QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Dương Thị Kim Huyền – Tạ Thúy Anh

Khoa công nghệ thông tin
Đại học PHENIKAA

Hà Nội - 2023

1. BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

2. PHÂN LOẠI BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Một số ví dụ

Ví dụ 1. Một xí nghiệp cần sản xuất 3 loại bánh: bánh đậu xanh, bánh thập cẩm và bánh dẻo. Lượng nguyên liệu đường, đậu cho một chiếc bánh mỗi loại, lượng nguyên liệu dự trữ, tiền lãi từ một chiếc bánh mỗi loại bánh được cho trong bảng sau

Nguyên liệu	B. đậu xanh	B. thập cẩm	Bánh dẻo	Dự trữ
Đường	0.04kg	0.06kg	0.05kg	500kg
Đậu	0.07 kg	0kg	0.02kg	300kg
Lãi	3000	2000	2500	

Một số ví dụ

Ví dụ 1. Một xí nghiệp cần sản xuất 3 loại bánh: bánh đậu xanh, bánh thập cẩm và bánh dẻo. Lượng nguyên liệu đường, đậu cho một chiếc bánh mỗi loại, lượng nguyên liệu dự trữ, tiền lãi từ một chiếc bánh mỗi loại bánh được cho trong bảng sau

Nguyên liệu	B. đậu xanh	B. thập cẩm	Bánh dẻo	Dự trữ
Đường	0.04kg	0.06kg	0.05kg	500kg
Đậu	0.07 kg	0kg	0.02kg	300kg
Lãi	3000	2000	2500	

Hãy lập mô hình bài toán tìm số lượng mỗi loại bánh cần sản xuất sao cho không bị động về nguyên liệu mà tiền lãi đạt được cao nhất.

Gọi x_1, x_2,x_3 lần lượt là số bánh đậu xanh, bánh thập cẩm, bánh dẻo cần phải sản xuất.

Điều kiện: $x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3.$

Gọi x_1, x_2,x_3 lần lượt là số bánh đậu xanh, bánh thập cẩm, bánh dẻo cần phải sản xuất.

Điều kiện: $x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3.$

- Tiền lãi thu được $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 + 2.5x_3$ (ngàn)
- Lượng đường được sử dụng là $0.04x_1 + 0.06x_2 + 0.05x_3$ (kg)
  Để không bị động về nguyên liệu thì $0.04x_1 + 0.06x_2 + 0.05x_3 \leqslant 500$
- Lượng đậu được sử dụng là $0.07x_1 + 0.02x_3$ (kg)
  Để không bị động về nguyên liệu thì $0.07x_1 + 0.02x_3 \leqslant 300$

- Tiền lãi thu được
  $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 + 2.5x_3$ (ngàn)
- Lượng đường được sử dụng là
  $0.04x_1 + 0.06x_2 + 0.05x_3$ (kg)
  Để không bị động về nguyên liệu thì
  $0.04x_1 + 0.06x_2 + 0.05x_3 \leqslant 500$
- Lượng đậu được sử dụng là
  $0.07x_1 + 0.02x_3$ (kg)
  Để không bị động về nguyên liệu thì
  $0.07x_1 + 0.02x_3 \leqslant 300$

- Tiền lãi thu được
  $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 + 2.5x_3$ (ngàn)
- Lượng đường được sử dụng là
  $0.04x_1 + 0.06x_2 + 0.05x_3$ (kg)
  Để không bị động về nguyên liệu thì
  $0.04x_1 + 0.06x_2 + 0.05x_3 \leqslant 500$
- Lượng đậu được sử dụng là
  $0.07x_1 + 0.02x_3$ (kg)
  Để không bị động về nguyên liệu thì
  $0.07x_1 + 0.02x_3 \leqslant 300$

- Tiền lãi thu được $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 + 2.5x_3$ (ngàn)
- Lượng đường được sử dụng là $0.04x_1 + 0.06x_2 + 0.05x_3$ (kg)
  Để không bị động về nguyên liệu thì $0.04x_1 + 0.06x_2 + 0.05x_3 \leqslant 500$
- Lượng đậu được sử dụng là $0.07x_1 + 0.02x_3$ (kg)
  Để không bị động về nguyên liệu thì $0.07x_1 + 0.02x_3 \leqslant 300$

Ta có mô hình bài toán

- $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 + 2.5x_3 \to \max$
- $0.04x_1 + 0.06x_2 + 0.05x_3 \leqslant 500$
- $0.07x_1 + 0.02x_3 \leqslant 300$
- $x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3.$

Ví dụ 2. Giả sử yêu cầu tối thiểu mỗi ngày về các chất dinh dưỡng đạm, đường, khoáng cho một loại gia súc tương ứng là 90g, 130g, 10g. Cho biết hàm lượng các chất dinh dưỡng trên có trong 1g thức ăn A, B, C và giá mua 1kg thức ăn mỗi loại được cho trong bảng sau:

Chất dinh dưỡng	**A**	**B**	**C**
Đạm	0.1g	0.2g	0.3g
Đường	0.3g	0.4g	0.2g
Khoáng	0.02g	0.01g	0.03g
Giá mua	3000	4000	5000

Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là khối lượng (g) thức ăn A, B, C cần mua.

Điều kiện $x_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, 3$.

Tổng khối lượng các chất dinh dưỡng có trong thức ăn cần mua là

- Đạm: $0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3$ g
- Đường: $0.3x_1 + 0.4x_2 + 0.2x_3$ g
- Khoáng: $0.02x_1 + 0.01x_2 + 0.03x_3$ g

Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là khối lượng (g) thức ăn A, B, C cần mua.

Điều kiện $x_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, 3$.

Tổng khối lượng các chất dinh dưỡng có trong thức ăn cần mua là

- Đạm: $0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3$ g
- Đường: $0.3x_1 + 0.4x_2 + 0.2x_3$ g
- Khoáng: $0.02x_1 + 0.01x_2 + 0.03x_3$ g

Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là khối lượng (g) thức ăn A, B, C cần mua.
Điều kiện $x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3.$
Tổng khối lượng các chất dinh dưỡng có trong thức ăn cần mua là

- Đạm: $0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3$ g
- Đường: $0.3x_1 + 0.4x_2 + 0.2x_3$ g
- Khoáng: $0.02x_1 + 0.01x_2 + 0.03x_3$ g

Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là khối lượng (g) thức ăn A, B, C cần mua.

Điều kiện $x_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, 3$.

Tổng khối lượng các chất dinh dưỡng có trong thức ăn cần mua là

- Đạm: $0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3$ g
- Đường: $0.3x_1 + 0.4x_2 + 0.2x_3$ g
- Khoáng: $0.02x_1 + 0.01x_2 + 0.03x_3$ g

Để đáp ứng được nhu cầu dinh dưỡng tối thiểu mỗi ngày thì tổng khối lượng các chất dinh dưỡng có trong thức ăn cần mua không thể nhỏ hơn các nhu cầu tối thiều mỗi ngày về các chất dinh dưỡng đó nên ta có các điều kiện:

- $0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 \geqslant 90$
- $0.3x_1 + 0.4x_2 + 0.2x_3 \geqslant 130$
- $0.02x_1 + 0.01x_2 + 0.03x_3 \geqslant 10$

Tổng số tiền phải chi để mua số thức ăn trên là $3x_1 + 4x_2 + 5x_3$ (nghìn đồng)

Để đáp ứng được nhu cầu dinh dưỡng tối thiểu mỗi ngày thì tổng khối lượng các chất dinh dưỡng có trong thức ăn cần mua không thể nhỏ hơn các nhu cầu tối thiểu mỗi ngày về các chất dinh dưỡng đó nên ta có các điều kiện:

- $0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 \geqslant 90$
- $0.3x_1 + 0.4x_2 + 0.2x_3 \geqslant 130$
- $0.02x_1 + 0.01x_2 + 0.03x_3 \geqslant 10$

Tổng số tiền phải chi để mua số thức ăn trên là
$3x_1 + 4x_2 + 5x_3$ (nghìn đồng)

Mô hình hóa bài toán như sau

- $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \to \min$
- $0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 \geqslant 90$
- $0.3x_1 + 0.4x_2 + 0.2x_3 \geqslant 130$
- $0.02x_1 + 0.01x_2 + 0.03x_3 \geqslant 10$
- $x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3$

PHÂN LOẠI BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Dạng tổng quát

$$\min/\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant (\leqslant \;=) b_j \; (j = 1, 2, \ldots, n) \\ x_j \geqslant (\leqslant \;=) 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

Dạng chính tắc

- Các ràng buộc chỉ có dấu "="
- Các biến số đều không âm

Dạng chính tắc

- Các ràng buộc chỉ có dấu "="
- Các biến số đều không âm

$$\min/\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (j = 1, 2, \ldots, n) \\ x_j \geqslant 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

$$\min/\max \quad z = c^T x$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

- A: ma trận hệ số các ràng buộc
- c: véctơ chi phí
- b: véctơ giới hạn các ràng buộc

$$\min/\max \quad z = c^T x$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

- A: ma trận hệ số các ràng buộc
- c: véctơ chi phí
- b: véctơ giới hạn các ràng buộc

Đưa QHTT về dạng chính tắc

$$\min z(x) = 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \leqslant 7 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 \geqslant -1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 20 \\ x_1, x_5 \geqslant 0, x_4 \leqslant 0 \\ x_2, x_3 \text{ tùy ý} \end{cases}$$

Thay thế

$$\begin{cases} x_4 = -x_4' \quad (x_4' \geqslant 0) \\ x_2 = x_2' - x_2'' \quad (x_2', x_2'' \geqslant 0) \\ x_3 = x_3' - x_3'' \quad (x_3', x_3'' \geqslant 0) \end{cases}$$

Ta được

$$\min \quad z(x) = 2x_1 - (x_2' - x_2'') + 2(x_3' - x_3'') - x_4' - 2x_5$$

$$\begin{cases} x_1 - 2(x_2' - x_2'') + (x_3' - x_3'') - 2x_4' + x_5 + x_6 = 7 \\ -(x_2' - x_2'') - 2(x_3' - x_3'') + x_4' + x_7 = 1 \\ x_1 + (x_2' - x_2'') - 2(x_3' - x_3'') - x_4' = 20 \\ x_1, x_5, x_6, x_7, x_2', x_2'', x_3', x_3'', x_4' \geqslant 0 \end{cases}$$

Đưa QHTT về dạng chính tắc

- Nếu gặp ràng buộc i có dạng "$\leqslant$" thì *cộng thêm* vào vế trái của ràng buộc một biến phụ $x_{n+i} \geqslant 0$
- Nếu gặp ràng buộc i có dạng "$\geqslant$" thì *trừ đi* vào vế trái của ràng buộc một biến phụ $x_{n+i} \geqslant 0$
- Nếu biến $x_j \leqslant 0$ thì đặt $x_j = -x_j'$ với $x_j' \geqslant 0$
- Nếu biến x_j là tùy ý thì ta đặt

$$x_j = x_j' - x_j'' \text{ với } \quad x_j', x_j'' \geqslant 0$$

Đưa QHTT về dạng chính tắc

- Nếu gặp ràng buộc i có dạng "$\leqslant$" thì *cộng thêm* vào vế trái của ràng buộc một biến phụ $x_{n+i} \geqslant 0$
- Nếu gặp ràng buộc i có dạng "$\geqslant$" thì *trừ đi* vào vế trái của ràng buộc một biến phụ $x_{n+i} \geqslant 0$
- Nếu biến $x_j \leqslant 0$ thì đặt $x_j = -x_j'$ với $x_j' \geqslant 0$
- Nếu biến x_j là tùy ý thì ta đặt

$$x_j = x_j' - x_j'' \text{ với } \quad x_j', x_j'' \geqslant 0$$

Đưa QHTT về dạng chính tắc

- Nếu gặp ràng buộc i có dạng "$\leqslant$" thì *cộng thêm* vào vế trái của ràng buộc một biến phụ $x_{n+i} \geqslant 0$
- Nếu gặp ràng buộc i có dạng "$\geqslant$" thì *trừ đi* vào vế trái của ràng buộc một biến phụ $x_{n+i} \geqslant 0$
- Nếu biến $x_j \leqslant 0$ thì đặt $x_j = -x_j'$ với $x_j' \geqslant 0$
- Nếu biến x_j là tùy ý thì ta đặt

$$x_j = x_j' - x_j'' \text{ với } \quad x_j', x_j'' \geqslant 0$$

Đưa QHTT về dạng chính tắc

- Nếu gặp ràng buộc i có dạng "$\leqslant$" thì *cộng thêm* vào vế trái của ràng buộc một biến phụ $x_{n+i} \geqslant 0$
- Nếu gặp ràng buộc i có dạng "$\geqslant$" thì *trừ đi* vào vế trái của ràng buộc một biến phụ $x_{n+i} \geqslant 0$
- Nếu biến $x_j \leqslant 0$ thì đặt $x_j = -x_j'$ với $x_j' \geqslant 0$
- Nếu biến x_j là tùy ý thì ta đặt

$$x_j = x_j' - x_j'' \text{ với } \quad x_j', x_j'' \geqslant 0$$