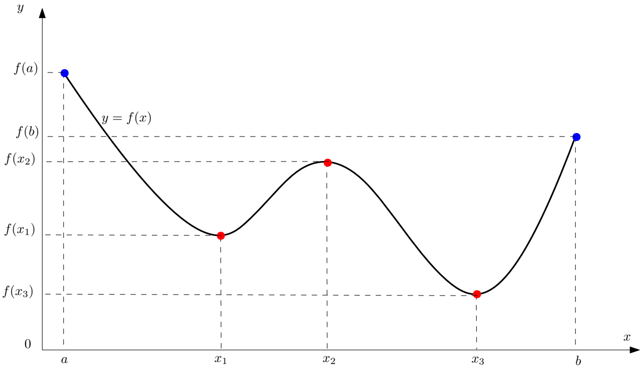
# Optimization

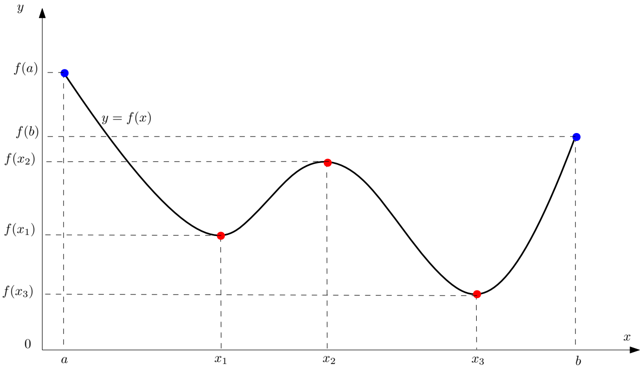
Faculty of Computer Science
Phenikaa University

Ngày 28 tháng 3 năm 2023

Bài toán: Cho $D \subset \mathbb{R}$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f : D \to \mathbb{R}$.



Bài toán: Cho $D \subset \mathbb{R}$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f : D \to \mathbb{R}$.




## Câu hỏi

Chúng ta tìm giá trị lớn nhất/nhỏ nhất của một hàm số bằng cách nào?

# Hàm số nhiều biến số (multivariate function)

Cho $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$

Miền xác định (Domain) của $f$: $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| < +\infty\}$

Miền giá trị (Range) của $f$: $f(D) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D : y = f(x)\}$

# Hàm số nhiều biến số (multivariate function)

Cho $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$

Miền xác định (Domain) của $f$: $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| < +\infty\}$

Miền giá trị (Range) của $f$: $f(D) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D : y = f(x)\}$

**Ví dụ**

Tìm miền xác định và miền giá trị của những hàm số sau

- $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$
- $f(x, y, z) = \cos(x + y + z)$

### Giới hạn của hàm số

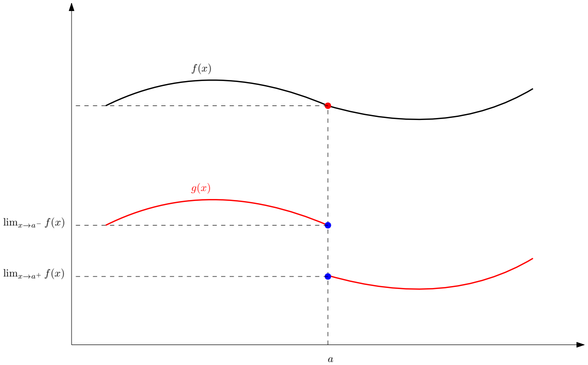
Ta có

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

## Giới hạn của hàm số

Ta có

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

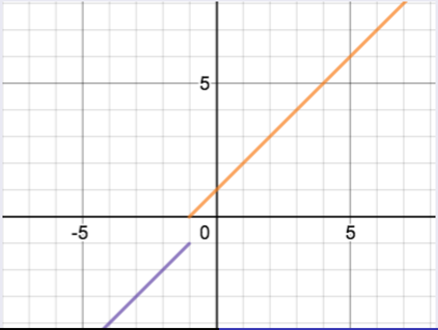


## Tính liên tục của hàm số một biến số

Hàm số $f$ được gọi là liên tục tại $a \in D$ nếu $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

## Ví dụ về hàm số không liên tục

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if} \quad x < -1 \\ x + 1 & \text{if} \quad x \geq -1 \end{cases}$$



### Giới hạn của hàm số hai biến số

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \iff \lim_{\substack{x\to a \\ y\to b}} f(x,y) = L$$

## Giới hạn của hàm số hai biến số

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \Longleftrightarrow \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = L$$

## Tính liên tục của hàm số hai biến số

- Hàm số $f$ được gọi là liên tục tại $(a,b) \in D$ nếu
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$
- Hàm số $f$ được gọi là liên tục trên $D$ nếu $f$ liên tục tại mọi điểm $(a,b) \in D$.

## Đạo hàm riêng

Cho $f : D \to \mathbb{R}$ là hàm số $n$ biến số $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

- Các đạo hàm riêng cấp 1

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

- Các đạo hàm riêng cấp 2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}; \ldots; \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}; \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}; \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}; \ldots$$

## Ví dụ

Cho $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$, tìm các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1 + 4x_2; \ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 + 4x_1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 6; \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} = 4$$

# Hàm số nhiều biến số

**Gradient**

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

# Hàm số nhiều biến số

## Gradient

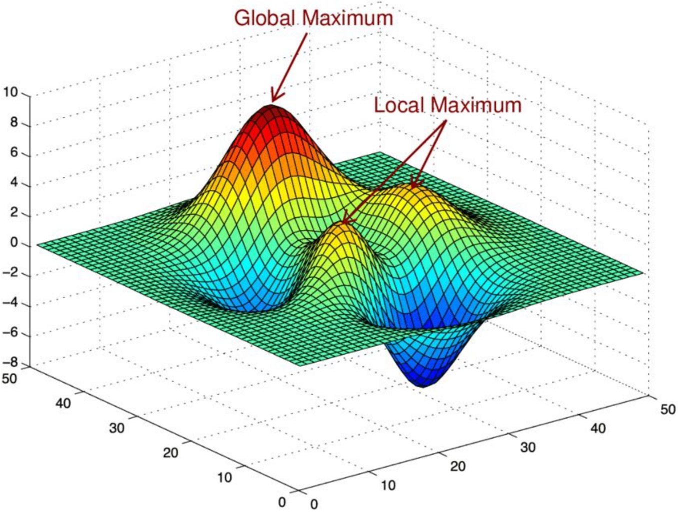
$$\nabla f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

## Ví dụ

Cho $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$, tìm gradient.

$$\nabla f(x) = (6x_1 + 4x_2; 2x_2 + 4x_1)$$

# Cực đại và cực tiểu (Maxima and minima)



# Cực đại và cực tiểu (maxima and minima)

Cho $f : D \to \mathbb{R}$ là hàm số của $n$ biến, $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in D$.

## Cực đại và cực tiểu toàn cục

- $x^*$ là điểm cực đại toàn cục nếu $f(x^*) \geq f(x)$ với mọi $x \in D$. Giá trị $f(x^*)$ được gọi là giá trị lớn nhất của $f$ trên $D$.
- $x^*$ là điểm cực tiểu toàn cục nếu $f(x^*) \leq f(x)$ với mọi $x \in D$. Giá trị $f(x^*)$ được gọi là giá trị nhỏ nhất của $f$ trên $D$.

Trong cả hai trường hợp trên, ta nói $f$ đạt cực trị toàn cục tại $x^*$.

# Cực đại và cực tiểu (maxima and minima)

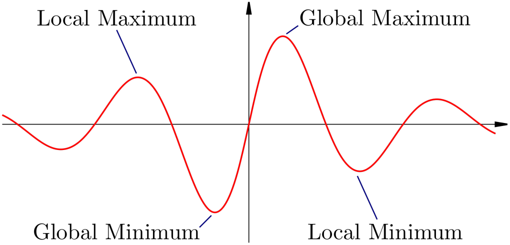
## Cực đại và cực tiểu địa phương

Cho $f : D \to \mathbb{R}$ là hàm số của $n$ biến, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$.

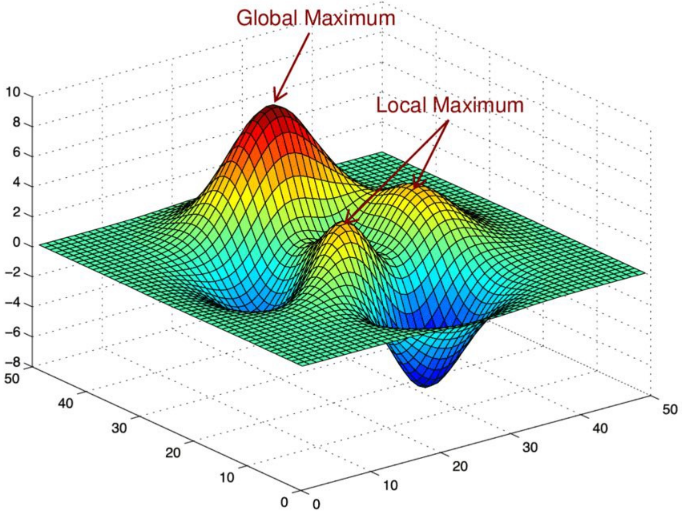
- $\bar{x}$ là một điểm *cực đại địa phương* nếu tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho $f(\bar{x}) \geq f(x)$ với mọi $x \in D \cap B(\bar{x}, \epsilon)$. Ở đó, $B(\bar{x}, \epsilon)$ là hình cầu mở tâm $\bar{x}$, bán kính $\epsilon$.
- $\bar{x}$ là một điểm *cực tiểu địa phương* nếu tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho $f(\bar{x}) \leq f(x)$ với mọi $x \in D \cap B(\bar{x}, \epsilon)$.

Trong cả hai trường hợp trên, ta nói $f$ đạt *cực trị địa phương* tại $\bar{x}$.

# Maxima and minima



# Maxima and minima



### Điều kiện cần cực trị

Giả sử rằng hàm số $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ xác định và khả vi trên một tập lồi mở $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *Nếu* $f$ đạt cực trị địa phương tại $\bar{x} \in \Omega$ *thì* $\nabla f(\bar{x}) = (0, \ldots, 0)$.

**Điều kiện cần cực trị**

Giả sử rằng hàm số $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ xác định và khả vi trên một tập lồi mở $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *Nếu* $f$ đạt cực trị địa phương tại $\bar{x} \in \Omega$ *thì* $\nabla f(\bar{x}) = (0, \ldots, 0)$.

**Điểm dừng (stationary point)**

Điểm $\bar{x} \in \Omega$ thỏa mãn $\nabla f(\bar{x}) = (0, \ldots, 0)$ được gọi là điểm dừng (stationary point) của $f$.

**Nhận xét:** Điểm dừng có thể không phải là điểm cực trị.

## Điều kiện đủ cực trị cấp hai

Cho hàm số $f : U \to \mathbb{R}$ xác định trên một tập mở $U \subset \mathbb{R}^n$. Giả sử rằng $f$ khả vi liên tục đến cấp hai trên $U$. Khi đó,

1. Nếu $\nabla^2 f(\bar{x})$ xác định dương thì $\bar{x}$ là điểm cực tiểu địa phương (chặt) của $f$ trên $U$.
2. Nếu $\nabla^2 f(\bar{x})$ xác định âm thì $\bar{x}$ là điểm cực đại địa phương (chặt) của $f$ trên $U$.

# Đạo hàm cấp hai (nhắc lại)

## Ma trận Hessian

$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

# Ma trận xác định âm (negative definite matrix)

Ma trận $A$ được gọi là xác định âm nếu

$$x^T A x < 0 \quad \forall x \neq 0.$$

# Đặc trưng ma trận đối xứng xác định âm

Cho $A$ là ma trận đối xứng cấp $n$ có các định thức con chính là $\Delta_k$ $(k = 1, \dots, n)$. Khi đó, $A$ là xác định âm khi và chỉ khi

# Đặc trưng ma trận đối xứng xác định âm

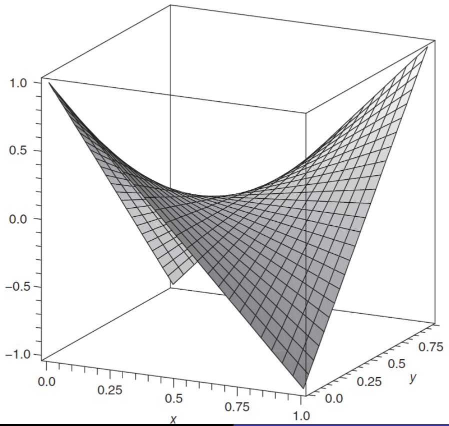
Cho $A$ là ma trận đối xứng cấp $n$ có các định thức con chính là $\Delta_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Khi đó, $A$ là xác định âm khi và chỉ khi

$$(-1)^k \Delta_k > 0 \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

# Điểm yên ngựa (saddle point)

## Definition

Cho hàm số $f : U \to \mathbb{R}$ xác định trên một tập mở $U \subset \mathbb{R}^n$. Giả sử rằng $f$ khả vi liên tục trên $U$. Một điểm dừng $\bar{x}$ được gọi là điểm yên ngựa *(saddle point)* nếu nó không là điểm cực dịa phương, cũng không là điểm cực tiểu địa phương trên $U$.



# Điều kiện đủ cho điểm yên ngựa

**Theorem**

*Cho hàm số* $f : U \to \mathbb{R}$ *xác định trên một tập mở* $U \subset \mathbb{R}^n$*. Gải sử rằng* $f$ *khả vi liên tục đến cấp hai trên* $U$*. Khi đó, nếu* $\nabla f(\bar{x})$ *không xác định thì* $\bar{x}$ *là một điểm yên ngựa của* $f$ *trên* $U$*.*

# Xác định cực đại địa phương, cực tiểu địa phương, điểm yên ngựa

1. Giải phương trình $\nabla f(x) = (0, \ldots, 0)$ tìm điểm dừng.
2. Tìm ma trận Hessian $\mathrm{H}f(x)$. Tại mỗi điểm dừng $\bar{x}$ ta tìm ma trận $\mathrm{H} = \mathrm{H}f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$

- Nếu $\mathrm{H}$ là xác định dương thì $\bar{x}$ là điểm cực tiểu địa phương.
- Nếu $\mathrm{H}$ là xác định âm thì $\bar{x}$ là điểm cực đại địa phương.
- Nếu $\mathrm{H}$ không xác định thì $\bar{x}$ là điểm yên ngựa *(saddle point)*

### Ví dụ

1. Tìm cực trị địa phương, điểm yên ngựa của hàm số $f(x, y, z) = 2xy^2 - 4xy + x^2 + z^2 - 2z$

# Hàm số hai biến số

1. Giải phương trình $\nabla f(x_1, x_2) = (0, 0)$ tìm điểm dừng.
2. Tìm ma trận Hessian $\mathrm{H}f(x)$. Tại mỗi điểm dừng $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, ta tìm $\mathrm{H} = \mathrm{H}f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$

- Nếu $\det(\mathrm{H}) > 0$ thì $\bar{x}$ là một điểm cực trị địa phương.

# Hàm số hai biến số

1. Giải phương trình $\nabla f(x_1, x_2) = (0, 0)$ tìm điểm dừng.
2. Tìm ma trận Hessian $\mathrm{H}f(x)$. Tại mỗi điểm dừng $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, ta tìm $\mathrm{H} = \mathrm{H}f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$

- Nếu $\det(\mathrm{H}) > 0$ thì $\bar{x}$ là một điểm cực trị địa phương.

- $\bar{x}$ là một điểm *cực đại địa phương* nếu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) < 0$
- $\bar{x}$ là một điểm *cực tiểu địa phương* nếu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) > 0$

- Trường hợp còn lại, $\bar{x}$ là điểm *yên ngựa*.

# Ví dụ

1. Tìm điểm cực trị địa phương của hàm số $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$
2. Tìm điểm cực trị địa phương của hàm số $f(x, y) = xy \cdot e^{x-y^2/2}$

# Cực đại và cực tiểu toàn cục (global maxima and minima)

Question: Làm thế nào để tìm cực trị toàn cục của một hàm số?

**Định lý giá trị cực trị (extreme value theorem)**

Hàm số $f$ liên tục trên một tập hợp đóng *(closed)* và bị chặn *(bounded)* $D$ thì đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $D$. Hơn nữa, giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) là giá trị cực đại địa phương (cực tiểu địa phương) hoặc là phải đạt trên biên của miền $D$.

# Cực đại và cực tiểu toàn cục (global maxima and minima)

Question: Làm thế nào để tìm cực trị toàn cục của một hàm số?

## Định lý giá trị cực trị (extreme value theorem)

Hàm số $f$ liên tục trên một tập hợp đóng *(closed)* và bị chặn *(bounded)* $D$ thì đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $D$. Hơn nữa, giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) là giá trị cực đại địa phương (cực tiểu địa phương) hoặc là phải đạt trên biên của miền $D$.

$x^2 + y^2 \leq 1$ closed | $x^2 + y^2 < 1$ not closed | $y \geq 0$ closed

### Ví dụ

Tìm cực trị toàn cục của hàm số $f = 2x^2 - 3xy + 4y^2$ trên miền

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ |\ x^2 + y^2 \leq 4\}.$$