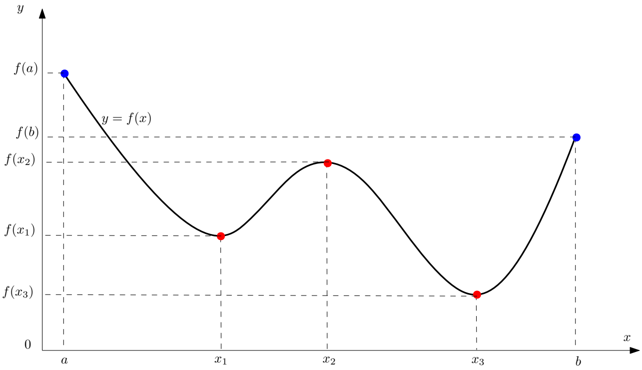
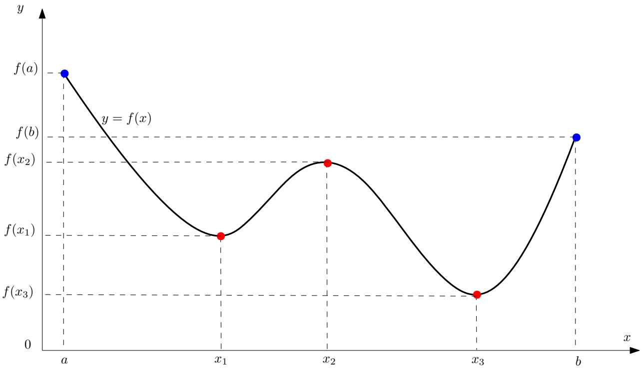
Ví dụ

Bài toán: Cho $D \subset \mathbb{R}$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f : D \to \mathbb{R}$.



Ví dụ

Bài toán: Cho $D \subset \mathbb{R}$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f : D \to \mathbb{R}$.



Câu hỏi

Chúng ta tìm giá trị lớn nhất/nhỏ nhất của một hàm số như thế nào?

Hàm số nhiều biến số (multivariate function)

Cho $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$

Miền xác định (Domain) của f: $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| < +\infty\}$

Miền giá trị (Range) của f: $f(D) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D : y = f(x)\}$

Hàm số nhiều biến số (multivariate function)

Cho $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$

Miền xác định (Domain) của f: $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| < +\infty\}$

Miền giá trị (Range) của f: $f(D) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D : y = f(x)\}$

Ví dụ

Tìm miền xác định và miền giá trị của những hàm số sau

- $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$?
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$?
- $f(x, y, z) = \cos(x + y + z)$?

Giới hạn của hàm số

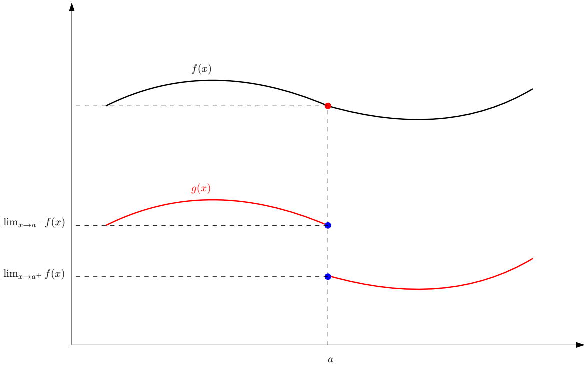
Ta có

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Giới hạn của hàm số

Ta có

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$



Tính liên tục của hàm số một biến số

Giới hạn của hàm số hai biến số

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \Longleftrightarrow \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = L$$

Giới hạn của hàm số hai biến số

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \iff \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = L$$

Tính liên tục của hàm số hai biến số

- Hàm số f được gọi là liên tục tại $(a,b) \in D$ nếu

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

- Hàm số f được gọi là liên tục trên D nếu f liên tục tại mọi điểm $(a,b) \in D$.

Đạo hàm riêng

Cho $f : D \to \mathbb{R}$ là hàm số n biến số

- Các đạo hàm riêng cấp 1

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

- Các đạo hàm riêng cấp 2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}; \ldots; \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}; \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}; \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}; \ldots$$

Ví dụ

Cho $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$, tìm các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1 + 4x_2; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 + 4x_1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 6; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} = 4$$

Gradient

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

Gradient

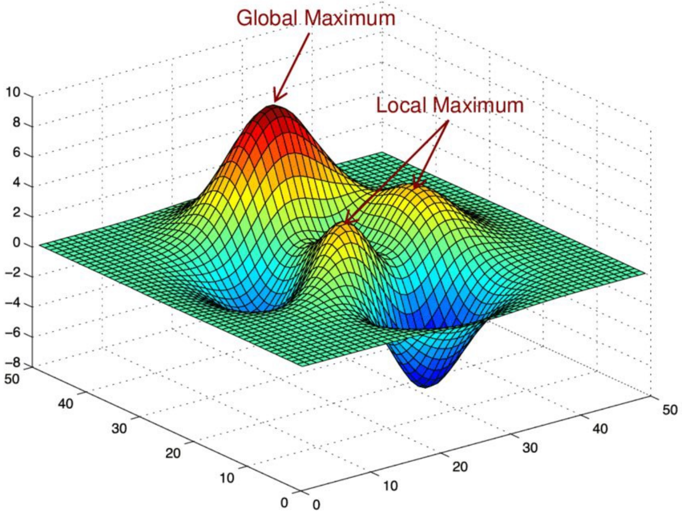
$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

Ví dụ

Cho $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$, tìm gradient.

$$\nabla f(x) = (6x_1 + 4x_2; 2x_2 + 4x_1)$$

Cực đại và cực tiểu (Maxima and minima)



Cực đại và cực tiểu (maxima and minima)

Cho $f : D \to \mathbb{R}$ là hàm số của n biến, $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in D$.

Cực đại và cực tiểu toàn cục

- x^* là điểm cực đại toàn cục nếu $f(x^*) \geq f(x)$ với mọi $x \in D$. Giá trị $f(x^*)$ được gọi là giá trị lớn nhất của f trên D.
- x^* là điểm cực tiểu toàn cục nếu $f(x^*) \leq f(x)$ với mọi $x \in D$. Giá trị $f(x^*)$ được gọi là giá trị nhỏ nhất của f trên D.

Trong cả hai trường hợp trên, ta nói f đạt cực trị toàn cục tại x^*.

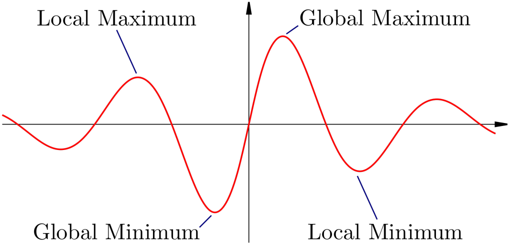
Cực đại và cực tiểu địa phương

Cho $f : D \to \mathbb{R}$ là hàm số của n biến, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \in D$.

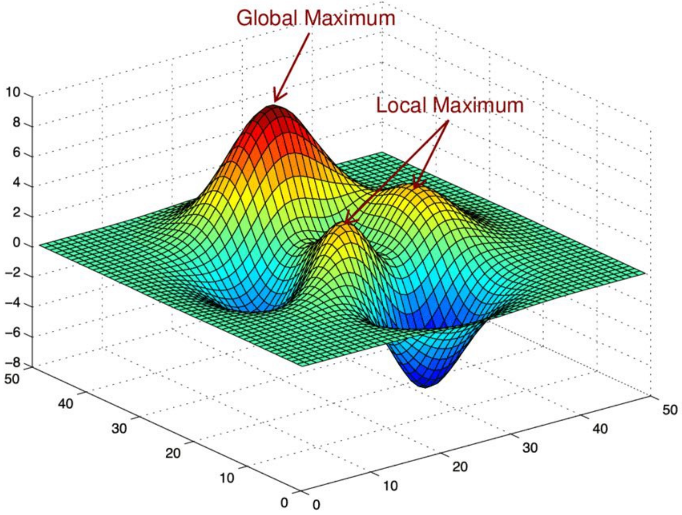
- $\bar{x}$ là một điểm cực đại địa phương nếu tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho $f(\bar{x}) \geq f(x)$ với mọi $x \in D \cap B(\bar{x}, \epsilon)$. Ở đó, $B(\bar{x}, \epsilon)$ là hình cầu mở tâm $\bar{x}$, bán kính ϵ.
- $\bar{x}$ là một điểm cực tiểu địa phương nếu tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho $f(\bar{x}) \leq f(x)$ với mọi $x \in D \cap B(\bar{x}, \epsilon)$.

Trong cả hai trường hợp trên, ta nói f đạt cực trị địa phương tại $\bar{x}$.

Maxima and minima



Maxima and minima



Định lý 1

Giả sử rằng hàm số $f : D \to \mathbb{R}$ xác định và khả vi trên $D \subset \mathbb{R}^n$. Nếu f đạt cực trị địa phương tại $\bar{x} \in D$ thì $\nabla f(\bar{x}) = (0, \ldots, 0)$.

Định lý 1

Giả sử rằng hàm số $f : D \to \mathbb{R}$ xác định và khả vi trên $D \subset \mathbb{R}^n$. Nếu f đạt cực trị địa phương tại $\bar{x} \in D$ thì $\nabla f(\bar{x}) = (0, \ldots, 0)$.

Điểm dừng (stationary point)

Điểm $\bar{x} \in D$ thỏa mãn $\nabla f(\bar{x}) = (0, \ldots, 0)$ được gọi là điểm dừng (stationary point) của f.

Nhận xét: Điểm dừng có thể không phải là điểm cực trị.

Ma trận Hessian

$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Ma trận con trái phía trên (upper left submatrix)

Ký hiệu H_i là ma trận con trái phía trên cỡ i của ma trận Hessian H.

$$H_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \end{bmatrix};\ H_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}; \end{bmatrix};\ H_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} \dots$$

Cực đại và cực tiểu địa phương (local maxima and minima)

Cách tìm cực trị của hàm hai biến số

1. Giải phương trình $\nabla f(x_1, x_2) = (0, 0)$ tìm điểm dừng.
2. Tại mỗi điểm dừng $\bar{x}$, ta tìm ma trận Hessian tương ứng $H = H(\bar{x})$
3. Nếu $det(H) = 0$ thì $\bar{x}$ là điểm yên ngựa (saddle point)
4. Nếu $det(H) > 0$ thì $\bar{x}$ là một điểm cực trị địa phương.
   - $\bar{x}$ là một điểm cực đại địa phương nếu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}) < 0$
   - $\bar{x}$ là một điểm cực tiểu địa phương nếu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}) > 0$

Cách tìm cực trị của hàm hai biến số

1. Giải phương trình $\nabla f(x_1, x_2) = (0, 0)$ tìm điểm dừng.
2. Tại mỗi điểm dừng $\bar{x}$, ta tìm ma trận Hessian tương ứng $H = H(\bar{x})$
3. Nếu $det(H) = 0$ thì $\bar{x}$ là điểm yên ngựa (saddle point)
4. Nếu $det(H) > 0$ thì $\bar{x}$ là một điểm cực trị địa phương.
   - $\bar{x}$ là một điểm cực đại địa phương nếu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}) < 0$
   - $\bar{x}$ là một điểm cực tiểu địa phương nếu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}) > 0$

Example

1. Tìm điểm cực trị địa phương của hàm số $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$
2. Tìm điểm cực trị địa phương của hàm số $f(x, y) = xy \cdot e^{x - y^2/2}$

Cách tìm cực trị địa phương của hàm nhiều biến số

1. Giải phương trình $\nabla f(x) = (0, \ldots, 0)$ tìm điểm dừng.
2. Tại mỗi điểm dừng $\bar{x}$ ta tìm ma trận Hessian $H = H(\bar{x})$ và tính $\Delta_i = \det(H_i)$
3. Nếu $\Delta_i > 0$ với mọi i thì $\bar{x}$ là điểm cực tiểu địa phương
4. Nếu $(-1)^i \Delta_i > 0$ với mọi i thì $\bar{x}$ là điểm cực đại địa phương

Cách tìm cực trị địa phương của hàm nhiều biến số

1. Giải phương trình $\nabla f(x) = (0, \ldots, 0)$ tìm điểm dừng.
2. Tại mỗi điểm dừng $\bar{x}$ ta tìm ma trận Hessian $H = H(\bar{x})$ và tính $\Delta_i = \det(H_i)$
3. Nếu $\Delta_i > 0$ với mọi i thì $\bar{x}$ là điểm cực tiểu địa phương
4. Nếu $(-1)^i \Delta_i > 0$ với mọi i thì $\bar{x}$ là điểm cực đại địa phương

Ví dụ

1. Tìm cực trị địa phương của hàm số $f(x, y, z) = 2xy^2 - 4xy + x^2 + z^2 - 2z$

Cực đại và cực tiểu toàn cục (global Maxima and minima)

Question: Làm thế nào để tìm cực trị toàn cục của một hàm số?

Định lý giá trị cực trị (extreme value theorem)

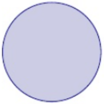
Hàm số f liên tục trên một tập hợp đóng (closed) và (bounded) bị chặn D thì đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên D. Hơn nữa, giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) là giá trị cực đại địa phương (cực tiểu địa phương) hoặc là phải đạt trên biên của miền D.

Cực đại và cực tiểu toàn cục (global Maxima and minima)

Question: Làm thế nào để tìm cực trị toàn cục của một hàm số?

Định lý giá trị cực trị (extreme value theorem)

Hàm số f liên tục trên một tập hợp đóng (closed) và (bounded) bị chặn D thì đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên D. Hơn nữa, giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) là giá trị cực đại địa phương (cực tiểu địa phương) hoặc là phải đạt trên biên của miền D.

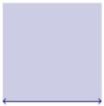


$x^2 + y^2 \leq 1$

closed

$x^2 + y^2 < 1$

not closed



$y \geq 0$

closed

Cực đại và cực tiểu toàn cục (global Maxima and minima)

Question: Làm thế nào để tìm cực trị toàn cục của một hàm số?

Định lý giá trị cực trị (extreme value theorem)

Hàm số f liên tục trên một tập hợp đóng (closed) và (bounded) bị chặn D thì đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên D. Hơn nữa, giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) là giá trị cực đại địa phương (cực tiểu địa phương) hoặc là phải đạt trên biên của miền D.

$x^2 + y^2 \leq 1$ closed | $x^2 + y^2 < 1$ not closed | $y \geq 0$ closed

Ví dụ

Tìm cực trị của hàm số $f = 2x^2 - 3xy + 4y^2$ trên miền

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ | \ x^2 + y^2 \leq 4\}.$$