

TỐI ƯU CÓ RÀNG BUỘC

Dương Thị Kim Huyền – Tạ Thúy Anh

Khoa công nghệ thông tin
Đại học PHENIKAA

Hà Nội - 2023

1. Bài toán tối ưu lồi có ràng buộc

2. Điều kiện cần cực trị

3. Điều kiện cần và đủ cực trị

Bài toán tối ưu lồi có ràng buộc

- ▶ Hàm mục tiêu (objective function): lồi
- ▶ Tập chấp nhận được (feasible set): lồi

- ▶ Hàm mục tiêu (objective function): lồi
- ▶ Tập chấp nhận được (feasible set): lồi

$$\begin{array}{ll} (P) & \min \quad f(x) \\ & \text{sao cho } g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, n \\ & \quad h_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, p \\ & \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

- x là biến số
- $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm mục tiêu
- $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm lồi
- $h_j(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm affine

$$\begin{array}{ll} (P) & \min \quad f(x) \\ & \text{sao cho } g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, n \\ & \quad h_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, p \\ & \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

- x là biến số
- $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm mục tiêu
- $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm lồi
- $h_j(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm affine

$$\begin{aligned} (P) \quad & \min \quad f(x) \\ & \text{sao cho } g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, n \\ & \quad \quad h_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, p \\ & \quad \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

- x là biến số
- $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm mục tiêu
- $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm lồi
- $h_j(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm affine

$$\begin{array}{ll} (P) & \min \quad f(x) \\ & \text{sao cho } g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, n \\ & \quad h_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, p \\ & \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

- x là biến số
- $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm mục tiêu
- $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm lồi
- $h_j(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm affine

$$\begin{array}{ll} (P) & \min \quad f(x) \\ & \text{sao cho } g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, n \\ & \quad h_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, p \\ & \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

- x là biến số
- $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm mục tiêu
- $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm lồi
- $h_j(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm affine

Các bài toán sau là bài toán tối ưu lồi hoặc có thể chuyển về một bài toán tối ưu lồi

- ▶ Least squares
- ▶ Linear programming
- ▶ Convex quadratic minimization with linear constraints
- ▶ Quadratic minimization with convex quadratic constraints
- ▶ Conic optimization
- ▶ Geometric programming
- ▶ Second order cone programming

Các bài toán sau là bài toán tối ưu lồi hoặc có thể chuyển về một bài toán tối ưu lồi

- ▶ Least squares
- ▶ Linear programming
- ▶ Convex quadratic minimization with linear constraints
- ▶ Quadratic minimization with convex quadratic constraints
- ▶ Conic optimization
- ▶ Geometric programming
- ▶ Second order cone programming

Các bài toán sau là bài toán tối ưu lồi hoặc có thể chuyển về một bài toán tối ưu lồi

- ▶ Least squares
- ▶ Linear programming
- ▶ Convex quadratic minimization with linear constraints
- ▶ Quadratic minimization with convex quadratic constraints
- ▶ Conic optimization
- ▶ Geometric programming
- ▶ Second order cone programming

Các bài toán sau là bài toán tối ưu lồi hoặc có thể chuyển về một bài toán tối ưu lồi

- ▶ Least squares
- ▶ Linear programming
- ▶ Convex quadratic minimization with linear constraints
- ▶ Quadratic minimization with convex quadratic constraints
- ▶ Conic optimization
- ▶ Geometric programming
- ▶ Second order cone programming

Các bài toán sau là bài toán tối ưu lồi hoặc có thể chuyển về một bài toán tối ưu lồi

- ▶ Least squares
- ▶ Linear programming
- ▶ Convex quadratic minimization with linear constraints
- ▶ Quadratic minimization with convex quadratic constraints
- ▶ Conic optimization
- ▶ Geometric programming
- ▶ Second order cone programming

Các bài toán sau là bài toán tối ưu lồi hoặc có thể chuyển về một bài toán tối ưu lồi

- ▶ Least squares
- ▶ Linear programming
- ▶ Convex quadratic minimization with linear constraints
- ▶ Quadratic minimization with convex quadratic constraints
- ▶ Conic optimization
- ▶ Geometric programming
- ▶ Second order cone programming

Các bài toán sau là bài toán tối ưu lồi hoặc có thể chuyển về một bài toán tối ưu lồi

- ▶ Least squares
- ▶ Linear programming
- ▶ Convex quadratic minimization with linear constraints
- ▶ Quadratic minimization with convex quadratic constraints
- ▶ Conic optimization
- ▶ Geometric programming
- ▶ Second order cone programming

Các bài toán sau là bài toán tối ưu lồi hoặc có thể chuyển về một bài toán tối ưu lồi

- ▶ Least squares
- ▶ Linear programming
- ▶ Convex quadratic minimization with linear constraints
- ▶ Quadratic minimization with convex quadratic constraints
- ▶ Conic optimization
- ▶ Geometric programming
- ▶ Second order cone programming

- ▶ Portfolio optimization
- ▶ Worst-case risk analysis
- ▶ Optimal advertising
- ▶ Variations of statistical regression (including regularization and quantile regression)
- ▶ Model fitting (particularly multiclass classification)

- ▶ Portfolio optimization
- ▶ Worst-case risk analysis
- ▶ Optimal advertising
- ▶ Variations of statistical regression (including regularization and quantile regression)
- ▶ Model fitting (particularly multiclass classification)

- ▶ Portfolio optimization
- ▶ Worst-case risk analysis
- ▶ Optimal advertising
- ▶ Variations of statistical regression (including regularization and quantile regression)
- ▶ Model fitting (particularly multiclass classification)

- ▶ Portfolio optimization
- ▶ Worst-case risk analysis
- ▶ Optimal advertising
- ▶ Variations of statistical regression (including regularization and quantile regression)
- ▶ Model fitting (particularly multiclass classification)

- ▶ Portfolio optimization
- ▶ Worst-case risk analysis
- ▶ Optimal advertising
- ▶ Variations of statistical regression (including regularization and quantile regression)
- ▶ Model fitting (particularly multiclass classification)

- ▶ Electricity generation optimization
- ▶ Combinatorial optimization
- ▶ Non-probabilistic modelling of uncertainty
- ▶ Localization using wireless signals

- ▶ Electricity generation optimization
- ▶ Combinatorial optimization
- ▶ Non-probabilistic modelling of uncertainty
- ▶ Localization using wireless signals

- ▶ Electricity generation optimization
- ▶ Combinatorial optimization
- ▶ Non-probabilistic modelling of uncertainty
- ▶ Localization using wireless signals

- ▶ Electricity generation optimization
- ▶ Combinatorial optimization
- ▶ Non-probabilistic modelling of uncertainty
- ▶ Localization using wireless signals

$$\begin{aligned} (P) \quad & \min \quad f(x) \\ & \text{sao cho } g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, n \\ & \quad h_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, p \\ & \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Đặt $I = \{1, 2, \dots, n\}$, $J = \{1, 2, \dots, p\}$.

- I, J là các tập chỉ số.

Đặt $C = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0 \forall i \in I, h_j(x) = 0 \forall j \in J\}$

- C là tập chấp nhận được

$$\begin{aligned} (P) \quad & \min \quad f(x) \\ & \text{sao cho } g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, n \\ & \quad h_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, p \\ & \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Đặt $I = \{1, 2, \dots, n\}$, $J = \{1, 2, \dots, p\}$.

- I, J là các tập chỉ số.

Đặt $C = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0 \ \forall i \in I, \ h_j(x) = 0 \ \forall j \in J\}$

- C là tập chấp nhận được

$$\begin{aligned} (P) \quad & \min \quad f(x) \\ & \text{sao cho } g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, n \\ & \quad \quad h_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, p \\ & \quad \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Đặt $I = \{1, 2, \dots, n\}$, $J = \{1, 2, \dots, p\}$.

- I, J là các tập chỉ số.

Đặt $C = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0 \ \forall i \in I, \ h_j(x) = 0 \ \forall j \in J\}$

- C là tập chấp nhận được

$$\begin{aligned} (P) \quad & \min \quad f(x) \\ & \text{sao cho } g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, n \\ & \quad \quad h_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, p \\ & \quad \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Đặt $I = \{1, 2, \dots, n\}$, $J = \{1, 2, \dots, p\}$.

- I, J là các tập chỉ số.

Đặt $C = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0 \ \forall i \in I, \ h_j(x) = 0 \ \forall j \in J\}$

- C là tập chấp nhận được

Điều kiện cần cực trị

Nếu \mathbf{x}^* là một nghiệm tối ưu của bài toán P thì tồn tại các hằng số λ_i ($i \in I$), μ_j ($j \in J$) sao cho

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j \in J} \mu_j \nabla h_j(\mathbf{x}^*) = 0 \\ \lambda_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall i \in I \\ g_i(\mathbf{x}^*) \leq 0 \quad \forall i \in I, \quad h_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall j \in J \\ \lambda_i \geq 0 \quad \forall i \in I, \quad \mu_j \in \mathbb{R} \quad \forall j \in J \end{cases} \quad (1)$$

Điểm \mathbf{x}^* thỏa mãn hệ (1) được gọi là một điểm *KKT* (Karush-Kuhn-Tucker) của bài toán

- ▶ Điều kiện $\lambda_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0$: điều kiện bù
- ▶ Các nhân tử λ_i, μ_j : nhân tử Lagrange

Điểm \mathbf{x}^* thỏa mãn hệ (1) được gọi là một điểm *KKT* (Karush-Kuhn-Tucker) của bài toán

- ▶ Điều kiện $\lambda_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0$: điều kiện bù
- ▶ Các nhân tử λ_i, μ_j : nhân tử Lagrange

Điều kiện chính quy **Slater** (CQ) thỏa mãn đối với bài toán P nếu tồn tại $u \in C$ sao cho

$$g_i(u) < 0 \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Điều kiện cần và đủ cực trị

- Điều kiện chính quy Slater thỏa mãn
- x^* là một điểm chấp nhận được của bài toán
- x^* là một nghiệm tối ưu của bài toán (P) *khi và chỉ khi* tồn tại các hằng số λ_i ($i \in I$), μ_j ($j \in J$) sao cho

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(x^*) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j \in J} \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0 \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0 \quad \forall i \in I \\ g_i(x^*) \leq 0 \quad \forall i \in I, \quad h_j(x^*) = 0 \quad \forall j \in J \\ \lambda_i \geq 0 \quad \forall i \in I, \quad \mu_j \in \mathbb{R} \quad \forall j \in J \end{array} \right.$$

- Điều kiện chính quy Slater thỏa mãn
- \mathbf{x}^* là một điểm chấp nhận được của bài toán

\mathbf{x}^* là một nghiệm tối ưu của bài toán (P) *khi và chỉ khi* tồn tại các hằng số λ_i ($i \in I$), μ_j ($j \in J$) sao cho

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j \in J} \mu_j \nabla h_j(\mathbf{x}^*) = 0 \\ \lambda_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall i \in I \\ g_i(\mathbf{x}^*) \leq 0 \quad \forall i \in I, \quad h_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall j \in J \\ \lambda_i \geq 0 \quad \forall i \in I, \quad \mu_j \in \mathbb{R} \quad \forall j \in J \end{array} \right.$$

- Điều kiện chính quy Slater thỏa mãn
 - \mathbf{x}^* là một điểm chấp nhận được của bài toán
- \mathbf{x}^* là một nghiệm tối ưu của bài toán (P) *khi và chỉ khi* tồn tại các hằng số λ_i ($i \in I$), μ_j ($j \in J$) sao cho

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j \in J} \mu_j \nabla h_j(\mathbf{x}^*) = 0 \\ \lambda_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall i \in I \\ g_i(\mathbf{x}^*) \leq 0 \quad \forall i \in I, \quad h_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall j \in J \\ \lambda_i \geq 0 \quad \forall i \in I, \quad \mu_j \in \mathbb{R} \quad \forall j \in J \end{array} \right.$$

Tìm cực tiểu của hàm số $f(x, y) = (x - 1)^2 + y - 2$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

Điểm dừng $(x^*, y^*) = (1/2, 3/2)$ ứng với cặp nhân tử $(\lambda, \mu) = (0, 1)$.

Tìm cực tiểu của hàm số $f(x, y) = (x - 1)^2 + y - 2$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

Điểm dừng $(x^*, y^*) = (1/2, 3/2)$ ứng với cặp nhân tử $(\lambda, \mu) = (0, 1)$.

Tìm cực đại của hàm số $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 6y$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x + y \leq 3 \\ -2x + y \leq 2 \end{cases}$$

Điểm KKT $(x^*, y^*) = (\frac{1}{3}, \frac{8}{3})$

Tìm cực đại của hàm số $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 6y$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x + y \leq 3 \\ -2x + y \leq 2 \end{cases}$$

Điểm KKT $(x^*, y^*) = (\frac{1}{3}, \frac{8}{3})$

Tìm cực đại của hàm số $f(x, y) = xy$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Tìm cực tiểu của hàm số $f(x, y) = 2x + y$ thỏa mãn

$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\begin{array}{ll}\min & c^T x + d \\ \text{thỏa mãn} & Gx \leq h \\ & Ax = b,\end{array}$$

trong đó, $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $c, d, h, b \in \mathbb{R}^n$.

Bài toán quy hoạch toàn phương lồi

$$\begin{array}{ll}\min & (1/2)x^T P x + q^T x + r \\ \text{thỏa mãn} & Gx \leq h \\ & Ax = b,\end{array}$$

trong đó, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P \succeq 0$, $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$.