

Problem Set 3

Phương pháp đơn hình giải các bài toán Quy hoạch tuyến tính (dạng chuẩn tắc) trong đó chưa có sẵn phương án cực biên (hay chưa đủ số biến cơ sở trong bảng đơn hình xuất phát).

Bước 1: Dùng các phép biến đổi cơ sở trên các hàng (tương ứng với các ràng buộc của bài toán) để làm xuất hiện các biến cơ sở. Chú ý số biến cơ sở bằng số các ràng buộc của bài toán.

Bước 2: Đối với mỗi cột hệ số của biến cơ sở, nếu hệ số ở hàng thứ 2 (bên dưới hàng đầu tiên chứa các biến $z, x_1, x_2, x_3, \dots, b$) khác 0 thì cần biến đổi để nó bằng 0.

Bước 3: Kiểm tra điều kiện tối ưu, tìm cột xoay trong số các cột tương ứng với biến không phải biến cơ sở, tìm hàng xoay và phần tử xoay,...

Ví dụ. Xét bài toán sau:

$$\begin{aligned} \min \quad & 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4, \\ & -x_1 + x_4 \leq 10, \\ & 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 12, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Bằng cách thêm biến bù x_5 và biến đổi để xuất hiện đủ 3 biến cơ sở x_2, x_3, x_4 , ta thu được bảng đơn hình 1 dưới đây. Trong bảng này, các biến cơ sở là x_2, x_3, x_4 . Tuy nhiên, trước khi kiểm tra điều kiện tối ưu, ta cần biến đổi sao cho các hệ số ở hàng 2 của các cột này bằng 0. Tức là biến đổi lần lượt các phần tử $-3, -2, 3$ như được khoanh tròn trong Bảng 1, về phần tử 0 như trong Bảng 2,3,4.

Bảng 1

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	-6	③	②	③	0	0
0	-1	1	0	0	0	8
0	-1	0	0	1	1	10
0	0	0	1	0	2	16

Bảng 2

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	-9	0	-2	3	0	24
0	-1	1	0	0	0	8
0	-1	0	0	1	1	10
0	0	0	1	0	2	16

Bảng 3

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	-9	0	-2	3	4	56
0	-1	1	0	0	0	8
0	-1	0	0	1	1	10
0	0	0	1	0	2	16

Bảng 4

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	-6	0	0	0	1	26
0	-1	1	0	0	0	8
0	-1	0	0	1	1	10
0	0	0	1	0	2	16

Bảng 4 lúc này là bảng đơn hình xuất phát; ta tiến hành kiểm tra điều kiện tối ưu, tìm cột xoay, hàng xoay, phần tử xoay, và áp dụng phương pháp biến đổi như thông thường để thu được phương án cực biên mới. Trong trường hợp này, dễ dàng kiểm tra được cột xoay là cột x_5 , hàng xoay là hàng cuối, và phần tử xoay là 2. Biến đổi cho các phần tử khác 2 trong cột xoay bằng 0, ta thu được bảng đơn hình 5, là bảng tối ưu.

Bảng 5

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
2	-12	0	-1	0	0	36
0	-1	1	0	0	0	8
0	-2	0	-1	2	0	4
0	0	0	1	0	②	16

Kết luận: $z_{\min} = 36/2 = 18$; $x_1 = x_3 = 0$; $x_2 = 8, x_4 = 2$.

Exercise 1. Giải các bài toán sau bằng phương pháp đơn hình:

1.

$$\begin{aligned} \max \quad & -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ & -x_2 - 7x_3 + 3x_4 \leq 3, \\ & -3x_3 + 2x_4 \leq 7, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_3 + 3x_3 + 3x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 20, \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 18, \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 16, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 6x_4 \leq 20, \\ & x_1 + x_3 - 2x_4 \leq 6, \\ & 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 24, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \geq 6, \\ & -x_1 + x_3 \leq 10, \\ & 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 20, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \max \quad & -2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 4x_5 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 9, \\ & 7x_1 - 3x_2 - 7x_4 + 5x_5 = 14, \\ & 4x_1 - 2x_2 - 4x_4 + 3x_5 = 8, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Exercise 2. Giả sử yêu cầu tối thiểu mỗi ngày về các chất dinh dưỡng đạm, đường, khoáng cho một loại gia súc tương ứng là 90g, 130g, 10g. Cho biết hàm lượng các chất dinh dưỡng trên có trong 1g thức ăn A, B, C và giá mua 1kg thức ăn mỗi loại được cho trong bảng 1. Hãy lập mô hình toán học của bài toán xác định khối lượng thức ăn mỗi loại phải mua để tổng số tiền chi cho mua thức ăn ít nhất nhưng đáp ứng được nhu cầu dinh dưỡng mỗi ngày

Bảng 1

Chất dinh dưỡng	A	B	C
Đạm	0.1g	0.2g	0.3g
Đường	0.3g	0.4g	0.2g
Khoáng	0.02g	0.01g	0.03g
Giá mua	3000	4000	5000

Bảng 2

Các yếu tố	Bàn	Ghế	Tủ
Lao động (ngày công)	2	1	3
Chi phí sản xuất (ngàn đồng)	100	40	250
Giá bán (ngàn đồng)	260	120	600

Exercise 3. Một cơ sở sản xuất đồ gỗ dự định sản xuất ba loại sản phẩm là bàn, ghế và tủ. Định mức sử dụng lao động, chi phí sản xuất và giá bán mỗi sản phẩm mỗi loại ước tính trong bảng 2. Hãy lập mô hình toán học của bài toán xác định số sản phẩm mỗi loại cần phải sản xuất sao cho không bị động trong sản xuất và tổng doanh thu đạt được cao nhất, biết rằng cơ sở có số lao động tương đương với 500 ngày công, số tiền dành cho chi phí sản xuất là 40 triệu đồng và số bàn, ghế phải theo tỉ lệ 1/6.