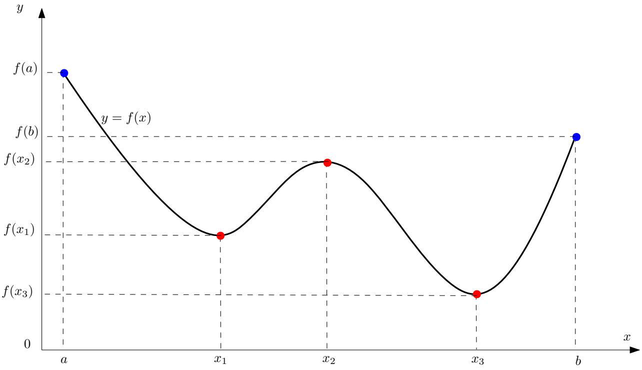
Optimization

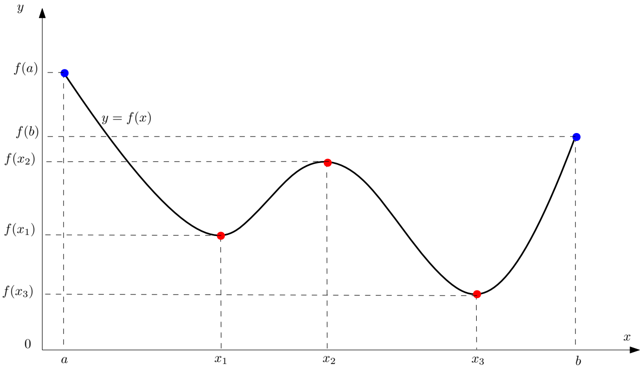
Faculty of Computer Science
Phenikaa University

Ngày 11 tháng 4 năm 2023

Bài toán: Cho $D \subset \mathbb{R}$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f : D \to \mathbb{R}$.



Bài toán: Cho $D \subset \mathbb{R}$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f : D \to \mathbb{R}$.



Câu hỏi

Chúng ta tìm giá trị lớn nhất/nhỏ nhất của một hàm số bằng cách nào?

Hàm số nhiều biến số (multivariate function)

Cho $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$

Miền xác định (Domain) của f: $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| < +\infty\}$

Miền giá trị (Range) của f: $f(D) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D : y = f(x)\}$

Hàm số nhiều biến số (multivariate function)

Cho $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$

Miền xác định (Domain) của f: $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| < +\infty\}$

Miền giá trị (Range) của f: $f(D) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D : y = f(x)\}$

Ví dụ

Tìm miền xác định và miền giá trị của những hàm số sau

- $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$
- $f(x, y, z) = \cos(x + y + z)$

Giới hạn của hàm số

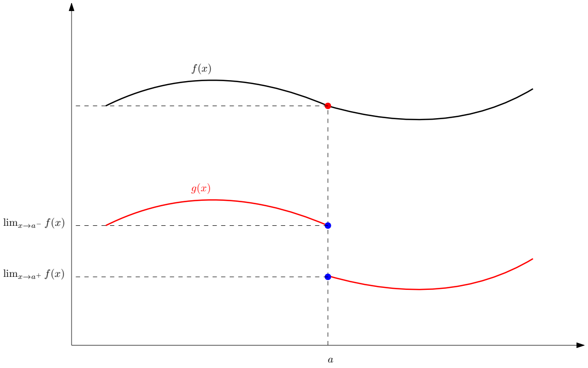
Ta có

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Giới hạn của hàm số

Ta có

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

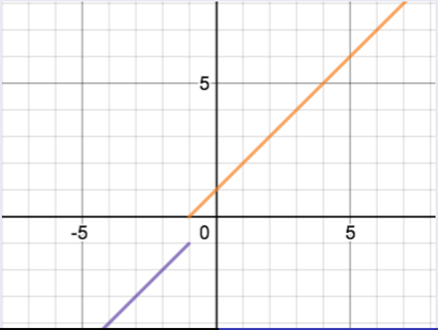


Tính liên tục của hàm số một biến số

Hàm số f được gọi là liên tục tại $a \in D$ nếu $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Ví dụ về hàm số không liên tục

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if} \quad x < -1 \\ x+1 & \text{if} \quad x \geq -1 \end{cases}$$



Giới hạn của hàm số hai biến số

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \Longleftrightarrow \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = L$$

Giới hạn của hàm số hai biến số

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \iff \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = L$$

Tính liên tục của hàm số hai biến số

- Hàm số f được gọi là liên tục tại $(a,b) \in D$ nếu

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

- Hàm số f được gọi là liên tục trên D nếu f liên tục tại mọi điểm $(a,b) \in D$.

Đạo hàm riêng

Cho $f : D \to \mathbb{R}$ là hàm số n biến số $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

- Các đạo hàm riêng cấp 1

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

- Các đạo hàm riêng cấp 2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}; \ldots; \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}; \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}; \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}; \ldots$$

Ví dụ

Cho $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$, tìm các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1 + 4x_2; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 + 4x_1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 6; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} = 4$$

Gradient

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

Hàm số nhiều biến số

Gradient

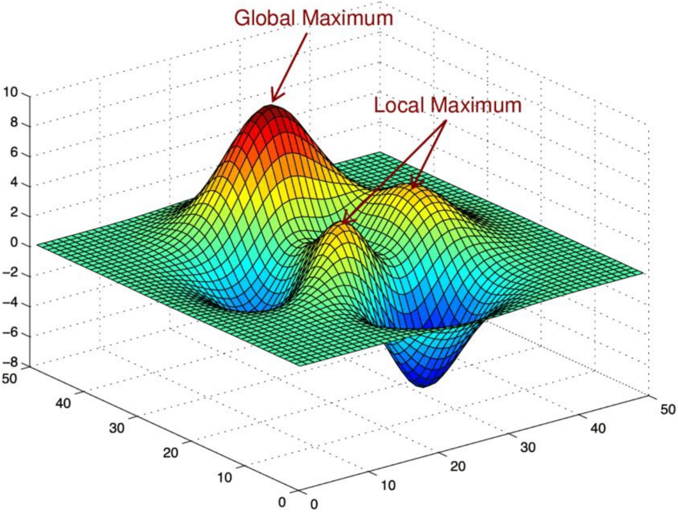
$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

Ví dụ

Cho $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$, tìm gradient.

$$\nabla f(x) = (6x_1 + 4x_2; 2x_2 + 4x_1)$$

Cực đại và cực tiểu (Maxima and minima)



Cực đại và cực tiểu (maxima and minima)

Cho $f : D \to \mathbb{R}$ là hàm số của n biến, $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in D$.

Cực đại và cực tiểu toàn cục

- x^* là điểm cực đại toàn cục nếu $f(x^*) \geq f(x)$ với mọi $x \in D$. Giá trị $f(x^*)$ được gọi là giá trị lớn nhất của f trên D.
- x^* là điểm cực tiểu toàn cục nếu $f(x^*) \leq f(x)$ với mọi $x \in D$. Giá trị $f(x^*)$ được gọi là giá trị nhỏ nhất của f trên D.

Trong cả hai trường hợp trên, ta nói f đạt cực trị toàn cục tại x^*.

Cực đại và cực tiểu (maxima and minima)

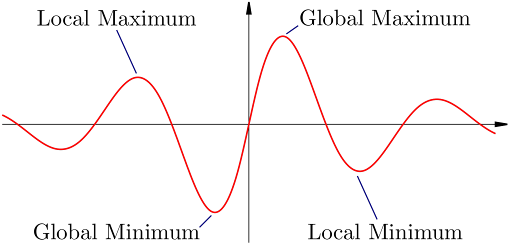
Cực đại và cực tiểu địa phương

Cho $f : D \to \mathbb{R}$ là hàm số của n biến, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$.

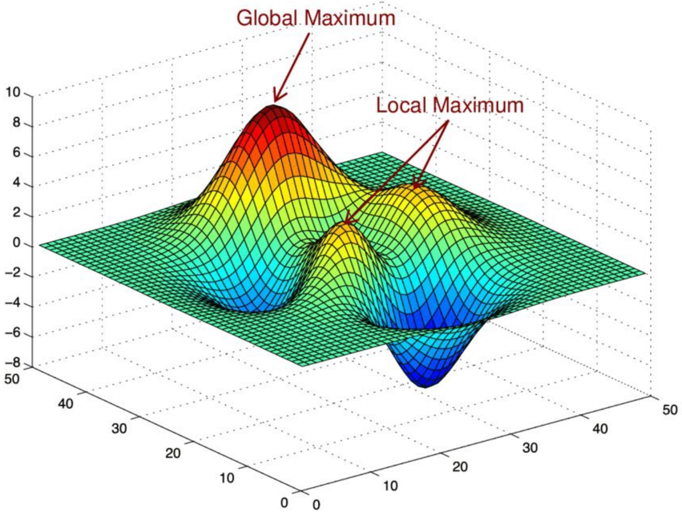
- $\bar{x}$ là một điểm *cực đại địa phương* nếu tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho $f(\bar{x}) \geq f(x)$ với mọi $x \in D \cap B(\bar{x}, \epsilon)$. Ở đó, $B(\bar{x}, \epsilon)$ là hình cầu mở tâm $\bar{x}$, bán kính ϵ.
- $\bar{x}$ là một điểm *cực tiểu địa phương* nếu tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho $f(\bar{x}) \leq f(x)$ với mọi $x \in D \cap B(\bar{x}, \epsilon)$.

Trong cả hai trường hợp trên, ta nói f đạt *cực trị địa phương* tại $\bar{x}$.

Maxima and minima



Maxima and minima



Cực đại và cực tiểu địa phương (local maxima and minima)

Điều kiện cần cực trị

Giả sử rằng hàm số $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ xác định và khả vi trên một tập lồi mở $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *Nếu* f đạt cực trị địa phương tại $\bar{x} \in \Omega$ *thì* $\nabla f(\bar{x}) = (0, \ldots, 0)$.

Cực đại và cực tiểu địa phương (local maxima and minima)

Điều kiện cần cực trị

Giả sử rằng hàm số $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ xác định và khả vi trên một tập lồi mở $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *Nếu* f đạt cực trị địa phương tại $\bar{x} \in \Omega$ *thì* $\nabla f(\bar{x}) = (0, \ldots, 0)$.

Điểm dừng (stationary point)

Điểm $\bar{x} \in \Omega$ thỏa mãn $\nabla f(\bar{x}) = (0, \ldots, 0)$ được gọi là điểm dừng (stationary point) của f.

Nhận xét: Điểm dừng có thể không phải là điểm cực trị.

Điều kiện đủ cực trị cấp hai

Cho hàm số $f : U \to \mathbb{R}$ xác định trên một tập mở $U \subset \mathbb{R}^n$. Giả sử rằng f khả vi liên tục đến cấp hai trên U. Khi đó,

1. Nếu $\nabla^2 f(\bar{x})$ xác định dương thì $\bar{x}$ là điểm cực tiểu địa phương (chặt) của f trên U.
2. Nếu $\nabla^2 f(\bar{x})$ xác định âm thì $\bar{x}$ là điểm cực đại địa phương (chặt) của f trên U.

Đạo hàm cấp hai (nhắc lại)

Ma trận Hessian

$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Ma trận xác định âm (negative definite matrix)

Ma trận A được gọi là xác định âm nếu

$$x^T A x < 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Đặc trưng ma trận đối xứng xác định âm

Cho A là ma trận đối xứng cấp n có các định thức con chính là Δ_k $(k = 1, \ldots, n)$. Khi đó, A là xác định âm khi và chỉ khi

Đặc trưng ma trận đối xứng xác định âm

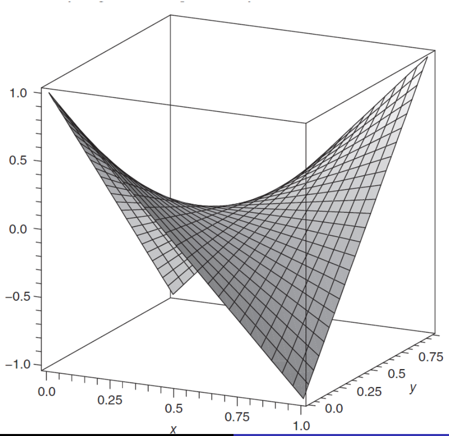
Cho A là ma trận đối xứng cấp n có các định thức con chính là Δ_k ($k = 1, \dots, n$). Khi đó, A là xác định âm khi và chỉ khi

$$(-1)^k \Delta_k > 0 \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Điểm yên ngựa (saddle point)

Definition

Cho hàm số $f : U \to \mathbb{R}$ xác định trên một tập mở $U \subset \mathbb{R}^n$. Giả sử rằng f khả vi liên tục trên U. Một điểm dừng $\bar{x}$ được gọi là điểm yên ngựa *(saddle point)* nếu nó không là điểm cực đại địa phương, cũng không là điểm cực tiểu địa phương trên U.



Điều kiện đủ cho điểm yên ngựa

Theorem

Cho hàm số $f : U \to \mathbb{R}$ *xác định trên một tập mở* $U \subset \mathbb{R}^n$. *Gải sử rằng* f *khả vi liên tục đến cấp hai trên* U. *Khi đó, nếu* $\nabla f(\bar{x})$ *không xác định thì* $\bar{x}$ *là một điểm yên ngựa của* f *trên* U.

Xác định cực đại địa phương, cực tiểu địa phương, điểm yên ngựa

1. Giải phương trình $\nabla f(x) = (0, \dots, 0)$ tìm điểm dừng.
2. Tìm ma trận Hessian $\mathrm{H}f(x)$. Tại mỗi điểm dừng $\bar{x}$ ta tìm ma trận $\mathrm{H} = \mathrm{H}f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$

- Nếu H là xác định dương thì $\bar{x}$ là điểm cực tiểu địa phương.
- Nếu H là xác định âm thì $\bar{x}$ là điểm cực đại địa phương.
- Nếu H không xác định thì $\bar{x}$ là điểm yên ngựa *(saddle point)*

1. Giải phương trình $\nabla f(x_1, x_2) = (0, 0)$ tìm điểm dừng.
2. Tìm ma trận Hessian $\mathrm{H}f(x)$. Tại mỗi điểm dừng $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, ta tìm $\mathrm{H} = \mathrm{H}f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$

- Nếu $\det(\mathrm{H}) > 0$ thì $\bar{x}$ là một điểm cực trị địa phương.

Hàm số hai biến số

1. Giải phương trình $\nabla f(x_1, x_2) = (0, 0)$ tìm điểm dừng.
2. Tìm ma trận Hessian $\mathrm{H}f(x)$. Tại mỗi điểm dừng $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, ta tìm $\mathrm{H} = \mathrm{H}f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$

- Nếu $\det(\mathrm{H}) > 0$ thì $\bar{x}$ là một điểm cực trị địa phương.

- $\bar{x}$ là một điểm *cực đại địa phương* nếu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) < 0$
- $\bar{x}$ là một điểm *cực tiểu địa phương* nếu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) > 0$

- Nếu $\det(\mathrm{H}) < 0$ thì $\bar{x}$ là điểm *yên ngựa*.

- Nếu $\det(\mathrm{H}) = 0$ thì chưa thể kết luận.

Ví dụ

$$f(x, y) = -x^2 + y^2$$

Ví dụ

$$f(x,y) = -x^2 + y^2$$

- $\partial_x f(x,y) = -2x$
- $\partial_y f(x,y) = 2y$
- $\partial_x^2 f(x,y) = -2$, $\partial_y^2 f(x,y) = 2$
- $\partial_{xy}^2 f(x,y) = \partial_{yx}^2 f(x,y) = 0$
- $\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

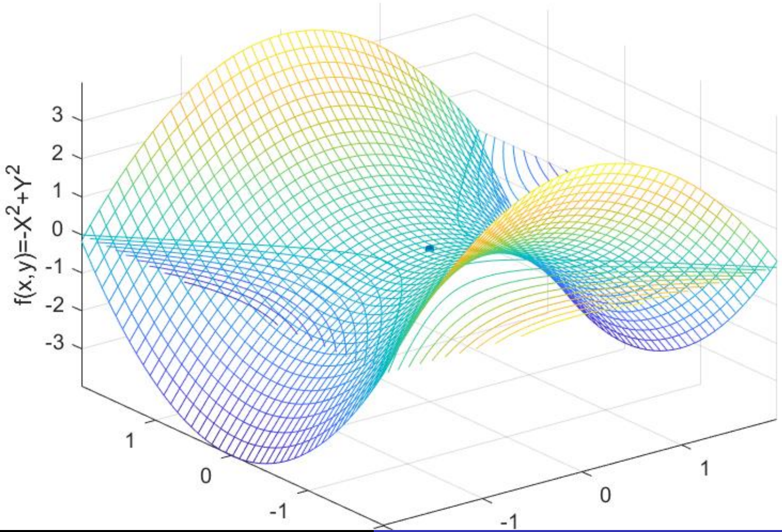
Ví dụ

$$f(x, y) = -x^2 + y^2$$

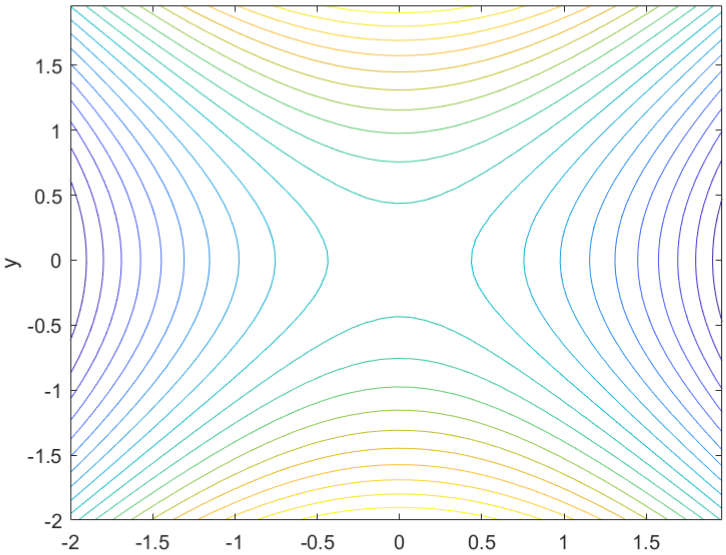
- $\partial_x f(x, y) = -2x$
- $\partial_y f(x, y) = 2y$
- $\partial_x^2 f(x, y) = -2$, $\partial_y^2 f(x, y) = 2$
- $\partial_{xy}^2 f(x, y) = \partial_{yx}^2 f(x, y) = 0$
- $\mathrm{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Điểm dừng $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ là điểm yên ngựa vì $\det(H_f(0, 0)) < 0$.

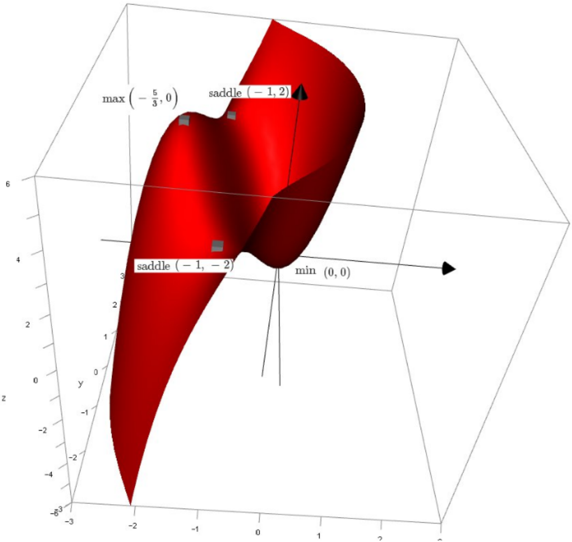
Đồ thị và đường mức



Các đường mức



$$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$$



Bài tập luyện tập

Tìm điểm cực trị địa phương, điểm yên ngựa của hàm số

- $f(x, y) = xy \cdot e^{x - y^2/2}$
- $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$
- $f(x, y, z) = 2xy^2 - 4xy + x^2 + z^2 - 2z$

Question: Làm thế nào để tìm cực trị toàn cục của một hàm số?

Định lý giá trị cực trị (extreme value theorem)

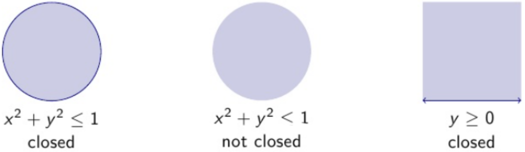
Hàm số f liên tục trên một tập hợp đóng *(closed)* và bị chặn *(bounded)* D thì đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên D. Hơn nữa, giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) là giá trị cực đại địa phương (cực tiểu địa phương) hoặc là phải đạt trên biên của miền D.

Cực đại và cực tiểu toàn cục (global maxima and minima)

Question: Làm thế nào để tìm cực trị toàn cục của một hàm số?

Định lý giá trị cực trị (extreme value theorem)

Hàm số f liên tục trên một tập hợp đóng *(closed)* và bị chặn *(bounded)* D thì đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên D. Hơn nữa, giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) là giá trị cực đại địa phương (cực tiểu địa phương) hoặc là phải đạt trên biên của miền D.



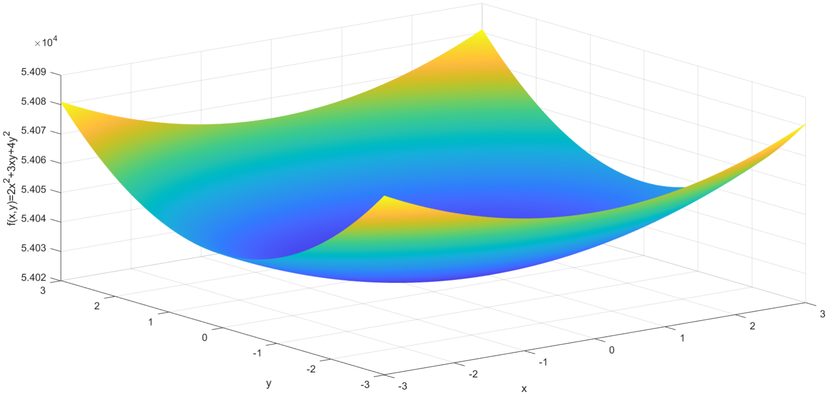
Ví dụ

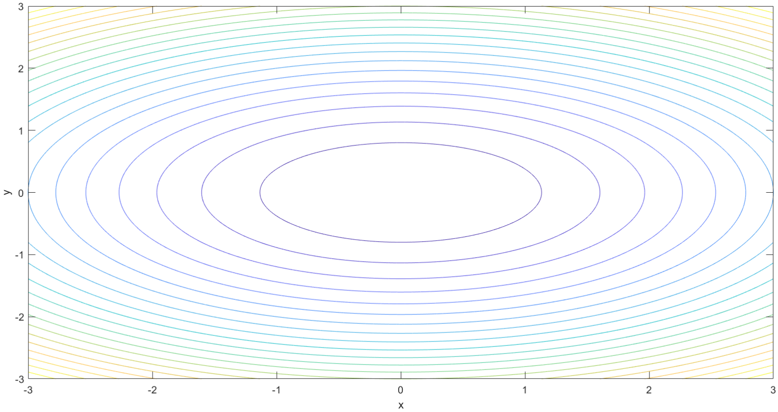
Tìm cực trị toàn cục của hàm số $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 4y^2$ trên miền

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ | \ x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

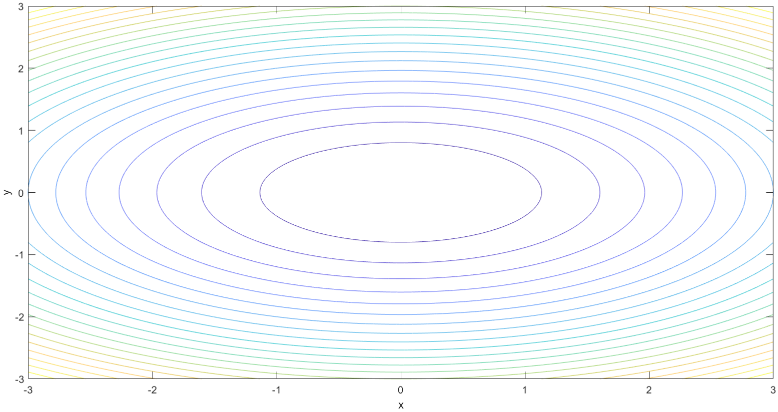
Tìm cực trị toàn cục của hàm số $f(x,y) = 2x^2 - 3xy + 4y^2$ trên miền

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ |\; x^2 + y^2 \leq 4\}.$$





$$f_{min} = f(0,0) = 0$$



$$f_{min} = f(0,0) = 0$$

$$f_{max} = ?$$

Để tìm f_{max}, chúng ta đi giải bài toán tối ưu

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \mathsf{min} & f(x,y) = 2x^2 - 3xy + 4y^2 \\ \text{sao cho} & x^2 + y^2 = 4 \end{array}$$