

Travaux pratiques n°3

Polynômes d'interpolation de Lagrange

Partie 1.

Téléchargez l'archive TPLagrange sur madoc. Vous allez trouver les fichiers suivants:

- main.cpp - le fichier de programme principal
- Util.cpp et util.hpp - les fichiers contenant des fonctions "utilitaires"
- Un fichier Makefile_model - un modèle d'un fichier qui permettra une compilation d'un projet contenant plusieurs fichiers sources. Lire le commentaire au début de fichier pour le manuel d'utilisation.

Question 1: faire fonctionner le programme principal en adaptant le fichier makefile correctement.

Question 2: comprendre le fonctionnement du programme principal, dont le but est de tracer une courbe d'erreur relative et une courbe d'erreur absolue pour un polynôme de degré 4 approximant la fonction $\exp(x)$.

Partie 2.

Le polynôme d'interpolation de Lagrange d'ordre n pour une fonction $f(x)$ est défini par

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_i(x),$$

où les polynômes de base de Lagrange sont construits comme $\ell_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{j=n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$,

où $\{(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))\}$ sont les $n + 1$ points d'interpolation.

Question 3 : écrire un algorithme qui, étant donné une fonction f , un entier $n > 0$ et deux réels a, b avec $a < b$, donne le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points

$$x_k = \frac{a + k * (b - a)}{n}, k = 0, \dots, n$$

On pourra pour cela procéder de la manière suivante :

1. écrire une fonction qui, étant donné un intervalle $[a; b]$ et un entier n , retourne un tableau de $N+1$ points équidistants entre a et b ;
2. on écrit une seconde fonction qui, étant donnée la suite des x_k crée le vecteur des

polynômes de Lagrange associés ℓ_k ;

3. enfin on écrit le polynôme interpolateur $p(x)$ grâce à l'expression de p dans la base des ℓ_k .

Question 4: Testez votre algorithme pour $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$ et l'intervalle $[0; 1]$ pour $n=10$. Imprimez le polynôme de Lagrange évalué dans $x=0.55$. Comparez avec la valeur de $f(0.55)$.

Question 5. En utilisant la fonction `plot(..)` trouvée dans le fichier `util.cpp`, tracez deux courbes : celle de la fonction $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$ et celle du polynôme de Lagrange lui correspondant, pour $n=100$. Comparez les deux courbes.