TỐI ƯU CÓ RÀNG BUỘC

Dương Thị Kim Huyền – Tạ Thúy Anh

Khoa công nghệ thông tin
Đại học PHENIKAA

Hà Nội - 2023

1. Bài toán tối ưu lồi có ràng buộc

2. Điều kiện cần cực trị

3. Điều kiện cần và đủ cực trị

Bài toán tối ưu lồi có ràng buộc

Bài toán tối ưu lồi

- Hàm mục tiêu (objective function): lồi
- Tập chấp nhận được (feasible set): lồi

Bài toán tối ưu lồi

- Hàm mục tiêu (objective function): lồi
- Tập chấp nhận được (feasible set): lồi

Bài toán tối ưu lồi tổng quát

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \min & f(x) \\
 & \text{sao cho} & g_i(x) \leqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n \\
 & & h_j(x) = 0, j = 1, 2, \ldots, p \\
 & & x \in \mathbb{R}^n.
\end{array}
$$

- x là biến số
- $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm mục tiêu
- $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm lồi
- $h_j(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm affine

Bài toán tối ưu lồi tổng quát

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \min & f(x) \\
& \text{sao cho} & g_i(x) \leqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n \\
& & h_j(x) = 0, j = 1, 2, \ldots, p \\
& & x \in \mathbb{R}^n.
\end{array}
$$

- x là biến số
- $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm mục tiêu
- $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm lồi
- $h_j(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm affine

Bài toán tối ưu lồi tổng quát

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \min & f(x) \\
 & \text{sao cho} & g_i(x) \leqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n \\
 & & h_j(x) = 0, j = 1, 2, \ldots, p \\
 & & x \in \mathbb{R}^n.
\end{array}
$$

- x là biến số
- $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm mục tiêu
- $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm lồi
- $h_j(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm affine

Bài toán tối ưu lồi tổng quát

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \min & f(x) \\
 & \text{sao cho} & g_i(x) \leqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n \\
 & & h_j(x) = 0, j = 1, 2, \ldots, p \\
 & & x \in \mathbb{R}^n.
\end{array}
$$

- x là biến số
- $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm mục tiêu
- $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm lồi
- $h_j(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm affine

Bài toán tối ưu lồi tổng quát

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \min & f(x) \\
 & \text{sao cho} & g_i(x) \leqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n \\
 & & h_j(x) = 0, j = 1, 2, \ldots, p \\
 & & x \in \mathbb{R}^n.
\end{array}
$$

- x là biến số
- $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm mục tiêu
- $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm lồi
- $h_j(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm affine

Bài toán tối ưu lồi

Các bài toán sau là bài toán tối ưu lồi hoặc có thể chuyển về một bài toán tối ưu lồi

- Least squares
- Linear programming
- Convex quadratic minimization with linear constraints
- Quadratic minimization with convex quadratic constraints
- Conic optimization
- Geometric programming
- Second order cone programming

Bài toán tối ưu lồi

Các bài toán sau là bài toán tối ưu lồi hoặc có thể chuyển về một bài toán tối ưu lồi

- Least squares
- Linear programming
- Convex quadratic minimization with linear constraints
- Quadratic minimization with convex quadratic constraints
- Conic optimization
- Geometric programming
- Second order cone programming

Bài toán tối ưu lồi

Các bài toán sau là bài toán tối ưu lồi hoặc có thể chuyển về một bài toán tối ưu lồi

- Least squares
- Linear programming
- Convex quadratic minimization with linear constraints
- Quadratic minimization with convex quadratic constraints
- Conic optimization
- Geometric programming
- Second order cone programming

Bài toán tối ưu lồi

Các bài toán sau là bài toán tối ưu lồi hoặc có thể chuyển về một bài toán tối ưu lồi

- Least squares
- Linear programming
- Convex quadratic minimization with linear constraints
- Quadratic minimization with convex quadratic constraints
- Conic optimization
- Geometric programming
- Second order cone programming

Bài toán tối ưu lồi

Các bài toán sau là bài toán tối ưu lồi hoặc có thể chuyển về một bài toán tối ưu lồi

- Least squares
- Linear programming
- Convex quadratic minimization with linear constraints
- Quadratic minimization with convex quadratic constraints
- Conic optimization
- Geometric programming
- Second order cone programming

Bài toán tối ưu lồi

Các bài toán sau là bài toán tối ưu lồi hoặc có thể chuyển về một bài toán tối ưu lồi

- Least squares
- Linear programming
- Convex quadratic minimization with linear constraints
- Quadratic minimization with convex quadratic constraints
- Conic optimization
- Geometric programming
- Second order cone programming

Bài toán tối ưu lồi

Các bài toán sau là bài toán tối ưu lồi hoặc có thể chuyển về một bài toán tối ưu lồi

- Least squares
- Linear programming
- Convex quadratic minimization with linear constraints
- Quadratic minimization with convex quadratic constraints
- Conic optimization
- Geometric programming
- Second order cone programming

Bài toán tối ưu lồi

Các bài toán sau là bài toán tối ưu lồi hoặc có thể chuyển về một bài toán tối ưu lồi

- Least squares
- Linear programming
- Convex quadratic minimization with linear constraints
- Quadratic minimization with convex quadratic constraints
- Conic optimization
- Geometric programming
- Second order cone programming

Những bài toán tối ưu lồi có nhiều ứng dụng

- Portfolio optimization
- Worst-case risk analysis
- Optimal advertising
- Variations of statistical regression (including regularization and quantile regression)
- Model fitting (particularly multiclass classification)

Những bài toán tối ưu lồi có nhiều ứng dụng

- Portfolio optimization
- Worst-case risk analysis
- Optimal advertising
- Variations of statistical regression (including regularization and quantile regression)
- Model fitting (particularly multiclass classification)

Những bài toán tối ưu lồi có nhiều ứng dụng

- Portfolio optimization
- Worst-case risk analysis
- Optimal advertising
- Variations of statistical regression (including regularization and quantile regression)
- Model fitting (particularly multiclass classification)

Những bài toán tối ưu lồi có nhiều ứng dụng

- Portfolio optimization
- Worst-case risk analysis
- Optimal advertising
- Variations of statistical regression (including regularization and quantile regression)
- Model fitting (particularly multiclass classification)

Những bài toán tối ưu lồi có nhiều ứng dụng

- Portfolio optimization
- Worst-case risk analysis
- Optimal advertising
- Variations of statistical regression (including regularization and quantile regression)
- Model fitting (particularly multiclass classification)

Những bài toán tối ưu lồi có nhiều ứng dụng

- Electricity generation optimization
- Combinatorial optimization
- Non-probabilistic modelling of uncertainty
- Localization using wireless signals

Những bài toán tối ưu lồi có nhiều ứng dụng

- Electricity generation optimization
- Combinatorial optimization
- Non-probabilistic modelling of uncertainty
- Localization using wireless signals

Những bài toán tối ưu lồi có nhiều ứng dụng

- Electricity generation optimization
- Combinatorial optimization
- Non-probabilistic modelling of uncertainty
- Localization using wireless signals

Những bài toán tối ưu lồi có nhiều ứng dụng

- Electricity generation optimization
- Combinatorial optimization
- Non-probabilistic modelling of uncertainty
- Localization using wireless signals

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \min & f(x) \\
 & \text{sao cho} & g_i(x) \leqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n \\
 & & h_j(x) = 0, j = 1, 2, \ldots, p \\
 & & x \in \mathbb{R}^n.
\end{array}
$$

Đặt $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $J = \{1, 2, \ldots, p\}$.

- I, J là các tập chỉ số.

Đặt $C = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leqslant 0 \ \forall i \in I, \ \ h_j(x) = 0 \ \forall j \in J\}$

- C là tập chấp nhận được

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \min & f(x) \\
 & \text{sao cho} & g_i(x) \leqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n \\
 & & h_j(x) = 0, j = 1, 2, \ldots, p \\
 & & x \in \mathbb{R}^n.
\end{array}
$$

Đặt $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $J = \{1, 2, \ldots, p\}$.

- I, J là các tập chỉ số.

Đặt $C = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leqslant 0 \ \forall i \in I, \ h_j(x) = 0 \ \forall j \in J\}$

- C là tập chấp nhận được

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \min & f(x) \\
 & \text{sao cho} & g_i(x) \leqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n \\
 & & h_j(x) = 0, j = 1, 2, \ldots, p \\
 & & x \in \mathbb{R}^n.
\end{array}
$$

Đặt $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $J = \{1, 2, \ldots, p\}$.

- I, J là các tập chỉ số.

Đặt $C = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leqslant 0 \ \forall i \in I, \ h_j(x) = 0 \ \forall j \in J\}$

- C là tập chấp nhận được

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \min & f(x) \\
 & \text{sao cho} & g_i(x) \leqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n \\
 & & h_j(x) = 0, j = 1, 2, \ldots, p \\
 & & x \in \mathbb{R}^n.
\end{array}
$$

Đặt $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $J = \{1, 2, \ldots, p\}$.

- I, J là các tập chỉ số.

Đặt $C = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leqslant 0 \ \forall i \in I, \ h_j(x) = 0 \ \forall j \in J\}$

- C là tập chấp nhận được

Điều kiện cần cực trị

Định lý KKT1

Nếu x^* là một nghiệm tối ưu của bài toán P *thì* tồn tại các hằng số λ_i $(i \in I)$, μ_j $(j \in J)$ sao cho

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j \in J} \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0 \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0 \;\; \forall i \in I \\ g_i(x^*) \leqslant 0 \;\; \forall i \in I, \;\; h_j(x^*) = 0 \;\; \forall j \in J \\ \lambda_i \geqslant 0 \;\; \forall i \in I, \;\; \mu_j \in \mathbb{R} \;\; \forall j \in J \end{cases} \tag{1}$$

Điểm x^* thỏa mãn hệ (1) được gọi là một điểm *KKT* (Karush-Kuhn-Tucker) của bài toán

- Điều kiện $\lambda_i g_i(x^*) = 0$: điều kiện bù
- Các nhân tử λ_i, μ_j: nhân tử Lagrange

Điểm x^* thỏa mãn hệ (1) được gọi là một điểm *KKT* (Karush-Kuhn-Tucker) của bài toán

- Điều kiện $\lambda_i g_i(x^*) = 0$: điều kiện bù
- Các nhân tử λ_i, μ_j: nhân tử Lagrange

Điều kiện chính quy Slater

Điều kiện chính quy **Slater** (CQ) thỏa mãn đối với bài toàn P nếu tồn tại $u \in C$ sao cho

$$g_i(u) < 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, m.$$

Điều kiện cần và đủ cực trị

Định lý KKT2

- Điều kiện chính quy Slater thỏa mãn
- x^* là một điểm chấp nhận được của bài toán

x^* là một nghiệm tối ưu của bài toán (P) *khi và chỉ khi* tồn tại các hằng số λ_i $(i \in I)$, μ_j $(j \in J)$ sao cho

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j \in J} \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0 \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0 \quad \forall i \in I \\ g_i(x^*) \leqslant 0 \quad \forall i \in I, \quad h_j(x^*) = 0 \quad \forall j \in J \\ \lambda_i \geqslant 0 \quad \forall i \in I, \quad \mu_j \in \mathbb{R} \quad \forall j \in J \end{cases}$$

Định lý KKT2

- Điều kiện chính quy Slater thỏa mãn
- x^* là một điểm chấp nhận được của bài toán

x^* là một nghiệm tối ưu của bài toán (P) *khi và chỉ khi* tồn tại các hằng số λ_i $(i \in I)$, μ_j $(j \in J)$ sao cho

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j \in J} \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0 \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0 \quad \forall i \in I \\ g_i(x^*) \leqslant 0 \quad \forall i \in I, \quad h_j(x^*) = 0 \quad \forall j \in J \\ \lambda_i \geqslant 0 \quad \forall i \in I, \quad \mu_j \in \mathbb{R} \quad \forall j \in J \end{cases}$$

Định lý KKT2

- Điều kiện chính quy Slater thỏa mãn
- x^* là một điểm chấp nhận được của bài toán

x^* là một nghiệm tối ưu của bài toán (P) *khi và chỉ khi* tồn tại các hằng số λ_i $(i \in I)$, μ_j $(j \in J)$ sao cho

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j \in J} \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0 \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0 \quad \forall i \in I \\ g_i(x^*) \leqslant 0 \quad \forall i \in I, \;\; h_j(x^*) = 0 \quad \forall j \in J \\ \lambda_i \geqslant 0 \quad \forall i \in I, \;\; \mu_j \in \mathbb{R} \quad \forall j \in J \end{cases}$$

Ví dụ 1

Tìm cực tiểu của hàm số $f(x, y) = (x-1)^2 + y - 2$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x + y - 2 \leqslant 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

Điểm dừng $(x^*, y^*) = (1/2, 3/2)$ ứng với cặp nhân tử $(\lambda, \mu) = (0, 1)$.

Ví dụ 1

Tìm cực tiểu của hàm số $f(x,y) = (x-1)^2 + y - 2$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x + y - 2 \leqslant 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

Điểm dừng $(x^*, y^*) = (1/2, 3/2)$ ứng với cặp nhân tử $(\lambda, \mu) = (0, 1)$.

Ví dụ 2

Tìm cực đại của hàm số $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 6y$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x + y \leqslant 3 \\ -2x + y \leqslant 2 \end{cases}$$

Điểm KKT $(x^*, y^*) = (\frac{1}{3}, \frac{8}{3})$

Ví dụ 2

Tìm cực đại của hàm số $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 6y$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x + y \leqslant 3 \\ -2x + y \leqslant 2 \end{cases}$$

Điểm KKT $(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$

Ví dụ 3

Tìm cực đại của hàm số $f(x, y) = xy$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 2 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Ví dụ 4

Tìm cực tiểu của hàm số $f(x, y) = 2x + y$ thỏa mãn

$$\begin{cases} 3x + y \leqslant 6 \\ x + y \leqslant 4 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Một số ví dụ bài toán tối ưu lồi

Bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + d \\ \text{thỏa mãn} \quad & Gx \leqslant h \\ & Ax = b, \end{aligned}$$

trong đó, $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $c, d, h, b \in \mathbb{R}^n$.

Một số ví dụ về bài toán tối ưu lồi

Bài toán quy hoạch toàn phương lồi

$$
\begin{array}{ll}
\min & (1/2)x^T P x + q^T x + r \\
\text{thỏa mãn} & Gx \leqslant h \\
 & Ax = b,
\end{array}
$$

trong đó, $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P \succeq 0$, $G \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{p\times n}$.