Tối ưu hóa

Faculty of Computer Science
Phenikaa University

Ngày 11 tháng 4 năm 2023

Đường thẳng và đoạn thẳng

Cho hai điểm x, y trong không gian $\mathbb{R}^n$. Tập hợp tất cả các điểm có dạng

$$z = \theta x + (1 - \theta)y,$$

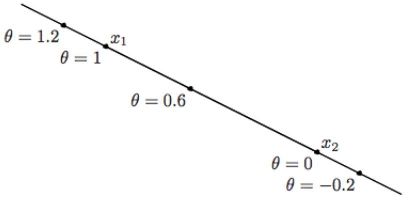
ở đó $\theta \in \mathbb{R}$, tạo thành một đường thẳng đi qua x và y. Tập hợp các điểm z với $\theta \in [0, 1]$ tạo thành một đoạn thẳng nối x và y.

Đường thẳng và đoạn thẳng

Cho hai điểm x, y trong không gian $\mathbb{R}^n$. Tập hợp tất cả các điểm có dạng

$$z = \theta x + (1 - \theta)y,$$

ở đó $\theta \in \mathbb{R}$, tạo thành một đường thẳng đi qua x và y. Tập hợp các điểm z với $\theta \in [0, 1]$ tạo thành một đoạn thẳng nối x và y.



Tối ưu lồi

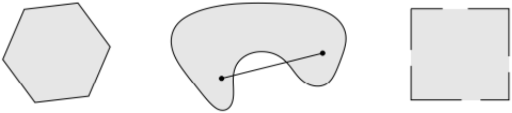
Tập lồi

Một tập hợp khác rỗng $C \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của C nằm trong C.

Tập lồi

Một tập hợp khác rỗng $C \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của C nằm trong C.

Hay nói cách khác, nếu $x, y \in C$ thì với mọi $\theta \in [0, 1]$, ta có $\theta x + (1 - \theta)y \in C$.

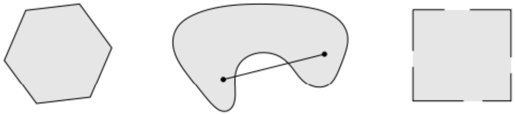


Tối ưu lồi

Tập lồi

Một tập hợp khác rỗng $C \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của C nằm trong C.

Hay nói cách khác, nếu $x, y \in C$ thì với mọi $\theta \in [0, 1]$, ta có $\theta x + (1 - \theta)y \in C$.



Người ta quy ước tập rỗng là tập lồi

Ví dụ về tập lồi

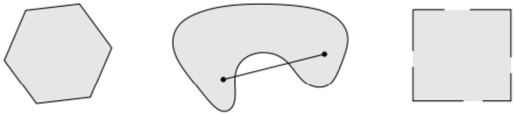
- Tập rỗng, tập chỉ gồm một phần tử (điểm), toàn bộ không gian $\mathbb{R}^n$

Tối ưu lồi

Tập lồi

Một tập hợp khác rỗng $C \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của C nằm trong C.

Hay nói cách khác, nếu $x, y \in C$ thì với mọi $\theta \in [0, 1]$, ta có $\theta x + (1 - \theta)y \in C$.



Người ta quy ước tập rỗng là tập lồi

Ví dụ về tập lồi

- Tập rỗng, tập chỉ gồm một phần tử (điểm), toàn bộ không gian $\mathbb{R}^n$
- Một đoạn thẳng bất kỳ trong $\mathbb{R}^n$

Tối ưu lồi

Các tính chất của tập lồi

Nếu S_1 và S_2 là các tập lồi thì

- $S_1 \cap S_2$ là lồi;
- $S_1 + S_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ là lồi.

Các tính chất của tập lồi

Nếu S_1 và S_2 là các tập lồi thì

- $S_1 \cap S_2$ là lồi;
- $S_1 + S_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ là lồi.

Hợp của hai tập lồi có phải là tập lồi?

Tối ưu lồi

Bao lồi

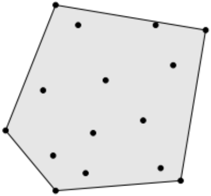
- Điểm $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k$, ở đó $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$ và $\theta_i \geq 0$ với $i = 1, \ldots, k$, được gọi là một tổ hợp lồi của các điểm $x_1, \ldots, x_k$.
- Bao lồi của một tập hợp C, ký hiệu là conv C, là tập hợp tất cả các tổ hợp lồi của các điểm thuộc C.

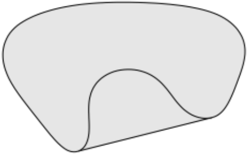
$$\operatorname{conv} C = \{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_i \in C, \theta_1, \ldots, \theta_k \geq 0, \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1\}$$

Bao lồi

- Điểm $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k$, ở đó $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$ và $\theta_i \geq 0$ với $i = 1, \ldots, k$, được gọi là một tổ hợp lồi của các điểm $x_1, \ldots, x_k$.
- Bao lồi của một tập hợp C, ký hiệu là conv C, là tập hợp tất cả các tổ hợp lồi của các điểm thuộc C.

$$\operatorname{conv} C = \{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_i \in C, \theta_1, \ldots, \theta_k \geq 0, \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1\}$$





Tích vô hướng

Tích vô hướng của 2 véctơ $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ và $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ trên Không gian Euclide $\mathbb{R}^n$

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Tích vô hướng

Tích vô hướng của 2 véctơ $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ và $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ trên Không gian Euclide $\mathbb{R}^n$

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Ta có thể viết $u^T v$ hoặc $v^T u$ thay cho $\langle u, v \rangle$

Siêu phẳng và nửa không gian

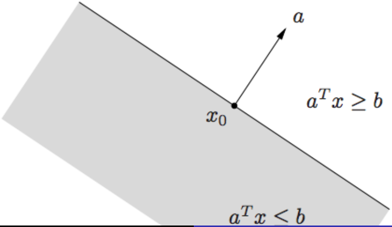
- Một siêu phẳng là một tập hợp có dạng

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\} \quad \text{hoặc} \quad \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + \cdots a_n x_n = b\},$$

ở đó, $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$, và $b \in \mathbb{R}$.

- Một siêu phẳng chia không gian $\mathbb{R}^n$ thành hai nửa không gian. Một nửa không gian (đóng) là một tập hợp có dạng

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq b, a \neq 0\}.$$



Chuẩn trong không gian Euclide

Cho $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

Cho $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

$||v||$ ký hiệu chuẩn (độ dài) của véc tơ v, được cho bởi công thức

Chuẩn trong không gian Euclide

Cho $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

$||v||$ ký hiệu chuẩn (độ dài) của véc tơ v, được cho bởi công thức

$$||v|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Hình cầu & Ellipsoid

- Hình cầu tâm x_c bán kính $r > 0$ trong $\mathbb{R}^n$ có dạng

$$\begin{aligned} B(x_c, r) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - x_c|| \leq r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - x_c)^T (x - x_c) \leq r^2\}. \end{aligned}$$

- Một ellipsoid là một tập hợp có dạng

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - x_c)^T P (x - x_c) \leq 1\},$$

ở đó P là một ma trận đối xứng và nửa xác định dương cỡ n.

Polyhedron & Polytope

- Một Polyhedron (tập lồi đa diện) là tập nghiệm của một hệ gồm hữu hạn các đẳng thức và bất đẳng thức tuyến tính

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j^T x \leq b_j, j = 1, \ldots, m,\ c_j^T x = d_j, j = 1, \ldots, p\}.$$

Polyhedron & Polytope

- Một Polyhedron (tập lồi đa diện) là tập nghiệm của một hệ gồm hữu hạn các đẳng thức và bất đẳng thức tuyến tính

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j^T x \leq b_j, j = 1, \ldots, m,\ c_j^T x = d_j, j = 1, \ldots, p\}.$$

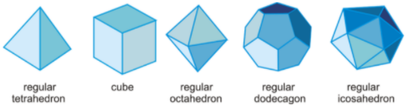
- Một tập lồi đa diện là giao hữu hạn các nửa không gian đóng.

Polyhedron & Polytope

- Một Polyhedron (tập lồi đa diện) là tập nghiệm của một hệ gồm hữu hạn các đẳng thức và bất đẳng thức tuyến tính

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j^T x \leq b_j, j = 1, \ldots, m,\ c_j^T x = d_j, j = 1, \ldots, p\}.$$

- Một tập lồi đa diện là giao hữu hạn các nửa không gian đóng.
- Một tập lồi đa diện bị chặn đôi khi được gọi là một polytope.

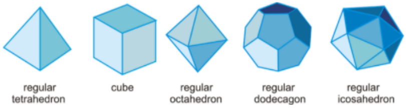


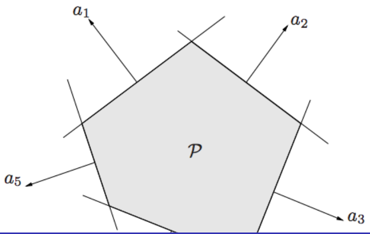
Polyhedron & Polytope

- Một Polyhedron (tập lồi đa diện) là tập nghiệm của một hệ gồm hữu hạn các đẳng thức và bất đẳng thức tuyến tính

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j^T x \leq b_j, j = 1, \ldots, m,\ c_j^T x = d_j, j = 1, \ldots, p\}.$$

- Một tập lồi đa diện là giao hữu hạn các nửa không gian đóng.
- Một tập lồi đa diện bị chặn đôi khi được gọi là một polytope.





Hàm lồi

Hàm số $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được gọi là lồi nếu

- Miền hữu hiệu $\operatorname{dom} f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\}$ là một tập lồi;
- Bất đẳng thức Jensen thảo mãn, tức là

Hàm lồi

Hàm số $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được gọi là lồi nếu

- Miền hữu hiệu $\operatorname{dom} f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\}$ là một tập lồi;
- Bất đẳng thức Jensen thảo mãn, tức là
  Với mọi $x, y \in \operatorname{dom} f$, $\theta \in (0, 1)$, ta có

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y)$$

Hàm lồi

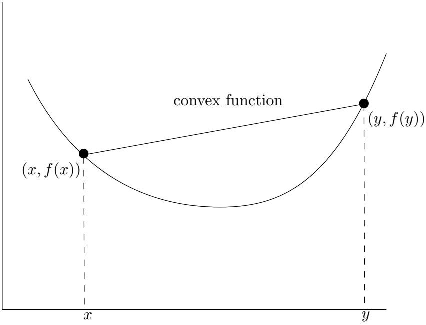
Hàm số $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được gọi là lồi nếu

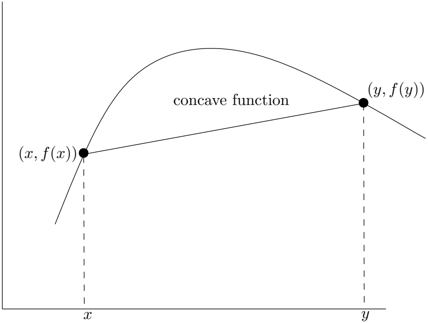
- Miền hữu hiệu $\operatorname{dom} f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\}$ là một tập lồi;
- Bất đẳng thức Jensen thảo mãn, tức là
  Với mọi $x, y \in \operatorname{dom} f$, $\theta \in (0,1)$, ta có

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \le \theta f(x) + (1-\theta) f(y)$$

Hàm số f được gọi là

- lồi chặt nếu bất đẳng thức Jensen là chặt.
- lõm nếu $-f$ là lồi.
- lõm chặt nếu $-f$ lồi chặt.


convex function
$(y, f(y))$
$(x, f(x))$
x
y

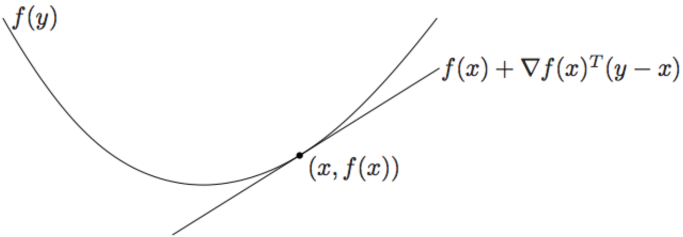

$(y, f(y))$
concave function
$(x, f(x))$
x
y

Điều kiện cấp 1

Giả sử hàm số $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ khả vi. Khi đó, f là lồi khi và chỉ khi $\operatorname{dom} f$ là lồi và

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x)$$

đúng với mọi $x, y \in \operatorname{dom} f$.



Đạo hàm cấp hai (nhắc lại)

Ma trận Hessian

$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Ký hiệu H_k là ma trận con chính (ma trận con phía trên, bên trái) của ma trận Hessian H.

$$H_1 = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right]; \; H_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}; \end{bmatrix}; \; H_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} ..$$

Ký hiệu $\Delta_1 = \det(H_1)$, $\Delta_2 = \det(H_2)$, $\Delta_3 = \det(H_3)\ldots$

Ma trận con chính, định thức con chính

Ký hiệu H_k là ma trận con chính (ma trận con phía trên, bên trái) của ma trận Hessian H.

$$H_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \end{bmatrix}; \; H_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}; \end{bmatrix}; \; H_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} \ldots$$

Ký hiệu $\Delta_1 = \det(H_1)$, $\Delta_2 = \det(H_2)$, $\Delta_3 = \det(H_3)\ldots$

- Δ_k được gọi là định thức con chính cấp k của H

Điều kiện cấp 2

Giả sử hàm số $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ khả vi đến cấp 2. Khi đó, f là lồi *khi và chỉ khi* $\operatorname{dom} f$ là lồi và ma trận Hessian là nửa xác định dương, tức là

$$\nabla^2 f(x) \succeq 0 \quad \forall x \in \operatorname{dom} f.$$

Trong trường hợp ma trận Hessian matrix là xác định dương, hàm số lồi chặt

Trong trường hợp ma trận Hessian matrix là xác định dương, hàm số lồi chặt

Trường hợp không gian một chiều

Giả sử hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả vi đến cấp 2. Khi đó, f là lồi khi và chỉ khi $\mathrm{dom}\, f$ là lồi và $f^{''}(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathrm{dom}\, f$.

Ma trận A được gọi là xác định dương (*positive definite*) nếu $x^T Ax > 0$ với mọi véctơ $x \neq 0$. Ta ký hiệu $A \succ 0$.

Ma trận xác định dương & nửa xác định dương

Ma trận A được gọi là xác định dương (*positive definite*) nếu $x^T Ax > 0$ với mọi véctơ $x \neq 0$. Ta ký hiệu $A \succ 0$.

Nếu $x^T Ax \geq 0$ với mọi véctơ $x \in \mathbb{R}^n$ thì A được gọi là nửa xác định dương (*positive semidefinite*). Ta ký hiệu $A \succeq 0$.

Ma trận xác định dương & nửa xác định dương

Ma trận A được gọi là xác định dương (*positive definite*) nếu $x^T Ax > 0$ với mọi véctơ $x \neq 0$. Ta ký hiệu $A \succ 0$.

Nếu $x^T Ax \geq 0$ với mọi véctơ $x \in \mathbb{R}^n$ thì A được gọi là nửa xác định dương (*positive semidefinite*). Ta ký hiệu $A \succeq 0$.

Chú ý: xác định dương $\rightarrow$ nửa xác định dương

Ví dụ

Ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

là xác định dương vì $x^T A x = x_1^2 + x_2^2 > 0$ với mọi $x = (x_1, x_2) \neq (0, 0)$.

Hàm số $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ là lồi

Đặc trưng ma trận đối xứng xác định dương

Cho A là ma trận đối xứng cỡ $n \times n$. Khi đó, A là xác định dương khi và chỉ khi một trong các điều kiện sau thỏa mãn

- Tất cả các giá trị riêng dương
- Tất cả các định thức con chính dương

Đặc trưng ma trận đối xứng nửa xác định dương

Cho A là ma trận đối xứng cỡ $n \times n$. Khi đó , A là nửa xác định dương khi và chỉ khi

- Tất cả các giá trị riêng không âm

Đặc trưng ma trận đối xứng nửa xác định dương

Cho A là ma trận đối xứng cỡ $n \times n$. Khi đó , A là nửa xác định dương khi và chỉ khi

- Tất cả các giá trị riêng không âm

Chú ý: Không thể dùng tiêu chuẩn qua dấu các định thức con chính để kiểm tra một ma trận đối xứng nửa xác định dương

Đặc trưng ma trận đối xứng nửa xác định dương

Cho A là ma trận đối xứng cỡ $n \times n$. Khi đó , A là nửa xác định dương khi và chỉ khi

- Tất cả các giá trị riêng không âm

Chú ý: Không thể dùng tiêu chuẩn qua dấu các định thức con chính để kiểm tra một ma trận đối xứng nửa xác định dương

Ma trận A nửa xác định dương có tính chất sau đây

• $\det(A) = 0$, tất cả các định thức con chính cấp nhỏ hơn cỡ của A không âm

Ví dụ: Hàm số $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ là lồi (chặt) vì ma trận Hessian

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

là xác định dương

Các ví dụ trong không gian $\mathbb{R}$

- e^{ax} là lồi trên $\mathbb{R}$ với mọi $a \in \mathbb{R}$

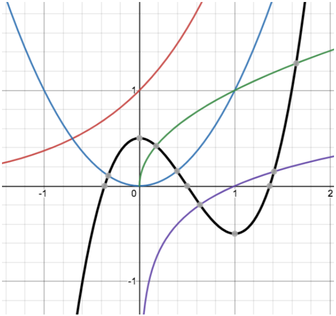
Các ví dụ trong không gian $\mathbb{R}$

- e^{ax} là lồi trên $\mathbb{R}$ với mọi $a \in \mathbb{R}$
- x^a là lồi trên $\mathbb{R}_{++}$ nếu $a \geq 1$ hoặc $a \leq 0$, và lõm nếu $a \in [0, 1]$

Tối ưu lồi

Các ví dụ trong không gian $\mathbb{R}$

- e^{ax} là lồi trên $\mathbb{R}$ với mọi $a \in \mathbb{R}$
- x^a là lồi trên $\mathbb{R}_{++}$ nếu $a \geq 1$ hoặc $a \leq 0$, và lõm nếu $a \in [0, 1]$
- $\log x$ là lõm trên $\mathbb{R}_{++}$

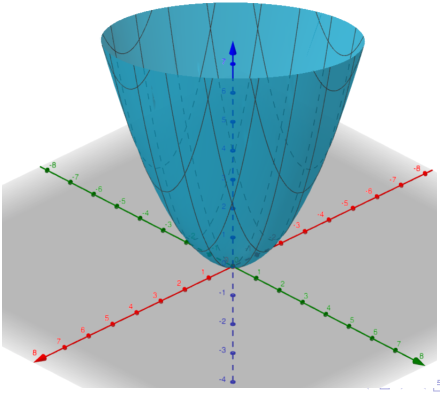


Tối ưu lồi

Ví dụ trong không gian 2 chiều

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ là lồi trên $\mathbb{R}^2$ bởi vì

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ và } \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2(x^2 + xy + y^2) \geq 0$$



Hàm toàn phương trong $\mathbb{R}^n$

Một hàm toàn phương (quadratic function) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, với $\mathbf{dom}\, f = \mathbb{R}^n$, được cho bởi

$$f(x) = (1/2)x^T P x + q^T x + r$$

ở đó P là ma trận đối xứng, $q \in \mathbb{R}^n$, và $r \in \mathbb{R}$. Do $\nabla^2 f(x) = P$, hàm số f là lồi khi và chỉ khi $P \succeq 0$.

Hàm toàn phương trong $\mathbb{R}^n$

Một hàm toàn phương (quadratic function) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, với dom $f = \mathbb{R}^n$, được cho bởi

$$f(x) = (1/2)x^T Px + q^T x + r$$

ở đó P là ma trận đối xứng, $q \in \mathbb{R}^n$, và $r \in \mathbb{R}$. Do $\nabla^2 f(x) = P$, hàm số f là lồi khi và chỉ khi $P \succeq 0$.

Ví dụ

$$x^2 + xy + y^2 = (1/2)\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

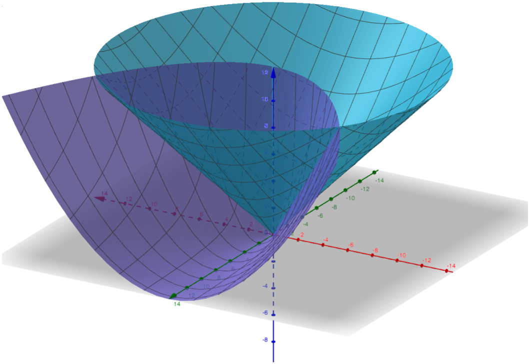
Hàm số $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ là lồi (chặt)

Hàm tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$

$f(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ vừa là hàm lồi, vừa là hàm lõm

Một số ví dụ trong $\mathbb{R}^2$

- $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ là lồi trên $\mathbb{R}^2$
- $f(x,y) = x^2/y$ là lồi trên $\operatorname{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$



Graph & epigraph

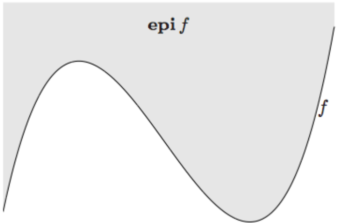
Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

- Đồ thi (graph) của f là tập hợp được cho bởi

$$\{(x, f(x)|\ x \in \mathrm{dom}\, f\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

- Trên dồ thị (epigraph) của f là tập hợp

$$epi\ f = \{(x, t)|\ x \in \mathrm{dom}\ f, f(x) \leq t\}$$



Các phép toán bảo toàn tính lồi

- Nếu $f(x)$ là lồi và $\alpha > 0$, thì $\alpha f(x)$ là lồi
- Nếu $f(x), g(x)$ là lồi thì $f(x) + g(x)$ là lồi
- Nếu $f(x), g(x)$ là lồi thì $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ là lồi

Bài tập

Xác định xem các hàm số sau là lồi hay lõm

- $f(x) = e^x - 1$ trên $\mathbb{R}$
- $f(x, y) = xy$ trên $\mathbb{R}^2_{++}$
- $f(x, y) = 1/(xy)$ trên $\mathbb{R}^2_{++}$
- $f(x, y) = x/y$ trên $\mathbb{R}^2_{++}$