

# Tối ưu hóa

Faculty of Computer Science  
Phenikaa University

Ngày 27 tháng 3 năm 2023

# Tối ưu lồi (Convex optimization)

## Tập lồi

### Đường thẳng và đoạn thẳng

Cho hai điểm  $x, y$  trong không gian  $\mathbb{R}^n$ . Tập hợp tất cả các điểm có dạng

$$z = \theta x + (1 - \theta)y,$$

ở đó  $\theta \in \mathbb{R}$ , tạo thành một **đường thẳng** đi qua  $x$  và  $y$ . Tập hợp các điểm  $z$  với  $\theta \in [0, 1]$  tạo thành một **đoạn thẳng** nối  $x$  và  $y$ .

# Tối ưu lồi (Convex optimization)

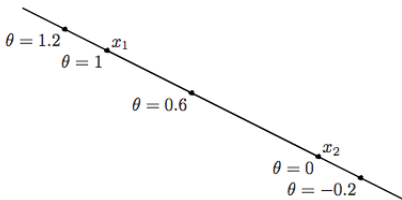
## Tập lồi

### Đường thẳng và đoạn thẳng

Cho hai điểm  $x, y$  trong không gian  $\mathbb{R}^n$ . Tập hợp tất cả các điểm có dạng

$$z = \theta x + (1 - \theta)y,$$

ở đó  $\theta \in \mathbb{R}$ , tạo thành một **đường thẳng** đi qua  $x$  và  $y$ . Tập hợp các điểm  $z$  với  $\theta \in [0, 1]$  tạo thành một **đoạn thẳng** nối  $x$  và  $y$ .



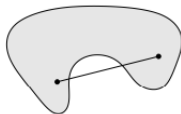
## Tập lồi

Một tập hợp khác rỗng  $C \subset \mathbb{R}^n$  được gọi là lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của  $C$  nằm trong  $C$ .

## Tập lồi

Một tập hợp khác rỗng  $C \subset \mathbb{R}^n$  được gọi là lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của  $C$  nằm trong  $C$ .

Hay nói cách khác, nếu  $x, y \in C$  thì với mọi  $\theta \in [0, 1]$ , ta có  $\theta x + (1 - \theta)y \in C$ .

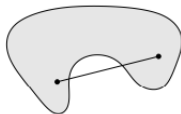


# Tối ưu lồi

## Tập lồi

Một tập hợp khác rỗng  $C \subset \mathbb{R}^n$  được gọi là lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của  $C$  nằm trong  $C$ .

Hay nói cách khác, nếu  $x, y \in C$  thì với mọi  $\theta \in [0, 1]$ , ta có  $\theta x + (1 - \theta)y \in C$ .



Người ta quy ước tập rỗng là tập lồi

## Ví dụ về tập lồi

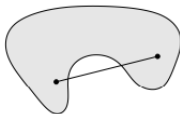
- Tập rỗng, tập chỉ gồm một phần tử (điểm), toàn bộ không gian  $\mathbb{R}^n$

# Tối ưu lồi

## Tập lồi

Một tập hợp khác rỗng  $C \subset \mathbb{R}^n$  được gọi là lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của  $C$  nằm trong  $C$ .

Hay nói cách khác, nếu  $x, y \in C$  thì với mọi  $\theta \in [0, 1]$ , ta có  $\theta x + (1 - \theta)y \in C$ .



Người ta quy ước tập rỗng là tập lồi

## Ví dụ về tập lồi

- Tập rỗng, tập chỉ gồm một phần tử (điểm), toàn bộ không gian  $\mathbb{R}^n$
- Một đoạn thẳng bất kỳ trong  $\mathbb{R}^n$

## Các tính chất của tập lồi

Nếu  $S_1$  và  $S_2$  là các tập lồi thì

- $S_1 \cap S_2$  là lồi;
- $S_1 + S_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$  là lồi.



## Các tính chất của tập lồi

Nếu  $S_1$  và  $S_2$  là các tập lồi thì

- $S_1 \cap S_2$  là lồi;
- $S_1 + S_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$  là lồi.

Hợp của hai tập lồi có phải là tập lồi?

## Bao lồi

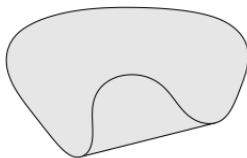
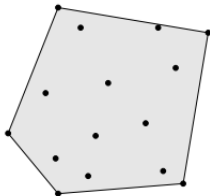
- Điểm  $\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k$ , ở đó  $\theta_1 + \dots + \theta_k = 1$  và  $\theta_i \geq 0$  với  $i = 1, \dots, k$ , được gọi là **một tổ hợp lồi** của các điểm  $x_1, \dots, x_k$ .
- **Bao lồi** của một tập hợp  $C$ , ký hiệu là  $\text{conv } C$ , là tập hợp tất cả các tổ hợp lồi của các điểm thuộc  $C$ .

$$\text{conv } C = \{\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k \mid x_i \in C, \theta_1, \dots, \theta_k \geq 0, \theta_1 + \dots + \theta_k = 1\}$$

## Bao lồi

- Điểm  $\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k$ , ở đó  $\theta_1 + \dots + \theta_k = 1$  và  $\theta_i \geq 0$  với  $i = 1, \dots, k$ , được gọi là **một tổ hợp lồi** của các điểm  $x_1, \dots, x_k$ .
- **Bao lồi** của một tập hợp  $C$ , ký hiệu là  $\text{conv } C$ , là tập hợp tất cả các tổ hợp lồi của các điểm thuộc  $C$ .

$$\text{conv } C = \{\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k \mid x_i \in C, \theta_1, \dots, \theta_k \geq 0, \theta_1 + \dots + \theta_k = 1\}$$



# Không gian Euclide $n$ chiều trên trường số thực

## Tích vô hướng

Tích vô hướng của 2 vectơ  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  và  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  trên Không gian Euclide  $\mathbb{R}^n$

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n.$$

# Không gian Euclide $n$ chiều trên trường số thực

## Tích vô hướng

Tích vô hướng của 2 vectơ  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  và  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  trên Không gian Euclide  $\mathbb{R}^n$

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n.$$

Ta có thể viết  $u^T v$  hoặc  $v^T u$  thay cho  $\langle u, v \rangle$

## Siêu phẳng và nửa không gian

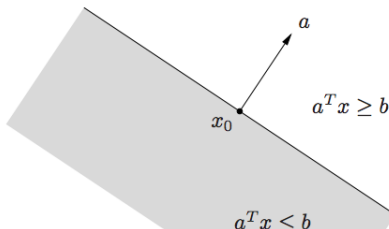
- Một **siêu phẳng** là một tập hợp có dạng

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\} \quad \text{hoặc} \quad \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b\},$$

ở đó,  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $a \neq 0$ , và  $b \in \mathbb{R}$ .

- Một siêu phẳng chia không gian  $\mathbb{R}^n$  thành hai nửa không gian. Một **nửa không gian** (đóng) là một tập hợp có dạng

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq b, a \neq 0\}.$$



# Chuẩn trong không gian Euclide

Cho  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

# Chuẩn trong không gian Euclide

Cho  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

$\|v\|$  ký hiệu **chuẩn** (độ dài) của véc tơ  $v$ , được cho bởi công thức



# Chuẩn trong không gian Euclide

Cho  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

$\|v\|$  ký hiệu **chuẩn** (độ dài) của véc tơ  $v$ , được cho bởi công thức

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}.$$

## Hình cầu & Ellipsoid

- **Hình cầu** tâm  $x_c$  bán kính  $r > 0$  trong  $\mathbb{R}^n$  có dạng

$$\begin{aligned} B(x_c, r) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_c\| \leq r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - x_c)^T (x - x_c) \leq r^2\}. \end{aligned}$$

- Một **ellipsoid** là một tập hợp có dạng

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - x_c)^T P (x - x_c) \leq 1\},$$

ở đó  $P$  là một ma trận đối xứng và nửa xác định dương cỡ  $n$ .

### Polyhedron & Polytope

- Một **Polyhedron** (tập lồi đa diện) là tập nghiệm của một hệ gồm hữu hạn các đẳng thức và bất đẳng thức tuyến tính

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j^T x \leq b_j, j = 1, \dots, m, c_j^T x = d_j, j = 1, \dots, p\}.$$

### Polyhedron & Polytope

- Một **Polyhedron** (tập lồi đa diện) là tập nghiệm của một hệ gồm hữu hạn các đẳng thức và bất đẳng thức tuyến tính

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j^T x \leq b_j, j = 1, \dots, m, c_j^T x = d_j, j = 1, \dots, p\}.$$

- Một tập lồi đa diện là giao hữu hạn các nửa không gian đóng.

### Polyhedron & Polytope

- Một **Polyhedron** (tập lồi đa diện) là tập nghiệm của một hệ gồm hữu hạn các đẳng thức và bất đẳng thức tuyến tính

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j^T x \leq b_j, j = 1, \dots, m, c_j^T x = d_j, j = 1, \dots, p\}.$$

- Một tập lồi đa diện là giao hữu hạn các nửa không gian đóng.
- Một tập lồi đa diện bị chặn đôi khi được gọi là một **polytope**.



regular  
tetrahedron



cube



regular  
octahedron



regular  
dodecahedron



regular  
icosahedron

### Polyhedron & Polytope

- Một **Polyhedron** (tập lồi đa diện) là tập nghiệm của một hệ gồm hữu hạn các đẳng thức và bất đẳng thức tuyến tính

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j^T x \leq b_j, j = 1, \dots, m, c_j^T x = d_j, j = 1, \dots, p\}.$$

- Một tập lồi đa diện là giao hữu hạn các nửa không gian đóng.
- Một tập lồi đa diện bị chặn đôi khi được gọi là một **polytope**.



regular  
tetrahedron



cube



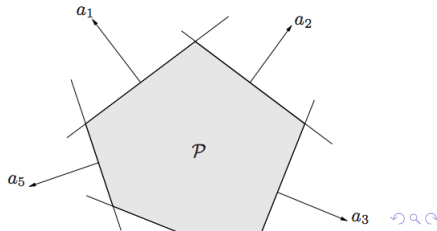
regular  
octahedron



regular  
dodecahedron



regular  
icosahedron



### Hàm lồi

Hàm số  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  được gọi là **lồi** nếu

- $\text{dom } f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| < +\infty\}$  là một tập lồi;
- Bất đẳng thức Jensen thỏa mãn, tức là

### Hàm lồi

Hàm số  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  được gọi là **lồi** nếu

- $\text{dom } f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| < +\infty\}$  là một tập lồi;
- Bất đẳng thức Jensen thỏa mãn, tức là  
Với mọi  $x, y \in \text{dom } f$ ,  $\theta \in (0, 1)$ , ta có

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y)$$



### Hàm lồi

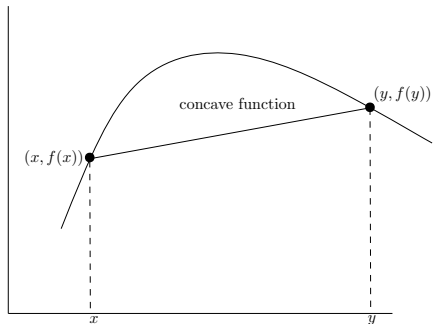
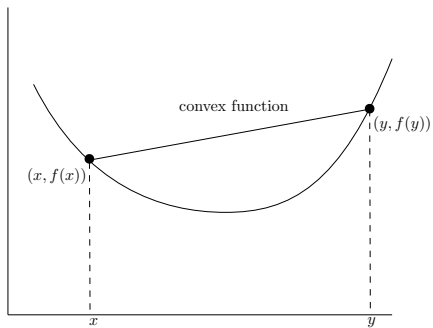
Hàm số  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  được gọi là **lồi** nếu

- $\text{dom } f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| < +\infty\}$  là một tập lồi;
- Bất đẳng thức Jensen thỏa mãn, tức là  
Với mọi  $x, y \in \text{dom } f$ ,  $\theta \in (0, 1)$ , ta có

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y)$$

Hàm số  $f$  được gọi là

- **lồi chặt** nếu bất đẳng thức Jensen là chặt.
- **lõm** nếu  $-f$  là lồi.
- **lõm chặt** nếu  $-f$  lồi chặt.



# Tối ưu lồi

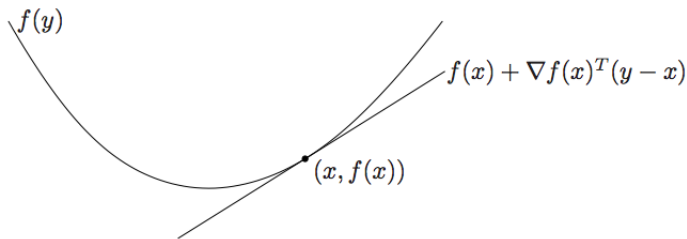
## Đặc trưng tính lồi

### Điều kiện cấp 1

Giả sử hàm số  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  khả vi. Khi đó,  $f$  là lồi khi và chỉ khi  $\text{dom } f$  là lồi và

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x)$$

đúng với mọi  $x, y \in \text{dom } f$ .



# Đạo hàm cấp hai

## Ma trận Hessian

$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

# Ma trận con chính, định thức con chính

Ký hiệu  $H_k$  là ma trận con chính (ma trận con phía trên, bên trái) của ma trận Hessian  $H$ .

$$H_1 = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right]; H_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}; H_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} \dots$$

Ký hiệu  $\Delta_1 = \det(H_1)$ ,  $\Delta_2 = \det(H_2)$ ,  $\Delta_3 = \det(H_3) \dots$

# Ma trận con chính, định thức con chính

Ký hiệu  $H_k$  là ma trận con chính (ma trận con phía trên, bên trái) của ma trận Hessian  $H$ .

$$H_1 = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right]; \quad H_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}; \quad H_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} \dots$$

Ký hiệu  $\Delta_1 = \det(H_1)$ ,  $\Delta_2 = \det(H_2)$ ,  $\Delta_3 = \det(H_3) \dots$

- $\Delta_k$  được gọi là định thức con chính cấp  $k$  của  $H$

# Tối ưu lồi

## Đặc trưng tính lồi

### Điều kiện cấp 2

Giả sử hàm số  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  khả vi đến cấp 2. Khi đó,  $f$  là lồi *khi và chỉ khi*  $\text{dom } f$  là lồi và ma trận Hessian là nửa xác định dương, tức là

$$\nabla^2 f(x) \succeq 0 \quad \forall x \in \text{dom } f.$$

Trong trường hợp ma trận Hessian matrix là xác định dương, ta có hàm **lồi chặt**



Trong trường hợp ma trận Hessian matrix là xác định dương, ta có hàm **lồi chặt**

### Trường hợp không gian một chiều

Giả sử hàm số  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  khả vi đến cấp 2. Khi đó,  $f$  là lồi khi và chỉ khi  $\text{dom } f$  là lồi và  $f''(x) \geq 0$  với mọi  $x \in \text{dom } f$ .

# Ma trận xác định dương & nửa xác định dương

Ma trận  $A$  được gọi là **xác định dương** (*positive definite*) nếu  $x^T A x > 0$  với mọi vectơ  $x \neq 0$ . Ta ký hiệu  $A \succ 0$ .

# Ma trận xác định dương & nửa xác định dương

Ma trận  $A$  được gọi là **xác định dương** (*positive definite*) nếu  $x^T A x > 0$  với mọi vectơ  $x \neq 0$ . Ta ký hiệu  $A \succ 0$ .

Nếu  $x^T A x \geq 0$  với mọi vectơ  $x \in \mathbb{R}^n$  thì  $A$  được gọi là **nửa xác định dương** (*positive semidefinite*). Ta ký hiệu  $A \succeq 0$ .

# Ma trận xác định dương & nửa xác định dương

Ma trận  $A$  được gọi là **xác định dương** (*positive definite*) nếu  $x^T A x > 0$  với mọi vectơ  $x \neq 0$ . Ta ký hiệu  $A \succ 0$ .

Nếu  $x^T A x \geq 0$  với mọi vectơ  $x \in \mathbb{R}^n$  thì  $A$  được gọi là **nửa xác định dương** (*positive semidefinite*). Ta ký hiệu  $A \succeq 0$ .

**Chú ý:** xác định dương  $\rightarrow$  nửa xác định dương

Ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

là xác định dương vì  $x^T A x = x_1^2 + x_2^2 > 0$  với mọi  $x = (x_1, x_2) \neq (0, 0)$ .

Hàm số  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  là lồi

# Đặc trưng ma trận đối xứng nửa xác định dương

Cho  $A$  là ma trận **đối xứng**. Khi đó, hai tính chất sau là tương đương

# Đặc trưng ma trận đối xứng nửa xác định dương

Cho  $A$  là ma trận **đối xứng**. Khi đó, hai tính chất sau là tương đương

- Tất cả các giá trị riêng **không âm**
- $x^T A x \geq 0$  với mọi vectơ  $x$

# Đặc trưng ma trận đối xứng nửa xác định dương

Cho  $A$  là ma trận **đối xứng**. Khi đó, hai tính chất sau là tương đương

- Tất cả các giá trị riêng **không âm**
- $x^T A x \geq 0$  với mọi vectơ  $x$

Ma trận  $A$  nửa xác định dương có tính chất sau đây

- $\det(A) = 0$ , tất cả các định thức con chính cấp nhỏ hơn cỡ của  $A$  không âm



# Đặc trưng ma trận đối xứng xác định dương

Cho  $A$  là ma trận **đối xứng**. Khi đó nếu  $A$  có một trong các tính chất sau đây thì nó có tất cả

# Đặc trưng ma trận đối xứng xác định dương

Cho  $A$  là ma trận **đối xứng**. Khi đó nếu  $A$  có một trong các tính chất sau đây thì nó có tất cả

- Tất cả các giá trị riêng dương
- Tất cả các định thức con chính dương
- $x^T A x > 0$  với mọi vectơ  $x \neq 0$

**Ví dụ:** Hàm số  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  là lồi (chặt) vì ma trận Hessian là xác định dương

## Các ví dụ trong không gian $\mathbb{R}$

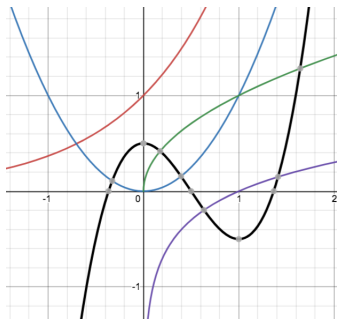
- $e^{ax}$  là lồi trên  $\mathbb{R}$  với mọi  $a \in \mathbb{R}$

## Các ví dụ trong không gian $\mathbb{R}$

- $e^{ax}$  là lồi trên  $\mathbb{R}$  với mọi  $a \in \mathbb{R}$
- $x^a$  là lồi trên  $\mathbb{R}_{++}$  nếu  $a \geq 1$  hoặc  $a \leq 0$ , và lõm nếu  $a \in [0, 1]$

## Các ví dụ trong không gian $\mathbb{R}$

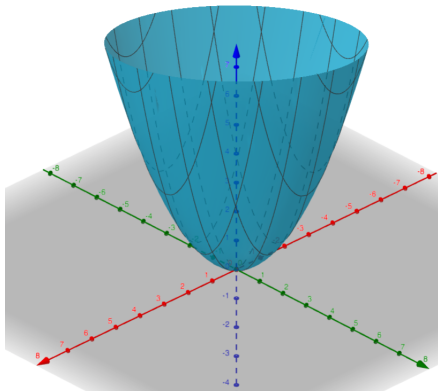
- $e^{ax}$  là lồi trên  $\mathbb{R}$  với mọi  $a \in \mathbb{R}$
- $x^a$  là lồi trên  $\mathbb{R}_{++}$  nếu  $a \geq 1$  hoặc  $a \leq 0$ , và lõm nếu  $a \in [0, 1]$
- $\log x$  là lõm trên  $\mathbb{R}_{++}$



## Ví dụ trong không gian 2 chiều

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$  là lồi trên  $\mathbb{R}^2$  bởi vì

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ và } \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2(x^2 + xy + y^2) \geq 0$$



## Hàm toàn phương trong $\mathbb{R}^n$

Một hàm toàn phương (quadratic function)  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , với  $\text{dom } f = \mathbb{R}^n$ , được cho bởi

$$f(x) = (1/2)x^T P x + q^T x + r$$

ở đó  $P$  là ma trận đối xứng,  $q \in \mathbb{R}^n$ , và  $r \in \mathbb{R}$ . Do  $\nabla^2 f(x) = P$ , hàm số  $f$  là lồi **khi và chỉ khi**  $P \succeq 0$ .



## Hàm toàn phương trong $\mathbb{R}^n$

Một hàm toàn phương (quadratic function)  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , với  $\text{dom } f = \mathbb{R}^n$ , được cho bởi

$$f(x) = (1/2)x^T P x + q^T x + r$$

ở đó  $P$  là ma trận đối xứng,  $q \in \mathbb{R}^n$ , và  $r \in \mathbb{R}$ . Do  $\nabla^2 f(x) = P$ , hàm số  $f$  là lồi **khi và chỉ khi**  $P \succeq 0$ .

Ví dụ

$$x^2 + xy + y^2 = (1/2) \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

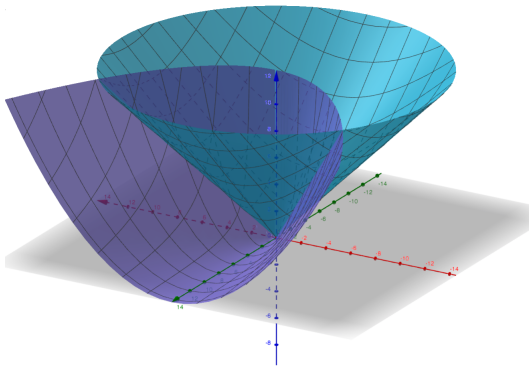
Hàm số  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$  là lồi (chặt)

## Hàm tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$

$f(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$  vừa là hàm lồi, vừa là hàm lõm

## Một số ví dụ trong $\mathbb{R}^2$

- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  là lồi trên  $\mathbb{R}^2$
- $f(x, y) = x^2/y$  là lồi trên  $\text{dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$



### Graph & epigraph

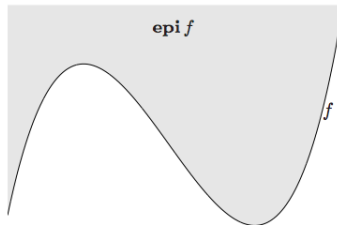
Cho  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

- **Đồ thị (graph)** của  $f$  là tập hợp được cho bởi

$$\{(x, f(x)) \mid x \in \text{dom } f\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

- **Trên đồ thị (epigraph)** của  $f$  là tập hợp

$$\text{epi } f = \{(x, t) \mid x \in \text{dom } f, f(x) \leq t\}$$



# Tối ưu lồi

## Các phép toán bảo toàn tính lồi

### Các phép toán bảo toàn tính lồi

- Nếu  $f(x)$  là lồi và  $\alpha > 0$ , thì  $\alpha f(x)$  là lồi
- Nếu  $f(x), g(x)$  là lồi thì  $f(x) + g(x)$  là lồi
- Nếu  $f(x), g(x)$  là lồi thì  $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  là lồi

## Bài tập

Xác định xem các hàm số sau là lồi hay lõm

- $f(x) = e^x - 1$  trên  $\mathbb{R}$
- $f(x, y) = xy$  trên  $\mathbb{R}_{++}^2$
- $f(x, y) = 1/(xy)$  trên  $\mathbb{R}_{++}^2$
- $f(x, y) = x/y$  trên  $\mathbb{R}_{++}^2$