# 高光谱图像的非凸低秩表示
## 在图像降噪方面的使用

学生姓名：陈安皓
指导教师：贾育衡

东南大学 吴健雄学院

2021 年 6 月 8 日

# 目录

东南大學 SOUTHEAST UNIVERSITY

# 目录

# 背景知识

## 高光谱图像及其成像原理

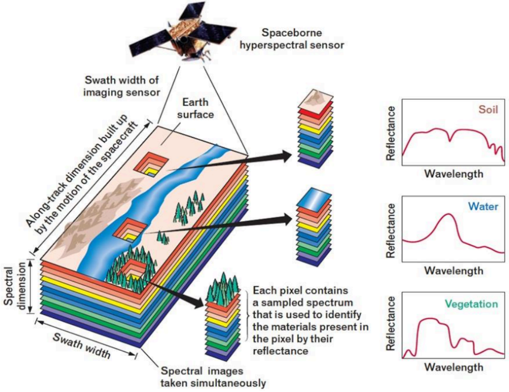



图 1: 高光谱图像的成像原理[1]

[1]图片来源：semanticscholar.org

# 背景知识

## 高光谱图像的特征

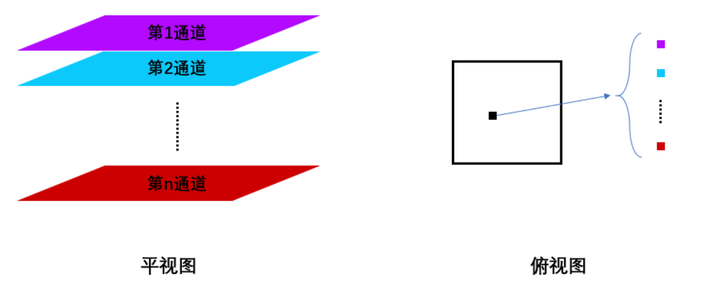



图 2: 高光谱图像的特征

## 高光谱图像的部分应用领域

- 农业
- 军事
- 环境
- 地学

# 目录

# 问题建模

假设一幅一维图像 $Y$ 受到噪声的污染，即：

$$Y = X + N$$

式中，
$X$ 代表未受到污染的、干净的图像，大小为 $m \times n$；
$N$ 代表噪声，大小为 $m \times n$；
$Y$ 代表成像设备获取到的图像，即受到污染的图像，大小为 $m \times n$。

那么，图像降噪的工作就是将 $Y$ 复原为 $X$。

# 问题建模

## 自然图像的低秩性

图 3: 一张自然图像

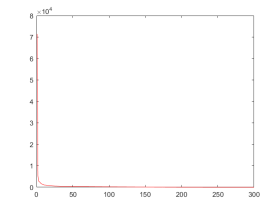



图 4: 图3的奇异值分布图

基于低秩假设的图像降噪方法可以被形式化为

$$\arg\min_{X} \quad rank(X)$$

# 问题建模

在对图像进行降噪处理时，既需要去除图像里的噪声，同时也需要尽可能地保留原来的信息。因此，实际上，需要求解的最优化问题是

$$\underset{X}{arg\min} \quad \|Y - X\|_F^2 + \lambda \cdot rank(X) \tag{1}$$

式中，
$X$ 代表未受到污染的、干净的图像，大小为 $m \times n$；
$N$ 代表噪声，大小为 $m \times n$；
$Y$ 代表成像设备获取到的图像，即受到污染的图像，大小为 $m \times n$；
$\|*\|_F$ 表示 $Frobenius$ 范数；
$\lambda$ 是正则化参数。

# 用（普通）核范数替代秩函数

然而，式1

$$\arg\min_{X} \quad \|Y - X\|_F^2 + \lambda \cdot rank(X)$$

是一个 NP-hard 问题。

通常使用秩函数的凸近似，也就是核范数，作为式1中秩函数的替代:

$$\arg\min_{X} \quad \|Y - X\|_F^2 + \lambda \cdot \|X\|_* \tag{2}$$

式中，

$\|*\|_*$ 表示核范数。

$\|X\|_* = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(X)$，$\sigma_i(X)$ 表示矩阵 $X$ 的第 $i$ 个奇异值。

# 用截断式核范数替代秩函数

式1

$$\arg\min_{X} \quad \|Y - X\|_F^2 + \lambda \cdot rank(X)$$

更新为

$$\arg\min_{X} \quad \|Y - X\|_F^2 + \lambda \cdot \|X\|_{tr,*} \tag{3}$$

式中，
$\|*\|_{tr,*}$ 表示截断式核范数。

$$\|X\|_{tr,*} = \sum_{i=r+1}^{n} \sigma_i(X)$$

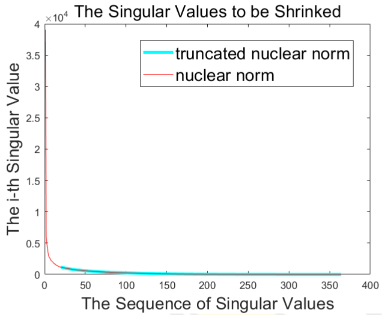



图 5: 截断式核范数的几何意义（取 $r = 19$）

# 用权重式核范数替代秩函数

式1

$$\arg\min_{X} \quad \| Y - X\|_F^2 + \lambda \cdot rank(X)$$

更新为

$$\arg\min_{X} \quad \| Y - X\|_F^2 + \lambda \cdot \|X\|_{w,*} \tag{4}$$

式中，

$\|*\|_{w,*}$ 表示权重式核范数。

$\|X\|_{w,*} = \sum_{i=1}^{n} w_i \sigma_i(X)$

# 用 $log$-核范数替代秩函数

式1

$$\arg\min_{X} \quad \|Y - X\|_F^2 + \lambda \cdot rank(X)$$

更新为

$$\arg\min_{X} \quad \|Y - X\|_F^2 + \lambda \cdot \|X\|_{log,*} \quad (5)$$

式中，

$\|*\|_{log,*}$ 表示 $log$-核范数。

$$\|X\|_{log,*} = \sum_{i=1}^{n} log(\sigma_i(X) + 1)$$

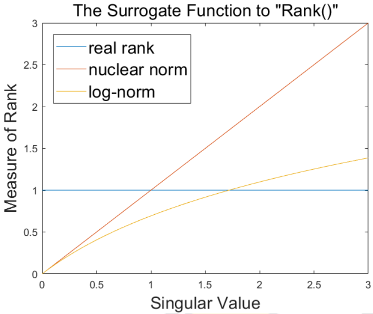



图 6: $log$-核范数的几何意义

# 秩函数的其他放缩

表 1: 秩函数的不同放缩（部分）

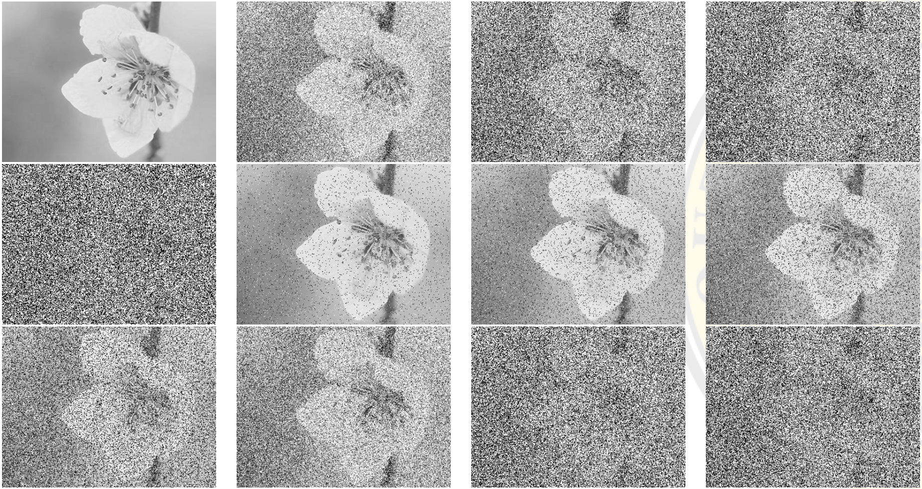
| 名称 | 表达式 |
|---|---|
| 核范数 | $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i$ |
| 截断式核范数 | $\sum_{i=r+1}^{n} \sigma_i$ |
| 权重式核范数 | $\sum_{i=1}^{n} w_i \sigma_i$ |
| 阀值式核范数 | $\sum_{i=r+1}^{n} min(\sigma_i, \theta)$ |
| $log$-核范数 | $\sum_{i=1}^{n} log(\sigma_i + 1)$ |
| $\gamma$-核范数 | $\sum_{i=1}^{n} \frac{(1+\gamma)\sigma_i}{\gamma + \sigma_i}$ |
| 格曼 | $\sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i}{\sigma_i + \gamma}$ |

表1列举了秩函数的几种替代（surrogate），或称放缩（relaxation）。它们可以被统一成：

$$rank(X) \approx \sum_{i=1}^{n} f(\sigma_i(X))$$

# 目录

# 实验数据



# 降噪效果展示（以权重式范数为例）

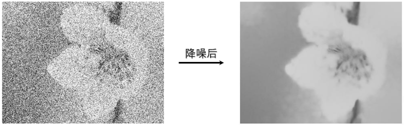



图 7: 方差为 0.1 的零均值高斯噪声

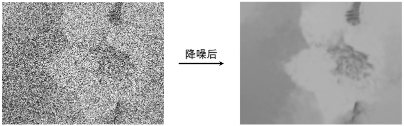



图 9: 方差为 0.5 的零均值高斯噪声

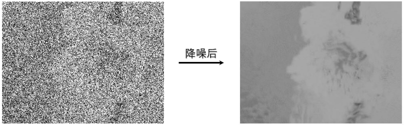



图 8: 方差为 1 的零均值高斯噪声

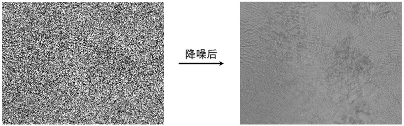



图 10: 方差为 5 的零均值高斯噪声

# 降噪效果展示（以权重式范数为例）

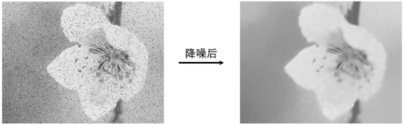



图 11: 5% 椒盐噪声

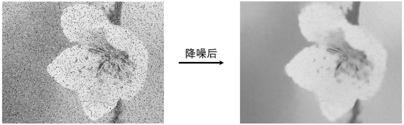



图 13: 10% 椒盐噪声

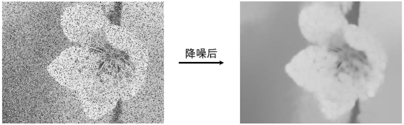



图 12: 20% 椒盐噪声

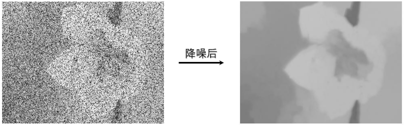



图 14: 40% 椒盐噪声

# 降噪效果展示（以权重式范数为例）

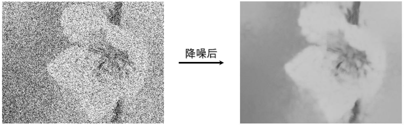



图 15: 10% 椒盐 + 方差为 0.1 的零均值高斯噪声

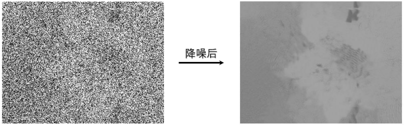



图 16: 10% 椒盐 + 方差为 1 的零均值高斯噪声

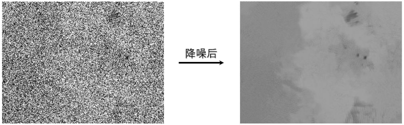



图 17: 20% 椒盐 + 方差为 1 的零均值高斯噪声

# 不同降噪方法的降噪效果

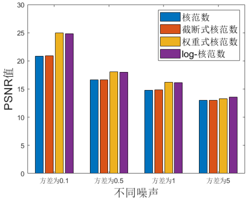



图 18: 不同方差的零均值高斯噪声

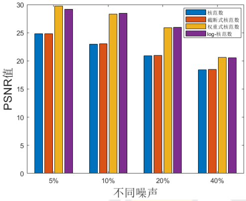



图 19: 不同程度的椒盐噪声

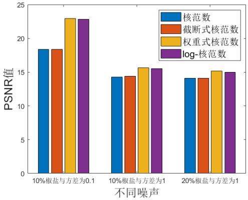



图 20: 不同的混合噪声

# 不同降噪方法的降噪效果

图 21: Urban 数据集中一幅高光谱图像的第 103 个通道

（数据来源：`http://www.tec.army.mil/hypercube`）

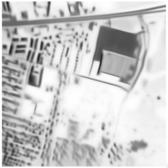


图 22: 对图21运用核范数降噪

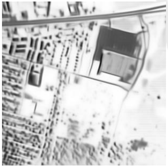


图 23: 对图21运用权重式核范数降噪

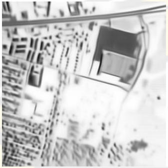


图 24: 对图21运用截断式核范数降噪

图 25: 对图21运用 $log$-核范数降噪

# 目录

# 目录

# 感谢评委老师们的聆听！