóm thanh tra đã cân ngẫu nhiên 25 bao gạo trong kho và được kết quả như sau:

KLBG (kg)	(48; 48,5]	(48,5; 49]	(49; 49,5]	(49,5; 50]	(50; 50,5]
Số bao gạo	2	5	10	6	2

Hãy kiểm định xem ý kiến của khách hàng phản ánh có đúng không? (kết luận ở mức ý nghĩa α = 5%).

Giải:

Gọi X là BNN chỉ khối lượng bao gạo. Từ số liệu đã cho ta tính được $\overline{x} = 49,27;\ s = 0,53$.

Ta kiểm định giả thiết sau:

$H_0 : \mu = \mu_0 = 50(\text{kg});\ H_1 : \mu < \mu_0$ ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$

Nếu H_0 đúng thì BNN $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

Với mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$ $gtth = -u_{1-0,05} = -1,6449$

Với mẫu cụ thể: $u = \dfrac{49,27 - 50}{0,1}\sqrt{25} = -36,5$

Vì $u < gtth$ nên H_0 bị bác bỏ. Nghĩa là ý kiến của khách hàng phản ánh là đúng (α = 5%).

6. 16. Một mẫu gồm 300 cử tri ở khu vực A và một mẫu gồm 200 cử tri ở khu vực B cho thấy có 56% và 48%, theo thứ tự, ủng hộ ứng cử viên X. Ở mức ý nghĩa 5%, hãy kiểm định giả thiết:

a) Có sự khác biệt giữa hai khu vực về sự ủng hộ ứng cử viên X.

b) Ứng cử viên X được ủng hộ hơn ở khu vực A.

Giải:

Gọi p_A và p_B theo thứ tự là tỷ lệ ủng hộ ứng cử viên X ở khu vực A và B.

a) Ta kiểm định giả thiết $H_0 : p_A = p_B;\ H_1 : p_A \neq p_B$ ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$.

Nếu H_0 đúng thì $U = \dfrac{\overline{P}_A - \overline{P}_B}{\sqrt{p_0(1-p_0)\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}\right)}} \sim N(0,1)$ với

$p_0 = \dfrac{n\overline{p}_A + m\overline{p}_B}{n+m} = 0,528$

Với $\alpha = 5\%$ ta có $gtth = u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,975} = 1,96$

Giá trị thực nghiệm $|u| = \dfrac{|0,56 - 0,48|}{\sqrt{0,528.0,472\left(\dfrac{1}{300} + \dfrac{1}{200}\right)}} = 1,755 < gtth$

Do đó H_0 không bị bác bỏ nghĩa là sự khác nhau giữa tỷ lệ ủng hộ giữa hai khu vực A, B đối với ứng cử viên X không có ý nghĩa về mặt thống kê.

b) Ta kiểm định giả thiết $H_0 : p_A = p_B;\ H_1 : p_A > p_B$ ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$.

Nếu H_0 đúng thì $U = \dfrac{\overline{P}_A - \overline{P}_B}{\sqrt{p_0(1-p_0)\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}\right)}} \sim N(0,1)$

$$p_0 = \frac{n\overline{p}_A + m\overline{p}_B}{n+m} = 0,528$$

Với $\alpha = 5\%$ ta có $gtth = u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1,65$

$$u = \frac{0,56 - 0,48}{\sqrt{0,528.0,472\left(\frac{1}{300} + \frac{1}{200}\right)}} = 1,755 > gtth$$

Nên H_0 bị bác bỏ nghĩa là ứng cử viên X được ủng hộ nhiều hơn ở khu vực A.

6. 17. Điều tra ngẫu nhiên 200 người có hút thuốc lá, thấy có 28 người bị lao phổi; 170 người không hút thuốc lá, thấy có 12 người bị lao phổi. Tỉ lệ lao phổi giữa những người có và không hút thuốc lá có khác khau không? (kết luận ở mức ý nghĩa α = 1%).

Giải:

Gọi p_1, p_2 lần lượt là tỉ lệ lao phổi những người có hút thuốc lá và không hút thuốc lá. Ta kiểm định giả thiết sau:

$H_0 : p_1 = p_2; H_1 : p_1 \neq p_2$ ở mức $\alpha = 1\%$.

Nếu H_0 đúng thì BNN $U = \dfrac{\overline{P}_1 - \overline{P}_2}{\sqrt{p_0(1-p_0)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} \sim N(0,1)$

Với $p_0 = \dfrac{np_1 + mp_2}{n+m} = \dfrac{28+12}{370} = \dfrac{40}{370} = \dfrac{4}{37}$

Với mức $\alpha = 1\%$, $gtth = u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,995} = 2,5758$

Với mẫu cụ thể ta có:

$$u = \frac{\overline{p}_1 - \overline{p}_2}{\sqrt{p_0(1-p_0)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} = \frac{\frac{28}{200} - \frac{12}{170}}{\sqrt{\frac{4}{37}\left(1 - \frac{4}{37}\right)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} = 2,1428$$

Ta có $|u| < gtth$ nên H_0 không bị bác bỏ nghĩa là tỉ lệ lao phổi giữa những người có và không hút thuốc lá không khác khau (α = 1%).

6. 18. Một nhà máy có hai phân xưởng A và B cùng sản xuất một loại trục máy. Sau một thời gian hoạt động, chọn ngẫu nhiên 20 trục máy do phân xưởng A sản xuất, người ta đo được đường kính của chúng như sau (đơn vị mm)

250; 249; 251; 253; 248; 250; 250; 252; 257; 245;

248; 247; 249; 250; 280; 250; 247; 253; 256; 249.

Giả sử đường kính của các trục máy ở hai phân xưởng A và B tuân theo luật phân phối chuẩn có cùng phương sai.

Đo ngẫu nhiên đường kính 20 trục máy do phân xưởng B sản xuất, người ta tính được đường kính trung bình là 249,8 với phương sai 56,2. Hãy kiểm định, ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$, giả thiết H_0 cho rằng đường kính trung bình các trục máy được sản xuất ở hai phân xưởng là như nhau đối với giả thiết H_1 cho rằng chúng khác nhau.

Giải:

Gọi X, Y lần lượt là đường kính trục máy do phân xưởng A, B tương ứng sản xuất.

Kiểm định giả thiết

$H_0 : \mu_X = \mu_Y$; $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$.

Nếu H_0 đúng thì BNN $T = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{S^2\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}\right)}} \sim t(n+m-2)$

Với $n = 20$; $m = 20$ và $S^2 = \dfrac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}$

Với ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$, $gtth = t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n+m-2)} = t_{0,975}^{(38)} = 2,0244$

Với mẫu cụ thể: $\overline{x} = 251,25$ và $s_X = 7,7111$

$$s^2 = \frac{19.s_X^2 + 19s_Y^2}{38} = \frac{19.7,7111^2 + 19.56,2}{38} = 57,83$$

$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{s^2\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}\right)}} = \frac{251,25 - 249,8}{\sqrt{57,83\left(\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{20}\right)}} = 0,6029$$

Vì $|t| < gtth$ nên H_0 được chấp nhận. Đường kính trung bình các trục máy được sản xuất ở hai phân xưởng là như nhau (ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$).

6. 19. Phân xưởng A của một nhà máy sản xuất một loại trục máy. Sau một thời gian hoạt động, chọn ngẫu nhiên 20 trục máy do phân xưởng A sản xuất, người ta đo được đường kính của chúng như sau (đơn vị mm)

250; 249; 251; 253; 248; 250; 250; 252; 257; 245;

248; 247; 249; 250; 280; 250; 247; 253; 256; 249.

Giả sử đường kính của các trục máy của phân xưởng A tuân theo luật phân phối chuẩn. Biết đường kính của một trục máy do phân xưởng A sản xuất, theo qui định là 250 mm. Hãy cho kết luận về chất lượng sản xuất của phân xưởng A ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$.

Giải:

Gọi X lần lượt là đường kính trục máy do phân xưởng A sản xuất. Từ số liệu ta có:

$\overline{x} = 251,25$ và $s = 7,7111$

Ta kiểm định giả thiết sau:

$H_0 : \mu_X = \mu_0 = 250; H_1 : \mu_X \neq \mu_0$ ở mức $\alpha = 5\%$.

Nếu H_0 đúng thì BNN $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$

Với mức $\alpha = 5\%$ $gtth = t^{(19)}_{1-\frac{\alpha}{2}} = t^{(19)}_{0,975} = 2,0930$

Với mẫu cụ thể ta có: $t = \dfrac{251,25 - 250}{7,111}\sqrt{20} = 0,786$

Vì $|t| < gtth$ nên H_0 đước chấp nhận. Do đó Tình hình sản xuất của phân xưởng A bình thường (kết luận ở mức ý nghĩa α = 5%).

6. 20. Sản phẩm của một xí nghiệp đúc cho phép số khuyết tật trung bình cho một sản phẩm là 3. Sau một đợt cải tiến kỹ thuật, người ta lấy ngẫu nhiên 36 sản phẩm để kiểm tra số khuyết tật trên mỗi sản phẩm (SKTTMSP). Kết quả thu được như sau:

SKTTMSP	0 6	1	2	3	4	5
Số sản phẩm	7 1	4	4	6	8	6

Hãy cho kết luận về hiệu quả của đợt cải tiến kỹ thuật đối với số khuyết tật trung bình của một sản phẩm ở mức ý nghĩa α = 10%.

Giải:

Từ số liệu ta tính được $\overline{x} = 2,7222; s = 1,86$

Để kết luận về hiệu quả đợt cải tiến kỹ thuật ta kiểm định giả thiết:

$H_0 : \mu = \mu_0 = 3; H_1 : \mu < \mu_0$ ở mức ý nghĩa α = 10%

Nếu H_0 đúng thì BNN $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{s}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

Với ở mức ý nghĩa α = 10% $gtth = -u_{1-\alpha} = -u_{0,9} = -1,2816$

Với mẫu cụ thể $u = \dfrac{2,722 - 3}{1,86}\sqrt{36} = -0,896$

Vì $u > gtth$ nên H_0 không bị bác bỏ nghĩa là đợt cải tiến kỹ thuật không mang lại hiệu quả (kết luận ở mức ý nghĩa α = 10%).

6. 21. Sản phẩm của một xí nghiệp đúc cho phép số khuyết tật trung bình cho một sản phẩm là 3. Sau một đợt cải tiến kỹ thuật, người ta lấy ngẫu nhiên 36 sản phẩm để kiểm tra số khuyết tật trên mỗi sản phẩm (SKTTMSP). Kết quả thu được như sau:

SKTTMSP	0	1	2	3	4	5	6
Số sản phẩm	7	4	4	6	8	6	1

Sản phẩm có không quá 2 khuyết tật được gọi là sản phẩm loại A. Tỉ lệ sản phẩm loại A trước đợt cải tiến kỹ thuật là 40%. Đợt cải tiến kỹ thuật có thực sự làm tăng tỉ lệ sản phẩm loại A không? (kết luận ở mức ý nghĩa 5%).

Giải:

Gọi p là tỉ lệ sản phẩm loại A. Tỉ lệ mẫu: $\overline{p} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Kiểm định giả thiết

$$H_0 : p = p_0 = 40\%; H_1 : p > p_0 \text{ ở mức ý nghĩa } \alpha = 5\%$$

N Nếu H_0 đúng thì BNN $U = \frac{\overline{P} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

Với ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$, $gtth = u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1,6449$

Với mẫu cụ thể ta có: $u = \frac{5/12 - 0,4}{\sqrt{0,4(1-0,4)}}\sqrt{36} = 0,204$

Vì $u < gtth$ nên H_0 không bị bác bỏ.

Vậy, đợt cải tiến kỹ thuật không làm tăng tỉ lệ sản phẩm loại A. (kết luận ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$).

6. 22. Những thống kê trong năm trước cho thấy một người Mỹ đi du lịch ở châu Âu trong vòng 3 tuần sẽ chi hết 1010 USD cho việc mua sắm. Năm nay, người ta thống kê trên 50 khách du lịch thì thấy số tiền trung bình mà họ chi tiêu là 1090 USD và độ lệch chuẩn là 300 USD. Với mức ý nghĩa $\alpha = 1\%$ hãy cho biết mức chi tiêu của những khách du lịch năm nay có tăng so với năm trước không?

Giải:

Gọi X là BNN chỉ mức chi tiêu của mỗi khách du lịch trong năm nay, $\mu = EX$. Ta kiểm định giả thiết

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 1010; H_1 : \mu > \mu_0 \text{ ở ý nghĩa } \alpha = 1\%$$

Nếu H_0 đúng thì BNN $U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

Với ý nghĩa $\alpha = 1\%$, $gtth = u_{1-\alpha} = u_{0,99} = 2,3263$

Với mẫu cụ thể ta có: $u = \dfrac{1090-1010}{300}\sqrt{50} = 1,8856$

Vì $u < gtth$ nên H_0 không bị bác bỏ.

Vậy, chưa đủ cơ sở để kết luận mức chi tiêu của những khách du lịch năm nay tăng.

6. 23. Một hãng bào chế thuốc đang thử nghiệm hai loại thuốc gây mê A và B mới. Việc thử nghiệm được tiến hành trên hai nhóm thú vật khác nhau. Nhóm thứ nhất gồm 100 con dùng thuốc A thì có 71 con bị mê; nhóm thứ hai gồm 90 con dùng thuốc B thì có 58 con bị mê. Hãng bào chế muốn kiểm định xem tác dụng của hai loại thuốc trên có khác nhau không ở mức ý nghĩa 5%. Hãy cho biết kết luận.

Giải:

Gọi p_1 và p_2 lần lượt là tỉ lệ con vật bị mê khi dùng thuốc A, B tương ứng. Giá trị tỉ lệ mẫu đối với 2 loại thuốc đó là $\overline{p}_1 = \dfrac{71}{100}$; $\overline{p}_2 = \dfrac{58}{90}$.

Tỉ lệ chung là $\overline{p} = \dfrac{71+58}{190} = \dfrac{129}{190} = 0,6789$. Ta kiểm định giả thiết $H_0 : p_1 = p_2; H_1 : p_1 \neq p_2$ ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$.

Nếu H_0 đúng thì BNN $U = \dfrac{\overline{P}_1 - \overline{P}_2}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}\right)}} \sim N(0,1)$

Với ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$, $gtth = u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,975} = 1,96$

Với mẫu cụ thể ta tính được:

$$u = \frac{\overline{p}_1 - \overline{p}_2}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}\right)}} = \frac{\dfrac{71}{100} - \dfrac{58}{90}}{\sqrt{\dfrac{129}{190}\left(1-\dfrac{129}{190}\right)\left(\dfrac{1}{100}+\dfrac{1}{90}\right)}} = 0,017$$

Vì $|u| < gtth$ nên H_0 không bị bác bỏ.

Vậy, tác dụng của hai loại thuốc trên không khác nhau ở mức ý nghĩa 5%.

6. 24. Với ý muốn làm tăng chỉ số mỡ sữa của loại giống bò A, một trại chăn nuôi cho lai bò giống A với một loại bò giống B. Đo chỉ số mỡ sữa của 130 con bò lai giống được chọn ngẫu nhiên trong đàn bò của trại, người ta có kết

Chỉ số mỡ sữa	Số bò lai

[3,0; 3,6)	2
[3,6; 4,2)	8
[4,2; 4,8)	35
[4,8; 5,4)	43
[5,4; 6,0)	22
[6,0; 6,6)	15
[6,6; 7,2)	5

Biết rằng chỉ số mỡ sữa trung bình của giống bò A thuần chủng là 4,95. Hãy cho kết luận về hiệu quả của việc lai giống ở mức ý nghĩa 1%.

Giải:

Gọi X là BNN chỉ chỉ số mỡ sữa của giống bò lai. Từ số liệu ta tính được: $\overline{x}=5{,}15$ và $s=0{,}77$. Ta kiểm định giả thiết:

$$H_0:\mu=\mu_0=4{,}95;\ H_1:\mu>\mu_0 \text{ ở mức ý nghĩa } \alpha=1\%.$$

Nếu H_0 đúng thì BNN $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{s}\sqrt{n}\sim N(0,1)$

Với ở mức ý nghĩa $\alpha=1\%$, $gtth=u_{1-\alpha}=u_{0,99}=2{,}3263$

Với mẫu cụ thể ta tính được:

$$u=\frac{5{,}15-4{,}95}{0{,}77}\sqrt{130}=2{,}96$$

Vì $u>gtth$ nên H_0 bị bác bỏ.

Vậy, chỉ số mỡ sữa của giống bò lai cao hơn bò thuần chủng.

6. 25. Điều tra về một nguyên nhân gây ung thư phổi: Thăm dò trong 200 người có hút thuốc lá, thấy có 28 người bị K phổi; trong 170 người không không hút thuốc lá, có 12 người bị K phổi. Hỏi tỉ lệ người bị K phổi trên những người hút thuốc lá có cao hơn tỉ lệ đó trên những người không hút thuốc lá không? (Kết luận ở mức $\alpha=5\%$).

Giải:

Gọi p_1,p_2 lần lượt là tỉ lệ người bị K phổi trong số những người hút thuốc và không hút thuốc. Ta kiểm định giả thiết:

$H_0:p_1=p_2;\ H_1:p_1>p_2$ ở mức $\alpha=5\%$

Nếu H_0 đúng thì BNN $U=\dfrac{\overline{P}_1-\overline{P}_2}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}\right)}}\sim N(0,1)$

Với $\alpha=5\%$, $gtth=u_{1-\alpha}=u_{0,95}=1{,}6449$

Với mẫu cụ thể ta tính được:

$$\overline{p}_1=\frac{28}{200}=\frac{7}{50};\ \overline{p}_2=\frac{6}{85};\ \overline{p}=\frac{28+12}{200+170}=\frac{4}{37}$$

$$u = \frac{\overline{p}_1 - \overline{p}_2}{\sqrt{\overline{p}\left(1-\overline{p}\right)\left(\frac{1}{200}+\frac{1}{170}\right)}} = 2,14$$

Ta có $u > gtth$ nên H_0 bị bác bỏ. Vậy tỉ lệ bị K phổi trong số những người hút thuốc là cao hơn tỉ lệ đó trên những nguoif không hút thuốc lá.

6. 26. Nếu máy móc hoạt động bình thường thì khối lượng một sản phẩm tuân theo luật phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn không quá 1kg. Có thể coi máy móc còn hoạt động bình thường hay không nếu cân thử 30 sản phẩm do máy đó sản xuất ra, thì tính được độ lệch chuẩn là 1,1 kg. Yêu cầu kết luận ở mức ý nghĩa $\alpha = 1\%$.

Giải: Kiểm định giả thiết về phương sai:

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 1; H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ ở mức ý nghĩa $\alpha = 1\%$

Nếu H_0 đúng thì $Y = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_o^2} \sim \chi^2(n-1)$

Với mẫu cụ thể ta có $y = \dfrac{29.1,1^2}{1} = 35,09$

Với $\alpha = 0,01$ ta có $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{\frac{0,01}{2}}(29) = 13,121$

$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{1-\frac{0,01}{2}}(29) = 52,336$

Do $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < y < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ nên H_0 không bị bác bỏ nghĩa là:

Chưa đủ cơ sở để nói rằng máy móc hoạt động không bình thường.

6. 27. Một nhà sản xuất bóng đèn cho rằng chất lượng bóng đèn được coi là đồng đều nếu tuổi thọ của bóng đèn có độ lệch chuẩn bằng 1000 hoặc ít hơn. Lấy ngẫu nhiên 10 bóng để kiểm tra, thì được độ lệch chuẩn mẫu là 1150, Vậy, với mức ý nghĩa 5%, có thể coi chất lượng bóng đèn do công ty đó sản xuất là đồng đều không? Biết rằng tuổi thọ của bóng đèn là một BNN có phân phối chuẩn.

Giải:

Kiểm định giả thiết về phương sai dạng $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 1000^2; H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ ở mức $\alpha = 5\%$.

Nếu H_0 đúng thì $Y = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_o^2} \sim \chi^2(n-1)$

Giá trị tơi hạn: $gtth = \chi^2_{1-\alpha}(n-1) = \chi^2_{0,95}(9) = 16,919$

Với mẫu cụ thể ta có $y = \dfrac{9.1150^2}{1000^2} = 11,9025 < gtth$

H_0 được chấp nhận nghĩa là có thể coi chất lượng bóng đèn do công ty đó sản xuất là đồng đều.

6. 28. Tại một nông trường, để điều tra khối lượng của một loại trái cây, sau một đợt bón một loại phân mới, người ta cân thử một số trái cây được chọn ngẫu nhiên và được kết quả sau:

Khối lượng (gam)	Số trái cây
[45, 50)	2
[50, 55)	11
[55, 60)	25
[60, 65)	74
[65, 70)	187
[70, 75)	43
[75, 80)	16
≥ 80	3

Trước kia, khối lượng trung bình của mỗi trái là 65 gam. Hãy đánh giá xem loại phân bón mới có mang lại hiệu quả không? (kết luận ở mức ý nghĩa $\alpha = 1\%$).

Giải:

Từ số liệu đã cho ta tính được $n = 361;\ \bar{x} = 66,38;\ s = 5,41$

Kiểm định giả thiết $H_0 : \mu = \mu_0 = 65(g);\ H_1 : \mu > \mu_0$ ở mức $\alpha = 1\%$

Nếu H_0 đúng thì $U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{s}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

Với $\alpha = 0,01$ ta suy ra: $gtth = u_{1-\alpha} = u_{0,99} = 2,33$

Với mẫu cụ thể ta tính được: $u = \dfrac{66,38 - 65}{5,41}\sqrt{361} = 4,85 > gtth$

Vậy H_0 bị bác bỏ nghĩa là: loại phân bón mới có mang lại hiệu quả. (kết luận ở mức ý nghĩa $\alpha = 1\%$).

6. 29. Một công ty thương mại, dựa vào kinh nghiệm quá khứ, đã xác định rằng vào cuối năm thì 80% số hoá đơn đã được thanh toán đầy đủ, 10% khất lại 1 tháng, 6% khất lại 2 tháng, và 4% khất lại hơn 2 tháng. Vào cuối năm nay, công ty kiểm tra một mẫu ngẫu nhiên gồm 400 hoá đơn và thấy rằng: 287 hoá đơn đã được thanh toán đầy đủ, 49 khất lại 1 tháng, 30 khất lại 2 tháng và 34 khất lại hơn 2 tháng. Như vậy, việc thanh toán hoá đơn năm nay có còn theo qui luật như những năm trước không? (kết luận ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$).

Giải: Ta kiểm định giả thiết về phân phối.

H_0 : Việc thanh toán hoá đơn năm nay theo qui luật năm trước

H_1: Việc thanh toán hoá đơn năm nay không theo qui luật năm trước.

Ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$.

Bảng tần số lý thuyết và thực nghiệm:

	Thanh toán đầy đủ (x_1)	Khuất lại 1 tháng (x_2)	Khuất lại 2 tháng (x_3)	Khuất lại hơn 2 tháng (x_4)
Tần số quan sát	287	49	30	34
Tần số lý thuyết	320	40	24	16

Ta có:

$$Q^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = \frac{(287-320)^2}{320} + \frac{(49-40)^2}{40} + \frac{(30-24)^2}{24} + \frac{(34-16)^2}{16} = 27,178$$

Với $\alpha = 5\%$, $gtth = \chi^2_{1-\alpha}(3) = \chi^2_{0,95}(3) = 7,815$

Ta thấy $Q^2 > \chi^2_{1-\alpha}(3)$ nên:

Việc thanh toán hoá đơn năm nay không còn theo qui luật như những năm trước. (kết luận ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$).

6. 30. Để lập kế hoạch sản xuất mặt hàng mới, một công ty đã tiến hành điều tra về sở thích của khách hàng về 3 loại mẫu khác nhau của cùng một loại hàng. Kết quả được trình bày ở bảng sau:

Mẫu hàng / Ý kiến	A	B	C
Thích	43	30	42
Không thích	35	53	39
Không có ý kiến	22	17	19

Có hay không sự phân biệt về sở thích của khách hàng đối với 3 loại mẫu nói trên? Kết luận ở mức ý nghĩa 5%.

Giải: Ta kiểm định giả thiết về phân phối.

H_0: Không có sự phân biệt về sở thích

H_1: Có sự phân biệt về sở thích đối với 3 mặt hàng (mức ý nghĩa 5%).

Bảng đối chiếu tần số: Trong ngoặc là tần số lý thuyết:

Mẫu	A	B	C

hàng / Ý kiến			
Thích	43 (38,33)	30 (38,33)	42 (38,33)
Không thích	35 (42,33)	53 (42,33)	39 (42,33)
Không có ý kiến	22 (19,33)	17 (19,33)	19 (19,33)

$$Q^2 = \sum_{i=1}^{9} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 7,606$$

$$\chi^2_{1-\alpha}(4) = \chi^2_{0,95}(4) = 9,488$$

Ta thấy $Q^2 < \chi^2_{1-\alpha}(8)$ nên H_0 được chấp nhận nghĩa là:

Không có sự phân biệt về sở thích đối với 3 mặt hàng.

6. 31. Điều tra một số sản phẩm của một xí nghiệp về chiều dài (X (cm)) và hàm lượng chất A (Y (%)), người ta có kết quả sau:

X \ Y	8	10	12	14	16
100	5	5			
110	4	6	7		
120		5	9	8	
130			4	6	9
140				5	7

Các sản phẩm có chiều dài không quá 110cm và hàm lượng chất A không hơn 12% được gọi là sản phẩm loại II. Nếu xí nghiệp báo cáo rằng sản phẩm loại II có chỉ tiêu Y trung bình là 10% thì có thể chấp nhận được không? Kết luận ở mức ý nghĩa 5% (giả thiết hàm lượng này có phân phối chuẩn)

Giải:

Bảng số liệu cho chỉ tiêu Y của những sản phẩm loại A.

y_j	8	10	12
n_j	9	11	7

Giá trị trung bình mẫu: $\overline{y} = 9,85$ và

giá trị độ lệch chuẩn mẫu: $s_Y = 1,56$, cỡ mẫu $n = 27$.

Ta kiểm định giả thiết sau:

$$H_0:\mu_Y=\mu_0=10(\%);H_1:\mu_Y\neq\mu_0 \text{ ở mức ý nghĩa } 5\%$$

Nếu H_0 đúng thì BNN $T=\dfrac{\overline{Y}-\mu_0}{S_Y}\sqrt{n}\sim t(n-1)$

Với mức ý nghĩa $\alpha=5\%$ ta tính được $gtth=t^{(26)}_{1-\frac{0,05}{2}}=2,0555$

Với mẫu cụ thể ta tính được: $t=\dfrac{9,85-10}{1,56}\sqrt{27}=-0,5$

Ta có $|t|<gtth$ nên H_0 không bị bác bỏ.

Vậy, chấp nhận báo cáo của xí nghiệp (ở mức ý nghĩa 5%).

6. 32. Gạo đủ tiêu chuẩn xuất khẩu là gạo có tỉ lệ hạt nguyên, hạt vỡ và tấm, theo thứ tự, là: 90%, 6% và 4%.

Kiểm tra 1000 hạt gạo của một lô gạo, người ta thấy trong đó có:

Hạt nguyên: 880; hạt vỡ: 60 và tấm: 60

Hỏi lô gạo có đủ tiêu chuẩn xuất khẩu không? Cho kết luận ở mức ý nghĩa 5%.

Giải:

Để kết luận về tiêu chuẩn của lô gạo ta kiểm định giả thiết sau:

H_0: Lô gạo đủ tiêu chuẩn xuất khẩu.

H_1: Lô gạo không đủ tiêu chuẩn xuất khẩu (ở mức ý nghĩa 5%).

Nếu H_0 đúng thì trong 1000 hạt gạo có 900 hạt nguyên, 60 hạt vỡ và 40 hạt tấm.

Ta có $Q^2=\dfrac{(880-900)^2}{900}+\dfrac{(60-60)^2}{60}+\dfrac{(60-40)^2}{40}=10,44$

Với $\alpha=5\%$, $gtth=\chi^{(3)}_{1-0,05}=7,815$

Vì $Q^2>gtth$ nên H_0 bị bác bỏ.

Vậy, lô gạo không đủ tiêu chuẩn xuất khẩu (kết luận ở mức ý nghĩa 5%).

6. 33. Giám đốc trại gà Alpha xem lại hồ sơ của một đợt khảo sát về khối lượng của gà xuất chuồng ở trại gà thì thấy số liệu được ghi như sau:

Khối lượng (kg)	Số con gà

[2,3; 2,7)	5
[2,7; 2,9)	30
[2,9; 3,1)	41
[3,1; 3,3)	25
[3,3; 3,5)	10
[3,5; 3,7)	5
[3,7; 3,9)	5

Ban giám đốc trại gà Alpha báo cáo rằng khối lượng trung bình của gà trên 3 kg. Hãy cho nhận xét về báo cáo trên ở mức ý nghĩa 2%.

Giải:

Từ số liệu ta tính được:

$n = 121;\ \overline{x} = 3,06;\ s = 0,2826$.

Ta kiểm định giả thiết sau:

$H_0 : \mu_X = \mu_0 = 3; H_1 : \mu_X > \mu_0$ ở mức $\alpha = 2\%$.

Nếu H_0 đúng thì BNN $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{s_X}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

Với $\alpha = 2\%$, $gtth = u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1,6449$

Với mẫu cụ thể: $u = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s_X}\sqrt{n} = \dfrac{3,06-3}{0,2826}\sqrt{121} = 2,3354$

Vì $u > gtth$ nên H_0 bị bác bỏ nghĩa là báo cáo của Ban giám đốc là đúng (ở mức ý nghĩa 5%).

6. 34. Để so sánh thời gian cắt trung bình của một máy tiện loại cũ với một máy tiện loại mới, người ta cho mỗi máy cắt thử 10 lần và đo thời gian cắt (tính bằng giây) . Kết quả thu được như sau:

Máy loại cũ: 58, 58, 56, 38, 70, 38, 42, 75, 68, 67.

Máy loại mới: 57, 55, 63, 24, 67, 43, 33, 68, 56, 54..

Biết rằng thời gian cắt của máy loại cũ và của máy loại mới là các biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn có độ lệch chuẩn, theo thứ tự, là 13,5 giây và 14,5 giây.

Với mức ý nghĩa 5%, có thể cho rằng máy loại mới tốt hơn (có thời gian cắt trung bình ít hơn) máy loại cũ hay không?

Giải:

Gọi X, Y theo thứ tự là BNN chỉ thời gian cắt của máy tiện cũ và máy tiện mới.

Ta kiểm định giả thiết sau: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$; $H_1 ; \mu_X > \mu_Y$ ở mức ý nghĩa 5%.

Nếu H_0 đúng thì BNN $U = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n} + \dfrac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim N(0,1)$

Với $\alpha = 5\%$, $gtth = u_{1-0,05} = u_{0,95} = 1,6449$

Với mẫu cụ thể ta tính được:

$\overline{x} = 57; s_X = 13,6; \overline{y} = 52; s_Y = 14,46$

Do đó $u = \dfrac{57-52}{\sqrt{\dfrac{13,5}{10} + \dfrac{14,5}{10}}} = 2,988$

Vì $u > gtth$ nên H_0 bị bác bỏ.

Vậy, có thể cho rằng máy loại mới tốt hơn (có thời gian cắt trung bình ít hơn) máy loại cũ.

CHƯƠNG 7: TƯƠNG QUAN VÀ HỒI QUY

7.1.

Xem vectơ ngẫu nhiên (X,Y) tuân theo luật phân phối chuẩn hai chiều mà một mẫu ngẫu nhiên gồm 8 cặp được chọn ra như sau:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	5	7	11	17	21	25	29	32

a) Hãy tính giá trị hệ số tương quan mẫu của X và Y và cho nhận xét.

b) Hãy kiểm định giả thiết về sự tương quan giữa X à Y ở mức $\alpha = 5\%$.

c) Hãy lập hàm hồi quy tuyến tính mẫu và dự đoán nếu X lấy giá trị bằng 20 thì Y nhận giá trị bao nhiêu?

Giải:

a) $r = \dfrac{\sum x_i y_i - n\overline{x}.\overline{y}}{(n-1)\,s_X.s_Y} = 0{,}996$. X và Y có quan hệ gần như tuyến tính.

b) Kiểm định giả thiết

$H_0: \rho = 0;\ H_1: \rho \neq 0$ ở mức $\alpha = 5\%$

Nếu H_0 đúng thì $T = R\sqrt{\dfrac{n-2}{1-R^2}} \sim t(n-2)$

($n = 8$ và $R = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}).(Y_i - \overline{Y})}{(n-1)S_X S_Y}$ là hệ số tương quan mẫu)

Với $\alpha = 5\%$, gtth $= t_{1-\alpha/2}^{(6)} = 2{,}4469$.

Với mẫu cụ thể, ta có $r = 0{,}996$ và $t = r\sqrt{\dfrac{n-2}{1-r^2}} = 0{,}996\sqrt{\dfrac{6}{1-0{,}996^2}} = 27{,}3$

Vì $|t| > gtth$ nên H_0 bị bác bỏ nghĩa là X, Y thật sự tương quan.

c) Phương trình hồi quy tuyến tính mẫu:

$y = -0.107 + 4{,}107x$. Từ đó, nếu $X = 20$ thì $Y = 82{,}036$.

7.2.

Một cơ sở sản xuất đã ghi lại số tiền đã chi cho việc nghiên cứu phát triển và lợi nhuận hàng năm của cơ sở trong 6 năm vừa qua như sau: (đơn vị 10^6 VNĐ)

Chi nghiên cứu	5	11	4	5	3	2
Lợi nhuận	31	40	30	34	25	20

a) Hãy tính giá trị hệ số tương quan mẫu giữa chi nghiên cứu và lợi nhuận.

b) Chi nghiên cứu và lợi nhuận có thực sự tương quan không? (kết luận ở mức ý nghĩa $\alpha = 2\%$).

c) Viết phương trình đường hồi qui tuyến tính mẫu của lợi nhuận theo chi phí nghiên cứu.

Giải:

a) $r = 0,909$

b) Kiểm định giả thiết
$H_0 : \rho = 0;\ H_1 : \rho \neq 0$ ở mức ý nghĩa $\alpha = 1\%$

Nếu H_0 đúng thì BNN T = $R\sqrt{\dfrac{n-2}{1-R^2}} \sim t(n-2)$

$gtth = t_{1-\alpha/2}(t-2) = t_{0,99}(4) = 3,7469$

Với mẫu cụ thể ta có $t = 0,909\sqrt{\dfrac{4}{1-0,909^2}} = 4,361$

Vì $t > gthh$ nên H_0 bị bác bỏ. Nghĩa là X và Y thực sự tương quan.

(kết luận ở mức ý nghĩa $\alpha = 2\%$).

c) Phương trình đường hồi quy tuyến tính mẫu:

$y = 2x + 20$

7.3.

Đo chiều cao Y (cm) và chiều dài chi dưới X (cm) của một nhóm thanh niên, người ta thu được số liệu sau:

y_i	160	161,5	163	165	167	168	171	172
x_i	78	79	80	81	82	83	84	85

(a). Tính giá trị hệ số tương quan mẫu của X và Y.

(b). Ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$, hãy cho nhận xét về tài liệu cho rằng hệ số tương quan của X và Y là 0,9.

(c). Viết phương trình đường hồi quy mẫu của Y theo X.

Đáp số:

(a) $r = 0,996$

(b) Kiểm định giả thiết H_0: $\rho = 0,9$ đối với H_1: $\rho \neq 0,9$.

Trắc nghiệm U 2 đuôi được sử dụng, với

$$U = \frac{Z-\mu_Z}{\sigma_Z} \sim N(0,1).$$

Với mức $\alpha = 5\%$, gtth $= u_{0,975} = 1,96$;

với mẫu cụ thể, chúng ta có :

$$z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0,996}{1-0,996}\right) = 3,106,$$

$$\mu_Z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0,9}{1-0,9}\right) + \frac{0,9}{2(8-1)} = 1,5365; \qquad \sigma_Z = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

và
$$u = \frac{z-\mu_Z}{\sigma_Z} = 3,509$$

Vì $|u| >$ gtth nên ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$, giả thiết H_0 bị bác bỏ, nghĩa là tài liệu không được chấp nhận (ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$).

(c) y = 1,768x + 21,857.

7.4. Một giảng viên dạy môn thống kê yêu cầu mỗi sinh viên phải làm một đồ án phân tích dữ liệu và dự kỳ thi hết môn. Sau đó, một mẫu gồm 10 sinh viên được chọn ngẫu nhiên, điểm số được ghi lại như sau:

Điểm thi	81	62	74	78	93	69	72	83	90	84
Điểm đồ án	76	71	69	76	87	62	80	75	92	79

(a) Tìm khoảng tin cậy 95% cho điểm thi trung bình của một sinh viên (giả thiết điểm thi của sinh viên tuân theo luật phân phối chuẩn).

(b) Ở mức ý nghĩa 5%, hãy đánh giá về sự tương quan tuyến tính giữa hai loại điểm trên.

Giải:

(a) Gọi X là điểm thi của sinh viên. Ta có: $\overline{x} = 78,6$ $s = 9,57$.

Khoảng tin cậy 95% cho điểm thi trung bình của một sinh viên: $(\overline{x}-e;\overline{x}+e)$

$$e = t^{(9)}_{\frac{1+\gamma}{2}}.\frac{s}{\sqrt{10}} = 2,2622.\frac{5,97}{\sqrt{10}} = 4,27$$

Khoảng tin cậy cần tìm $(74,33; 82,87)$.

(b) Gọi Y là điểm đồ án của sinh viên. Đặt $\rho = \rho_{X,Y}$.

Chúng ta phải có quyết định giữa hai giả thiết:

$$H_0: \rho = 0 \quad \text{và} \quad H_1: \rho \neq 0,$$

Nếu H_0 đúng thì BNN

$$T = R\sqrt{\frac{10-2}{1-R^2}} \sim t(8)$$

Với mức $\alpha = 5\%$, giá trị tới hạn là: $t_{0,975}^{(8)} = 2{,}3060$;

với mẫu cụ thể, chúng ta có hệ số tương quan mẫu: $r = 0{,}776$. Do đó:

$$t = \frac{0{,}776.\sqrt{8}}{\sqrt{1-(0{,}776)^2}} = 3{,}48$$

Vì $|t| > 2{,}306$ nên giả thiết H_0 bị bác bỏ ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$. Nói cách khác, chúng ta chấp nhận rằng X và Y tương quan ở mức ý nghĩa 5%.

7.5. Để thực hiện một công trình nghiên cứu về mối quan hệ giữa chiều cao Y(m) và đường kính X(cm) của một loại cây, người ta quan sát trên một mẫu ngẫu nhiên và có kết quả sau:

x_i	28	28	24	30	60	30	32	42	43	49
y_i	5	6	5	6	10	5	7	8	9	10

(a). Hãy tính giá trị hệ số tương quan mẫu của X và Y và cho nhận xét.

(b) Viết phương trình đường thẳng hồi quy mẫu của Y theo X. Hãy dự báo chiều cao của cây có đường kính 45 cm.

Giải:

(a) r = 0,939.

Vì r rất gần 1 nên giữa X và Y có hồi qui tuyến tính.

(b) $y = 0{,}166x + 1{,}041$.

Dự báo chiều cao của cây có đường kính 45 cm là:

$y = 0{,}166 \times 45 + 1{,}041 =$ 8,5 m

7.6. X (%) và Y(kg/mm^2) là hai chỉ tiêu chất lượng của một loại sản phẩm. Điều tra ở một số sản phẩm, bảng sau:

X	2	2	4	6	4	6	8	6	8	6	8
Y	5	10	10	10	15	15	15	20	20	25	25
Tần số	2	1	2	4	2	6	4	3	3	1	2

a) Hãy tính các giá trị trung bình mẫu của X, Y; phương sai mẫu của X, Y và hệ số tương quan mẫu giữa X và Y.

b) Viết phương trình hồi quy mẫu của Y theo X. Từ đó dự đoán xem nếu chỉ tiêu X là 9 thì chỉ tiêu Y là bao nhiêu?

Giải:

a) Ta có trung bình mẫu:

$\overline{x} = 5,93;\ \overline{y} = 15,17;$

Phương sai mẫu:

$\sigma_X^2 = 3,44;\ \sigma_Y^2 = 28,42$

Hệ số tương quan mẫu: $r = 0,66$

b) Phương trình hồi quy Y theo X: $y = 3,86 + 1.91x$

Nếu X có giá trị là 9 thì Y sẽ nhận giá trị là 21.

7.7. X (%) và Y(kg/mm^2) là hai chỉ tiêu chất lượng của một loại sản phẩm. Điều tra ở một số sản phẩm, bảng sau:

X	2	2	4	6	4	6	8	6	8	6	8
Y	5	10	10	10	15	15	15	20	20	25	25
Tần số	2	1	2	4	2	6	4	3	3	1	2

a) Tính giá trị hệ số tương quan mẫu giữ X và Y. Viết Viết phương trình hồi quy mẫu của Y theo X.

b) Kiểm định giả thiết xem X và Y có tương quan không ở mức ý nghĩa 5%?

Giải:

a) Giá trị hệ số tương quan mẫu: $r = 0,66$.

Phương trình hồi quy Y theo X: $y = 3,86 + 1.91x$.

b) Kiểm định giả thiết $H_0 : \rho = 0;\ H_1 : \rho \neq 0$ ở mức ý nghĩa 5%

Nếu H_0 đúng thì BNN

$$T = R\sqrt{\frac{n-2}{1-R^2}} \sim t(n-2)$$

Với mức ý nghĩa 5%, $gtth = t_{0,975}^{(28)} = 2,0484$

Với mẫu cụ thể ta có

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = 4,69$$

Vì $|t| > gtth$ nên H_0 bị bác bỏ, nghĩa là X và Y tương quan ở mức ý nghĩa 5%.

7.8. X (%) và Y(kg/mm^2) là hai chỉ tiêu chất lượng của một loại sản phẩm. Điều tra ở một số sản phẩm, bảng sau:

X	2	2	4	6	4	6	8	6	8	6	8
Y	5	10	10	10	15	15	15	20	20	25	25
Tần số	2	1	2	4	2	6	4	3	3	1	2

a) Tìm khoảng tin cậy 95% cho chỉ tiêu Y (giả thiết chỉ tiêu Y tuân theo luật phân phối chuẩn).

b) Viết phương trình hồi quy mẫu của Y theo X. Từ đó dự đoán xem nếu chỉ tiêu X là 9 thì chỉ tiêu Y là bao nhiêu?

Giải:

a) Trung bình mẫu chỉ tiêu Y là: $\overline{y} = 15,17; s_Y = 5,33$

Khoảng tin cậy 95% cho trung bình chỉ tiêu Y là: $(\overline{y} - e; \overline{y} + e)$

Với $e = t_{0,975}^{(29)} \cdot \frac{s_Y}{\sqrt{30}} = 2,0452 . \frac{5,33}{\sqrt{30}} = 1,99 \approx 2$

Vậy khoảng tin cậy cần tìm là:

$(13,18; 17,16)$

b) Phương trình hồi quy Y theo X: $y = 3,86 + 1.91x$

Nếu X có giá trị là 9 thì Y sẽ nhận giá trị là 21.

7.9. X (%) và Y(kg/mm^2) là hai chỉ tiêu chất lượng của một loại sản phẩm. Điều tra ở một số sản phẩm, bảng sau:

X	2	2	4	6	4	6	8	6	8	6	8
Y	5	10	10	10	15	15	15	20	20	25	25
Tần số	2	1	2	4	2	6	4	3	3	1	2

a) Có tài liệu cho rằng trung bình chỉ tiêu X là 6,5%. Hãy cho nhận xét về tài liệu trên ở mức ý nghĩa 5%. Giả thiết các chỉ tiêu X, Y tuân theo luật phân phối chuẩn.

b) Tính giá trị hệ số tương quan mẫu của X và Y. Viết phương trình đường thẳng hồi quy mẫu của Y theo X.

Giải:

a) Kiểm định giả thiết $H_0 : \mu_X = \mu_0 = 6,5; H_1 : \mu_X \neq \mu_0$ ở mức ý nghĩa 5%.

Nếu H_0 đúng thì BNN $T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$

Với ở mức ý nghĩa 5%, $gtth = t_{0,975}^{(29)} = 2,0452$

Vói mẫu cụ thể ta tính được: $|t| = \left|\frac{5,93 - 6,5}{3,44}\right|\sqrt{30} = 0,908$

Vì $|t| < gtth$ nên H_0 không bị bác bỏ nghĩa là ta chấp nhận tài liêu trên ở mức ý nghĩa 5%.

b) Giá trị hệ số tương quan mẫu: $r = 0,66$.

Phương trình hồi quy Y theo X: $y = 3,86 + 1.91x$.

7.10. Nghiên cứu lượng phân bón (X kg) được dùng để bón cho ruộng trong một vụ; Y(kg/1000m2) là năng suất lúa. Thống kê ở 30 hộ gia đình, kết quả như sau:

Số hộ	3	5	2	6	4	3	5	2
x_i	40	40	50	50	50	60	60	60
y_i	270	280	280	290	300	300	310	320

a) Tính giá trị hệ số tương quan mẫu của X và Y. Viết phương trình hồi quy mẫu Y theo X.

b) Kiểm định giả thiết cho rằng hệ số tương quan của X và Y bằng 0,9 ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$.

Giải:

a) Giá trị hệ số tương quan mẫu: $r = 0,891$.

Phương trình đường hồi quy mẫu: $Y = 210,15 + 1,64X$.

b) Kiểm định giả thiết $H_0 : \rho = \rho_0 = 0,9$; $H_1 : \rho \neq \rho_0$ ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$.

Trắc nghiệm U 2 đuôi được sử dụng, với

$$U = \frac{Z - \mu_Z}{\sigma_Z} \sim N(0,1).$$

Với mức $\alpha = 5\%$, gtth $= u_{0,975} = 1,96$;

Với mẫu cụ thể, ta có

$$z = z = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0,891}{1-0,891}\right) = 1,427$$

$$\mu_Z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0,9}{1-0,9}\right) + \frac{0,9}{2(30-1)} = 1,488; \qquad \sigma_Z = \frac{1}{\sqrt{27}}$$

$$|u| = \left|\frac{z-\mu_Z}{\sigma_Z}\right| = 0,317$$

Vì $|u| < gtth$ nên H_0 được chấp nhận nghĩa là giả thiết hệ số tương quan của X và Y bằng 0,9 là đúng ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$.

7.11. Để nghiên cứu sự tương quan giữa chiều cao X (cm) và sức nặngY (kg) con người, quan sát trên một mẫu ngẫu nhiên, người ta có kất quả sau:

y_k / x_i	[40, 45)	[45, 50)	[50, 55)	[55, 60)	[60, 65)

[140, 145)	1	4			
[145, 150)		2	6	1	
[150, 155)			10	8	2
[155, 160)			8	6	3
[160, 165)				1	1

(a) Hãy lập bảng phân bố tần số, tần suất cho các giá trị của X, Y.

(b) Tính các giá trị trung bình mẫu, độ lệch chuẩn mẫu và hệ số tương quan mẫu của X và Y. Viết phương trình đường thẳng hồi quy tuyến tính mẫu của Y theo X.

Giải:

a) Bảng tần số, tần suất của X và Y:

Biến X		
Lớp	Tần số	Tần suất
[140, 145)	5	0,094
[145, 150)	9	0,170
[150, 155)	20	0,377
[155, 160)	17	0,321
[160, 165)	2	0,038

Biến Y		
Lớp	Tần số	Tần suất
[40, 45)	1	0,019
[45, 50)	6	0,113
[50, 55)	24	0,453
[55, 60)	16	0,302
[60, 65)	6	0,113

b) $\overline{x} = 152,69$; $\overline{y} = 54,23$; $s_X = 5,14$; $s_Y = 4,41$

$r = 0,6544$

Phương trình hồi quy:

$y = -31,59 + 0,56x$

7.12. Để nghiên cứu sự tương quan giữa chiều cao X (cm) và sức nặngY (kg) con người, quan sát trên một mẫu ngẫu nhiên, người ta có kất quả sau:

x_i \ y_k	[40, 45)	[45, 50)	[50, 55)	[55, 60)	[60, 65)

[140, 145)	1	4			
[145, 150)		2	6	1	
[150, 155)			10	8	2
[155, 160)			8	6	3
[160, 165)				1	1

a) Tính giá trị hệ số tương quan mẫu của X và Y. Viết phương trình đường thẳng hồi quy tuyến tính mẫu của Y theo X.

b) Có tài liệu cho biết hệ số tương quan giữa X và Y là 0,65. Hãy cho nhận xét về tài liệu đó, ở mức $\alpha = 5\%$.

Giải:

a) $r = 0,6544$

Phương trình hồi quy:

$y = -31,59 + 0,56x$

b) Kiểm định giả thiết H_0: $\rho = 0,65$ đối với H_1: $\rho \neq 0,65$ ở mức $\alpha =$ 5%.

Trắc nghiệm U 2 đuôi được sử dụng, với

$$U = \frac{Z - \mu_Z}{\sigma_Z} \sim N(0,1).$$

Với mức $\alpha = 5\%$, gtth $= u_{0,975} = 1,96$;

với mẫu cụ thể, chúng ta có :

$$z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0,6544}{1-0,6544}\right) = 0,783,$$

$$\mu_Z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0,65}{1-0,65}\right) + \frac{0,65}{2(53-1)} = 0,7816; \qquad \sigma_Z = \frac{1}{\sqrt{50}},$$

và $$u = \frac{z - \mu_Z}{\sigma_Z} = 0,01$$

Vì $|u| <$ gtth nên ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$, giả thiết H_0 được chấp nhận, nghĩa là tài liệu được chấp nhận (ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$).