Đường thẳng và đoạn thẳng

Cho hai điểm x, y trong không gian $\mathbb{R}^n$. Tập hợp tất cả các điểm có dạng

$$z = \theta x + (1 - \theta) y,$$

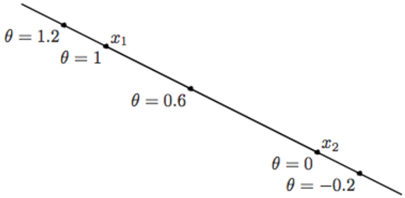
ở đó $\theta \in \mathbb{R}$, tạo thành một đường thẳng đi qua x và y. Tập hợp các điểm z với $\theta \in [0, 1]$ tạo thành một đoạn thẳng nối x và y.

Đường thẳng và đoạn thẳng

Cho hai điểm x, y trong không gian $\mathbb{R}^n$. Tập hợp tất cả các điểm có dạng

$$z = \theta x + (1-\theta)y,$$

ở đó $\theta \in \mathbb{R}$, tạo thành một đường thẳng đi qua x và y. Tập hợp các điểm z với $\theta \in [0, 1]$ tạo thành một đoạn thẳng nối x và y.



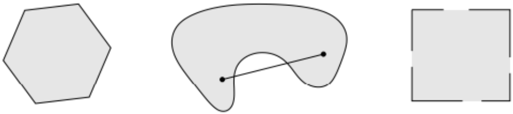
Tập lồi

Một tập hợp khác rỗng $C \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của C nằm trong C.

Tập lồi

Một tập hợp khác rỗng $C \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của C nằm trong C.

Hay nói cách khác, nếu $x, y \in C$ thì với mọi $\theta \in [0, 1]$, ta có $\theta x + (1 - \theta)y \in C$.

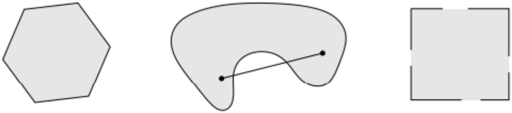


Tối ưu lồi

Tập lồi

Một tập hợp khác rỗng $C \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của C nằm trong C.

Hay nói cách khác, nếu $x, y \in C$ thì với mọi $\theta \in [0, 1]$, ta có $\theta x + (1 - \theta)y \in C$.



Người ta quy ước tập rỗng là tập lồi

Ví dụ về tập lồi

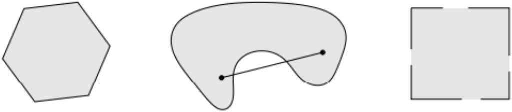
- Tập rỗng, tập chỉ gồm một phần tử (điểm), toàn bộ không gian $\mathbb{R}^n$

Tối ưu lồi

Tập lồi

Một tập hợp khác rỗng $C \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của C nằm trong C.

Hay nói cách khác, nếu $x, y \in C$ thì với mọi $\theta \in [0, 1]$, ta có $\theta x + (1 - \theta)y \in C$.



Người ta quy ước tập rỗng là tập lồi

Ví dụ về tập lồi

- Tập rỗng, tập chỉ gồm một phần tử (điểm), toàn bộ không gian $\mathbb{R}^n$
- Một đoạn thẳng bất kỳ trong $\mathbb{R}^n$

Tối ưu lồi

Các tính chất của tập lồi

Nếu S_1 và S_2 là các tập lồi thì

- $S_1 \cap S_2$ là lồi;
- $S_1 + S_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ là lồi.

Các tính chất của tập lồi

Nếu S_1 và S_2 là các tập lồi thì

- $S_1 \cap S_2$ là lồi;
- $S_1 + S_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ là lồi.

Hợp của hai tập lồi có phải là tập lồi?

Bao lồi

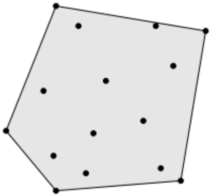
- Điểm $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k$, ở đó $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$ và $\theta_i \geq 0$ với $i = 1, \ldots, k$, được gọi là một tổ hợp lồi của các điểm $x_1, \ldots, x_k$.
- Bao lồi của một tập hợp C, ký hiệu là conv C, là tập hợp tất cả các tổ hợp lồi của các điểm thuộc C.

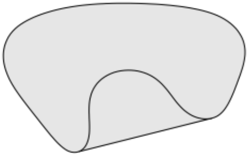
$$\operatorname{conv} C = \{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_i \in C, \theta_1, \ldots, \theta_k \geq 0, \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1\}$$

Bao lồi

- Điểm $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k$, ở đó $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$ và $\theta_i \geq 0$ với $i = 1, \ldots, k$, được gọi là một tổ hợp lồi của các điểm $x_1, \ldots, x_k$.
- Bao lồi của một tập hợp C, ký hiệu là conv C, là tập hợp tất cả các tổ hợp lồi của các điểm thuộc C.

$$\text{conv}\, C = \{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_i \in C, \theta_1, \ldots, \theta_k \geq 0, \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1\}$$





Siêu phẳng và nửa không gian

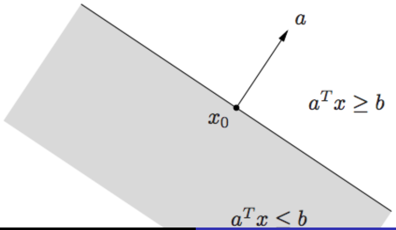
- Một siêu phẳng là một tập hợp có dạng

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\} \quad \text{hoặc} \quad \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + \cdots a_n x_n = b\},$$

ở đó, $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$, và $b \in \mathbb{R}$.

- Một siêu phẳng chia không gian $\mathbb{R}^n$ thành hai nửa không gian. Một nửa không gian (đóng) là một tập hợp có dạng

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq b, a \neq 0\}.$$



Hình cầu & Ellipsoid

- Một hình cầu trong $\mathbb{R}^n$ có dạng

$$\begin{aligned} B(x_c, r) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - x_c||_2 \leq r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - x_c)^T (x - x_c) \leq r^2\}, \end{aligned}$$

ở đó $r > 0$, and $|| \cdot ||_2$ ký hiệu chuẩn Euclid, tức là $||u||_2 = (u^T u)^{1/2}$.

- Một ellipsoid là một tập hợp có dạng

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - x_c)^T P (x - x_c) \leq 1\},$$

ở đó P là một ma trận đối xứng và nửa xác định dương cỡ n.

Ma trận P được gọi là xác định dương nếu $x^T Px > 0$ với mọi véctơ $x \neq 0$. Ta ký hiệu $P \succ 0$.

Ma trận P được gọi là xác định dương nếu $x^T Px > 0$ với mọi véctơ $x \neq 0$. Ta ký hiệu $P \succ 0$.

Nếu $x^T Px \geq 0$ với mọi véctơ $x \in \mathbb{R}^n$ thì P được gọi là nửa xác định dương. Ta ký hiệu $P \succeq 0$.

Ví dụ

Ma trận
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
là xác định dương vì $x^T P x = x_1^2 + x_2^2 > 0$ với mọi $x = (x_1, x_2) \neq (0, 0)$.

Đặc trưng ma trận xác định dương và nửa xác định dương

- Một ma trận đối xứng là nửa xác định dương khi và chỉ khi tất cả các giá trị riêng của nó không âm.

Đặc trưng ma trận xác định dương và nửa xác định dương

- Một ma trận đối xứng là nửa xác định dương khi và chỉ khi tất cả các giá trị riêng của nó không âm.
- Một ma trận đối xứng là xác định dương khi và chỉ khi tất cả các giá trị riêng của nó dương.

Polyhedron & Polytope

- Một Polyhedron (tập lồi đa diện) là tập nghiệm của một hệ gồm hữu hạn các đẳng thức và bất đẳng thức tuyến tính

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j^T x \leq b_j, j = 1, \dots, m,\ c_j^T x = d_j, j = 1, \dots, p\}.$$

Polyhedron & Polytope

- Một Polyhedron (tập lồi đa diện) là tập nghiệm của một hệ gồm hữu hạn các đẳng thức và bất đẳng thức tuyến tính

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j^T x \leq b_j, j = 1, \ldots, m,\ c_j^T x = d_j, j = 1, \ldots, p\}.$$

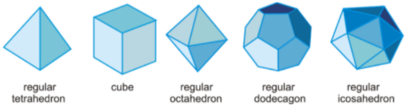
- Một tập lồi đa diện là giao hữu hạn các nửa không gian đóng.

Polyhedron & Polytope

- Một Polyhedron (tập lồi đa diện) là tập nghiệm của một hệ gồm hữu hạn các đẳng thức và bất đẳng thức tuyến tính

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j^T x \leq b_j, j = 1, \ldots, m,\ c_j^T x = d_j, j = 1, \ldots, p\}.$$

- Một tập lồi đa diện là giao hữu hạn các nửa không gian đóng.
- Một tập lồi đa diện bị chặn đôi khi được gọi là một polytope.

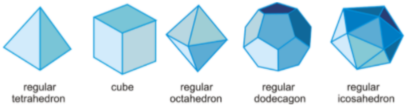


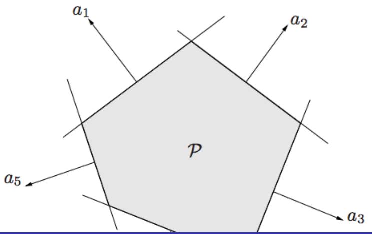
Polyhedron & Polytope

- Một Polyhedron (tập lồi đa diện) là tập nghiệm của một hệ gồm hữu hạn các đẳng thức và bất đẳng thức tuyến tính

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j^T x \leq b_j, j = 1, \ldots, m,\ c_j^T x = d_j, j = 1, \ldots, p\}.$$

- Một tập lồi đa diện là giao hữu hạn các nửa không gian đóng.
- Một tập lồi đa diện bị chặn đôi khi được gọi là một polytope.





Hàm lồi

Hàm số $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được gọi là lồi nếu

- $\mathrm{dom}\, f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| < +\infty\}$ là một tập lồi;
- với mọi $x, y \in \mathrm{dom}\, f$, $\theta \in [0, 1]$, ta có

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y)$$

Hàm lồi

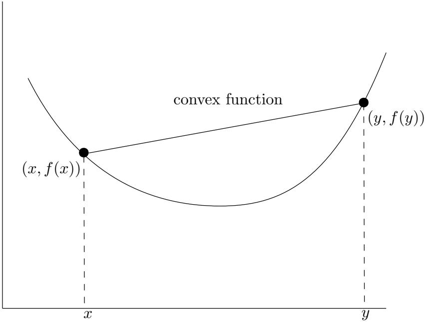
Hàm số $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được gọi là lồi nếu

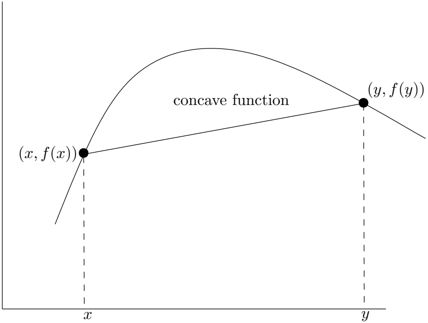
- $\operatorname{dom} f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| < +\infty\}$ là một tập lồi;
- với mọi $x, y \in \operatorname{dom} f$, $\theta \in [0, 1]$, ta có

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$$

Hàm số f được gọi là

- lồi chặt nếu bất đẳng thức trên là chặt.
- lõm nếu $-f$ là lồi.
- lõm chặt nếu $-f$ lồi chặt.


convex function
$(y, f(y))$
$(x, f(x))$
x
y

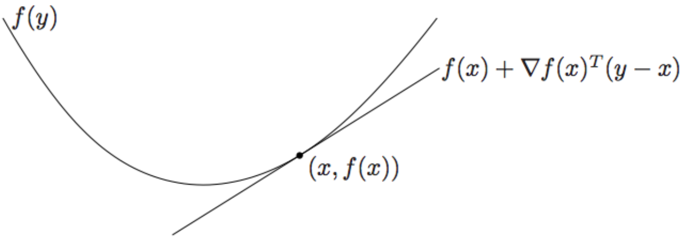

concave function
$(y, f(y))$
$(x, f(x))$
x
y

Điều kiện cấp 1

Giả sử hàm số $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ khả vi. Khi đó, f là lồi khi và chỉ khi $\operatorname{dom} f$ là lồi và

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x)$$

đúng với mọi $x, y \in \operatorname{dom} f$.



Điều kiện cấp 2

Giả sử hàm số $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ khả vi đến cấp 2. Khi đó, f là lồi khi và chỉ khi $\operatorname{dom} f$ là lồi và ma trận Hessian matrix là nửa xác định dương

$$\nabla^2 f(x) \succeq 0$$

với mọi $x \in \operatorname{dom} f$.

Điều kiện cấp 2

Giả sử hàm số $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ khả vi đến cấp 2. Khi đó, f là lồi khi và chỉ khi dom f là lồi và ma trận Hessian matrix là nửa xác định dương

$$\nabla^2 f(x) \succeq 0$$

với mọi $x \in \operatorname{dom} f$.

Trường hợp không gian một chiều

Giả sử hàm số $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ khả vi đến cấp 2. Khi đó, f là lồi khi và chỉ khi dom f là lồi và $f''(x) \geq 0$ với mọi $x \in \operatorname{dom} f$.

Các ví dụ trong không gian $\mathbb{R}$

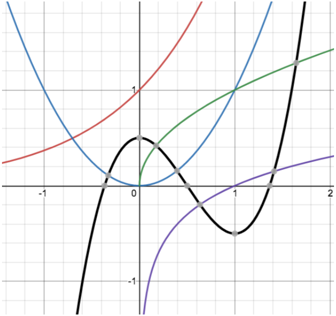
- e^{ax} là lồi trên $\mathbb{R}$ với mọi $a \in \mathbb{R}$

Các ví dụ trong không gian $\mathbb{R}$

- e^{ax} là lồi trên $\mathbb{R}$ với mọi $a \in \mathbb{R}$
- x^a là lồi trên $\mathbb{R}_{++}$ nếu $a \geq 1$ hoặc $a \leq 0$, và lõm nếu $a \in [0, 1]$

Các ví dụ trong không gian $\mathbb{R}$

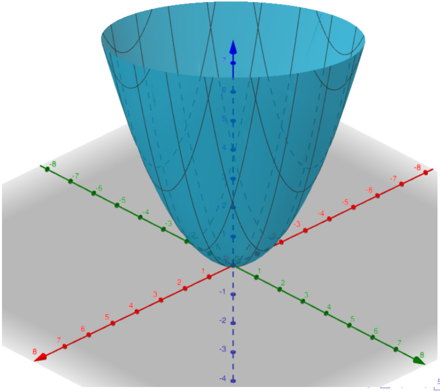
- e^{ax} là lồi trên $\mathbb{R}$ với mọi $a \in \mathbb{R}$
- x^a là lồi trên $\mathbb{R}_{++}$ nếu $a \geq 1$ hoặc $a \leq 0$, và lõm nếu $a \in [0, 1]$
- $\log x$ là lõm trên $\mathbb{R}_{++}$



Ví dụ trong không gian 2 chiều

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ là lồi trên $\mathbb{R}^2$ bởi vì

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ và } \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2(x^2 + xy + y^2) \geq 0$$



Hàm toàn phương trong $\mathbb{R}^n$

Một hàm toàn phương (quadratic function) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, với $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}^n$, được cho bởi

$$f(x) = (1/2)x^T Px + q^T x + r$$

ở đó P là ma trận đối xứng, $q \in \mathbb{R}^n$, và $r \in \mathbb{R}$. Do $\nabla^2 f(x) = P$, f là lồi khi và chỉ khi $P \succeq 0$.

Hàm toàn phương trong $\mathbb{R}^n$

Một hàm toàn phương (quadratic function) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, với dom $f = \mathbb{R}^n$, được cho bởi

$$f(x) = (1/2)x^T Px + q^T x + r$$

ở đó P là ma trận đối xứng, $q \in \mathbb{R}^n$, và $r \in \mathbb{R}$. Do $\nabla^2 f(x) = P$, f là lồi khi và chỉ khi $P \succeq 0$.

Ví dụ

$$x^2 + xy + y^2 = (1/2)\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

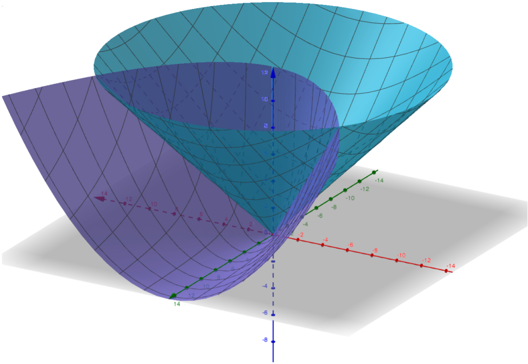
Hàm tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$

$f(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ là hàm lồi, cũng là hàm lõm trong $\mathbb{R}^n$

Tối ưu lồi

Một số ví dụ trong $\mathbb{R}^2$

- $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ là lồi trên $\mathbb{R}^2$
- $f(x,y) = x^2/y$ là lồi trên $\operatorname{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$



Graph & epigraph

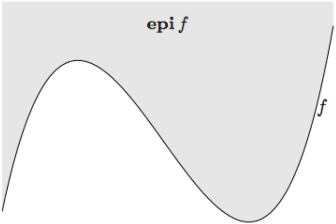
Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

- Đồ thi (graph) của f là tập hợp được cho bởi

$$\{(x, f(x)| \; x \in \text{dom} \, f\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

- Trên dồ thị (epigraph) của f là tập hợp

$$epi \; f = \{(x, t)| \; x \in \text{dom} \; f, f(x) \leq t\}$$



Các phép toán bảo toàn tính lồi

- Nếu $f(x)$ là lồi và $\alpha > 0$, thì $\alpha f(x)$ là lồi
- Nếu $f(x), g(x)$ là lồi thì $f(x) + g(x)$ là lồi
- Nếu $f(x), g(x)$ là lồi thì $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ là lồi

Bài tập

Xác định xem các hàm số sau là lồi hay lõm

- $f(x) = e^x - 1$ trên $\mathbb{R}$
- $f(x, y) = xy$ trên $\mathbb{R}^2_{++}$
- $f(x, y) = 1/(xy)$ trên $\mathbb{R}^2_{++}$
- $f(x, y) = x/y$ trên $\mathbb{R}^2_{++}$