

# 高光谱图像的非凸低秩表示 在图像降噪方面的使用

学生姓名：陈安皓  
指导教师：贾育衡

东南大学 吴健雄学院

2021 年 6 月 8 日

# 目录

引言

研究路线

实验

总结

Q&A



# 背景知识

## 高光谱图像及其成像原理

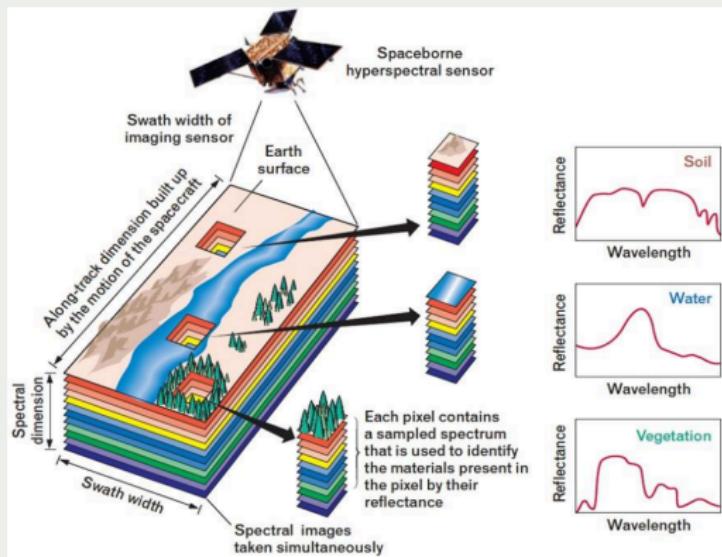


图 1: 高光谱图像的成像原理<sup>1</sup>

<sup>1</sup>图片来源: [semanticscholar.org](https://semanticscholar.org)

# 背景知识

## 高光谱图像的特征

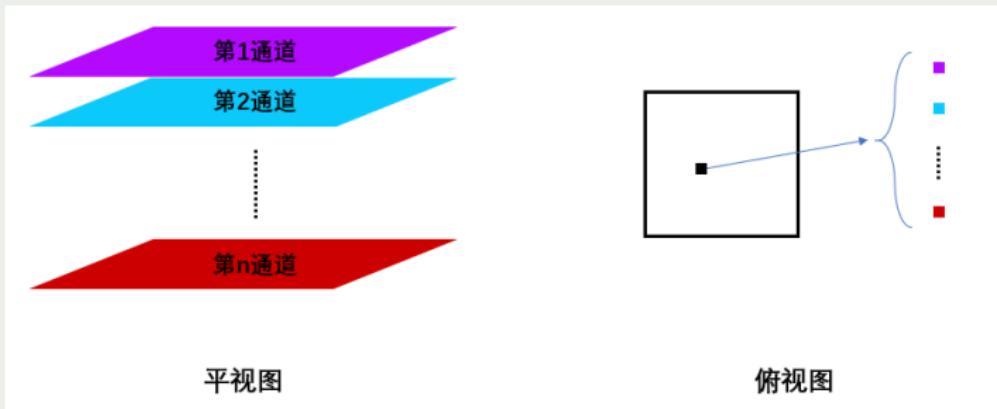


图 2: 高光谱图像的特征

## 高光谱图像的部分应用领域

- 农业
- 军事
- 环境
- 地学

# 目录

引言

研究路线

实验

总结

Q&A

# 问题建模

假设一幅一维图像  $Y$  受到噪声的污染，即：

$$Y = X + N$$

式中，

$X$  代表未受到污染的、干净的图像， $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ；

$N$  代表噪声， $N \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ；

$Y$  代表成像设备获取到的图像，即受到污染的图像， $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 。

那么，图像降噪的工作就是将  $Y$  复原为  $X$ 。

# 问题建模

## 自然图像的低秩性

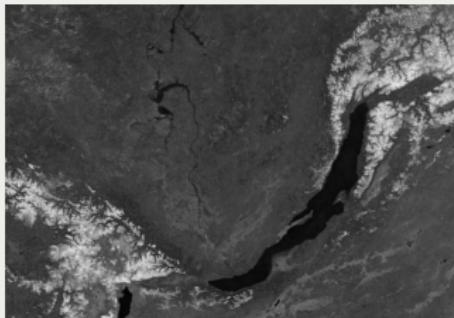


图 3: 一张自然图像

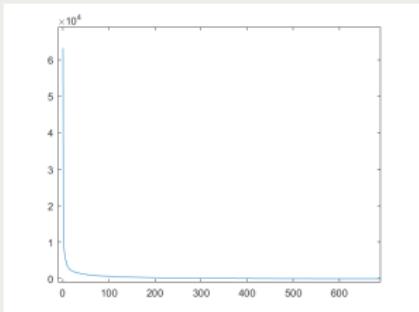


图 4: 图3的奇异值分布图

基于低秩假设的图像降噪方法可以被形式化为

$$\arg \min_X \text{rank}(X)$$

# 问题建模

在对图像进行降噪处理时，既需要去除图像里的噪声，同时也需要尽可能地保留原来的信息。因此，实际上，需要求解的最优化问题是

$$\arg \min_X \|Y - X\|_F^2 + \lambda \cdot \text{rank}(X) \quad (1)$$

式中，

$X$  代表未受到污染的、干净的图像， $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ；

$N$  代表噪声， $N \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ；

$Y$  代表成像设备获取到的图像，即受到污染的图像， $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ；

$\|\cdot\|_F$  表示 *Frobenius* 范数；

$\lambda$  是正则化参数。

# 用（普通）核范数替代秩函数

然而，式1

$$\arg \min_X \|Y - X\|_F^2 + \lambda \cdot \text{rank}(X)$$

是一个 NP-hard 问题。

通常使用秩函数的凸近似，也就是核范数，作为式1中秩函数的替代：

$$\arg \min_X \|Y - X\|_F^2 + \lambda \cdot \|X\|_* \tag{2}$$

式中，

$\|\cdot\|_*$  表示核范数。

$\|X\|_* = \sum_{i=1}^n \sigma_i(X)$ ,  $\sigma_i(X)$  表示矩阵  $X$  的第  $i$  个奇异值。

# 用截断式核范数替代秩函数

式1

$$\arg \min_X \|Y - X\|_F^2 + \lambda \cdot \text{rank}(X)$$

更新为

$$\arg \min_X \|Y - X\|_F^2 + \lambda \cdot \|X\|_{tr,*} \quad (3)$$

式中，

$\|\cdot\|_{tr,*}$  表示截断式核范数。

$$\|X\|_{tr,*} = \sum_{i=r+1}^n \sigma_i(X)$$

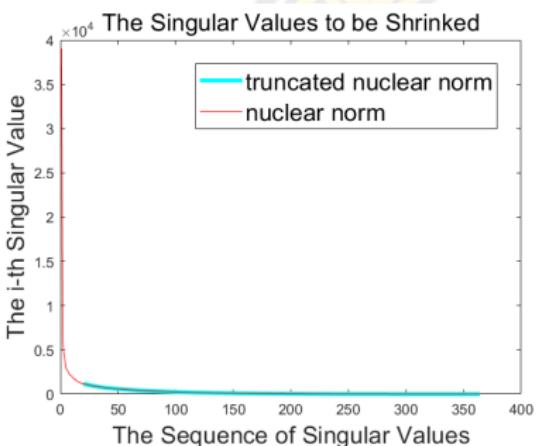


图 5: 截断式核范数的几何意义 (取  $r = 19$ )

# 用权重式核范数替代秩函数

式1

$$\arg \min_X \|Y - X\|_F^2 + \lambda \cdot \text{rank}(X)$$

更新为

$$\arg \min_X \|Y - X\|_F^2 + \lambda \cdot \|X\|_{w,*} \quad (4)$$

式中，

$\|\cdot\|_{w,*}$  表示权重式核范数。

$$\|X\|_{w,*} = \sum_{i=1}^n w_i \sigma_i(X)$$

# 用 $\log$ -核范数替代秩函数

式1

$$\arg \min_X \|Y - X\|_F^2 + \lambda \cdot \text{rank}(X)$$

更新为

$$\arg \min_X \|Y - X\|_F^2 + \lambda \cdot \|X\|_{\log,*} \quad (5)$$

式中，

$\|\cdot\|_{\log,*}$  表示  $\log$ -核范数。

$$\|X\|_{\log,*} = \sum_{i=1}^n \log(\sigma_i(X) + 1)$$

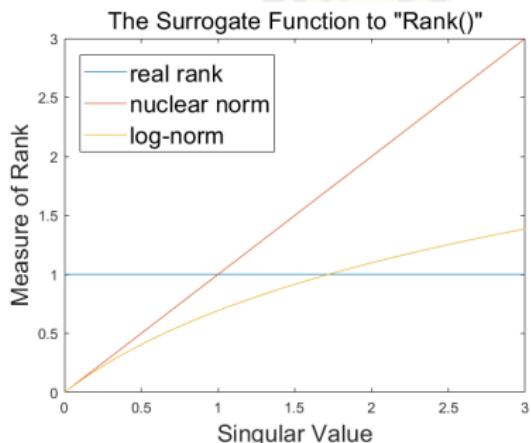


图 6:  $\log$ -核范数的几何意义

# 秩函数的其他放缩

表 1: 秩函数的不同放缩 (部分)

名称	表达式
核范数	$\sum_{i=1}^n \sigma_i$
截断式核范数	$\sum_{i=r+1}^n \sigma_i$
权重式核范数	$\sum_{i=1}^n w_i \sigma_i$
阀值式核范数	$\sum_{i=r+1}^n \min(\sigma_i, \theta)$
$\log$ -核范数	$\sum_{i=1}^n \log(\sigma_i + 1)$
$\gamma$ -核范数	$\sum_{i=1}^n \frac{(1 + \gamma)\sigma_i}{\gamma + \sigma_i}$
格曼	$\sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{\sigma_i + \gamma}$

表1列举了秩函数的几种替代 (surrogate), 或称放缩 (relaxation)。它们可以被统一成：

$$\text{rank}(X) \approx \sum_{i=1}^n f(\sigma_i(X))$$

# 目录

引言

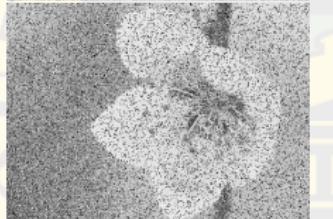
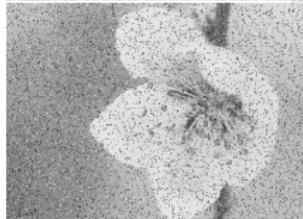
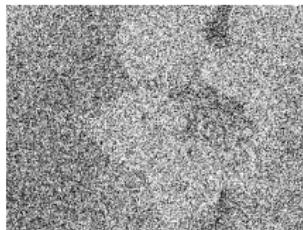
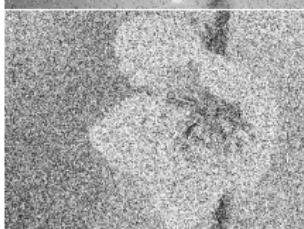
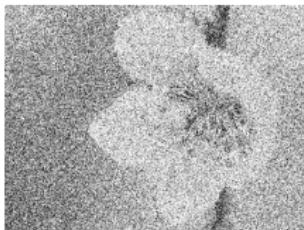
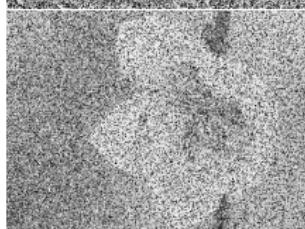
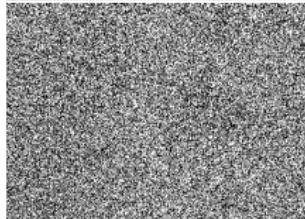
研究路线

实验

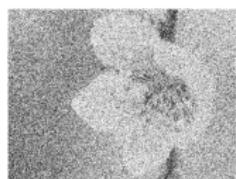
总结

Q&A

# 实验数据



# 降噪效果展示（以权重式范数为例）



降噪后



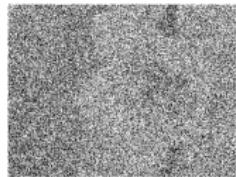
图 7: 方差为 0.1 的零均值高斯噪声



降噪后



图 9: 方差为 0.5 的零均值高斯噪声



降噪后

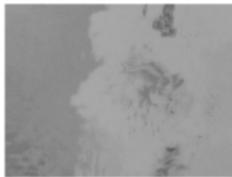
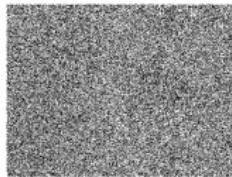


图 8: 方差为 1 的零均值高斯噪声



降噪后

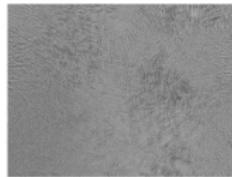


图 10: 方差为 5 的零均值高斯噪声

## 降噪效果展示（以权重式范数为例）

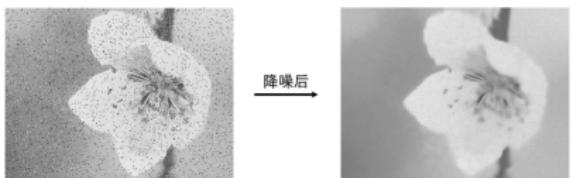


图 11: 5% 椒盐噪声

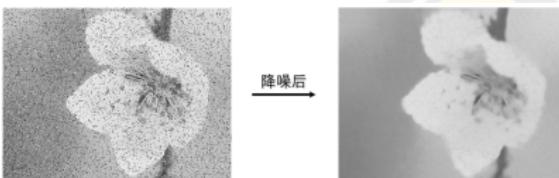


图 13: 10% 椒盐噪声

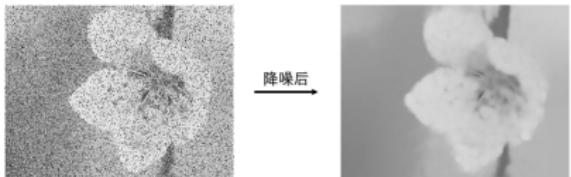


图 12: 20% 椒盐噪声

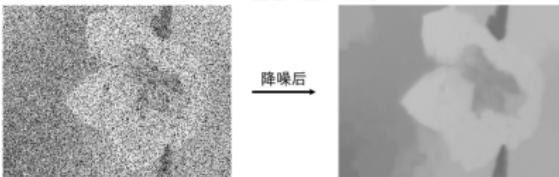


图 14: 40% 椒盐噪声

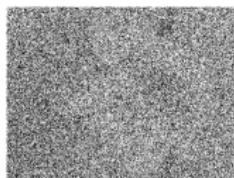
# 降噪效果展示（以权重式范数为例）



降噪后



图 15: 10% 椒盐 + 方差为 0.1 的零均值高斯噪声



降噪后

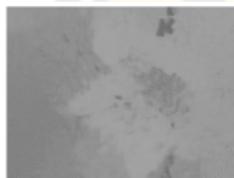


图 16: 10% 椒盐 + 方差为 1 的零均值高斯噪声



降噪后



图 17: 20% 椒盐 + 方差为 1 的零均值高斯噪声



# 不同降噪方法的降噪效果

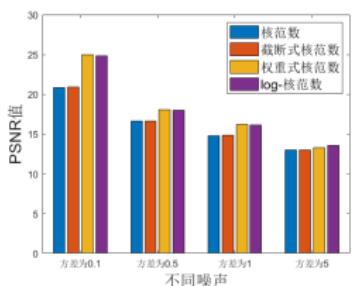


图 18: 不同方差的零均值高斯噪声

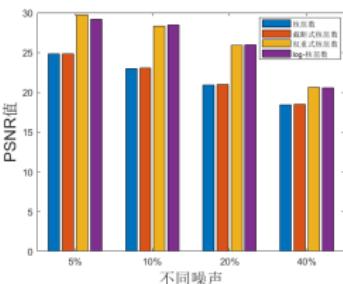


图 19: 不同程度的椒盐噪声

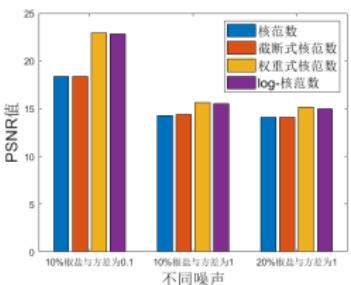


图 20: 不同的混合噪声

# 不同降噪方法的降噪效果



图 21: Urban 数据集中一幅高光谱图像的第 103 个通道

(数据来源: <http://www.tec.army.mil/hypercube>)

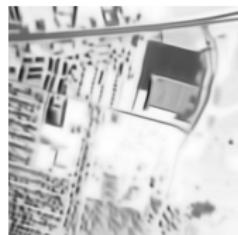


图 22: 对图21运用核范数降噪



图 24: 对图21运用截断式核范数降噪



图 23: 对图21运用权重式核范数降噪



图 25: 对图21运用 $\log$ -核范数降噪

# 目录

引言

研究路线

实验

总结

Q&A

# 目录

引言

研究路线

实验

总结

Q&A

感谢评委老师们的聆听！