TỐI ƯU CÓ RÀNG BUỘC

Dương Thị Kim Huyền – Tạ Thúy Anh

Khoa công nghệ thông tin
Đại học PHENIKAA

Hà Nội - 2023

1. Bài toán tối ưu có ràng buộc

2. Điều kiện cần và đủ cực trị

Bài toán tối ưu có ràng buộc

Bài toán tối ưu lồi

- Hàm mục tiêu (objective function): lồi
- Tập chấp nhận được (feasible set): lồi

Bài toán tối ưu lồi

- Hàm mục tiêu (objective function): lồi
- Tập chấp nhận được (feasible set): lồi

Bài toán tối ưu lồi tổng quát

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \text{Minimize} & f(x) \\
 & \text{subject to} & g_i(x) \leqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n \\
 & & h_j(x) = 0, j = 1, 2, \ldots, p \\
 & & x \in \mathbb{R}^n.
\end{array}
$$

- x là biến số
- $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm mục tiêu
- $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm lồi
- $h_j(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm affine

Bài toán tối ưu lồi tổng quát

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \text{Minimize} & f(x) \\
 & \text{subject to} & g_i(x) \leqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n \\
 & & h_j(x) = 0, j = 1, 2, \ldots, p \\
 & & x \in \mathbb{R}^n.
\end{array}
$$

- x là biến số
- $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm mục tiêu
- $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm lồi
- $h_j(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm affine

Bài toán tối ưu lồi tổng quát

$$
(P) \qquad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & g_i(x) \leqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n \\ & h_j(x) = 0, j = 1, 2, \ldots, p \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{array}
$$

- x là biến số
- $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm mục tiêu
- $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm lồi
- $h_j(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm affine

Bài toán tối ưu lồi tổng quát

$$
(P) \qquad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & g_i(x) \leqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n \\ & h_j(x) = 0, j = 1, 2, \ldots, p \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{array}
$$

- x là biến số
- $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm mục tiêu
- $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm lồi
- $h_j(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm affine

Bài toán tối ưu lồi tổng quát

$$
(P) \qquad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & g_i(x) \leqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n \\ & h_j(x) = 0, j = 1, 2, \ldots, p \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{array}
$$

- x là biến số
- $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm mục tiêu
- $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm lồi
- $h_j(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm affine

Bài toán tối ưu lồi

Các bài toán sau là bài toán tối ưu lồi hoặc có thể chuyển về một bài toán tối ưu lồi

- Least squares
- Linear programming
- Convex quadratic minimization with linear constraints
- Quadratic minimization with convex quadratic constraints
- Conic optimization
- Geometric programming
- Second order cone programming

Bài toán tối ưu lồi

Các bài toán sau là bài toán tối ưu lồi hoặc có thể chuyển về một bài toán tối ưu lồi

- Least squares
- Linear programming
- Convex quadratic minimization with linear constraints
- Quadratic minimization with convex quadratic constraints
- Conic optimization
- Geometric programming
- Second order cone programming

Bài toán tối ưu lồi

Các bài toán sau là bài toán tối ưu lồi hoặc có thể chuyển về một bài toán tối ưu lồi

- Least squares
- Linear programming
- Convex quadratic minimization with linear constraints
- Quadratic minimization with convex quadratic constraints
- Conic optimization
- Geometric programming
- Second order cone programming

Bài toán tối ưu lồi

Các bài toán sau là bài toán tối ưu lồi hoặc có thể chuyển về một bài toán tối ưu lồi

- Least squares
- Linear programming
- Convex quadratic minimization with linear constraints
- Quadratic minimization with convex quadratic constraints
- Conic optimization
- Geometric programming
- Second order cone programming

Bài toán tối ưu lồi

Các bài toán sau là bài toán tối ưu lồi hoặc có thể chuyển về một bài toán tối ưu lồi

- Least squares
- Linear programming
- Convex quadratic minimization with linear constraints
- Quadratic minimization with convex quadratic constraints
- Conic optimization
- Geometric programming
- Second order cone programming

Bài toán tối ưu lồi

Các bài toán sau là bài toán tối ưu lồi hoặc có thể chuyển về một bài toán tối ưu lồi

- Least squares
- Linear programming
- Convex quadratic minimization with linear constraints
- Quadratic minimization with convex quadratic constraints
- Conic optimization
- Geometric programming
- Second order cone programming

Bài toán tối ưu lồi

Các bài toán sau là bài toán tối ưu lồi hoặc có thể chuyển về một bài toán tối ưu lồi

- Least squares
- Linear programming
- Convex quadratic minimization with linear constraints
- Quadratic minimization with convex quadratic constraints
- Conic optimization
- Geometric programming
- Second order cone programming

Bài toán tối ưu lồi

Các bài toán sau là bài toán tối ưu lồi hoặc có thể chuyển về một bài toán tối ưu lồi

- Least squares bình phương nhỏ nhất
- Linear programming lập trình tuyến tính
- Convex quadratic minimization with linear constraints
  tối thiểu hóa bậc 2 lồi với các ràng buộc tuyến tính
- Quadratic minimization with convex quadratic constraints tối thiểu hóa bậc 2 với các ràng buộc bậc 2 lồi
- Conic optimization tối ưu hóa hình nón
- Geometric programming lập trình hình học
- Second order cone programming lập trình hình nón bậc 2

Những bài toán tối ưu lồi có nhiều ứng dụng

- Portfolio optimization
- Worst-case risk analysis
- Optimal advertising
- Variations of statistical regression (including regularization and quantile regression)
- Model fitting (particularly multiclass classification)

Những bài toán tối ưu lồi có nhiều ứng dụng

- Portfolio optimization
- Worst-case risk analysis
- Optimal advertising
- Variations of statistical regression (including regularization and quantile regression)
- Model fitting (particularly multiclass classification)

Những bài toán tối ưu lồi có nhiều ứng dụng

- Portfolio optimization
- Worst-case risk analysis
- Optimal advertising
- Variations of statistical regression (including regularization and quantile regression)
- Model fitting (particularly multiclass classification)

Những bài toán tối ưu lồi có nhiều ứng dụng

- Portfolio optimization
- Worst-case risk analysis
- Optimal advertising
- Variations of statistical regression (including regularization and quantile regression)
- Model fitting (particularly multiclass classification)

Những bài toán tối ưu lồi có nhiều ứng dụng

- Portfolio optimization tối ưu hóa danh mục đầu tư
- Worst-case risk analysis phân tích rủi ro trong trường hợp xấu nhất
- Optimal advertising quảng bá tối ưu
- Variations of statistical regression (including regularization and quantile regression) các biến thể của hồi quy thống kê (bao gồm hồi quy chính quy và hồi quy lượng tử)
- Model fitting (particularly multiclass classification)
  lắp mô hình (đặc biệt là phân loại nhiều lớp)

Những bài toán tối ưu lồi có nhiều ứng dụng

- Electricity generation optimization
- Combinatorial optimization
- Non-probabilistic modelling of uncertainty
- Localization using wireless signals

Những bài toán tối ưu lồi có nhiều ứng dụng

- Electricity generation optimization
- Combinatorial optimization
- Non-probabilistic modelling of uncertainty
- Localization using wireless signals

Những bài toán tối ưu lồi có nhiều ứng dụng

- Electricity generation optimization
- Combinatorial optimization
- Non-probabilistic modelling of uncertainty
- Localization using wireless signals

Những bài toán tối ưu lồi có nhiều ứng dụng

- Electricity generation optimization tối ưu hóa phát điện
- Combinatorial optimization tối ưu hóa tổ hợp
- Non-probabilistic modelling of uncertainty mô hình phi xác suất của sự không chắc chắn
- Localization using wireless signals
  nội địa hóa bằng tín hiệu không dây

$$
(P) \qquad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & g_i(x) \leqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n \\ & h_j(x) = 0, j = 1, 2, \ldots, p \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{array}
$$

Đặt $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $J = \{1, 2, \ldots, p\}$.

- I, J là các tập chỉ số.

Đặt $C = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leqslant 0 \ \forall i \in I, \ \ h_j(x) = 0 \ \forall j \in J\}$

- C là tập chấp nhận được

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & g_i(x) \leqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n \\ & h_j(x) = 0, j = 1, 2, \ldots, p \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

Đặt $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $J = \{1, 2, \ldots, p\}$.

- I, J là các tập chỉ số.

Đặt $C = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leqslant 0 \ \forall i \in I, \ h_j(x) = 0 \ \forall j \in J\}$

- C là tập chấp nhận được

$$
(P) \qquad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & g_i(x) \leqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n \\ & h_j(x) = 0, j = 1, 2, \ldots, p \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{array}
$$

Đặt $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $J = \{1, 2, \ldots, p\}$.

- I, J là các tập chỉ số.

Đặt $C = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leqslant 0 \ \forall i \in I, \ h_j(x) = 0 \ \forall j \in J\}$

- C là tập chấp nhận được

$$
(P) \qquad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & g_i(x) \leqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n \\ & h_j(x) = 0, j = 1, 2, \ldots, p \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{array}
$$

Đặt $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $J = \{1, 2, \ldots, p\}$.

- I, J là các tập chỉ số.

Đặt $C = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leqslant 0 \ \forall i \in I, \ h_j(x) = 0 \ \forall j \in J\}$

- C là tập chấp nhận được

Điều kiện chính quy Slater

Điều kiện chính quy **Slater** (CQ) thỏa mãn đối với bài toàn P nếu tồn tại $u \in C$ sao cho

$$g_i(u) < 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, m.$$

Điều kiện cần và đủ cực trị

Định lý KKT

- Điều kiện chính quy Slater thỏa mãn
- x^* là một điểm chấp nhận được của bài toán

Khi đó, x^* là một nghiệm tối ưu của bài toán P *khi và chỉ khi* tồn tại các hằng số λ_i $(i \in I)$, μ_j $(j \in J)$ sao cho

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{i\in I} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j \in J} \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0 \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0 \quad \forall i \in I \\ g_i(x^*) \leqslant 0 \quad \forall i \in I, \; h_j(x^*) = 0 \quad \forall j \in J \\ \lambda_i \geqslant 0 \quad \forall i \in I, \; \mu_j \in \mathbb{R} \quad \forall j \in J \end{cases} \quad (1)$$

Định lý KKT

- Điều kiện chính quy Slater thỏa mãn
- x^* là một điểm chấp nhận được của bài toán

Khi đó, x^* là một nghiệm tối ưu của bài toán P *khi và chỉ khi* tồn tại các hằng số λ_i $(i \in I)$, μ_j $(j \in J)$ sao cho

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j \in J} \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0 \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0 \quad \forall i \in I \\ g_i(x^*) \leqslant 0 \quad \forall i \in I, \;\; h_j(x^*) = 0 \quad \forall j \in J \\ \lambda_i \geqslant 0 \quad \forall i \in I, \;\; \mu_j \in \mathbb{R} \quad \forall j \in J \end{cases} \tag{1}$$

Định lý KKT

- Điều kiện chính quy Slater thỏa mãn
- x^* là một điểm chấp nhận được của bài toán

Khi đó, x^* là một nghiệm tối ưu của bài toán P *khi và chỉ khi* tồn tại các hằng số λ_i $(i \in I)$, μ_j $(j \in J)$ sao cho

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j \in J} \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0 \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0 \quad \forall i \in I \\ g_i(x^*) \leqslant 0 \quad \forall i \in I, \ \ h_j(x^*) = 0 \quad \forall j \in J \\ \lambda_i \geqslant 0 \quad \forall i \in I, \ \ \mu_j \in \mathbb{R} \quad \forall j \in J \end{cases} \tag{1}$$

Điểm x^* thỏa mãn hệ ràng buộc (1) được gọi là một điểm *KKT* (Karush-Kuhn-Tucker) của bài toán

- Điều kiện $\lambda_i g_i(x^*) = 0$: điều kiện bù
- Các nhân tử λ_i, μ_j: nhân tử Lagrange

Điểm x^* thỏa mãn hệ ràng buộc (1) được gọi là một điểm *KKT* (Karush-Kuhn-Tucker) của bài toán

- Điều kiện $\lambda_i g_i(x^*) = 0$: điều kiện bù
- Các nhân tử λ_i, μ_j: nhân tử Lagrange

Ví dụ 1

Tìm cực tiểu của hàm số $f(x, y) = (x-1)^2 + y - 2$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x + y - 2 \leqslant 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

Điểm dừng $(x^*, y^*) = (1/2, 3/2)$ ứng với cặp nhân tử $(\lambda, \mu) = (0, 1)$.

Ví dụ 1

Tìm cực tiểu của hàm số $f(x,y) = (x-1)^2 + y - 2$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x + y - 2 \leqslant 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

Điểm dừng $(x^*, y^*) = (1/2, 3/2)$ ứng với cặp nhân tử $(\lambda, \mu) = (0, 1)$.

Ví dụ 2

Tìm cực đại của hàm số $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 6y$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x + y \leqslant 3 \\ -2x + y \leqslant 2 \end{cases}$$

Điểm KKT $(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$

Ví dụ 2

Tìm cực đại của hàm số $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 6y$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x + y \leqslant 3 \\ -2x + y \leqslant 2 \end{cases}$$

Điểm KKT $(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$

Ví dụ 3

Tìm cực đại của hàm số $f(x, y) = xy$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 2 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Ví dụ 4

Tìm cực tiểu của hàm số $f(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2$ thỏa mãn

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ -x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Một số ví dụ bài toán tối ưu lồi

Bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + d \\ \text{subject to} \quad & Gx \leqslant h \\ & Ax = b, \end{aligned}$$

trong đó, $G \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $c, d, h, b \in \mathbb{R}^n$.

Một số ví dụ về bài toán tối ưu lồi

Bài toán quy hoạch toàn phương lồi

$$\begin{array}{ll} \min & (1/2)x^T P x + q^T x + r \\ \text{subject to} & Gx \leqslant h \\ & Ax = b, \end{array}$$

trong đó, $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P \succeq 0$, $G \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{p\times n}$,